



QCM de mathématiques

QCM de probabilités L2 par Julien Worms

Répondre en cochant la ou les cases correspondant à des assertions vraies (et seulement celles-ci).

1 Probabilités, événements

1.1 Probabilités, événements

Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire et Ω l'univers qui lui a été associé. Soient A et B deux événements de probabilités respectives 0.5 et 0.6.

Question 1

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

- ☐ [Faux] A est inclus dans B car $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

On a seulement $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$, qui peut très bien avoir lieu même sans que A soit inclus dans B . La propriété connue c'est " $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ ", et non dans l'autre sens !

- ☐ [Vrai] A et B ne peuvent pas être incompatibles car $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1.1 > 1$.

En effet, on a " $(A \text{ et } B \text{ incompatibles}) \Rightarrow (\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B))$ ". Ici la somme $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ est > 1 donc ne peut pas être égale à $\mathbb{P}(A \cup B)$ (qui est ≤ 1), donc par contraposée on en déduit que A et B ne peuvent pas être incompatibles.

- ☐ [Vrai] Il est impossible que A et B soient indépendants si A implique B .

Si A implique B , c'est que B se réalise forcément dès que A se réalise, donc $\mathbb{P}(B|A) = 1$: or l'indépendance de A et de B implique que $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$ (car $\mathbb{P}(A) \neq 0$), cqfd.

- ☐ [Vrai] Ω est indépendant de tout autre événement.

C'est vrai, car pour tout événement C , $\mathbb{P}(C \cup \Omega) = \mathbb{P}(C)$ (car $C \subset \Omega$) donc $= \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(\Omega)$.

- ☐ [Vrai] Deux événements quelconques (mais non impossibles) ne peuvent être simultanément incompatibles et indépendants.

C'est un fait fondamental du calcul élémentaire des probabilités, et une confusion très fréquente chez les étudiant.es. Si C et D sont des événements de probas > 0 , alors l'indépendance de C et D implique que $\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D)$. Mais C et D incompatibles implique que $\mathbb{P}(C \cup D) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D)$ donc que $\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D) - \mathbb{P}(C \cup D) = 0$. Il y a donc contradiction.

Mais de manière moins formelle, comment voulez vous que 2 événements soient indépendants (càd la probabilité de survenue de l'un n'est pas affectée par la réalisation ou non

de l'autre) si la survenue de l'un implique que l'autre ne peut pas survenir ? (ce qui est l'esprit de l'incompatibilité)

Question 2

Supposons maintenant que $\mathbb{P}(A \cup B) = 4/5$. A et B sont-ils indépendants ?

- ☐ [Vrai] Oui.
- ☐ [Faux] Non.
- ☐ [Faux] On ne peut pas se prononcer car on ne dispose pas de $\mathbb{P}(A \cap B)$.
- ☐ [Faux] On ne peut pas se prononcer car on ne dispose pas de détails sur l'expérience, sur Ω , A et B .

Il suffit d'utiliser $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$.

Question 3

Soit $\omega \in \Omega$. Et supposons que $B \subset A$ (dans cette question seulement). Parmi les propositions suivantes, laquelle/lesquelles désigne(nt) un événement ?

- ☐ [Faux] ω
- ☐ [Vrai] $\{\omega\}$
- ☐ [Faux] (ω)
- ☐ [Vrai] $A \setminus B$
- ☐ [Faux] $B \setminus A$
- ☐ [Faux] $A|B$

Un événement est un ensemble. ω est seulement un élément de Ω pas un sous-ensemble donc pas un ensemble, (ω) ne veut rien dire d'autre que ω . On n'a pas le droit d'écrire $B \setminus A$ ("B privé de A" au sens ensembliste) si on ne sait pas que A est inclus dans B.

*Enfin **A|B n'est pas un événement !** C'est une faute très fréquente dans les copies ! Pour rappel, un événement C est un fait qui se réalise ou pas, autrement dit on doit pouvoir répondre oui à la question "est ce que C s'est réalisé ?" une fois l'expérience mise en œuvre, or on voit bien que la question "est-ce que A sachant B s'est réalisé ?" n'a aucun sens. Par exemple, on voit bien que dans la question "est ce que tu n'es pas passé à la maison sachant que la plante n'a pas été arrosée ?" , quelque chose ne tourne pas rond, la phrase est plus que bancal ! On ne peut pas y répondre par oui ou par non.*

Question 4

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles n'ont aucun sens (c'est-à-dire ne sont pas correctes au niveau du langage mathématique) ?

- ☐ [Vrai] Dans certaines circonstances, on a $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) \cup \mathbb{P}(B)$.

Cela n'a aucun sens de considérer l'union des nombres $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$! La phrase devient vraie si on remplace le deuxième " $\cup$ " par "+", et les circonstances sont "A et B sont incompatibles".

- ☐ [Vrai] Si C est un autre événement impliqué par A , on a $A \cup C \cap B = A \cap B$.

On n'a pas le droit d'enchaîner l'utilisation des symboles $\cap$ et $\cup$ sans parenthèses ! Voir votre cours de calcul ensembliste...

- ☐ [Vrai] On a $A \subset A + B$.

On n'additionne pas des événements... (en maths, on utilise parfois le concept d'addition de 2 ensembles mais dans des circonstances particulières qui sont toujours rappelées dans le contexte)

- ☐ [Vrai] $\{A, B\} \subset \Omega$

$\{A, B\}$ est un ensemble contenant deux ensembles, donc n'est pas une sous-ensemble de Ω , mais un sous-ensemble de l'ensemble des parties de Ω .

1.2 Probabilités, événements

En France, on considère la population $\mathcal{P}$ des candidats au permis de conduire qui essaient de l'obtenir une fois, puis une seconde fois si la première tentative échoue. Parmi eux, un candidat sur trois l'obtient du premier coup, et parmi ceux qui ne l'ont pas eu du premier coup, 30% d'entre eux l'obtiennent à la seconde tentative. On considère l'expérience aléatoire consistant à sélectionner au hasard une personne issue de cette population $\mathcal{P}$.

Question 5

Dans ce cadre, le(s)quel(s) des 2 espaces Ω ci-dessous peu(ven)t être considéré(s) pour cette expérience ?

- ☐ [Faux] Seulement $\Omega = \{ \text{permis obtenu} , \text{ permis non obtenu} \}$.
- ☐ [Faux] Seulement $\Omega = \{ \text{il y a eu une tentative} , \text{ il y a eu deux tentatives} \}$.
- ☐ [Faux] Aucun des deux n'est un univers adéquat.
- ☐ [Vrai] Les deux peuvent convenir.

Les deux peuvent en effet convenir, mais ce sont des univers pauvres. Par exemple, "le permis a été obtenu à la première tentative" est un événement pour l'un mais pas pour l'autre, et c'est l'inverse pour "le permis a été obtenu"...

Formellement parlant, on aurait pu aussi rétorquer que la bonne réponse est la 3ème, car un univers Ω doit toujours contenir l'ensemble vide et l'ensemble de toutes les possibilités. Mais cette question a surtout pour but de vous alerter sur la multiplicité des univers qu'on peut considérer pour une situation donnée.

Question 6

On suppose désormais qu'un espace Ω convenable a été choisi (mais on ne le détaille pas ici ; il permet en tout cas de définir les événements adéquats des questions suivantes). La probabilité d'obtenir le permis au plus tard à la seconde tentative vaut :

- ☐ [Faux] $1/2$
- ☐ [Faux] $2/3$
- ☐ [Vrai] Environ 53%
- ☐ [Faux] Environ 23%

On introduit les événements O_1 et O_2 "Obtenir le permis dès le premier coup" et "Obtenir le permis au deuxième coup", qui sont des événements incompatibles, du coup on cherche $\mathbb{P}(O_1 \cup O_2) = \mathbb{P}(O_1) + \mathbb{P}(O_2) = \mathbb{P}(O_1) + \mathbb{P}(O_2|O_1^c)\mathbb{P}(O_1^c) = 1/3 + 0.3 \times (1 - 1/3) = 1.6/3 \simeq 53\%$.

Question 7

Peut-on définir les événements A = "la seconde tentative a échoué sachant que la première a échoué" et B = "la première tentative a échoué et la seconde a réussi" ?

- ☐ [Faux] Oui pour A , oui pour B .
- ☐ [Faux] Oui pour A , non pour B .
- ☐ [Vrai] Non pour A , oui pour B .
- ☐ [Faux] Non pour A , non pour B .

Comme expliqué plus haut, A n'est pas un événement ! En effet, à la question "Est-ce que la seconde tentative a échoué sachant que la première a échoué ?", on ne peut pas répondre par oui ou par non, car la question n'a aucun sens. Ce n'est pas le cas de B , qui définit bien un événement : avec les notations de la question précédente, on a $B = O_1^c \cap O_2$.

Question 8

Que vaut la probabilité d'avoir tenté l'épreuve une seconde fois sachant qu'on a obtenu le permis au final ?

- ☐ [Faux] Zéro.
- ☐ [Vrai] 0,375
- ☐ [Faux] 0,1875
- ☐ [Faux] Une autre valeur que les réponses précédentes.
- ☐ [Faux] La question n'a pas de sens.

En notant $A = O_1 \cup O_2$ l'événement de la question 6, qui est le même que "obtenir son permis au final", on cherche $\mathbb{P}(O_1^c|A)$ car tenter l'épreuve une seconde fois est la même chose qu'échouer la première fois. On calcule

$$\mathbb{P}(O_1^c|A) = \frac{\mathbb{P}(O_1^c \cap (O_1 \cup O_2))}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}((O_1^c \cap O_1) \cup (O_1^c \cap O_2))}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(O_2|O_1^c)\mathbb{P}(O_1^c)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.3 \times \frac{2}{3}}{16/30} = 6/16$$

où l'on a utilisé l'incompatibilité de O_1 et O_1^c dans la 2ème égalité.

Question 9

Les événements R = "le permis est obtenu à l'issue de l'expérience" et T = "Une deuxième tentative a eu lieu" sont-ils :

- ☐ [Faux] Indépendants.
- ☐ [Faux] Incompatibles.
- ☐ [Faux] Indépendants et incompatibles.
- ☐ [Vrai] Ni l'un ni l'autre.

Ils sont évidemment compatibles car on peut obtenir le permis tout en ayant essayé une deuxième fois. Ils ne sont pas indépendants, car $R \cap T = O_2 = O_2 \cap O_1^c$ (car $O_2 \subset O_1^c$: si on l'obtient la 2ème fois alors forcément on l'a raté la 1ère fois), $T = O_1^c$ et R est l'événement A des questions 6 et 8, donc si R et T étaient indépendants on aurait $\frac{16}{30} \times \frac{2}{3} = \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(R \cap T) = \mathbb{P}(O_2) = \mathbb{P}(O_2 \cap O_1^c) = 0.3 \times \frac{2}{3}$.

Une autre manière *plus élégante* de le prouver est de dire que $R = A$ de proba $16/30$, et que $\mathbb{P}(R|T) = 0.3 \neq 16/30$ car la proba de réussir le permis sachant qu'on a échoué la première fois est égale à 0.3 . S'il y avait indépendance, on aurait $\mathbb{P}(R|T) = \mathbb{P}(R)$. *Gardez en tête qu'il n'est pas obligatoire de calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ pour montrer qu'il n'y a pas indépendance de A et B . Quand il n'y a pas indépendance, la 2ème méthode est souvent la plus rapide, et surtout la plus "convaincante", moins technique.*

1.3 Probabilités, événements

On suppose que 2000 personnes ont envoyé un SMS dans le cadre d'un mini-jeu télé qui consistait à répondre à une question (particulièrement idiote) à 2 choix. On suppose que la société qui gère ce "jeu-SMS" sélectionne 30 SMS au hasard parmi les 2000.

Question 10

Dans cette question et les suivantes, on note Ω l'ensemble de tous les sous-ensembles de 30 SMS (distincts). Combien d'éléments Ω contient-il ?

- ☐ [Vrai] C_{2000}^{30}
- ☐ [Faux] A_{2000}^{30}
- ☐ [Faux] 1971
- ☐ [Faux] $2000!/30!$

C'est C_{2000}^{30} , voir votre cours !

Question 11

A-t-on équiprobabilité dans cette situation ?

- ☐ [Vrai] Oui.
- ☐ [Faux] Non.

Bien sûr que oui. Tous les sous-ensembles de 30 SMS ont autant de chances d'être tirés.

Question 12

On considère maintenant que vous faites partie des personnes qui ont envoyé un SMS. Quelle est la probabilité que vous soyez sélectionné(e) ?

- ☐ [Vrai] 1.5%
- ☐ [Faux] 0.03%
- ☐ [Faux] 0.15%
- ☐ [Faux] Environ 1.2%.

L'événement en question correspond au sous-ensemble de Ω contenant tous les sous-ensembles de 30 SMS dont le sien : cet événement est de cardinal C_{1999}^{29} (choisir 29 éléments parmi les 1999 restants, quand vous mettez de côté le vôtre), et cela donne, après une jolie simplification, $\mathbb{P}(A) = 30/2000 = 1,5\%$.

Question 13

Votre ami(e) fait également partie des personnes ayant envoyé un SMS. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un(e) d'entre vous soit tiré(e) au sort ?

- ☐ [Faux] Deux fois la réponse à la question précédente.
- ☐ [Vrai] Environ 3% (mais pas 3%).
- ☐ [Faux] Environ 0,3% (mais pas 0,3%).
- ☐ [Faux] Une autre valeur.

Si on note B l'événement de cette question, le cardinal du complémentaire B^c est clairement C_{1998}^{30} , nombre de sous-ensembles de 30 éléments parmi les 1998 SMS restants. Cela donne $\mathbb{P}(B) = 1 - (1970 \times 1969)/(2000 \times 1999) \simeq 2.98\%$.

1.4 Probabilités, événements

Une expérience consiste à lancer deux dés à 3 "faces" (si, si, ça existe ! Équiprobables bien entendu.). On note A_i = "le premier dé vaut i " et B_i = "le second dé vaut i " pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, ainsi que S_k = "la somme des deux dés vaut au plus k " pour $k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. On note Ω l'univers associé à cette expérience.

Question 14

Parmi les descriptions ci-dessous, laquelle/lesquelles désigne(nt) une partition de Ω ?

- ☐ [Vrai] $\{B_1, B_2, B_3\}$
- ☐ [Vrai] $\{A_1 \cup A_2, A_3\}$
- ☐ [Faux] $\{S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}$

La première est évidemment une partition, car une fois l'expérience réalisée, le 2ème dé vaut bien l'une des 3 valeurs 1, 2, ou 3. La seconde aussi car $A_1 \cup A_2$ et A_3 sont incompatibles et le 1er dé vaut bien soit 1 ou 2, soit 3. Par contre, $\{S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}$ n'est pas du tout une partition car les événements S_k ne sont pas incompatibles deux à deux (par exemple $S_2 \cap S_3 = \{(1, 1)\} = S_2$).

Question 15

Parmi les affirmations suivantes, laquelle/lesquelles est/sont erronée(s) ou n'a/n'ont aucun sens ?

- ☐ [Vrai] $(A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c = B_1 \cap B_2$

Oui, car $(A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c = \Omega^c = \emptyset$, tandis que B_1 et B_2 sont d'intersection vide (incompatibles).

- ☐ [Faux] $\mathbb{P}(\Omega) = \cup_{i=1}^3 \mathbb{P}(A_i)$

Union de probabilités ne veut rien dire ! Par contre $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^3 \mathbb{P}(A_i) (= 1)$ est vrai, puisque les A_i sont incompatibles.

- ☐ [Vrai] $(A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup A_3) = (A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_1)$

On le vérifie en développant à gauche et en rencontrant certaines intersections vides ($A_1 \cap A_3$ et $A_2 \cap A_3$ sont vides), ce qui réduit l'union à 2 "termes" au lieu de 4.

- ☐ [Faux] $S_3 = (A_1 \cap B_1) \cup (A_1 \cap B_2)$

Il manque $A_2 \cap B_1$ dans l'union (faire 2 au premier jet, et 1 au second). Savoir écrire un événement en fonction d'autres événements (via des opérations ensemblistes) fait partie des compétences attendues. Ici c'est intéressant car on écrit S_3 comme union disjointe d'événements dont on pourra calculer la probabilité (par indépendance des jets).

- ☐ [Faux] $S_5^c = A_3 \cup B_3$

On a $S_5^c =$ "faire un total de 6" = "faire 3 et 3" = $A_3 \cap B_3$ plutôt.

- ☐ [Vrai] $\mathbb{P}(B_j | A_i) = \mathbb{P}(B_j) \quad (\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2)$

Chaque B_j est indépendant de chaque A_i (jets indépendants), donc oui.

Question 16

Que vaut la probabilité de S_5 ?

- ☐ [Faux] 5/6
☐ [Faux] 7/9
☐ [Vrai] 8/9

Comme $S_5^c = A_3 \cap B_3$ et que A_3 et B_3 sont indépendants de probabilités 1/3 alors on a $\mathbb{P}(S_5) = 1 - (1/3 \times 1/3) = 8/9$.

Question 17

Que vaut la probabilité de $S_5 \setminus S_2$?

- ☐ [Faux] 2/3
☐ [Vrai] 7/9
☐ [Faux] 6/9
☐ [Faux] L'énoncé ne veut rien dire

$S_5 \setminus S_2$ signifie " S_5 privé de S_2 " (avec S_2 inclus dans S_5 au sens ensembliste, et $\mathbb{P}(S_2) = 1/3 \times 1/3 = 1/9$), donc (voir propriété du cours) $\mathbb{P}(S_5 \setminus S_2) = \mathbb{P}(S_5) - \mathbb{P}(S_2) = 8/9 - 1/9 = 7/9$.

Question 18

Que vaut la probabilité conditionnelle de S_5 sachant S_2 ?

- ☐ [Faux] 1/8
☐ [Vrai] 1
☐ [Faux] 8/9
☐ [Faux] L'énoncé ne veut rien dire

C'est 1 car S_2 implique S_5 (donc S_2 est inclus dans S_5 au sens ensembliste).

1.5 Probabilités, événements

Question 19

Soit n un entier non nul et k un entier compris entre 1 et n . On considère un tableau contenant n cases vides. Quel est le nombre de façons différentes de noircir k de ces cases ?

- ☐ [Faux] k
- ☐ [Faux] $n - k$
- ☐ [Faux] $1 - n$
- ☐ [Vrai] Aucune des réponses précédentes.

La réponse est évidemment C_n^k . Trop facile pour avoir faux ! Il faut connaître ses définitions et les principales notions du cours...

Question 20

Soit n un entier non nul et k un entier compris entre 1 et n . On lance n fois une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement k piles ?

- ☐ [Faux] $C_n^k p^n (1-p)^{n-k}$
- ☐ [Faux] $\frac{k!}{n!(n-k)!} (1/2)^k (1/2)^{n-k}$
- ☐ [Vrai] $n! / (2^n k!(n-k)!)$

Ce n'est pas $C_n^k p^n (1-p)^{n-k}$, mais $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ et comme $p = 1/2$ alors $p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{2^n}$ donc c'est la troisième réponse qui est bonne.

2 Variables discrètes

2.1 Variables discrètes

On considère que dans une équipe de basket, chacun des 12 joueurs a 1 chance sur 4 d'être absent au moins une fois durant le mois de juin. On suppose que l'absence ou la présence d'un joueur n'a pas d'impact sur les chances qu'a un autre joueur de se retrouver absent. On s'intéresse au nombre N de joueurs absents durant le mois de juin.

Question 21

Quelle est la probabilité que N vaille 3 ?

- ☐ [Faux] Elle vaut $(1/4)^3 \simeq 1.56\%$.
- ☐ [Faux] On ne peut pas savoir, car on ne connaît pas la loi de N .
- ☐ [Vrai] Aucune des réponses précédentes.

Bien sûr qu'on connaît la loi de N , c'est une binomiale $B(12, 1/4)$ (programme du lycée), donc la réponse vaut $\simeq 25.81\%$.

Question 22

Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 4 joueurs absents durant le mois de juin ?

- ☐ [Faux] Elle vaut exactement $1 - \sum_{k=0}^3 (1/4)^k$.
- ☐ [Vrai] Elle vaut environ 35%.
- ☐ [Faux] Elle vaut environ 19%.
- ☐ [Faux] On ne peut pas répondre car la loi de N n'est pas connue.

Là il faut un peu plus de calculs. C'est $\mathbb{P}(N \geq 4) = 1 - \mathbb{P}(N \leq 3)$, qui vaut $\simeq 35\%$ après calcul des 4 termes (puisque vous n'êtes pas en contrôle sur table, vous pouvez vous aider des capacités de calcul de votre calculatrice scientifique).

Question 23

Les familles d'événements

$$(\{N = 0\}, \{N = 1\}, \dots, \{N = 12\}) \quad \text{et} \quad (\{N \leq 0\}, \{N \leq 1\}, \dots, \{N \leq 12\})$$

constituent-elles des partitions de l'univers Ω associé à cette expérience ?

- ☐ [Vrai] Oui pour la première, non pour la seconde.
- ☐ [Faux] Non pour la première, oui pour la seconde.
- ☐ [Faux] Non pour les deux familles.
- ☐ [Faux] On ne peut pas le savoir car on ne connaît pas l'univers Ω en question.

Dans la seconde famille, les événements sont imbriqués les uns dans les autres et ne sont donc pas incompatibles, donc la seconde famille est très loin d'être une partition de Ω . Les éléments (qui sont des événements) de la 1ère famille sont bien incompatibles et recouvrent toutes les éventualités de sortie de l'expérience : c'est bien une partition.

Question 24

Que valent l'espérance et le premier quartile de N ?

- ☐ [Faux] Ils valent respectivement 3 et 1.
- ☐ [Vrai] Ils valent respectivement 3 et 2.
- ☐ [Faux] Ils valent respectivement 4 et 1.
- ☐ [Faux] On ne peut toujours pas le dire car on ne connaît toujours pas la loi de N !

L'espérance est évidemment $3 = 12 \times \frac{1}{4}$.

Pour les quantiles, et en particulier le premier quartile (quantile d'ordre $\frac{1}{4}$), on utilise la définition générale (qui n'est que rarement fournie dans les cours de probabilités) : un quantile d'ordre $\alpha \in]0, 1[$ de la loi d'une variable X est un nombre q qui vérifie

$$\mathbb{P}(X \leq q) \geq \alpha \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X \geq q) \geq 1 - \alpha.$$

(on a au moins une chance α d'être plus petit ou égal, et au moins une chance $1 - \alpha$ d'être plus grand ou égal)

Ici, après calculs on a $\mathbb{P}(N \leq 2) \simeq 39,07\% \geq \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(N \geq 1) \simeq 84,16\% \geq \frac{3}{4}$, donc le premier quartile vaut 1.

2.2 Variables discrètes

On considère qu'une personne un peu éméchée accepte de lancer une pièce de monnaie équilibrée jusqu'à faire pile, mais en donnant 10 euros à son voisin de table à chaque fois qu'elle fait face.

Question 25

Quelle est la loi du nombre N de fois que cette personne fait face (avant de finir par faire pile) ?

- ☐ [Faux] C'est une loi binomiale de paramètres 10 et $1/2$.
- ☐ [Faux] C'est une loi binomiale négative de paramètres 10 et $1/2$.
- ☐ [Vrai] C'est une loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $1/2$.
- ☐ [Faux] C'est une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $1/2$.
- ☐ [Faux] C'est une loi de Poisson de paramètre $1/2$.

C'est le nombre d'échecs jusqu'à réussite dans une succession d'essais indépendants et de même probabilité de réussite $p = \frac{1}{2}$, donc c'est une loi Géométrique sur $\mathbb{N}$ qui vérifie $\mathbb{P}(N = k) = p(1-p)^k$ ($\forall k \in \mathbb{N}$), donc puisque $p = 1/2$ ici $\mathbb{P}(N = k) = 2^{-k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Attention ! Ne pas confondre la loi géométrique sur $\mathbb{N}$ et celle sur $\mathbb{N}^$, qui modélise le nombre d'essais jusqu'à réussite. Vérifiez si les 2 ont été introduites dans votre cours (elles ont même variance mais évidemment des espérances décalées de 1 et des expressions différentes).*

Question 26

Que valent $\mathbb{E}(N)$, $\text{Var}(N)$, $\mathbb{E}(N^2)$?

- ☐ [Vrai] $\mathbb{E}(N) = 1$, $\text{Var}(N) = 2$, $\mathbb{E}(N^2) = 3$.
- ☐ [Faux] $\mathbb{E}(N) = 1$, $\text{Var}(N) = 2$, $\mathbb{E}(N^2) = 1$.
- ☐ [Faux] $\mathbb{E}(N) = 2$, $\text{Var}(N) = 2$, $\mathbb{E}(N^2) = 6$.
- ☐ [Faux] $\mathbb{E}(N) = 2$, $\text{Var}(N) = 2$, mais le calcul de $\mathbb{E}(N^2)$ est trop compliqué.
- ☐ [Faux] Aucune des réponses ci-dessus.

Il était conseillé d'utiliser l'astuce souvent utile $\mathbb{E}(N^2) = \text{Var}(N) + (\mathbb{E}(N))^2$. Après, c'est juste un calcul à faire à partir des expressions de l'espérance et de la variance de N , $\mathbb{E}(N) = \frac{1-p}{p}$ et $\text{Var}(N) = \frac{1-p}{p^2}$.

Question 27

Que valent $\mathbb{P}(N \geq 2)$ et la médiane de N ?

- ☐ [Faux] $\mathbb{P}(N \geq 2) = 1/2$ et la médiane de N vaut 1.
- ☐ [Vrai] $\mathbb{P}(N \geq 2) = 1/4$ et la médiane de N vaut 0.
- ☐ [Faux] $\mathbb{P}(N \geq 2) = 3/4$ et la médiane de N vaut 1.
- ☐ [Faux] Aucune des réponses ci-dessus.

On a $\mathbb{P}(N \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(N = 1) - \mathbb{P}(N = 0) = 1 - p - p(1-p) = 1/4$. En outre, $\mathbb{P}(N \geq 0) = 1/2$ est $\geq 1/2$ et $\mathbb{P}(N \leq 0) = 1$ est bien $\geq 1/2$ donc 0 est la médiane de N (voir explications sur les quantiles dans la question 24). Vous pouvez vérifier que plus p est faible, plus la médiane est grande (ce qui est on-ne-peut-plus logique !).

Question 28

Quel est le montant moyen que ce joueur devra donner à son voisin de table ?

- ☐ [Faux] 5 euros.
- ☐ [Vrai] 10 euros.
- ☐ [Faux] 20 euros.
- ☐ [Faux] Aucune des réponses ci-dessus.

Le montant qu'il doit donner à son voisin est la variable aléatoire $X = 10N$, donc la réponse est $\mathbb{E}(X) = 10\mathbb{E}(N) = 10$ euros.

2.3 Variables discrètes

On considère la variable aléatoire X égale au résultat de la somme de 2 dés à 6 faces équilibrés.

Question 29

Quelle est la loi de X ?

- ☐ [Faux] X suit la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, 12\}$.
- ☐ [Faux] X suit la loi uniforme sur $\{2, 3, \dots, 12\}$.
- ☐ [Faux] X suit la loi binomiale de paramètres 12 et $1/6$.
- ☐ [Vrai] Aucune des réponses ci-dessus.

C'est bien sûr la loi sur l'espace d'états $\{2, 3, \dots, 12\}$ dont les poids sont (exo facile) :

$$\{1/36, 2/36, 3/36, 4/36, 5/36, 6/36, 5/36, 4/36, 3/36, 2/36, 1/36\}$$

Les questions qui suivent en découlent facilement.

Question 30

Que valent l'espérance et la médiane de X ?

- ☐ [Faux] L'espérance de X vaut 6.5 et la médiane vaut 7.
- ☐ [Vrai] Elles valent toutes les deux 7.
- ☐ [Faux] Elles valent d'autres valeurs que celles proposées ci-dessus.

L'espérance vaut bien

$$\sum_{k=2}^{12} k\mathbb{P}(X = k) = (2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 40 + 36 + 30 + 22 + 12) / 36 = 7,$$

et la médiane vaut 7 car $\mathbb{P}(X \geq 7) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) / 36 = \frac{21}{36} \geq \frac{1}{2}$ et idem pour $\mathbb{P}(X \leq 7)$.

Question 31

Que valent $\mathbb{P}(X \geq 4)$ et la variance de X ?

- ☐ [Faux] $\mathbb{P}(X \geq 4) = 3/4$ et $\text{Var}(X) = 329/6$.
- ☐ [Faux] $\mathbb{P}(X \geq 4) = 1/4$ et $\text{Var}(X) = 35/6$.
- ☐ [Faux] $\mathbb{P}(X \geq 4) = 14/36$ et $\text{Var}(X) = 35/6$.
- ☐ [Vrai] $\mathbb{P}(X \geq 4) = 11/12$ et $\text{Var}(X) \simeq 5.8$.

On a bien sûr $\mathbb{P}(X \geq 4) = 1 - \mathbb{P}(X \in \{2, 3\}) = 1 - (1 + 2)/36 = 11/12$ et $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 329/6 - 7^2 = 35/6$, où le $329/6$ provient du calcul un peu longuet $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=2}^{12} k^2 \mathbb{P}(X = k)$.

2.4 Variables discrètes

Les deux questions ci-dessous n'ont aucun rapport entre elles (les variables notées X ne sont donc pas les mêmes dans ces deux questions).

Question 32

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant $\mathbb{P}(X \geq 3) = 64\%$. Que peut-on dire de la médiane de X ?

- ☐ [Faux] Elle vaut 3.
- ☐ [Faux] Elle est inférieure ou égale à 3.
- ☐ [Vrai] Elle est supérieure ou égale à 3.
- ☐ [Faux] On manque d'informations pour affirmer l'une des propositions ci-dessus.

Pour rappel (voir question 24), une médiane M de (la loi de) X est un réel M qui vérifie $\mathbb{P}(X \leq M) \geq \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X \geq M) \geq \frac{1}{2}$.

Ceci étant clarifié, la médiane ne vaut pas forcément 3. Par exemple, on peut très bien avoir $\mathbb{P}(X = 3) = 11\%$ donc $\mathbb{P}(X \leq 3) = \mathbb{P}(X \leq 2) + \mathbb{P}(X = 3) = (1 - 0.64) + 0.11 = 0.47 = 47\%$ donc $\mathbb{P}(X \leq 3) < 1/2$, donc la médiane n'est pas 3. Et d'autre part elle est ≥ 3 car si $M < 3$ est la médiane, alors par croissance de la fonction de répartition on a $\mathbb{P}(X \leq M) \leq \mathbb{P}(X \leq 2) = 1 - \mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - 0.64 < 1/2$ (donc M ne peut pas être la médiane).

Question 33

Soit X une variable aléatoire réelle d'espérance 2 et de variance 2. Peut-on calculer l'espérance de $Y = 2X^2 + 1$?

- ☐ [Faux] Non, car on ne connaît pas $\mathbb{E}(X^2)$.
- ☐ [Vrai] Oui, elle vaut 13.
- ☐ [Faux] Oui, elle vaut 5.

Explications : Bien sûr, $\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{E}(X^2) + 1 = 2(\text{Var}(X) + (\mathbb{E}(X))^2) + 1 = 13$.

2.5 Variables discrètes

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$ et de loi donnée par

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 2) = a \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 1) = 1 - 2a$$

où a est une constante réelle.

Question 34

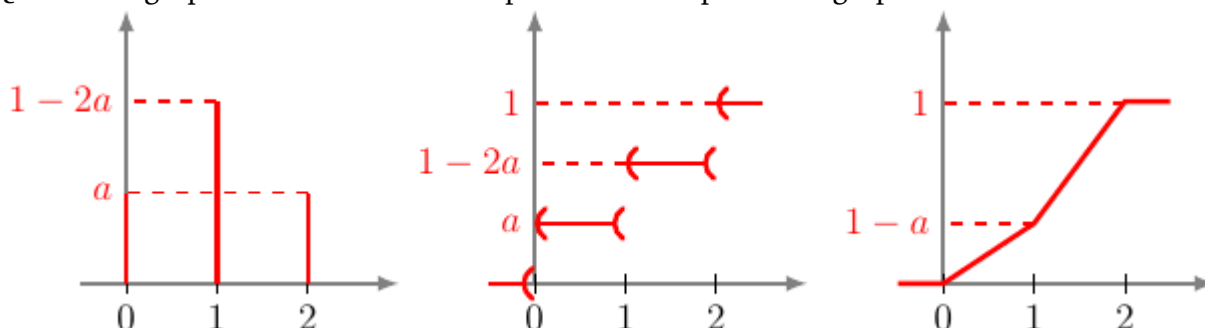
Quelles valeurs la constante a a-t-elle le droit de prendre ?

- ☐ [Faux] Toutes les valeurs de $]0, 1[$ car $\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = 1$.
- ☐ [Faux] Seulement la valeur $a = 1/4$.
- ☐ [Vrai] Toutes les valeurs de $]0, 1/2[$.
- ☐ [Faux] Une autre réponse que les précédentes.

Explications : Les probabilités $\mathbb{P}(X = k)$ doivent appartenir à $]0, 1[$ (ni 0 ni 1, sinon une ou plusieurs modalités ne pourraient pas être déclarées dans l'espace d'état de X), d'où la réponse.

Question 35

Quel est le graphe de la fonction de répartition de X parmi les graphes suivants ?



- ☐ [Faux] Le premier.
- ☐ [Vrai] Le second.
- ☐ [Faux] Le troisième.

Question 36

Que valent l'espérance et la variance de X ?

- ☐ [Faux] $\mathbb{E}(X) = 1$ et $\text{Var}(X) = 1 + 2a$.
- ☐ [Faux] $\mathbb{E}(X) = 2a$ et $\text{Var}(X) = 4a^2$.
- ☐ [Vrai] $\mathbb{E}(X) = 1$ et $\text{Var}(X) = 2a$.

Question 37

On pose $Y = 4 - 2X$. Sans déterminer la loi de Y , peut-on calculer l'espérance et l'écart-type de Y ?

- ☐ [Vrai] Oui, ils valent respectivement 2 et $\sqrt{8a}$.
- ☐ [Faux] Oui, ils valent respectivement 2 et $\sqrt{4(1-a)}$.
- ☐ [Faux] Oui, ils valent respectivement $4(1-a)$ et $4a$.
- ☐ [Faux] Oui, mais aucune des propositions précédentes n'est correcte.
- ☐ [Faux] Non, il nous faut nécessairement la loi pour calculer ces caractéristiques de Y .

Explications : $\mathbb{E}(Y) = 4 - 2\mathbb{E}(X)$, et $\text{Var}(Y) = (-2)^2 \text{Var}(X)$, donc l'écart-type de Y vaut 2 fois celui de X .

3 Variables continues

Toutes les questions suivantes sont indépendantes les unes des autres.

Question 38

Parmi les expressions ci-dessous, lesquelles permettent de définir des densités de lois continues ? (Ci-dessous, les lettres c et c' désignent des constantes qu'il n'est pas obligatoire de calculer, mais qui ont la valeur adéquate pour que les fonctions en question soient des densités, si elles le peuvent.)

- ☐ [Faux] $f_1(x) = \frac{c}{x} \mathbb{I}_{[1, +\infty[}(x)$
- ☐ [Faux] $f_2(x) = c' x^{24} \mathbb{I}_{[-100, 100]}(x)$
- ☐ [Faux] $f_3(x) = \frac{4}{15} x^3 \mathbb{I}_{[-1, 2]}(x)$
- ☐ [Faux] $f_4(x) = \frac{\pi}{2} \sin(\pi x) \mathbb{I}_{[0, 1]}(x)$

Explications : Pour f_1 , la fonction $x \mapsto 1/x$ n'est pas intégrable en $+\infty$. Pour f_2 , c' existe bien mais est de très faible valeur... Pour f_3 , la fonction n'est pas positive partout donc non. Quant à f_4 , contrairement aux apparences elle est bien positive partout, et intégrable, donc oui, et on vérifie qu'elle est bien d'intégrale 1.

Question 39

Soit X le temps de trajet quotidien de Katrin, en heures, variable aléatoire de densité définie par

$$f_X(x) = x e^{-x} \mathbb{I}_{[0, +\infty[}(x)$$

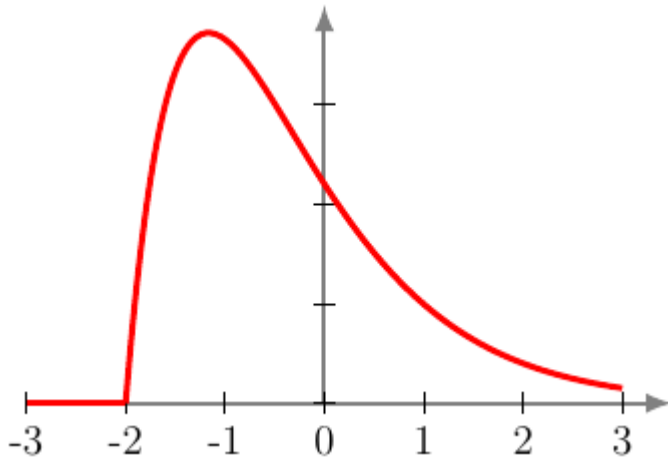
Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

- ☐ [Faux] $\mathbb{E}(X) = 1$ et $\mathbb{P}(X > 1) \simeq 63.2\%$.
- ☐ [Faux] $\mathbb{E}(X) = 2$ et $\mathbb{P}(X > 1) \simeq 26.4\%$.
- ☐ [Vrai] $\mathbb{P}(X > 1) \simeq 73.6\%$ et on ne peut pas facilement déterminer la médiane de X .
- ☐ [Faux] $\mathbb{E}(X)$ vaut $+\infty$ (c'est-à-dire X n'admet pas d'espérance) et $\mathbb{P}(X > 1) \simeq 26.4\%$.

Explications : $\mathbb{E}(X)$ vaut effectivement 2, mais $F(x) = 1 - (1+x)e^{-x}$ donc $\mathbb{P}(X > 1) = \bar{F}(1) \simeq 73.6\%$. Quant à la médiane, F est bien strictement croissante (le vérifier), mais l'équation $F(x) = 1/2$ n'a pas de résolution explicite, il faut recourir à un schéma numérique pour la résoudre.

Question 40

Si on considère X une variable aléatoire dont la densité est la fonction représentée ci-dessous, laquelle/lesquelles de ces affirmations est/sont vraie(s) ?



- ☐ [Faux] La médiane de X est positive.
- ☐ [Vrai] $\mathbb{P}(X < 2) > \mathbb{P}(X > -1)$
- ☐ [Faux] $\mathbb{P}(\ln(X + 3) > 0) < 1/2$
- ☐ [Vrai] $\mathbb{P}(X > x) < 1/2$ pour tout $x > 0$.

Explications : Pour l'affirmation $\mathbb{P}(\ln(X + 3) > 0) < 1/2$, on peut répondre non (sans calculs) car X est toujours ≥ -2 , donc $\ln(X + 3)$ est toujours $\geq \ln(1) = 0$.

Question 41

On suppose que le temps d'attente (en minutes) d'un bus est une variable aléatoire de densité définie par

$$f_X(x) = \frac{2}{15} \left(1 - \frac{x}{15}\right) \mathbb{I}_{[0,15]}(x)$$

Si l'on suppose que ces temps d'attente pendant 10 jours sont indépendants et de même loi (celle définie précédemment), quelle est la probabilité qu'on ait, durant ces 10 jours, à attendre plus de 10 minutes au moins 3 fois ?

- ☐ [Faux] Environ 5%.
- ☐ [Vrai] Environ 9%.
- ☐ [Faux] Environ 21%.
- ☐ [Faux] Environ 90%.
- ☐ [Faux] On ne peut pas répondre à la question, il manque des éléments pour mener le calcul.

Explications : On est dans un schéma binomial, on cherche la probabilité $\mathbb{P}(N \geq 3)$ où N est de loi binomiale de paramètres 10 et $p = \mathbb{P}(X > 10) = 1/9$ (après calcul). On trouve environ $\mathbb{P}(N \geq 3) = 1 - \sum_{k=0}^2 \mathbb{P}(N = k) \simeq 9\%$.

Question 42

On considère que la quantité de pain (en centaines de kg) qu'une boulangerie vend en une journée est une variable aléatoire de loi de densité définie par

$$f_X(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On introduit les événements $A = \text{"la boulangerie vendra demain au moins 100kg de pain"}$ et $B = \text{"la boulangerie vendra demain entre 50 et 150kg de pain"}$. Les événements A et B sont ils indépendants ?

- ☐ [Vrai] Oui.
☐ [Faux] Non.

Explications : On a $A = \{X \geq 1\}$, $B = \{0.5 \leq X \leq 1.5\}$, $A \cap B = \{1 \leq X \leq 1.5\}$; il suffit alors de déterminer la fonction de répartition F de X , et de vérifier que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, c'est-à-dire que $F(1.5) - F(1) = (1 - F(1))(F(1.5) - F(0.5))$. On trouve alors qu'il y a bien égalité.

Question 43

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $Y = X^2$ (on dit que la loi de Y est la loi du χ^2 à 1 degré de liberté). On a bien sûr $f_Y(x) = 0$ si $x < 0$ car Y est une variable positive, mais quelle est l'expression de la densité de Y pour $x > 0$? (Ci-dessous, φ désigne la densité de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ bien sûr.)

- ☐ [Faux] $f_Y(x) = 2x\varphi(x^2)$
☐ [Vrai] $f_Y(x) = \varphi(\sqrt{x})/\sqrt{x}$
☐ [Faux] $f_Y(x) = \varphi(\sqrt{x})$
☐ [Faux] $f_Y(x) = (\varphi(x))^2$

Explications : Si on note F_Y la fonction de répartition de Y et Φ celle de X , alors on a, pour $y > 0$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(|X| \leq \sqrt{y}) = 2\Phi(\sqrt{y}) - 1$. On obtient alors la réponse en dérivant cette fonction composée (et avec $\Phi' = \varphi$). Noter que la loi du χ^2 à n degrés de libertés est la loi de $Y = X_1^2 + \dots + X_n^2$ lorsque $X_1, \dots, X_n$ sont des variables indépendantes gaussiennes centrées réduites. C'est une loi très importante en statistique. On prononce χ^2 "ki-deux" ou "ki-carré".

Question 44

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(30, 25)$. Lesquelles (ou laquelle) des affirmations suivantes sont vraies ?

- ☐ [Faux] X a environ 5% de chances d'être entre -20 et 80 , et $\mathbb{P}(X > 30) = 1/2$.
☐ [Vrai] Le premier quartile de X est environ égal à 26.7 et $\mathbb{P}(X < 30) = 1/2$.
☐ [Faux] La loi de $Y = 2X$ est $\mathcal{N}(60, 50)$ et $\mathbb{P}(20 \leq X \leq 40) \simeq 95\%$.
☐ [Vrai] $\mathbb{P}(|X - 30| > 20) \simeq 0$ et la loi de $Y = 2X + 10$ est $\mathcal{N}(70, 100)$.

Explications : Dans cette question, il faut surtout prendre garde à ne pas confondre la variance et l'écart-type.

Question 45

Quelle(s) affirmation(s), parmi les suivantes, sont vraies ?

- ☐ [Faux] Si X est de loi continue, alors sa fonction de densité est nécessairement continue sur $\mathbb{R}$.

- ☐ [Vrai] Si X est de loi continue, alors sa fonction de répartition est nécessairement continue sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] Si X est une variable aléatoire de loi $\mathcal{Exp}(\lambda)$, alors $2X$ est de loi $\mathcal{Exp}(2\lambda)$.
- ☐ [Faux] Si X est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, alors $2X$ est de loi de densité $f(x) = \mathbb{I}_{[0,2]}(x)$.

Explications : C'est la fonction de répartition d'une loi continue qui est continue, mais pas forcément la densité (regardez par exemple les lois uniformes ou exponentielles !). Quand $X \sim \mathcal{Exp}(\lambda)$, si on avait $2X$ de loi $\mathcal{Exp}(2\lambda)$, alors $2X$ (qui a comme espérance $2\mathbb{E}(X) = 2/\lambda$) aurait comme espérance $1/(2\lambda)$, ce qui est contradictoire. Quant à la question sur les lois uniformes, il manque un facteur $1/2$ pour que f constitue une fonction de densité.

Question 46

On suppose que X désigne le montant du gain (en euros) que rapporte un employé à son entreprise en un mois, et que X est de loi $\mathcal{N}(500, (150)^2)$. L'entreprise verse à l'employé une prime Y égale à 0 si ce gain est inférieur à 700 euros, et, si le gain X excède 700 euros, à la moitié de l'excès en question. Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

- ☐ [Faux] La loi de Y est une loi continue et l'employé a environ 2,3% de chances d'avoir une prime supérieure à 50 euros.
- ☐ [Vrai] La loi de Y n'est pas une loi continue et l'employé a environ 2,3% de chances d'avoir une prime supérieure à 50 euros.
- ☐ [Faux] La loi de Y est une loi continue et l'employé a environ 17% de chances d'avoir une prime supérieure à 50 euros.
- ☐ [Faux] La loi de Y n'est pas une loi continue et l'employé a environ 17% de chances d'avoir une prime supérieure à 50 euros.

Explications : On a $\{Y = 0\} = \{X < 700\}$, qui est de probabilité non nulle, ce qui contredit que Y puisse être de loi continue (car on aurait alors $\mathbb{P}(Y = y) = 0$ pour tout y de $\mathbb{R}$). Y n'est donc pas de loi continue, mais elle a une "composante" continue, on pourrait dire qu'elle continue conditionnellement au fait d'être > 0 . On a ensuite, pour $y > 0$, $\{Y > y\} = \{Y > y, X > 700\} = \{(X-700)/2 > y, X > 700\} = \{X > 700+2y, X > 700\} = \{X > 700+2y\}$, donc $\{Y > 50\} = \{X > 800\} = \{(X-500)/150 > (800-500)/150\}$ qui est de probabilité $1 - \Phi(2)$, qui vaut en effet environ 2.3%. C'était une question plus difficile, mais très loin d'être inabordable ! Il faut juste écrire les événements tranquillement...