

# ALGÈBRE, COMBINATOIRE ET GÉOMÉTRIE À TRAVERS LA GRASSMANNIENNE

PIERRE-GUY PLAMONDON

RÉSUMÉ. Ces notes sont issues d'un mini-cours donné lors du *Master class Algèbre, Représentations, Topologie* à Strasbourg en 2024.

## TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	1
1. Notes de cours : Algèbre, combinatoire et géométrie à travers la grassmannienne	2
La combinatoire du cas $k = 2$	4
Quelques commentaires finaux	16
2. Exercice : Points de la grassmannienne et coordonnées de Plücker	16
2.1. Représenter un sous-espace par une matrice	16
2.2. Mineurs et coordonnées de Plücker	17
2.3. Algèbre extérieure	17
2.4. Relations de Plücker	17
3. Exercice : Triangulations et nombres de Catalan	18
3.1. Premières vérifications	18
3.2. Une relation de récurrence pour les triangulations	18
3.3. Série génératrice	19
3.4. Pour aller plus loin : l'omniprésence des nombres de Catalan	19
Références	19

Mon objectif dans ce cours est d'utiliser un objet mathématique, la grassmannienne, comme excuse pour survoler quelques idées et résultats algébriques, combinatoires et géométriques. Les prérequis pour le cours se limitent à une bonne compréhension de l'algèbre linéaire et une connaissance de la topologie de  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$ . Une familiarité avec l'espace projectif  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  peut aider à comprendre la partie géométrique, mais n'est pas strictement nécessaire. Dans ces notes, j'ai essayé de garder le ton et le style du cours. Les deux exercices des sections 2 et 3 ont fait l'objet d'une séance de travaux dirigés.

## REMERCIEMENTS

Ces notes représentent une version étendue d'un cours de quatre heures que j'ai donné au *Master class Algèbre, Représentations, Topologie* à l'IRMA les 29 et 30 avril 2024, devant un public d'étudiantes et d'étudiants de M1. J'aimerais remercier les organisateurs et organisatrices de l'événement, et en particulier Pierre Baumann, Léa Bittmann et Frédéric Chapoton.

---

*Date:* 2 juillet 2025.

1. NOTES DE COURS : ALGÈBRE, COMBINATOIRE ET GÉOMÉTRIE À TRAVERS LA GRASSMANNIENNE

Fixons un corps  $K$  (parfois, on fixera même  $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$ ). Fixons un entier  $n \geq 1$ , et considérons le  $K$ -espace vectoriel  $K^n$ .

Fixons maintenant un entier  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ . L'objet principal de ces notes est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension  $k$  de  $K^n$ .

**Définition 1.1.** La *grassmannienne*  $\text{Gr}_{k,n}(K)$  est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension  $k$  de  $K^n$ .

Nos objectifs dans ce cours sont les suivants :

- Donner une structure géométrique à la grassmannienne  $\text{Gr}_{k,n}(K)$ , surtout dans le cas où  $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$ .
- Désigner les éléments de  $\text{Gr}_{k,n}(K)$  grâce à un système de coordonnées.
- Comprendre le cas  $k = 2$  combinatoirement.

**Exemple 1.2** ( $k = 0$ ). Comme  $K^n$  ne contient qu'un seul sous-espace vectoriel de dimension 0, la grassmannienne  $\text{Gr}_{0,n}(K)$  ne contient qu'un seul élément.

**Exemple 1.3** ( $k = 1$ ). La grassmannienne  $\text{Gr}_{1,n}(K)$  est l'ensemble des sous-espaces de dimension 1 de  $K^n$ . On appelle ces sous-espaces de dimension 1 des *droites* de  $K^n$ . Il est plus commun de désigner l'ensemble des droites dans  $K^n$  par le nom *espace projectif* et de le noter  $\mathbb{P}^{n-1}(K)$ .

Comment désigner les points de  $\mathbb{P}^{n-1}(K)$ ? On utilise les constats suivants.

- Tout  $W \in \mathbb{P}^{n-1}(K)$  est engendré par un vecteur non nul  $w \in K^n$ , ce qu'on note  $W = \text{Vect}(w)$ .
- Tout vecteur non nul  $w \in K^n$  engendre un point  $\text{Vect}(w)$  de  $\mathbb{P}^{n-1}(K)$ .
- Deux vecteurs non nuls  $w, w' \in K^n$  engendrent la même droite si et seulement s'il existe un scalaire non nul  $\lambda \in K^*$  tel que  $w' = \lambda w$ .

Ainsi, si  $W \in \mathbb{P}^{n-1}(K)$  avec  $W = \text{Vect}(w)$ , alors  $W$  est entièrement déterminé par les coordonnées de  $w$  dans  $K^n$  à *multiplication par un scalaire non nul près*. Si  $w = (w_1, \dots, w_n)$ , alors on écrit  $[w] = [w_1 : \dots : w_n]$  pour désigner les coordonnées de  $w$  à multiplication par un scalaire non nul près, et on appelle  $[w]$  les *coordonnées homogènes* de  $W$ .

Par exemple, pour  $n = 2$ , on a  $[2 : 3] = [1 : \frac{3}{2}] = [\frac{2}{3} : 1]$ , et pour tout  $a \in K^*$ , on a  $[0 : a] = [0 : 1]$ .

Ainsi, en tant qu'ensemble, on peut décrire  $\mathbb{P}^{n-1}(K)$  comme un quotient de l'ensemble des points non nuls de  $K^n$  par l'action de  $K^*$  par multiplication :

$$\mathbb{P}^{n-1}(K) = (K^n \setminus \{0\})/K^*.$$

Si  $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$ , cette description de  $\mathbb{P}^{n-1}(K)$  lui confère une topologie (la topologie quotient).

**Exercice 1.4.** Muni de la topologie décrite ci-dessus, l'espace projectif  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  est homéomorphe à un cercle.

Si  $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$ , on peut aussi voir  $\mathbb{P}^{n-1}(K)$  comme une variété topologique, et même une variété différentielle, en lui donnant un atlas. Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , soit  $\mathcal{U}_i$  le sous-ensemble de  $\mathbb{P}^{n-1}(K)$  formé des points dont les coordonnées homogènes  $[a_1 : \dots : a_n]$  sont telles que  $a_i \neq 0$ . Alors  $\mathcal{U}_i$  est un ouvert de  $\mathbb{P}^{n-1}(K)$  et les  $\mathcal{U}_i$  recouvrent  $\mathbb{P}^{n-1}(K)$ . De plus,

l'application

$$\begin{aligned} \phi_i : K^{n-1} &\longrightarrow U_i \\ (x_1, \dots, x_{n-1}) &\longmapsto [x_1 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_i : \dots : x_{n-1}] \end{aligned}$$

est un homéomorphisme. Ces données forment un atlas qui fait de  $\mathbb{P}^{n-1}(K)$  une variété différentielle.

Revenons maintenant au cas général d'une grassmannienne  $\text{Gr}_{k,n}(K)$ . Les constats que nous avons faits pour les points de  $\mathbb{P}^{n-1}(K)$  peuvent être généralisés.

- Tout  $W \in \text{Gr}_{k,n}(K)$  est engendré par une base  $(w_1, \dots, w_k)$ , ce qu'on note  $W = \text{Vect}(w_1, \dots, w_k)$ .
- Réciproquement, toute famille libre  $(w_1, \dots, w_k)$  engendre un point  $\text{Vect}(w_1, \dots, w_k)$  de  $\text{Gr}_{k,n}(K)$ .
- Deux familles libres  $(w_1, \dots, w_k)$  et  $(w'_1, \dots, w'_k)$  engendrent le même sous-espace vectoriel  $W$  si et seulement s'il existe une matrice inversible  $G \in \text{GL}_k(K)$  telle que, si chaque  $w_i$  et  $w'_i$  est écrit sous la forme de vecteur ligne, alors on a l'égalité

$$G \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w'_1 \\ \vdots \\ w'_k \end{bmatrix}.$$

Soit  $W = \text{Vect}(w_1, \dots, w_k) \in \text{Gr}_{k,n}(K)$ . Soit  $A$  la matrice  $k \times n$  dont la  $i$ -ième ligne est le vecteur ligne  $w_i$ . Alors  $A$  est une matrice  $k \times n$  dont les  $k$  lignes forment une famille libre de  $K^n$ . Soit  $\text{Mat}_{k,n}^{\text{libre}}(K)$  l'ensemble des matrices  $k \times n$  dont les lignes forment une famille libre.

Les constats ci-dessus permettent de définir une application

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Mat}_{k,n}^{\text{libre}}(K) &\longrightarrow \text{Gr}_{k,n}(K) \\ A = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k \end{bmatrix} &\longmapsto \text{Vect}(w_1, \dots, w_k). \end{aligned}$$

Cette application satisfait à plusieurs propriétés :

- Elle est surjective.
- Elle est  $\text{GL}_k(K)$ -invariante : si  $A \in \text{Mat}_{k,n}^{\text{libre}}(K)$  et  $G \in \text{GL}_k(K)$ , alors  $\Phi(GA) = \Phi(A)$ .
- La pré-image d'un point  $W \in \text{Gr}_{k,n}(K)$  est constituée d'une unique  $\text{GL}_k(K)$ -orbite.
- L'action de  $\text{GL}_k(K)$  sur  $\text{Mat}_{k,n}^{\text{libre}}(K)$  est libre :  $GA = GA'$  si et seulement si  $G = G'$ .

Les propriétés ci-dessus nous permettent d'interpréter  $\text{Gr}_{k,n}(K)$  comme un quotient de  $\text{Mat}_{k,n}^{\text{libre}}(K)$  par une action à gauche d'un groupe :

$$\text{Gr}_{k,n}(K) = \text{GL}_k(K) \backslash \text{Mat}_{k,n}^{\text{libre}}(K).$$

Dans le cas où  $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$ , ceci permet de munir  $\text{Gr}_{k,n}(K)$  de la topologie quotient.

Afin de pouvoir se donner un système de coordonnées pour désigner les points de  $\text{Gr}_{k,n}(K)$ , il nous faut d'abord parler de mineurs.

**Définition 1.5.** Soit  $A$  une matrice  $k \times n$ . Un *mineur*  $k \times k$  de  $A$  est le déterminant d'une sous-matrice obtenue en ne conservant que  $k$  colonnes de  $A$ .

Si  $I \subset \{1, \dots, n\}$  a pour cardinalité  $k$ , alors on désigne par  $\Delta_I(A)$  le mineur associé à la sous-matrice de  $A$  dont les colonnes ont leur indice dans  $I$ .

Pour simplifier les notations plus tard, on désigne par  $\binom{[n]}{k}$  l'ensemble des sous-ensembles de cardinalité  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$ .

**Exemple 1.6.** Si  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ , alors  $\Delta_{\{1,2\}}(A) = -3$ ,  $\Delta_{\{1,3\}}(A) = -6$  et  $\Delta_{\{2,3\}}(A) = -3$ .

Notons que si  $A \in \text{Mat}_{k,n}(K)$  et  $G \in \text{GL}_k(K)$ , alors  $\Delta_I(GA) = \det(G)\Delta_I(A)$  pour tout  $I \in \binom{[n]}{k}$ . Par conséquent, si  $A, A' \in \text{Mat}_{k,n}^{\text{libre}}(K)$  sont telles que  $\Phi(A) = \Phi(A')$ , alors il existe  $\lambda \in K^*$  tel que  $\Delta_I(A) = \Delta_I(A')$  pour tout  $I \in \binom{[n]}{k}$ . Autrement dit, on a une égalité de vecteurs  $(\Delta_I(A))_{I \in \binom{[n]}{k}} = \lambda(\Delta_I(A'))_{I \in \binom{[n]}{k}}$ .

De plus,  $A \in \text{Mat}_{k,n}^{\text{libre}}(K)$  si et seulement si au moins un de ses mineurs  $k \times k$  est non nul.

Tout ceci nous permet d'utiliser les  $\Delta_I(A)$  (à multiplication par un scalaire près) pour définir des coordonnées pour les points de  $\text{Gr}_{k,n}(K)$ , appelées *coordonnées de Plücker*.

**Définition 1.7.** Soit  $W \in \text{Gr}_{k,n}(K)$ . Soit  $A \in \text{Mat}_{k,n}^{\text{libre}}(K)$  telle que  $\Phi(A) = W$ . Alors les *coordonnées de Plücker* de  $W$  sont données par

$$\Delta(W) := [\Delta_I(A)]_{I \in \binom{[n]}{k}} \in \mathbb{P}^{\binom{[n]}{k}-1}(K).$$

Autrement dit, pour trouver les coordonnées de Plücker de  $W$ , on trouve d'abord une base de  $W$ , on forme la matrice  $A$  dont les lignes sont les vecteurs de cette base, puis on considère les  $\Delta_I(A)$  à multiplication par un scalaire près. C'est cette dernière étape qui fait de  $\Delta(W)$  un point de  $\mathbb{P}^{\binom{[n]}{k}-1}(K)$  et non de  $K^{\binom{[n]}{k}}$ . De plus, les propriétés des mineurs énumérées plus haut montrent que  $\Delta(W)$  ne dépend pas du choix de la base, et donc de  $A$ .

On peut montrer que deux points différents de  $\text{Gr}_{k,n}(K)$  ont des coordonnées de Plücker différentes (voir l'exercice de la section 2). Par conséquent, **les coordonnées de Plücker permettent de désigner et distinguer les points de  $\text{Gr}_{k,n}(K)$ .**

**Définition 1.8.** Le *plongement de Plücker* est l'injection

$$\begin{aligned} \text{Gr}_{k,n}(K) &\longrightarrow \mathbb{P}^{\binom{[n]}{k}-1} \\ W &\longmapsto \Delta(W). \end{aligned}$$

Le plongement de Plücker permet d'identifier  $\text{Gr}_{k,n}(K)$  à un sous-ensemble d'un espace projectif. Si  $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$ , ceci permet de munir  $\text{Gr}_{k,n}(K)$  de la restriction de la topologie de cet espace projectif.

**Exercice 1.9.** Si  $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$ , comparer la topologie de  $\text{Gr}_{k,n}(K)$  héritée de  $\mathbb{P}^{\binom{[n]}{k}-1}$  et la topologie quotient de  $\text{Gr}_{k,n}(K) = \text{GL}_k(K) \backslash \text{Mat}_{k,n}^{\text{libre}}(K)$ .

**La combinatoire du cas  $k = 2$ .** Soit  $W \in \text{Gr}_{2,n}(K)$ . Se donner une base de  $W$  revient à se donner une matrice  $A \in \text{Mat}_{2,n}^{\text{libre}}(K)$ . Écrivons

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}.$$

Les coordonnées de Plücker de  $W$  sont données par les mineurs  $2 \times 2$  de  $A$  :

$$\Delta_{i,j}(A) = \det \begin{bmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{bmatrix}.$$

On peut voir les  $\Delta_{i,j}$  comme des fonctions

$$\Delta_{i,j} : \text{Mat}_{2,n}(K) \longrightarrow K.$$

Ces fonctions sont invariantes sous l'action à gauche de  $\text{SL}_2(K)$ . Elles sont aussi polynomiales en les coefficients de la matrice  $A$ . On désigne par  $K[\text{Mat}_{2,n}(K)]$  l'anneau des fonctions polynomiales en les coefficients des matrices  $A \in \text{Mat}_{2,n}(K)$ ; cet anneau est isomorphe à l'anneau des polynômes  $K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ , où un polynôme  $p(x_1, \dots, y_n)$  correspond à la fonction

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{2,n}(K) &\longrightarrow K \\ A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} &\longmapsto p(a_1, \dots, b_n). \end{aligned}$$

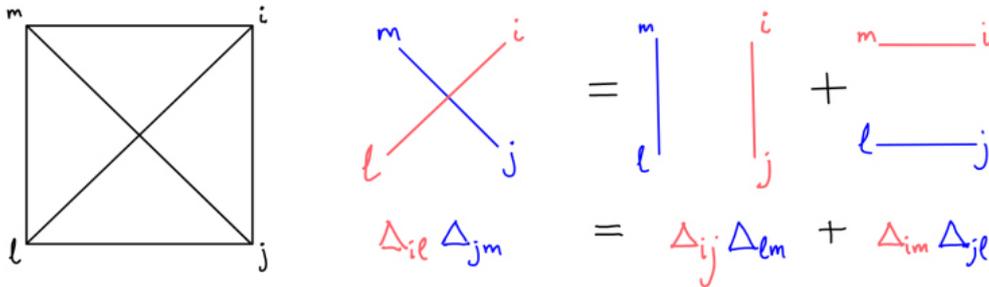
Enfin, soit  $K[\text{Mat}_{2,n}(K)]^{\text{SL}_2(K)}$  le sous-anneau des fonction  $\text{SL}_2(K)$ -invariantes. D'après ce qui précède, toutes les fonctions  $\Delta_{i,j}$  sont dans cet anneau<sup>1</sup>.

Les fonctions  $\Delta_{i,j}$  obéissent aux *relations de Plücker*.

**Proposition 1.10.** *Si  $1 \leq i < j < \ell < m \leq n$ , alors*

$$\Delta_{i,\ell}\Delta_{j,m} = \Delta_{i,j}\Delta_{\ell,m} + \Delta_{i,m}\Delta_{j,\ell}.$$

On représente ceci à l'aide d'un carré avec ses deux diagonales :

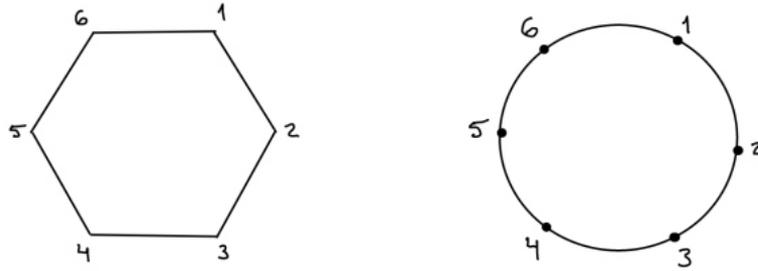


**Exemple 1.11.** Si on connaît  $\Delta_{1,2}, \Delta_{1,3}, \Delta_{1,4}, \Delta_{2,3}$  et  $\Delta_{3,4}$ , alors on peut en déduire  $\Delta_{2,4}$ .

**Question 1.12.** En général, quels mineurs suffit-il de connaître pour en déduire tous les autres ?

Dans la suite, nous allons représenter les  $\Delta_{i,j}$  comme des diagonales dans un  $n$ -gone. Quand on dira  $n$ -gone, on voudra dire quelque chose d'homéomorphe à un  $n$ -gone dans le plan. Notre choix préféré sera de représenter un  $n$ -gone come un disque avec  $n$  points au bord, numérotés de 1 en  $n$  dans le sens horaire.

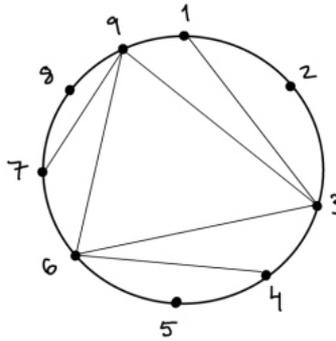
1. On peut montrer que l'anneau des fonctions  $\text{SL}_2(K)$ -invariantes est en fait engendré par les  $\Delta_{i,j}$ . Pour  $K = \mathbb{C}$ , cela est fait dans [7, Appendix F], par exemple.



Le mineur  $\Delta_{i,j}$  sera représenté par la diagonale  $[i, j]$  reliant les sommets  $i$  et  $j$  dans le  $n$ -gone. Dans le cas où  $i$  et  $j$  sont adjacents, on appelle  $[i, j]$  un *segment de bord*.

**Définition 1.13.** Une *triangulation* d'un  $n$ -gone est un ensemble  $\Delta$  de diagonales ne se croisant pas (sauf peut-être en les sommets du  $n$ -gone) et découpant le  $n$ -gone en triangles.

**Exemple 1.14.** Voici une triangulation d'un 9-gone.



Voici quelques propriétés des triangulations d'un  $n$ -gone.

- Toute triangulation d'un  $n$ -gone comporte exactement  $n-3$  diagonales. (La démonstration est facile et peut se faire par récurrence sur  $n$ .)
- Un  $n$ -gone admet exactement  $C_{n-2} := \frac{1}{n-1} \binom{2(n-2)}{n-2}$  triangulations distinctes. (Pour la démonstration, voir l'exercice de la section 3 plus bas.)

Les triangulations d'un  $n$ -gone nous permettent de formuler une réponse à la question 1.12.

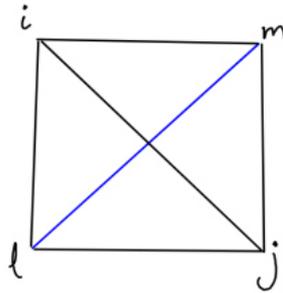
**Théorème 1.15.** Soit  $\Delta$  une triangulation du  $n$ -gone. Alors tout mineur  $\Delta_{\ell,m}$  est une fonction rationnelle en les  $\Delta_{i,j}$ , où  $[i, j]$  est soit dans  $\Delta$ , soit un segment de bord. Autrement dit,

$$\Delta_{\ell,m} \in \mathbb{Q}(\Delta_{i,j} \mid [i, j] \in \Delta \text{ ou segment de bord}).$$

*Démonstration.* La démonstration se fait par récurrence sur le nombre de fois où  $[\ell, m]$  croise les diagonales de la triangulation  $\Delta$  ailleurs qu'aux sommets. Par convention, on dit qu'une diagonale ne se croise pas elle-même.

*Cas où  $[\ell, m]$  ne croise aucune diagonale de  $\Delta$ .* Dans ce cas  $[\ell, m]$  fait partie de  $\Delta$ , ou  $i$  et  $j$  sont adjacents (modulo  $n$ ). Dans ce cas, le théorème est trivialement vrai.

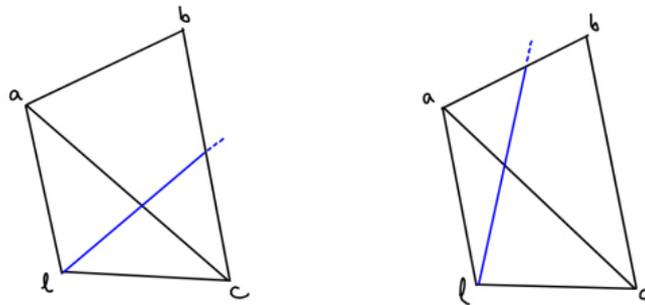
*Cas où  $[\ell, m]$  croise exactement une diagonale de  $\Delta$ .* Soit  $[i, j]$  la diagonale croisée par  $[\ell, m]$ . Alors  $[i, j]$  fait partie d'exactly deux triangles découpés par  $\Delta$  (comme toute diagonale de  $\Delta$ ), et la situation est la suivante.



Par la relation de Plücker, si  $i < \ell < j < m$ , on a alors que  $\Delta_{\ell,m} = \frac{\Delta_{i,\ell}\Delta_{j,m} + \Delta_{\ell,j}\Delta_{i,m}}{\Delta_{i,j}}$ , ce qui démontre le théorème.

Supposons que le résultat est démontré pour toute diagonale qui croise celles de  $\Delta$  au plus  $d$  fois, pour un certain  $d \geq 1$ . Supposons que  $[\ell, m]$  croise  $d + 1$  fois les diagonales de  $\Delta$ .

Parcourons  $[\ell, m]$  en partant de  $\ell$  et considérons les deux premières diagonales de  $\Delta$  croisées par  $[\ell, m]$ . Il y a deux situations possibles (qui sont image miroir l'une de l'autre) :



Soit  $\Delta'$  l'ensemble des diagonales obtenu à partir de  $\Delta$  en retirant la diagonale  $[a, c]$  et en la remplaçant par  $[\ell, b]$ . Alors

- $\Delta'$  est une triangulation du  $n$ -gone, et
- $[\ell, m]$  croise  $\Delta'$  exactement  $d$  fois.

Par l'hypothèse de récurrence,  $\Delta_{\ell,m}$  est une fonction rationnelle en les  $\Delta_{i,j}$ , où  $[i, j]$  est dans  $\Delta'$  ou est un segment de bord. Enfin, toutes les diagonales de  $\Delta'$  sont dans  $\Delta$ , sauf  $[\ell, b]$ , qui croise  $\Delta$  exactement une fois. Par ce qui précède,  $\Delta_{\ell,b}$  est une fonction rationnelle en les  $\Delta_{i,j}$  avec  $[i, j]$  dans  $\Delta$  ou un segment de bord. Donc  $\Delta_{\ell,m}$  est bien une fonction rationnelle en ces mêmes fonctions.  $\square$

Ainsi, les mineurs  $\Delta_{i,j}$  sont tous des fonctions rationnelles en les mineurs associés aux diagonales d'une triangulation donnée et aux segments de bord. Cette fonction rationnelle s'exprime comme une fraction, avec un polynôme au numérateur et au dénominateur. Pour finir ces notes, nous allons utiliser la combinatoire des triangulations du  $n$ -gone pour améliorer ce résultat, en montrant que :

- le dénominateur est un monôme,
- le dénominateur ne fait pas intervenir les  $\Delta_{i,i+1}$  pour les segments de bord  $[i, i + 1]$  ( $i$  et  $i + 1$  pris modulo  $n$ ), et
- les coefficients sont tous des entiers positifs.

Le théorème suivant est une reformulation de ces propriétés.

**Théorème 1.16.** Soit  $\Delta$  une triangulation du  $n$ -gone. Alors tout mineur  $\Delta_{\ell,m}$  est tel que

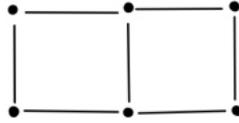
$$\Delta_{\ell,m} \in \mathbb{N}[\Delta_{1,2}, \dots, \Delta_{n-1,n}, \Delta_{1,n}, \Delta_{i,j}^{\pm} \mid [i,j] \in \Delta].$$

Le reste de ces notes est consacré à la démonstration de ce théorème. On fera mieux : on trouvera une formule explicite pour exprimer  $\Delta_{\ell,m}$  en fonction des mineurs associés aux diagonales d'une triangulation.

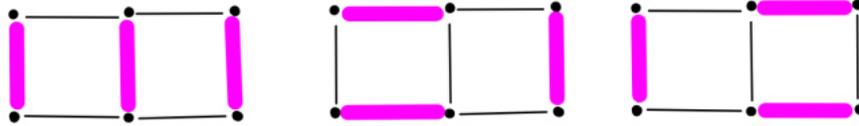
Il nous faut pour cela introduire quelques objets combinatoires.

**Définition 1.17.** Soit  $G$  un graphe. Un *couplage parfait* de  $G$  est un sous-ensemble  $P$  d'arêtes de  $G$  tel que tout sommet de  $G$  est incident à exactement une arête dans  $P$ .

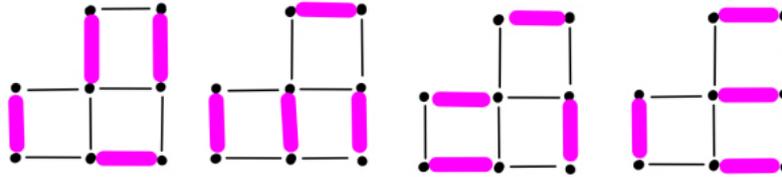
**Exemple 1.18.** Considérons le graphe suivant à 6 sommets et 7 arêtes.



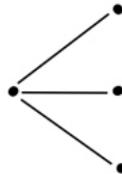
Ce graphe admet exactement 3 couplages parfaits. On les représente ci-dessous, où les arêtes épaisses et en couleur sont celles du couplage parfait.



**Exemple 1.19.** Voici les 4 couplages parfaits d'un autre graphe.



**Exemple 1.20.** Tous les graphes n'admettent pas des couplages parfaits. Une condition nécessaire est que le nombre de sommet soit pair. Cette condition n'est pas suffisante : par exemple, le graphe ci-dessous n'admet aucun couplage parfait.



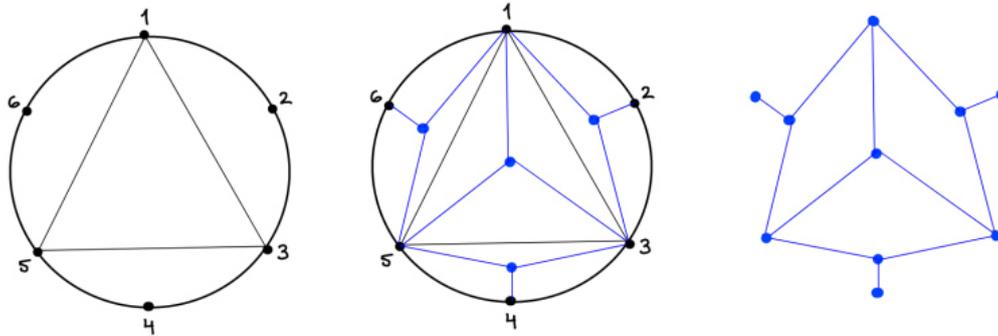
Une caractérisation des graphes qui admettent un couplage parfait est donnée par le Théorème de Tutte. Nous n'en parlerons pas dans ce cours.

**Définition 1.21.** Soit  $\Delta$  une triangulation du  $n$ -gone. Son *graphe dual*  $G_{\Delta}$  est le graphe construit ainsi :

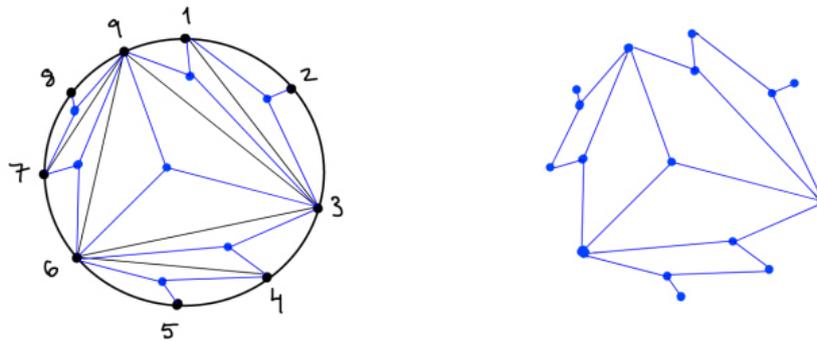
- $G_{\Delta}$  a un sommet au centre de chaque triangle de  $\Delta$  et sur chaque sommet du  $n$ -gone ;
- chaque sommet de  $G_{\Delta}$  au centre d'un triangle est relié par une arête aux trois sommets de ce triangle.

La définition de  $G_\Delta$  est mieux comprise sur des exemples.

**Exemple 1.22.** Ci-dessous, on représente à gauche une triangulation  $\Delta$  d'un 6-gone, puis au centre on lui superpose son graphe dual  $G_\Delta$ , et à droite on représente  $G_\Delta$  seul.

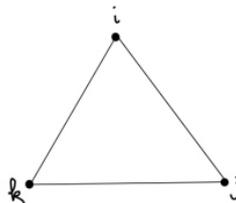


**Exemple 1.23.** On reprend la triangulation du 9-gone de l'Exemple 1.14. On représente ci-dessous à gauche son graphe dual superposé à la triangulation, puis à droite le graphe dual seul.

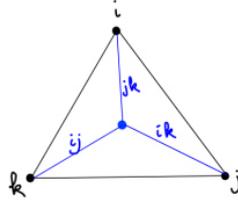


**Définition 1.24.** Soit  $\Delta$  une triangulation du  $n$ -gone et soit  $G_\Delta$  son graphe dual. On donne à chaque arête de  $G_\Delta$  une *étiquette* de la façon suivante : l'étiquette d'une arête  $a$  est le couple  $e(a) = (i, j)$  si  $[i, j]$  est la diagonale de  $\Delta$  opposée à  $a$  dans le triangle contenant  $a$  (avec  $i < j$ ).

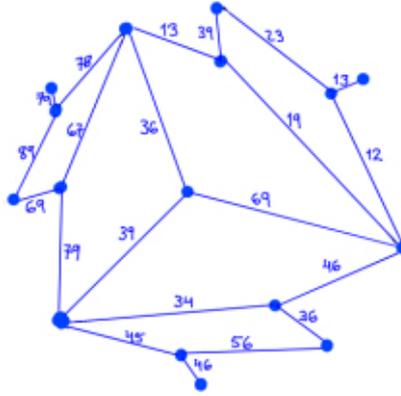
Par exemple, dans tout triangle de  $\Delta$  de sommets  $i, j, k$  comme suit :



les étiquettes des trois arêtes de  $G_\Delta$  dans ce triangle sont  $ij, ik$  et  $jk$  comme suit :



**Exemple 1.25.** On reprend la triangulation du 9-gone de l'Exemple 1.14. Les étiquettes des arêtes de son graphe dual sont illustrées ci-dessous.

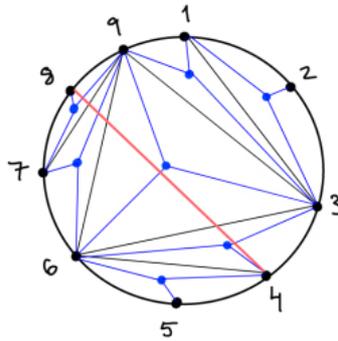


**Définition 1.26.** Soit  $\Delta$  une triangulation du  $n$ -gone et soit  $[i, j]$  une diagonale. On définit le sous-graphe  $G_{i,j}$  de  $G_\Delta$  comme suit :

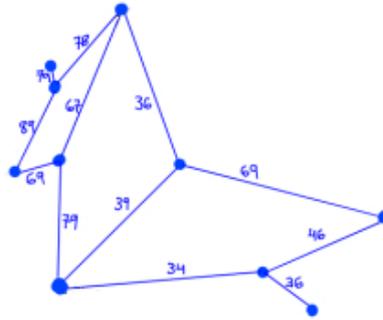
- inclure dans  $G_{i,j}$  tous les sommets et toutes les arêtes de  $G_\Delta$  qui sont dans des triangles de  $\Delta$  traversés par  $[i, j]$ , puis
- retirer les sommets  $i$  et  $j$  de  $G_{i,j}$  et les arêtes incidentes à ces sommets.

Les arêtes de  $G_{i,j}$  sont étiquetées comme dans  $G_\Delta$ .

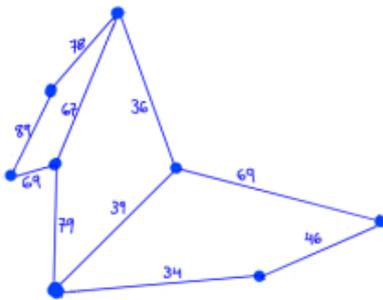
**Exemple 1.27.** Dans la triangulation du 9-gone de l'Exemple 1.14, la diagonale  $[4, 8]$  traverse les triangles 346, 369, 679 et 789.



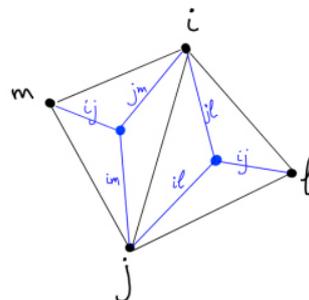
Pour construire  $G_{4,8}$ , on garde donc d'abord les arêtes de  $G_\Delta$  qui sont dans ces triangles, pour obtenir le graphe suivant.



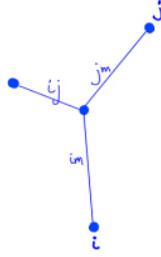
Ensuite, on efface deux sommets, qui sont par ailleurs les deux seuls sommets de valence 1 sur le graphe précédent. On obtient  $G_{4,8}$  :



**Exemple 1.28** (Cas particulier des diagonales de  $\Delta$ ). Si la diagonale  $[i, j]$  fait partie de  $\Delta$ , alors on considère qu'elle ne traverse que l'un des deux triangles de  $\Delta$  dont elle est l'un des côtés (le choix du triangle en question n'aura pas d'importance sur la suite). La situation est donc la suivante :



On décide que  $[i, j]$  traverse le triangle  $ijm$  (on aurait aussi pu choisir le triangle  $ilj$ ). En ne gardant que les arêtes dans ce triangle, on obtient :



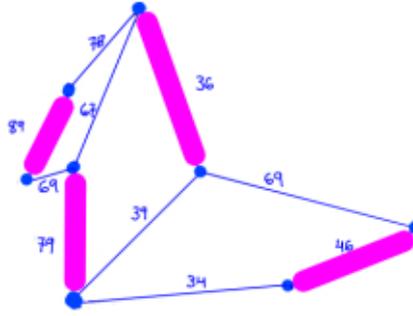
Après avoir retiré les sommets  $i$  et  $j$  et les arêtes incidentes, on obtient que  $G_{i,j}$  n'a qu'une arête et que celle-ci est étiquetée  $(i, j)$ .

À chaque couplage parfait de  $G_{i,j}$ , nous allons associer un produit de mineurs.

**Définition 1.29.** Soit  $\Delta$  une triangulation du  $n$ -gone et soit  $[i, j]$  une diagonale. Soit  $P$  un couplage parfait du graphe  $G_{i,j}$ . Le *poids* de  $P$  est défini par

$$w(P) := \prod_{a \in P} \Delta_{e(a)}.$$

**Exemple 1.30.** Nous poursuivons avec l'Exemple 1.27. Pour le couplage parfait  $P$  suivant :



son poids est  $w(P) = \Delta_{3,6} \Delta_{4,6} \Delta_{7,9} \Delta_{8,9}$ .

Avant d'énoncer le théorème final de ces notes, il nous faut introduire une dernière notation.

**Notation 1.31.** Pour deux arcs  $[i, j]$  et  $[l, m]$  d'un  $n$ -gone, on écrira  $[i, j] \perp [l, m]$  si  $[i, j]$  et  $[l, m]$  se croisent dans l'intérieur (et non au bord) du  $n$ -gone.

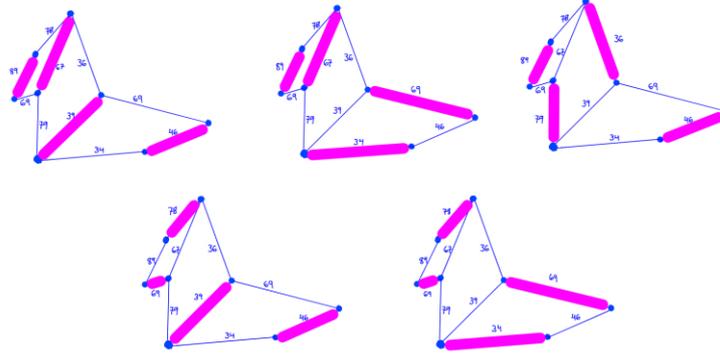
**Théorème 1.32.** Soit  $\Delta$  une triangulation du  $n$ -gone et soit  $[i, j]$  une diagonale. Alors on peut exprimer  $\Delta_{i,j}$  en fonction des mineurs associés aux diagonales de  $\Delta$  comme suit :

$$\Delta_{i,j} = \frac{1}{\prod_{[l,m] \perp [i,j]} \Delta_{l,m}} \sum_P w(P)$$

où la somme est prise sur tous les couplages parfaits  $P$  de  $G_{i,j}$ .

Notons que le Théorème 1.16 découle directement de cet énoncé. Illustrons tout de suite la formule sur un exemple.

**Exemple 1.33.** Nous poursuivons avec l'Exemple 1.27. La diagonale  $[4, 8]$  croise les diagonales  $[3, 6]$ ,  $[6, 9]$  et  $[7, 9]$  de la triangulation. De plus,  $G_{4,8}$  admet 5 couplages parfaits.



Le théorème nous dit donc que

$$\Delta_{4,8} = \frac{1}{\Delta_{3,6}\Delta_{6,9}\Delta_{7,9}} \left( \Delta_{4,6}\Delta_{3,9}\Delta_{6,7}\Delta_{8,9} + \Delta_{3,4}\Delta_{6,9}\Delta_{6,7}\Delta_{8,9} + \Delta_{4,6}\Delta_{3,6}\Delta_{7,9}\Delta_{8,9} + \Delta_{4,6}\Delta_{3,9}\Delta_{6,9}\Delta_{7,8} + \Delta_{3,4}\Delta_{6,9}^2\Delta_{7,8} \right).$$

*Démonstration.* (du Théorème 1.32.). La démonstration se fait par récurrence sur le nombre de croisements entre  $[i, j]$  et les diagonales de la triangulation  $\Delta$ .

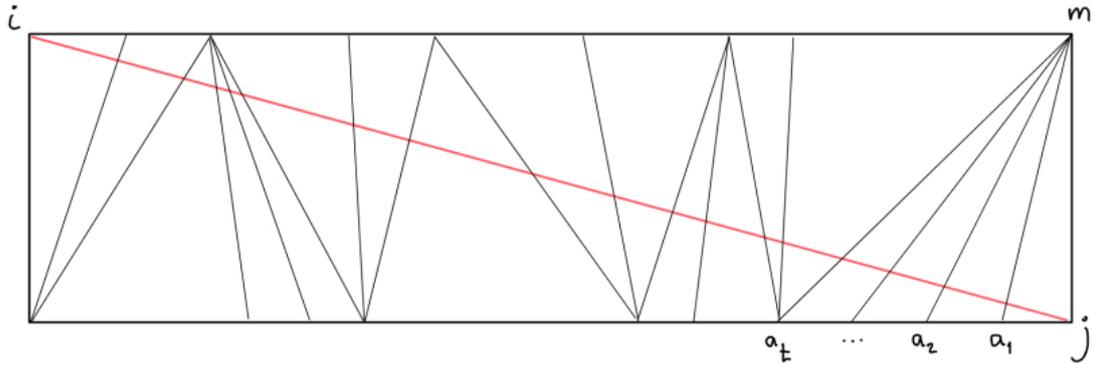
D'abord, s'il n'y a aucun croisement, alors  $[i, j]$  fait partie de la triangulation  $\Delta$ . Comme vu dans l'Exemple 1.28, le graphe  $G_{i,j}$  n'a qu'une seule arête d'étiquette  $(i, j)$ . Il n'a donc qu'un seul couplage parfait, qui est de poids  $\Delta_{i,j}$ . La formule du théorème est donc vraie dans ce cas.

Soit  $[i, j]$  une diagonale qui croise  $\Delta$  au moins une fois. Pour simplifier les notations, écrivons

$$X_{i,j} := \frac{1}{\prod_{[\ell,m] \perp [i,j]} \Delta_{\ell,m}} \sum_P w(P).$$

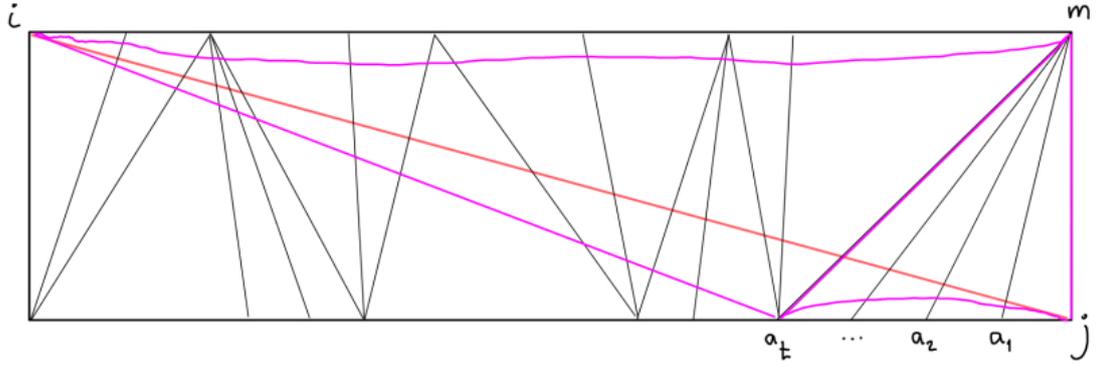
On veut donc montrer que  $\Delta_{i,j} = X_{i,j}$ .

Considérons l'ensemble des triangles de  $\Delta$  qui sont traversés par  $[i, j]$ . À homéomorphisme près, on peut représenter cet ensemble ainsi :



Nous nous intéresserons surtout à ce qui se passe du côté droit de l'image ; c'est pourquoi nous avons donné des noms à certains sommets ( $a_1$  à  $a_t$  et  $m$ ).

Premièrement, nous allons ajouter les diagonales  $[i, m]$ ,  $[a_t, i]$  et  $[j, a_t]$ .



(On doit représenter les diagonales  $[i, m]$  et  $[a_t, i]$  comme des courbes et non des segments de droites, mais à homéomorphisme près, c'est la même chose.)

Ceci permet d'appliquer la relation de Plücker aux diagonales dans le carré  $imja_t$  :

$$\Delta_{i,j} = \frac{\Delta_{j,a_t} \Delta_{i,m} + \Delta_{a_t,i} \Delta_{m,j}}{\Delta_{m,a_t}}.$$

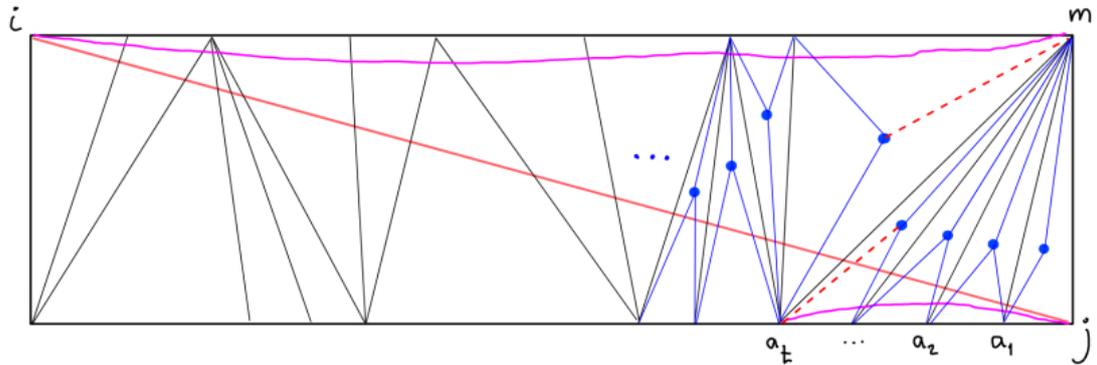
Quelques observations sur les mineurs qui apparaissent dans le terme de droite :

- $[m, j]$  et  $[m, a_t]$  font partie de la triangulation  $\Delta$  ;
- $[j, a_t]$ ,  $[i, m]$  et  $[a_t, i]$  ont chacune strictement moins d'intersections avec  $\Delta$  que  $[i, j]$ , et on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence et avoir que  $\Delta_{j,a_t} = X_{j,a_t}$ ,  $\Delta_{i,m} = X_{i,m}$  et  $\Delta_{a_t,i} = X_{a_t,i}$ .

On a donc que  $\Delta_{i,j} = \frac{X_{j,a_t} X_{i,m} + X_{a_t,i} \Delta_{m,j}}{\Delta_{m,a_t}}$ . On veut montrer que cette fonction rationnelle est égale à  $X_{i,j}$ .

Étudions d'abord le terme  $\frac{X_{j,a_t} X_{i,m}}{\Delta_{m,a_t}}$ . Pour calculer  $X_{j,a_t}$  et  $X_{i,m}$ , il faut décrire les couplages parfaits des graphes  $G_{j,a_t}$  et  $G_{i,m}$ . Une observation préalable est que l'ensemble des triangles traversés par  $[j, a_t]$  et celui de ceux traversés par  $[i, m]$  sont disjoints, et que leur union est l'ensemble des triangles traversés par  $[i, j]$ .

Représentons partiellement les graphes  $G_{j,a_t}$  et  $G_{i,m}$  (nous n'avons besoin que de la partie à droite sur l'image).



Notons que  $G_{j,a_t}$  et  $G_{i,m}$  sont disjoints. De plus, si on ajoute les deux arêtes en pointillé (en rouge), on obtient  $G_{i,j}$ . On en déduit qu'un choix de couplage parfait de  $G_{j,a_t}$  et d'un autre

de  $G_{i,m}$  est équivalent à un choix de couplage parfait de  $G_{i,j}$  ne contenant pas les deux arêtes en pointillé.

De plus, l'ensemble des diagonales de  $\Delta$  croisées par  $[j, a_t]$  et celui de celles croisées par  $[i, m]$  sont aussi disjoints, et leur union est l'ensemble des diagonales croisées par  $[i, j]$  à l'exception de  $[m, a_t]$ . De ces observations, on déduit que

$$\frac{X_{j,a_t} X_{i,m}}{\Delta_{m,a_t}} = \frac{1}{\prod_{[\ell,m] \perp [i,j]} \Delta_{\ell,m}} \sum_P w(P),$$

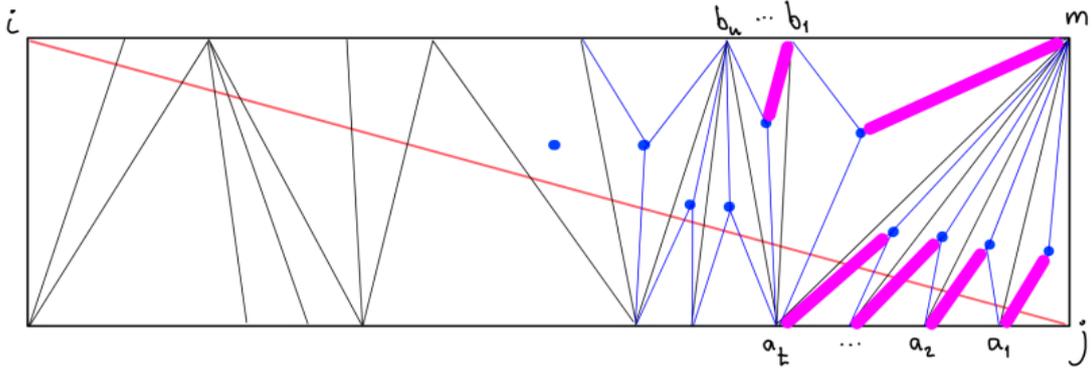
où la somme est prise sur l'ensemble des couplages parfaits  $P$  de  $G_{i,j}$  ne contenant pas les deux arêtes en pointillé.

Étudions maintenant le terme  $\frac{X_{a_t,i} \Delta_{m,j}}{\Delta_{m,a_t}}$ . Nous allons montrer que ce terme est égal à

$$\frac{1}{\prod_{[\ell,m] \perp [i,j]} \Delta_{\ell,m}} \sum_P w(P), \quad (*)$$

où la somme est prise cette fois sur l'ensemble des couplages parfaits  $P$  de  $G_{i,j}$  qui contiennent l'une des deux arêtes en pointillé.

Pour montrer cela, il faut observer que si un couplage parfait de  $G_{i,j}$  contient l'une des deux arêtes en pointillé, alors il contient l'autre arête en pointillé, ainsi que toutes les arêtes en gras ci-dessous.



Le produit des mineurs associés aux étiquettes de ces arêtes est

$$\Delta_{m,j} \Delta_{m,a_1} \cdots \Delta_{m,a_{t-1}} \Delta_{b_1,a_t} \cdots \Delta_{b_u,a_t}.$$

De plus, compléter ce choix d'arêtes en un couplage parfait de  $G_{i,j}$  est équivalent à choisir un couplage parfait de  $G_{i,a_t}$ .

Enfin, les diagonales de  $\Delta$  croisées par  $[i, a_t]$  sont celles croisées par  $[i, j]$ , excepté

$$[b_1, a_t], \dots, [b_u, a_t], [m, a_1], \dots, [m, a_t].$$

En utilisant toutes ces observations, on montre que l'équation (\*) est égale à

$$\left( \frac{1}{\prod_{[\ell,m] \perp [i,j]} \Delta_{\ell,m}} \right) \sum_{P \text{ c.p. de } G_{i,a_t}} w(P) \Delta_{m,j} \Delta_{m,a_1} \cdots \Delta_{m,a_{t-1}} \Delta_{b_1,a_t} \cdots \Delta_{b_u,a_t}.$$

En simplifiant les facteurs apparaissant à la fois au numérateur et au dénominateur, on obtient que cette expression est égale à  $\frac{X_{a_t,i} \Delta_{m,j}}{\Delta_{m,a_t}}$ .

On en conclut que  $\Delta_{i,j} = \frac{X_{j,a_t} X_{i,m} + X_{a_t,i} \Delta_{m,j}}{\Delta_{m,a_t}} = \frac{1}{\prod_{[\ell,m] \perp [i,j]} \Delta_{\ell,m}} \sum_P w(P)$ , où la somme est prise sur tous les couplages parfaits de  $G_{i,j}$ . Cette expression est exactement  $X_{i,j}$ . La preuve est terminée.  $\square$

**Quelques commentaires finaux.** La combinatoire qui régit les mineurs  $2 \times 2$  dans l'étude de la grassmannienne  $\text{Gr}_{2,n}(K)$  est un cas particulier d'une vaste théorie développée depuis le début du 21e siècle, celle des *algèbres amassées* (*cluster algebras* en anglais). La théorie a été introduite dans l'article [6]; les premiers chapitres d'un livre d'introduction sont disponibles en ligne [2, 3, 4, 5]. L'astuce dans la démonstration du Théorème 1.15 qui consistait à remplacer une diagonale d'une triangulation par une autre est un exemple de *mutation* dans cette théorie. Les triangulations d'un polygone se généralisent bien en des triangulations de surfaces orientables avec bord et points marqués [1]. Dans ce contexte, une formule faisant intervenir les couplages parfaits d'un graphe est apparue dans [8]; l'énoncé et la démonstration que je donne dans ces notes sont légèrement différentes. Les démonstrations données dans ce cours conviennent aussi pour étudier le cas d'une surface plus générale qu'un disque.

## 2. EXERCICE : POINTS DE LA GRASSMANNIENNE ET COORDONNÉES DE PLÜCKER

Soient  $0 < k \leq n$  des entiers, et soit  $\text{Gr}_{k,n} = \text{Gr}_{k,n}(K)$  la grassmannienne dont les points correspondent aux sous-espaces de  $K^n$  de dimensions  $k$ , où  $K$  est un corps. Notre objectif dans cet exercice est de donner un système de coordonnées pour représenter les points de la grassmannienne.

**2.1. Représenter un sous-espace par une matrice.** Soit  $W$  un sous-espace de  $K^n$  de dimension  $k$ . Alors  $W$  est entièrement déterminé par une base

$$(w_1 = (a_{1,1}, \dots, a_{1,n}), \dots, w_k = (a_{k,1}, \dots, a_{k,n})).$$

On représente cette base de  $W$  par la matrice  $k \times n$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,n} \end{bmatrix}.$$

Comme les lignes de cette matrice sont linéairement indépendantes, le rang de cette matrice est  $k$ . Réciproquement, à une matrice  $k \times n$  de rang  $k$  comme ci-dessus, on associe l'espace vectoriel de dimension  $k$  engendré par ses lignes. Soit  $\text{Mat}_{k,n}^k(K)$  l'ensemble des matrices  $k \times n$  de rang  $k$ . On a défini une application

$$\text{Mat}_{k,n}^k(K) \longrightarrow \text{Gr}_{k,n}(K)$$

envoyant une matrice vers l'espace vectoriel engendré par ses lignes. Cette application est surjective (tout sous-espace vectoriel a une base), mais pas injective.

Le groupe  $\text{GL}_k(K)$  agit sur  $\text{Mat}_{k,n}^k(K)$  par multiplication à gauche. Montrer que deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\text{Mat}_{k,n}^k(K)$  ont le même espace-ligne si et seulement si il existe  $G \in \text{GL}_k(K)$  telle que  $B = GA$ . En déduire qu'on peut voir  $\text{Gr}_{k,n}(K)$  comme un quotient de  $\text{Mat}_{k,n}^k(K)$  par l'action de  $\text{GL}_k(K)$ .

**2.2. Mineurs et coordonnées de Plücker.** Pour tout sous-ensemble  $I$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$  de cardinalité  $k$  et pour toute matrice  $A \in \text{Mat}_{k,n}(K)$ , soit  $\Delta_I(A)$  le déterminant de la sous-matrice  $k \times k$  de  $A$  obtenue en ne gardant que les colonnes dont l'indice est dans  $I$ .

On désigne par  $\Delta(A) = (\Delta_I(A))_I$  le vecteur de tous les mineurs  $k \times k$  de  $A$ .

- (1) Montrer que, si  $A \in \text{Mat}_{k,n}^k(K)$  et  $G \in \text{GL}_k(K)$ , alors  $\Delta(GA) = \det(G)\Delta(A)$ .
- (2) Montrer la "réciproque" : si  $A, B \in \text{Mat}_{k,n}^k(K)$  sont tels que  $\Delta(A)$  et  $\Delta(B)$  sont proportionnels, alors il existe  $G \in \text{GL}_k(K)$  tel que  $B = GA$ . Pour ce faire :
  - (a) Soit  $I$  tel que  $\Delta_I(A) \neq 0$  (et donc  $\Delta_I(B) \neq 0$ ). Montrer qu'il existe d'uniques  $H, H' \in \text{GL}_k(K)$  tels que les sous-matrice de  $HA$  et  $H'B$  obtenues en ne conservant que les colonnes de  $I$  sont la matrice identité.
  - (b) Soit  $c_{i,j}$  le coefficient de  $HA$  en position  $(i, j)$ , et supposons que  $j \notin I$ . Montrer que  $c_{i,j}$  a la forme  $\pm \Delta_J(HA)$  où  $J$  et  $I$  ne diffèrent que d'un seul élément. En déduire que  $HA$  est entièrement déterminé par  $\Delta(HA)$ .
  - (c) En déduire que  $HA = H'B$ . Conclure.

Les questions précédentes permettent de définir les *coordonnées de Plücker*  $\Delta(W)$  d'un point de la grassmannienne  $W \in \text{Gr}_{k,n}$  : on prend n'importe quelle matrice  $A \in \text{Mat}_{k,n}^k(K)$  dont l'espace-ligne est  $W$ , et on définit  $\Delta(W)$  comme étant l'image dans  $\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$  de  $\Delta(A)$ . Ceci permet de voir  $\text{Gr}_{k,n}$  comme un sous-ensemble de l'espace projectif  $\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ .

**2.3. Algèbre extérieure.** Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Pour  $k > 0$ , on définit  $\bigwedge^k V$  comme l'espace vectoriel des symboles  $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k$  soumis aux relations :

- $v_1 \wedge \dots \wedge (\lambda v_i + \lambda' v'_i) \wedge \dots \wedge v_k = \lambda(v_1 \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_k) + \lambda'(v_1 \wedge \dots \wedge v'_i \wedge \dots \wedge v_k)$ ;
- $v_1 \wedge \dots \wedge v_i \wedge v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_k = -(v_1 \wedge \dots \wedge v_{i+1} \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_k)$ .
- $\dots \wedge v \wedge v \wedge \dots = 0$ .

Le dernier axiome découle du second, sauf si la caractéristique du corps  $K$  est 2 ; dans ce cas, le second axiome est tautologique. En fait, le deuxième axiome découle du premier et du troisième, mais on l'inclut ici parce qu'il est très utile en pratique.

On désignera par  $e_1, \dots, e_n$  les vecteurs de la base canonique de  $K^n$ . On admettra que les vecteurs  $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$  avec  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  forment une base de  $\bigwedge^k K^n$ .

- (1) Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $K^n$  de dimension  $k$  engendré par la base  $(w_1, \dots, w_k)$ . Soit  $A$  la matrice dont la ligne  $i$  est donnée par les coordonnées de  $w_i$ . Montrer que le mineur  $\Delta_I(A)$  est le coefficient devant  $\bigwedge_{i \in I} e_i$  dans l'écriture de  $w_1 \wedge \dots \wedge w_k$ . (Pour ce faire, écrire les  $w_i$  comme combinaison linéaire des  $e_j$ , puis appliquer les relations définissant  $\bigwedge^k K^n$  et la définition du déterminant.)
- (2) En déduire qu'un vecteur  $w \in K^n$  appartient à  $W$  si et seulement si  $w \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_k = 0$ .

**2.4. Relations de Plücker.** Soit  $A \in \text{Mat}_{k,n}^k(K)$ . Les mineurs de  $A$  ne sont pas indépendants les uns des autres. Pour le voir, on doit affiner un peu la notation pour les mineurs de  $A$  : pour  $i_1, i_2, \dots, i_k$  des nombres distincts entre 1 et  $n$ , on désigne par  $\Delta_{i_1, \dots, i_k}(A)$  le déterminant de la matrice obtenue en prenant les colonnes  $i_1, \dots, i_k$  de  $A$  dans cet ordre. Ainsi, par exemple si  $k = 2$ , on aurait  $\Delta_{1,2}(A) = -\Delta_{2,1}(A)$ .

**Théorème 1** (Relations de Plücker). Pour tout  $A \in \text{Mat}_{k,n}^k(K)$  et toutes suites  $1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n$  et  $1 \leq j_1 < \dots < j_{k+1} \leq n$ , on a

$$\sum_{m=1}^{k+1} (-1)^m \Delta_{i_1, \dots, i_{k-1}, j_m}(A) \Delta_{j_1, \dots, \widehat{j_m}, \dots, j_{k+1}}(A),$$

où  $\widehat{j_m}$  signifie “on retire  $j_m$  de la suite”.

- (1) Écrire les relations de Plücker pour  $k = 2$ .
- (2) Soit  $W$  l'espace-ligne de  $A$ . Fixons  $k - 1$  indices  $1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n$ . Montrer que l'élément suivant fait partie de  $W$  :

$$w_{i_1, \dots, i_{k-1}} = \sum_{j=1}^n \Delta_{i_1, \dots, i_{k-1}, j}(A) e_j.$$

(Pour ce faire, développer  $\Delta_{i_1, \dots, i_{k-1}, j}(A)$  par rapport à la colonne  $j$ , puis faire apparaître les vecteurs-lignes de  $A$  dans l'expression obtenue.)

- (3) En appliquant (1.3.2) à  $w_{i_1, \dots, i_{k-1}}$ , démontrer les relations de Plücker.

### 3. EXERCICE : TRIANGULATIONS ET NOMBRES DE CATALAN

Soit  $n \geq 3$  un entier, et soit  $P_n$  un polygone régulier à  $n$  sommets. On numérote les sommets de  $P_n$  de 1 à  $n$  dans le sens horaire. Une *diagonale* est un segment reliant deux sommets non-adjacents de  $P_n$ . La diagonale reliant les sommets  $i$  et  $j$  avec  $i < j$  sera notée  $[i, j]$ . Les *segments de bord* sont les segments  $[1, 2], [2, 3], \dots, [n-1, n], [1, n]$ . Enfin, une *triangulation* de  $P_n$  est un ensemble  $\Delta$  de diagonales telles que

- deux diagonales distinctes de  $\Delta$  ne se croisent pas dans l'intérieur de  $P_n$  (mais peuvent avoir un point d'intersection à un sommet) ;
- les diagonales de  $\Delta$  découpent  $P_n$  en triangles.

Notre objectif est de démontrer que le nombre de triangulations différentes de  $P_n$  est donné par un *nombre de Catalan* : pour un entier  $m \geq 1$ , le  $m$ -ième nombre de Catalan est

$$C_m = \frac{1}{1+m} \binom{2m}{m}.$$

**Théorème 2.** Le nombre de triangulations différentes de  $P_n$  est  $C_{n-2}$ .

**3.1. Premières vérifications.** Vérifier que le théorème est vrai pour  $n \in \{3, 4, 5, 6\}$  en énumérant toutes les triangulations de  $P_n$ .

**3.2. Une relation de récurrence pour les triangulations.** Soit  $T_n$  le nombre de triangulations différentes de  $P_n$ . On prend pour convention que  $T_2 = 1$ . Nous allons démontrer que la relation de récurrence suivante est vraie :

$$T_n = \sum_{i=1}^{n-2} T_{i+1} T_{n-i}.$$

- (1) On énumère d'abord le nombre de triangulations de  $P_n$  dans lesquelles aucune diagonale ne touche le sommet  $n$ .
  - (a) Montrer qu'une telle triangulation contient forcément la diagonale  $[1, n-1]$ .
  - (b) En déduire que le nombre de telles triangulations est  $T_{n-1}$ .

- (2) On énumère maintenant les triangulations de  $P_n$  ayant une diagonale touchant le sommet  $n$ . On le fait en plusieurs étapes.
- (a) Pour chaque  $i \in \{2, 3, \dots, n-2\}$ , considérons l'ensemble des triangulations de  $P_n$  contenant la diagonale  $[i, n]$  mais aucune diagonale  $[j, n]$  avec  $i < j$ . Montrer qu'une telle triangulation contient forcément  $[i, n-1]$  (avec comme convention que les segments de bords font partie de toute triangulation).
  - (b) Montrer qu'un choix de triangulation comme en (2a) revient à des choix de triangulations des polygones formés par les segments  $[1, 2], [2, 3], \dots, [i-1, i], [i, n], [1, n]$  et par les segments  $[i, i+1], [i+1, i+2], \dots, [n-2, n-1], [i, n-1]$ .
  - (c) En déduire que le nombre de triangulations comme en (2a) est  $T_{i+1}T_{n-1}$ , et que le nombre de triangulations ayant une diagonale touchant le sommet  $n$  est  $\sum_{i=2}^{n-2} T_{i+1}T_{n-i}$ .
- (3) Conclure.

3.3. **Série génératrice.** On définit la *série génératrice de la suite*  $(T_n)$  par  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{n+2}x^n$ .

- (1) En utilisant la relation de récurrence ci-dessus, montrer que  $1 - g(x) + xg(x)^2 = 0$ . Autrement dit,  $g(x)$  est l'une des deux solutions dans  $\mathbb{R}[[x]]$  de l'équation  $1 - Z + xZ^2 = 0$ .
- (2) Dans le corps des fractions de  $\mathbb{R}[[x]]$ , les deux solutions de l'équation  $1 - Z + xZ^2 = 0$  sont  $\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$  et  $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ . En calculant la limite lorsque  $x \rightarrow 0$ , montrer que  $g(x)$  est égal à la deuxième de ces solutions.
- (3) Montrer que le développement en série de Taylor autour de zéro de  $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$  est la série  $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ . (On pourra d'abord calculer la série de Taylor de  $\sqrt{1+x}$ , puis de  $\sqrt{1-4x}$ ...)
- (4) En déduire que  $T_n = C_{n-2}$  pour tout  $n \geq 3$ .

3.4. **Pour aller plus loin : l'omniprésence des nombres de Catalan.** Les triangulations de polygones ne sont pas les seuls objets énumérés par les nombres de Catalan. Richard P. Stanley présente 66 familles de tels objets dans [10, Exercice 6.19] et 214 dans [9, Chapitre 2].

#### RÉFÉRENCES

- [1] Sergey Fomin, Michael Shapiro, and Dylan Thurston. Cluster algebras and triangulated surfaces. I. Cluster complexes. *Acta Math.*, 201(1) :83–146, 2008.
- [2] Sergey Fomin, Lauren Williams, and Andrei Zelevinsky. Introduction to cluster algebras. chapters 1-3. [arXiv:1608.05735](https://arxiv.org/abs/1608.05735).
- [3] Sergey Fomin, Lauren Williams, and Andrei Zelevinsky. Introduction to cluster algebras. chapters 4-5. [arXiv:1707.07190](https://arxiv.org/abs/1707.07190).
- [4] Sergey Fomin, Lauren Williams, and Andrei Zelevinsky. Introduction to cluster algebras. chapters 6. [arXiv:2008.09189](https://arxiv.org/abs/2008.09189).
- [5] Sergey Fomin, Lauren Williams, and Andrei Zelevinsky. Introduction to cluster algebras. chapters 7. [arXiv:2106.02160](https://arxiv.org/abs/2106.02160).
- [6] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. I. Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2) :497–529, 2002.
- [7] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.
- [8] Gregg Musiker and Ralf Schiffler. Cluster expansion formulas and perfect matchings. *J. Algebraic Combin.*, 32(2) :187–209, 2010.

- [9] Richard P. Stanley. *Catalan numbers*. Cambridge University Press, New York, 2015.
- [10] Richard P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Vol. 2*, volume 208 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, [2024] ©2024. With an appendix by Sergey Fomin.

(Pierre-Guy Plamondon) LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES DE VERSAILLES, UVSQ, CNRS, UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY, INSTITUT UNIVERSITAIRE DE FRANCE (IUF)

*Email address:* pierre-guy.plamondon@uvsq.fr

*URL:* <https://lmv.math.cnrs.fr/laboratoire/annuaire/membres-du-laboratoire/pierre-guy-plamondon/>