

Du logarithme à E8 en passant par les 27 droites d'une surface cubique

Luc PIRIO

LMV – CNRS & UVSQ (Paris-Saclay)

Colloquium du LMA

6 Mars 2025

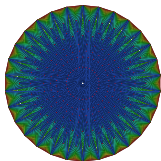
Le logarithme

$$\text{Log}(x) - \text{Log}(y) + \text{Log}(y/x) = 0$$

Le logarithme

$$\text{Log}(x) - \text{Log}(y) + \text{Log}(y/x) = 0$$

E_8

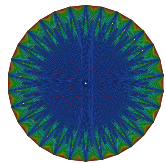


Le logarithme

$$\text{Log}(x) - \text{Log}(y) - \text{Log}(x/y) = 0$$



E_8

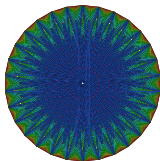


Le logarithme

$$\text{Log}(x) - \text{Log}(y) - \text{Log}(x/y) = 0$$



E_8



Le logarithme

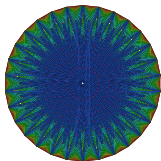
$$\text{Log}(x) - \text{Log}(y) - \text{Log}(x/y) = 0$$



Hyperlogarithme

$$\sum_{i=1}^{2160} \text{HLog}^6(U_i(x, y)) = 0$$

E_8



Il y a bien longtemps...

- **Tablette babylonienne MLC 02078** (entre -1900 et -1600 av JC)

2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
2^n	n



Il y a bien longtemps...

- **Tablette babylonienne MLC 02078** (entre -1900 et -1600 av JC)

2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
2^n	n



- **Antiquité grecque** ([Archimède] *L'Arénaire* (-250 av JC)) :

$$b^m \times b^n = b^{m+n}$$

MA : des méthodes pour calculer efficacement

MA : des méthodes pour calculer efficacement

- **Prosthaphérèse** (XVI^{ème} → milieu du XVII^{ème}) :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \left(\cos(a + b) + \cos(a - b) \right)$$

MA : des méthodes pour calculer efficacement

- **Prosthérèse** (XVIème → milieu du XVIIème) :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \left(\cos(a + b) + \cos(a - b) \right)$$

- **Logarithmes** (1614 → ...) :

$$xy = \text{Log}^{-1} \left(\text{Log } x + \text{Log } y \right)$$

MA : des méthodes pour calculer efficacement

- **Prosthaphérèse** (XVIème → milieu du XVIIème) :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \left(\cos(a + b) + \cos(a - b) \right)$$

- **Logarithmes** (1614 → ...) :

$$xy = \text{Log}^{-1} \left(\text{Log } x + \text{Log } y \right)$$

[Neper 1614] *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*

[Bürigi 1620] *Aritmetische vnd Geometrische Progress Tabulen...*

Table de logarithmes

[Neper 1614] *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*

The image shows an open book with two pages of logarithmic tables. The pages are numbered 19 and 20. The tables contain columns for 'Sinus', 'Logarithmi', 'Differencia', and 'Logarithmi'. The numbers are arranged in rows, with some rows starting with a small number (1-30) and others with a larger number (1-30). The tables are printed in a dense, handwritten-style font. The pages are slightly aged and show some wear.

$$\text{NLog}(\theta) = -10^7 \ln(\sin \theta)$$

Table de logarithmes

[Bürgi 1620] *Aritmetische und Geometrische Progress Tabulen...*

	100000	100500	101000	100500	102000	102500	103000	103500
10	271814593	273177001	274446537	275723337	277007334	278298526	279596919	280902519
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
160
170
180
190
200
210
220
230
240
250
260
270

$$y = 10 \log_{1,0001} \left(\frac{x}{10^8} \right)$$

Table de logarithmes... encore et toujours !

[Bouvar-Ratinet 1901-1980] Nouvelles tables de logarithmes

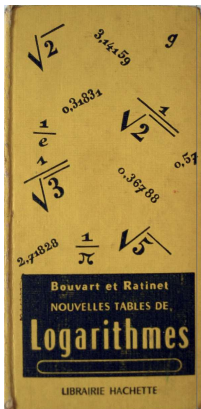


Table des logarithmes décimaux entre 0,01 et 1

N	ln(N)	N	ln(N)	N	ln(N)	N	ln(N)	N	ln(N)
0,01	-2	0,21	-0,677 78	0,41	-0,887 22	0,61	-0,214 67	0,81	-0,091 51
0,02	-1,698 97	0,22	-0,657 58	0,42	-0,876 75	0,62	-0,207 61	0,82	-0,086 19
0,03	-1,522 88	0,23	-0,638 27	0,43	-0,866 53	0,63	-0,200 46	0,83	-0,080 92
0,04	-1,397 94	0,24	-0,619 78	0,44	-0,856 55	0,64	-0,193 82	0,84	-0,075 72
0,05	-1,301 03	0,25	-0,602 06	0,45	-0,846 79	0,65	-0,187 06	0,85	-0,070 58
0,06	-1,221 85	0,26	-0,585 03	0,46	-0,837 24	0,66	-0,180 48	0,86	-0,065 5
0,07	-1,154 9	0,27	-0,568 64	0,47	-0,827 9	0,67	-0,173 93	0,87	-0,060 48
0,08	-1,096 91	0,28	-0,552 84	0,48	-0,818 76	0,68	-0,167 49	0,88	-0,055 52
0,09	-1,045 76	0,29	-0,537 6	0,49	-0,809 8	0,69	-0,161 15	0,89	-0,050 61
0,1	-1	0,3	-0,522 88	0,5	-0,301 03	0,7	-0,154 9	0,9	-0,045 76
0,11	-0,959 61	0,31	-0,508 64	0,51	-0,292 43	0,71	-0,148 74	0,91	-0,040 96
0,12	-0,920 82	0,32	-0,494 85	0,52	-0,284	0,72	-0,142 47	0,92	-0,036 21
0,13	-0,886 06	0,33	-0,481 49	0,53	-0,275 72	0,73	-0,136 68	0,93	-0,031 52
0,14	-0,853 87	0,34	-0,468 52	0,54	-0,267 61	0,74	-0,130 77	0,94	-0,026 87
0,15	-0,823 91	0,35	-0,455 93	0,55	-0,259 64	0,75	-0,124 84	0,95	-0,022 28
0,16	-0,796 88	0,36	-0,443 7	0,56	-0,251 81	0,76	-0,119 19	0,96	-0,017 73
0,17	-0,769 55	0,37	-0,431 8	0,57	-0,244 13	0,77	-0,113 51	0,97	-0,013 23
0,18	-0,744 73	0,38	-0,420 22	0,58	-0,236 57	0,78	-0,107 91	0,98	-0,008 77
0,19	-0,721 25	0,39	-0,409 84	0,59	-0,229 15	0,79	-0,102 37	0,99	-0,004 36
0,2	-0,698 97	0,4	-0,397 94	0,6	-0,221 85	0,8	-0,096 91	1	0

Table des logarithmes décimaux entre 1 et 100

N	ln(N)	N	ln(N)	N	ln(N)	N	ln(N)	N	ln(N)
1	0	21	1,522 22	41	1,612 78	61	1,785 33	81	1,908 49
2	0,301 03	22	1,542 42	42	1,623 25	62	1,792 39	82	1,913 81
3	0,477 12	23	1,361 73	43	1,633 47	63	1,799 34	83	1,919 08
4	0,602 06	24	1,380 21	44	1,643 45	64	1,806 18	84	1,924 29
5	0,698 97	25	1,397 94	45	1,653 21	65	1,812 91	85	1,929 42
6	0,778 15	26	1,414 97	46	1,662 78	66	1,819 54	86	1,934 5
7	0,845 1	27	1,432 38	47	1,672 11	67	1,826 07	87	1,939 52
8	0,903 09	28	1,447 16	48	1,681 24	68	1,832 51	88	1,944 48
9	0,954 24	29	1,462 4	49	1,690 2	69	1,838 85	89	1,949 39
10	1	30	1,477 12	50	1,698 97	70	1,845 1	90	1,954 24
11	1,041 39	31	1,491 36	51	1,707 57	71	1,851 26	91	1,959 04
12	1,079 18	32	1,505 15	52	1,716	72	1,857 33	92	1,963 79
13	1,113 94	33	1,518 51	53	1,724 28	73	1,863 32	93	1,968 48
14	1,146 13	34	1,531 45	54	1,732 39	74	1,869 23	94	1,973 13
15	1,176 09	35	1,544 07	55	1,740 36	75	1,875 06	95	1,977 72
16	1,204 17	36	1,556 3	56	1,748 19	76	1,880 81	96	1,982 27
17	1,230 45	37	1,568 2	57	1,755 87	77	1,886 49	97	1,986 77
18	1,255 27	38	1,579 76	58	1,763 43	78	1,892 09	98	1,991 23
19	1,278 75	39	1,591 06	59	1,770 85	79	1,897 63	99	1,995 64
20	1,301 03	40	1,602 06	60	1,778 15	80	1,903 00	100	2



Le logarithme vu comme fonction

Le logarithme vu comme fonction

- [De S^t-Vincent 1647] *Opus geometricum* (Propositio CIX)

L'aire sous l'hyperbole $\mathbf{A}(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ vérifie la même loi que le log :

$$\mathbf{A}(xy) = \mathbf{A}(x) + \mathbf{A}(y)$$

Le logarithme vu comme fonction

- [De S^t-Vincent 1647] *Opus geometricum* (Propositio CIX)

L'aire sous l'hyperbole $\mathbf{A}(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ vérifie la même loi que le log :

$$\mathbf{A}(xy) = \mathbf{A}(x) + \mathbf{A}(y)$$

(Roberval 1643, De S^t-Vincent ~1630, Kepler 1624 ?)

Le logarithme vu comme fonction

- [De S^t-Vincent 1647] *Opus geometricum* (Propositio CIX)

L'aire sous l'hyperbole $\mathbf{A}(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ vérifie la même loi que le log :

$$\mathbf{A}(xy) = \mathbf{A}(x) + \mathbf{A}(y)$$

(Roberval 1643, De S^t-Vincent ~1630, Kepler 1624?)

- [De Sarasa 1649] *Solutio problematis a M. Mersenno*

L'aire sous l'hyperbole est le log : $\mathbf{A}(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = \text{Log } x$

Le logarithme vu comme fonction

- [De S^t-Vincent 1647] *Opus geometricum* (Propositio CIX)

L'aire sous l'hyperbole $\mathbf{A}(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ vérifie la même loi que le log :

$$\mathbf{A}(xy) = \mathbf{A}(x) + \mathbf{A}(y)$$

(Roberval 1643, De S^t-Vincent ~1630, Kepler 1624 ?)

- [De Sarasa 1649] *Solutio problematis a M. Mersenno*

L'aire sous l'hyperbole est le log : $\mathbf{A}(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = \text{Log } x$

- [Mercator 1668] *Logarithmotechnia* : $-\text{Log}(1 - x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$

Le logarithme vu comme fonction

- [De S^t-Vincent 1647] *Opus geometricum* (Propositio CIX)

L'aire sous l'hyperbole $\mathbf{A}(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ vérifie la même loi que le log :

$$\mathbf{A}(xy) = \mathbf{A}(x) + \mathbf{A}(y)$$

(Roberval 1643, De S^t-Vincent ~1630, Kepler 1624 ?)

- [De Sarasa 1649] *Solutio problematis a M. Mersenno*

L'aire sous l'hyperbole est le log : $\mathbf{A}(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = \text{Log } x$

- [Mercator 1668] *Logarithmotechnia* : $-\text{Log}(1 - x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$
- [Gardiner 1742] *Tables of logarithms* $\text{Log}(x) + \text{Log}(y) - \text{Log}(xy) = 0$

Le logarithme vu comme fonction

- [De S^t-Vincent 1647] *Opus geometricum* (Propositio CIX)

L'aire sous l'hyperbole $\mathbf{A}(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ vérifie la même loi que le log :

$$\mathbf{A}(xy) = \mathbf{A}(x) + \mathbf{A}(y)$$

(Roberval 1643, De S^t-Vincent ~1630, Kepler 1624 ?)

- [De Sarasa 1649] *Solutio problematis a M. Mersenne*

L'aire sous l'hyperbole est le log : $\mathbf{A}(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = \text{Log } x$

- [Mercator 1668] *Logarithmotechnia* : $-\text{Log}(1 - x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$
- [Gardiner 1742] *Tables of logarithms* $\text{Log}(x) + \text{Log}(y) - \text{Log}(xy) = 0$
- [Euler 1749] *De la controverse entre Mrs Leibnitz & Bernoulli sur les logarithmes* : $\mathcal{M}_0(\text{Log } z) = \text{Log } z + 2i\pi$

Le logarithme

- Formule intégrale : $\text{Log}(z) = \int_1^z \frac{du}{u} \quad (z \in \mathbb{C})$

- Développement en série : $\text{Li}_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \quad |z| < 1$
 $\text{Li}_1(z) = -\text{Log}(1 - z)$

- Monodromie : $\mathcal{M}_{\circlearrowleft}(\text{Log}) = \text{Log} + 2i\pi$

- Identité fonctionnelle :

$$\text{Log}(x) + \text{Log}(y) - \text{Log}(xy) = 0$$

Indoles logarithmorum hac aequatione fundamentali continetur [Pfaff 1788]

Le dilogarithme Li_2

- $\text{Li}_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} \quad (|z| < 1)$
- Formule Intégrale : $\text{Li}_2(z) = \mathbf{L}_{01}(z) = -\int^z \text{Log}(1-u) \frac{du}{u-0}$
- Monodromie : $\mathcal{M}_{\textcircled{1}}(\text{Li}_2) = \text{Li}_2 - 2i\pi \text{Log}$

Le dilogarithme Li_2

- $\text{Li}_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} \quad (|z| < 1)$
- Formule Intégrale : $\text{Li}_2(z) = \mathbf{L}_{01}(z) = -\int^z \text{Log}(1-u) \frac{du}{u-0}$
- Monodromie : $\mathcal{M}_{\textcircled{1}}(\text{Li}_2) = \text{Li}_2 - 2i\pi \text{Log}$
- Identité fonctionnelle d'Abel ($\mathcal{A}b$) [Spence 1809]

$$\mathbf{R}(x) - \mathbf{R}(y) - \mathbf{R}\left(\frac{x}{y}\right) - \mathbf{R}\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \mathbf{R}\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0$$

$$\mathbf{R}(z) = \text{Li}_2(z) + \frac{1}{2} \text{Log}(z) \text{Log}(1-z) - \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{L}_{01}(z) - \mathbf{L}_{10}(z) \right)$$

Le n -ième polylogarithme Li_n pour $n \geq 1$

- $\text{Li}_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n} \quad (|z| < 1)$
- Formule intégrale :
$$\text{Li}_n(z) = \int^z \text{Li}_{n-1}(u) \frac{du}{u}$$
$$\text{Li}_n'(z) = \text{Li}_{n-1}(z)/z$$
- Monodromie : $\mathcal{M}_{\textcircled{1}}(\text{Li}_n) = \text{Li}_n - 2i\pi \frac{(\text{Log})^{n-1}}{(n-1)!}$

Le n -ième polylogarithme Li_n pour $n \geq 1$

- $\text{Li}_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n} \quad (|z| < 1)$

- Formule intégrale :** $\text{Li}_n(z) = \int^z \text{Li}_{n-1}(u) \frac{du}{u}$

$$\text{Li}_n'(z) = \text{Li}_{n-1}(z)/z$$

- Monodromie :** $\mathcal{M}_{(\mathbf{1})^\curvearrowright}(\text{Li}_n) = \text{Li}_n - 2i\pi \frac{(\text{Log})^{n-1}}{(n-1)!}$

- Identités fonctionnelles en plusieurs variables ($\exists ?$) :**

$$\sum_{i \in I} c_i \text{Li}_n(\mathbf{U}_i) = \text{Elem}_{<n}$$

$$(I \text{ fini}, c_i \in \mathbb{Z}, \mathbf{U}_i \in \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_N))$$

Le n -ième polylogarithme Li_n pour $n \geq 1$

- $\text{Li}_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n} \quad (|z| < 1)$

- Formule intégrale :** $\text{Li}_n(z) = \int^z \text{Li}_{n-1}(u) \frac{du}{u}$

$$\text{Li}_n'(z) = \text{Li}_{n-1}(z)/z$$

- Monodromie :** $\mathcal{M}_{(\mathbf{1})^\curvearrowright}(\text{Li}_n) = \text{Li}_n - 2i\pi \frac{(\text{Log})^{n-1}}{(n-1)!}$

- Identités fonctionnelles en plusieurs variables ($\exists ?$) :**

$$\sum_{i \in I} c_i \text{Li}_n(\mathbf{U}_i) = \text{Elem}_{<n} \iff \sum_{i \in I} c_i \mathcal{L}_n(\mathbf{U}_i) = \mathbf{0}$$

$$(I \text{ fini, } c_i \in \mathbb{Z}, \mathbf{U}_i \in \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_N))$$

Exemple : le trilogarithme $\text{Li}_3(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k/k^3$

- **Identité de Spence-Kummer (1809-1840) :**

$$\begin{aligned} & 2\text{Li}_3(x) + 2\text{Li}_3(y) - \text{Li}_3\left(\frac{x}{y}\right) + 2\text{Li}_3\left(\frac{1-x}{1-y}\right) + 2\text{Li}_3\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) - \text{Li}_3(xy) \\ & + 2\text{Li}_3\left(-\frac{x(1-y)}{(1-x)}\right) + 2\text{Li}_3\left(-\frac{(1-y)}{y(1-x)}\right) - \text{Li}_3\left(\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\right) \\ & = 2\text{Li}_3(1) - \text{Log}(y)^2 \text{Log}\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \frac{\pi^2}{3} \text{Log}(y) + \frac{1}{3} \text{Log}(y)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2\mathcal{L}_3(x) + 2\mathcal{L}_3(y) - \mathcal{L}_3\left(\frac{x}{y}\right) + 2\mathcal{L}_3\left(\frac{1-x}{1-y}\right) + 2\mathcal{L}_3\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) - \mathcal{L}_3(xy) \\ & + 2\mathcal{L}_3\left(-\frac{x(1-y)}{(1-x)}\right) + 2\mathcal{L}_3\left(-\frac{(1-y)}{y(1-x)}\right) - \mathcal{L}_3\left(\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\right) = 0 \end{aligned}$$

Exemple : le trilogarithme $\text{Li}_3(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k/k^3$

- **Identité de Spence-Kummer (1809-1840) :**

$$\begin{aligned} & 2\text{Li}_3(x) + 2\text{Li}_3(y) - \text{Li}_3\left(\frac{x}{y}\right) + 2\text{Li}_3\left(\frac{1-x}{1-y}\right) + 2\text{Li}_3\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) - \text{Li}_3(xy) \\ & + 2\text{Li}_3\left(-\frac{x(1-y)}{(1-x)}\right) + 2\text{Li}_3\left(-\frac{(1-y)}{y(1-x)}\right) - \text{Li}_3\left(\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\right) \\ & = 2\text{Li}_3(1) - \text{Log}(y)^2 \text{Log}\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \frac{\pi^2}{3} \text{Log}(y) + \frac{1}{3} \text{Log}(y)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2\mathcal{L}_3(x) + 2\mathcal{L}_3(y) - \mathcal{L}_3\left(\frac{x}{y}\right) + 2\mathcal{L}_3\left(\frac{1-x}{1-y}\right) + 2\mathcal{L}_3\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) - \mathcal{L}_3(xy) \\ & + 2\mathcal{L}_3\left(-\frac{x(1-y)}{(1-x)}\right) + 2\mathcal{L}_3\left(-\frac{(1-y)}{y(1-x)}\right) - \mathcal{L}_3\left(\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\left(\mathcal{L}_3(x) = \text{Li}_3(x) - \text{Li}_2(x) \text{Log}|x| + \frac{1}{3} \text{Li}_1(x) (\text{Log}|x|)^2, \quad x \in \mathbb{P}^1 \right)$$

- **Abel 1881 (Spence 1809, Hill 1829, Rogers 1907)**

$$R(\mathbf{x}) - R(\mathbf{y}) - R\left(\frac{x}{y}\right) - R\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + R\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0 \quad (n = 2)$$

- **Spence-Kummer :** $\sum_{i=1}^9 c_i \mathcal{L}_3(U_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 0 \quad (n = 3)$

- **Kummer 1840 :** $\sum_i c_i \mathcal{L}_n(U_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 0 \quad (n \leq 5)$

...

- **Goncharov 1995 :** $\sum_{i=1}^{22} c_i \mathcal{L}_3(U_i(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})) = 0 \quad (n = 3)$

- **Gangl 2003 :** $\sum_i c_i \mathcal{L}_n(U_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 0 \quad (n \leq 7)$

- **Charlton, Gangl, Radchenko, Rudenko, Goncharov-Rudenko, ...**

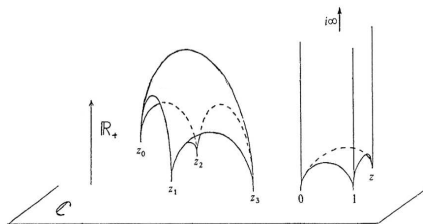
- **Identités fonctionnelles (IF) des polylogarithmes Li_n :**
 - ▶ **Géométrie hyperbolique** (volumes des polytopes)
 - ▶ **Géométrie des tissus** (tissus exceptionnels)
 - ▶ **K-théorie des corps de nombres** (conjecture de Zagier)
 - ▶ **Théorie des périodes** (valeurs multizetas)
 - ▶ **Physique des particules** ('*scattering amplitudes*')
 - ▶ **Physique mathématique** ('*Y-systems*')
 - ▶ **Algèbres amassées** ('*cluster period*')
 - ▶ **Symétrie miroir** ('*scattering diagrams*')

- **Problèmes :**
 - Trouver des IF pour \mathcal{L}_n ($\exists n \geq 8 ?$)
 - Mieux comprendre les IF polylogarithmiques

Géom. hyperbolique et identités polylogarithmiques

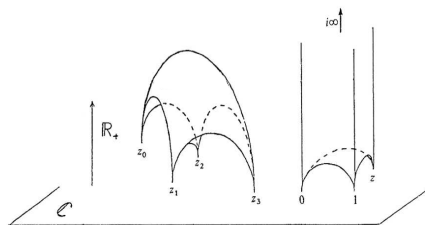
Géom. hyperbolique et identités polylogarithmiques

- Volume d'un tétraèdre idéal $\mathcal{T}_{z_0, \dots, z_3}$ dans \mathbb{H}^3



Géom. hyperbolique et identités polylogarithmiques

- Volume d'un tétraèdre idéal $\mathcal{T}_{z_0, \dots, z_3}$ dans \mathbb{H}^3

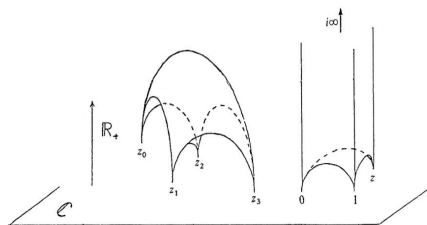


- [Lobachevsky] : $\text{Vol}(\mathcal{T}_{z_0, \dots, z_3}) = \mathbf{D}(z)$ avec $z = \text{cr}(z_0, z_1, z_2, z_3)$

$$\mathbf{D}(z) = \text{Im}(\text{Li}_2(z)) + \text{Arg}(1 - z)\text{Log}|z| \quad (z \in \mathbb{P}^1)$$

Géom. hyperbolique et identités polylogarithmiques

- Volume d'un tétraèdre idéal $\mathcal{T}_{z_0, \dots, z_3}$ dans \mathbb{H}^3



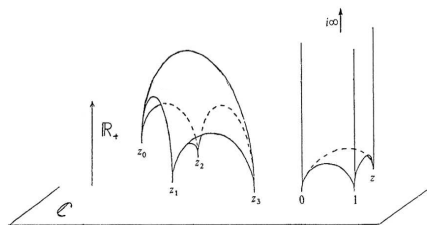
- [Lobachevsky] : $\text{Vol}(\mathcal{T}_{z_0, \dots, z_3}) = \mathbf{D}(z)$ avec $z = \text{cr}(z_0, z_1, z_2, z_3)$

$$\mathbf{D}(z) = \text{Im}(\text{Li}_2(z)) + \text{Arg}(1 - z)\text{Log}|z| \quad (z \in \mathbb{P}^1)$$

- $z_0, \dots, z_4 \in \partial\mathbb{H}^3$: $\langle z_0, \dots, z_4 \rangle^{\text{geod}} = \mathcal{T}_{z_0}^{\wedge} \cup \mathcal{T}_{z_2}^{\wedge} \cup \mathcal{T}_{z_4}^{\wedge} = \mathcal{T}_{z_1}^{\wedge} \cup \mathcal{T}_{z_3}^{\wedge}$

Géom. hyperbolique et identités polylogarithmiques

- Volume d'un tétraèdre idéal $\mathcal{T}_{z_0, \dots, z_3}$ dans \mathbb{H}^3



- [Lobachevsky] : $\text{Vol}(\mathcal{T}_{z_0, \dots, z_3}) = \mathbf{D}(z)$ avec $z = \text{cr}(z_0, z_1, z_2, z_3)$

$$\mathbf{D}(z) = \text{Im}(\text{Li}_2(z)) + \text{Arg}(1 - z)\text{Log}|z| \quad (z \in \mathbb{P}^1)$$

- $z_0, \dots, z_4 \in \partial\mathbb{H}^3$: $\langle z_0, \dots, z_4 \rangle^{\text{geod}} = \mathcal{T}_{\hat{z}_0} \cup \mathcal{T}_{\hat{z}_2} \cup \mathcal{T}_{\hat{z}_4} = \mathcal{T}_{\hat{z}_1} \cup \mathcal{T}_{\hat{z}_3}$

$$\sum_{i=0}^4 (-1)^i \mathbf{D}(\text{cr}(z_0, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_4)) = 0$$

K-théorie et identités polylogarithmiques

- \mathbf{F} = corps de nombres $\rightsquigarrow K_n(\mathbf{F}) = \begin{cases} n \text{ pair} & \checkmark \text{ (Borel)} \\ n \text{ impair} & ? \end{cases}$

K-théorie et identités polylogarithmiques

- $F =$ corps de nombres $\rightsquigarrow K_n(F) = \begin{cases} n \text{ pair} & \checkmark \text{ (Borel)} \\ n \text{ impair} & ? \end{cases}$
- [Zagier] $K_3(F) \leftarrow\rightsquigarrow B_2(F) =$ groupe de Bloch

$$B_2(F) = \frac{\mathbb{Z} \left[F \setminus \{0,1\} \right]}{\left\langle [x] - [y] - \left[\frac{x}{y} \right] - \left[\frac{1-y}{1-x} \right] + \left[\frac{x(1-y)}{y(1-x)} \right] \mid x, y \in F \setminus \{0,1\}, x \neq y \right\rangle}$$

K-théorie et identités polylogarithmiques

- $F =$ corps de nombres $\rightsquigarrow K_n(F) = \begin{cases} n \text{ pair} & \checkmark \text{ (Borel)} \\ n \text{ impair} & ? \end{cases}$
- [Zagier] $K_3(F) \leftarrow B_2(F) =$ groupe de Bloch

$$B_2(F) = \frac{\mathbb{Z} \left[F \setminus \{0,1\} \right]}{\left\langle [x] - [y] - \left[\frac{x}{y} \right] - \left[\frac{1-y}{1-x} \right] + \left[\frac{x(1-y)}{y(1-x)} \right] \mid x, y \in F \setminus \{0,1\}, x \neq y \right\rangle}$$
$$\left(R(x) - R(y) - R\left(\frac{x}{y}\right) - R\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + R\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0 \right)$$

K-théorie et identités polylogarithmiques

- $F =$ corps de nombres $\rightsquigarrow K_n(F) = \begin{cases} n \text{ pair} & \checkmark \text{ (Borel)} \\ n \text{ impair} & ? \end{cases}$

- **[Zagier]** $K_3(F) \rightsquigarrow B_2(F) =$ groupe de Bloch

$$B_2(F) = \frac{\mathbb{Z} \left[F \setminus \{0,1\} \right]}{\left\langle \left[x \right] - \left[y \right] - \left[\frac{x}{y} \right] - \left[\frac{1-y}{1-x} \right] + \left[\frac{x(1-y)}{y(1-x)} \right] \mid x, y \in F \setminus \{0,1\}, x \neq y \right\rangle}$$
$$\left(R(x) - R(y) - R\left(\frac{x}{y}\right) - R\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + R\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0 \right)$$

- **Régulateurs (de Borel)** $\mathcal{R}_2^B = \mathcal{L}_2 : K_3(F) \rightarrow \mathbb{R}$
 $\mathcal{R}_n^B = \mathcal{L}_n : K_{2n-1}(F) \rightarrow \mathbb{R} \quad (n \geq 2)$

K-théorie et identités polylogarithmiques

- $F =$ corps de nombres $\rightsquigarrow K_n(F) = \begin{cases} n \text{ pair} & \checkmark \text{ (Borel)} \\ n \text{ impair} & ? \end{cases}$

- **[Zagier]** $K_3(F) \rightsquigarrow B_2(F) =$ groupe de Bloch

$$B_2(F) = \frac{\mathbb{Z} \left[F \setminus \{0,1\} \right]}{\left\langle \left[x \right] - \left[y \right] - \left[\frac{x}{y} \right] - \left[\frac{1-y}{1-x} \right] + \left[\frac{x(1-y)}{y(1-x)} \right] \mid x, y \in F \setminus \{0,1\}, x \neq y \right\rangle}$$
$$\left(R(x) - R(y) - R\left(\frac{x}{y}\right) - R\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + R\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0 \right)$$

- **Régulateurs (de Borel)** $\mathcal{R}_2^B = \mathcal{L}_2 : K_3(F) \rightarrow \mathbb{R}$
 $\mathcal{R}_n^B = \mathcal{L}_n : K_{2n-1}(F) \rightarrow \mathbb{R} \quad (n \geq 2)$

- Comprendre les IF de $\mathcal{L}_n \rightarrow$
 - Desc $^\circ$ de $K_{2n-1}(F)$ par générateurs et relat $^\circ$
 - Applications à la “Conjecture de Zagier”

'Scattering amplitudes' et identités fonctionnelles

- *'Scattering amplitudes'* $\mathbf{l} = \int_{\Delta} \Psi$ (important en PPHE)

'Scattering amplitudes' et identités fonctionnelles

- 'Scattering amplitudes' $I = \int_{\Delta} \Psi$ (important en PPHE)
 $I = I' + \mathcal{R}$

'Scattering amplitudes' et identités fonctionnelles

- 'Scattering amplitudes' $I = \int_{\Delta} \Psi$ (important en PPHE)

$$I = I' + \mathcal{R}$$

$$I = I' + \sum_{i \in I} \mathbf{F}_i(x_i)$$

'Scattering amplitudes' et identités fonctionnelles

- 'Scattering amplitudes' $I = \int_{\Delta} \Psi$ (important en PPHE)
 $I = I' + \mathcal{R}$
 $I = I' + \sum_{i \in I} \mathbf{F}_i(x_i)$
- [dDDS] 'The 2-loop hexagon Wilson loop in $\mathcal{N} = 4$ SYM' (2010)
 $\mathcal{R}_{6,WL}^{(2)}$ = 'remainder' : formule de 17 pages !

$$\begin{aligned}
& G\left(0, \frac{1}{1-u_3}, 1; 1\right) \ln u_1 + G\left(\frac{1}{1-u_2}, 0, 1; 1\right) \ln u_1 + G \\
& 2G\left(\frac{1}{1-u_2}, 1, 1; 1\right) \ln u_1 + G\left(\frac{1}{1-u_2}, 1, 1; 1-u_2\right) \ln u_1 \\
& G\left(\frac{1}{1-u_3}, 0, 1; 1\right) \ln u_1 + G\left(\frac{1}{1-u_3}, 1, 0; 1\right) \ln u_1 - 2G \\
& \mathcal{G}(0, v_{213}, 0; 1) \ln u_1 + \mathcal{G}(0, v_{213}, 1; 1) \ln u_1 - \mathcal{G}\left(0, v_{213}, \frac{1}{1-u_3}\right) \\
& \mathcal{G}(v_{213}, 1, 0; 1) \ln u_1 + 2\mathcal{G}(v_{213}, 1, 1; 1) \ln u_1 - \mathcal{G}\left(v_{213}, 1, \frac{1}{1-u_3}\right) \\
& G\left(v_{213}, \frac{1}{1-u_2}, 1; 1\right) \ln u_1 - G\left(0, \frac{1}{1-u_2}; 1\right) \ln u_3 \ln u_1 \\
& G\left(\frac{1}{1-u_2}, 1; 1\right) \ln u_3 \ln u_1 - G\left(\frac{1}{1-u_3}, 1; 1\right) \ln u_3 \ln u_1 \\
& \mathcal{G}(v_{213}, 1, 1) \ln u_3 \ln u_1 + \frac{1}{2} G\left(0, \frac{1}{1-u_2}; 1\right) \ln^2 u_3 + \frac{1}{2} G \\
& \frac{1}{2} G\left(\frac{1}{1-u_2}, 1; 1\right) \ln^2 u_3 + \frac{1}{2} G\left(-\frac{u_3}{u_1-u_3}, 1; 1\right) \ln^2 u_3 - \\
& \frac{1}{2} \mathcal{G}(v_{213}, 1; 1) \ln^2 u_3 + \frac{1}{2} \pi^2 G\left(0, \frac{1}{1-u_2}; 1\right) + \frac{1}{2} \pi^2 G\left(0, \frac{1}{1-u_2}\right) \\
& \frac{1}{2} \pi^2 G\left(-\frac{u_3}{u_1-u_3}, 1; 1\right) + G\left(0, 0, 0, \frac{1}{1-u_2}; 1\right) + G\left(0, \frac{1}{1-u_2}, 0, 0; 1\right) \\
& G\left(0, 0, \frac{1}{1-u_2}, \frac{1}{1-u_2}; 1\right) + G\left(0, 1, 0, \frac{1}{1-u_2}; 1\right) - 2G \\
& G\left(0, 1, \frac{1}{1-u_2}, 0; 1\right) - 2G\left(0, 1, \frac{1}{1-u_2}, 1; 1\right) + G\left(0, 1, \frac{1}{1-u_2}, 0, 0; 1\right) \\
& G\left(0, \frac{1}{1-u_2}, 0, 0; 1\right) + G\left(0, \frac{1}{1-u_2}, 0, \frac{1}{1-u_2}; 1\right) - G \\
& G\left(0, \frac{1}{1-u_2}, 1, 1-u_2; 0; 1\right) + G\left(0, \frac{1}{1-u_2}, 1, \frac{1}{1-u_2}; 1-u_2\right) \\
& G\left(0, \frac{1}{1-u_3}, 0, 1; 1\right) - G\left(0, \frac{1}{1-u_3}, 1, 0; 1\right) + G\left(0, \frac{1}{1-u_3}, 1, 0; 1\right) \\
& G\left(\frac{1}{1-u_2}, 0, 0, 1; 1\right) + G\left(\frac{1}{1-u_2}, 0, 1, 0; 1\right) - 2G \\
& G\left(\frac{1}{1-u_2}, 0, 1, \frac{1}{1-u_2}; 1\right) + G\left(\frac{1}{1-u_2}, 0, 1, \frac{1}{1-u_2}; 1\right) \\
& 2G\left(\frac{1}{1-u_2}, 1, 0, 1; 1\right) + G\left(\frac{1}{1-u_2}, 1, 0, 1; 1-u_2\right) - 2G \\
& 3G\left(\frac{1}{1-u_2}, 1, 1, 1; 1\right) - 2G\left(\frac{1}{1-u_2}, 1, 1, \frac{1}{1-u_2}; 1\right) + \\
& 2G\left(\frac{1}{1-u_2}, 1, \frac{1}{1-u_2}, 1; 1\right) + G\left(\frac{1}{1-u_2}, 1, \frac{1}{1-u_2}, 1; 1-u_2\right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{G}\left(v_{213}, \frac{1}{1-u_2}, \frac{1}{1-u_2}; 1\right) \\
& G\left(\frac{1}{1-u_2}, \frac{1}{1-u_2}, 0, 1; 1\right) + G\left(\frac{1}{1-u_2}, \frac{1}{1-u_2}, 1, 1; 1\right) \\
& G\left(\frac{1}{1-u_2}, \frac{1}{1-u_2}, 1, \frac{1}{1-u_2}; 1\right) + G\left(\frac{1}{1-u_2}, \frac{1}{1-u_2}, 1, 1; 1-u_2\right) \\
& G\left(\frac{1}{1-u_3}, 0, 0, 1; 1\right) + G\left(\frac{1}{1-u_3}, 0, 1, 0; 1\right) \\
& G\left(\frac{1}{1-u_3}, 1, 0, 0; 1\right) - 2G\left(\frac{1}{1-u_3}, 1, 0, 1; 1\right) \\
& 3G\left(\frac{1}{1-u_3}, 1, 1, 1; 1\right) - \frac{1}{2} \pi^2 \mathcal{G}(0, v_{213}; 1) - \frac{1}{2} \\
& \mathcal{G}(0, v_{213}, 0, 1; 1) - \mathcal{G}\left(0, v_{213}, 0, \frac{1}{1-u_2}; 1\right) + \\
& \mathcal{G}\left(0, v_{213}, 1, \frac{1}{1-u_2}; 1\right) - \mathcal{G}\left(0, v_{213}, \frac{1}{1-u_2}; 1\right) \\
& \mathcal{G}\left(0, v_{213}, \frac{1}{1-u_2}, \frac{1}{1-u_2}; 1\right) - \mathcal{G}(v_{213}, 0, 0, 1; 1) \\
& \mathcal{G}\left(v_{213}, 0, 1, \frac{1}{1-u_2}; 1\right) - \mathcal{G}\left(v_{213}, 0, \frac{1}{1-u_2}; 1\right) \\
& \mathcal{G}\left(v_{213}, 1, 0, \frac{1}{1-u_2}; 1\right) + 2\mathcal{G}(v_{213}, 1, 1, 0; 1) - 3 \\
& \mathcal{G}\left(v_{213}, 1, \frac{1}{1-u_2}, 0; 1\right) + 2\mathcal{G}\left(v_{213}, 1, \frac{1}{1-u_2}, 1; 1\right) \\
& \mathcal{G}\left(v_{213}, \frac{1}{1-u_2}, 0, 1; 1\right) - \mathcal{G}\left(v_{213}, \frac{1}{1-u_2}, 1, 0; 1\right) \\
& \mathcal{G}\left(v_{213}, \frac{1}{1-u_2}, 1, \frac{1}{1-u_2}; 1\right) - \mathcal{G}\left(v_{213}, \frac{1}{1-u_2}, \frac{1}{1-u_2}, 1; 1\right) \\
& G\left(0, 1, \frac{1}{1-u_2}; 1\right) \ln u_3 + G\left(0, \frac{1}{1-u_2}, 0, 1; 1\right) \\
& G\left(0, \frac{1}{1-u_3}, 0; 1\right) \ln u_3 + G\left(0, \frac{1}{1-u_3}, 1; 1\right) \\
& G\left(\frac{1}{1-u_2}, 1, 0; 1\right) \ln u_3 + 2G\left(\frac{1}{1-u_2}, 1, 1; 1\right) \\
& G\left(\frac{1}{1-u_2}, \frac{1}{1-u_2}, 1; 1\right) \ln u_3 - G\left(\frac{1}{1-u_3}, 0, 1; 1\right) \\
& 2G\left(\frac{1}{1-u_2}, 1, 1, 1\right) \ln u_3 + \mathcal{G}(0, v_{213}, 0, 1) \ln u_3 \\
& \mathcal{G}\left(0, v_{213}, \frac{1}{1-u_2}; 1\right) \ln u_3 + \mathcal{G}(v_{213}, 0, 1; 1) \ln u_3 + \mathcal{G}(v_{213}, 1, 0; 1) \ln u_3 - \\
& 2\mathcal{G}(v_{213}, 1, 1; 1) \ln u_3 + \mathcal{G}\left(v_{213}, 1, \frac{1}{1-u_2}; 1\right) \ln u_3 + \mathcal{G}\left(v_{213}, \frac{1}{1-u_2}, 1; 1\right) \ln u_3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& G\left(0, \frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_1+u_2}, \frac{1}{u_1+u_2}; 1\right) + 2G\left(0, \frac{1}{u_1+u_2}, 0, \frac{1}{u_1+u_2}; 1\right) + 2G\left(0, \frac{1}{u_1+u_2}, 0, \frac{1}{u_2}; 1\right) - \\
& 4G\left(0, \frac{1}{u_1+u_2}, \frac{1}{u_1+u_2}, \frac{1}{u_1+u_2}; 1\right) + 2G\left(\frac{1}{u_1}, 0, 0, \frac{1}{u_1}; 1\right) + 4G\left(\frac{1}{u_1}, 0, 0, \frac{1}{u_2}; 1\right) - \\
& 2G\left(\frac{1}{u_1}, 0, 0, \frac{1}{u_1+u_2}; 1\right) - G\left(\frac{1}{u_1}, 0, \frac{1}{u_1+u_2}, \frac{1}{u_1+u_2}; 1\right) - G\left(\frac{1}{u_1}, 0, \frac{1}{u_1+u_2}, \frac{1}{u_2}; 1\right) - \\
& 2G\left(\frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_1+u_2}, 0, \frac{1}{u_1}; 1\right) - G\left(\frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_1+u_2}, 0, \frac{1}{u_2}; 1\right) + 4G\left(\frac{1}{u_2}, 0, 0, \frac{1}{u_1}; 1\right) + \\
& 2G\left(\frac{1}{u_2}, 0, 0, \frac{1}{u_2}; 1\right) - 2G\left(\frac{1}{u_2}, 0, 0, \frac{1}{u_1+u_2}; 1\right) - G\left(\frac{1}{u_2}, 0, \frac{1}{u_1+u_2}, \frac{1}{u_1}; 1\right) - \\
& G\left(\frac{1}{u_2}, 0, \frac{1}{u_1+u_2}, \frac{1}{u_2}; 1\right) - G\left(\frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_1+u_2}, 0, \frac{1}{u_1}; 1\right) - G\left(\frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_1+u_2}, 0, \frac{1}{u_2}; 1\right) + \\
& \frac{1}{3} \pi^2 H(0, 1; u_1) + \frac{1}{3} \pi^2 H(0, 1; u_2) - \frac{1}{3} \pi^2 H(0, 1; u_1+u_2) + \frac{1}{6} \pi^2 H(1, 1; u_1) + \frac{1}{6} \pi^2 H(1, 1; u_2) + \\
& 12H(0, 0, 0, 1; u_1) + 12H(0, 0, 0, 1; u_2) - 12H(0, 0, 0, 1; u_1+u_2) - 2H(0, 0, 1, 1; u_1) - \\
& 2H(0, 0, 1, 1; u_2) + 8H(0, 0, 1, 1; u_1+u_2) - H(0, 1, 1, 1; u_1) - H(0, 1, 1, 1; u_2) - \\
& 4H(0, 1, 1, 1; u_1+u_2) - H(1, 0, 1, 1; u_1) - H(1, 0, 1, 1; u_2) - H(1, 0, 1, 1; u_1+u_2) - \\
& H(1, 1, 0, 1; u_2) + G\left(0, \frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_1+u_2}; 1\right) \ln u_1 + G\left(0, \frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_1+u_2}; 1\right) \ln u_1 - \\
& 2G\left(0, \frac{1}{u_1+u_2}, \frac{1}{u_1+u_2}; 1\right) \ln u_1 + 2G\left(0, \frac{1}{u_1+u_2}, \frac{1}{u_1+u_2}; 1\right) \ln u_1 + \\
& G\left(\frac{1}{u_1}, 0, \frac{1}{u_1+u_2}; 1\right) \ln u_1 + G\left(\frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_1+u_2}, \frac{1}{u_1+u_2}; 1\right) \ln u_1 - 2G\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{u_1}; 1\right) \ln u_1 + \\
& G\left(\frac{1}{u_2}, 0, \frac{1}{u_1+u_2}; 1\right) \ln u_1 + G\left(\frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_1+u_2}, \frac{1}{u_1+u_2}; 1\right) \ln u_1 - 4H(0, 0, 1; u_1) \ln u_1 - \\
& 4H(0, 0, 1; u_2) \ln u_1 + 4H(0, 0, 1; u_1+u_2) \ln u_1 + H(0, 1, 1; u_1) \ln u_1 - H(0, 1, 1; u_2) \ln u_1 - \\
& 2H(0, 1, 1; u_1+u_2) \ln u_1 - H(1, 0, 1; u_1) \ln u_1 - H(1, 0, 1; u_2) \ln u_1 + H(1, 1, 1; u_1) \ln u_1 + \\
& G\left(0, \frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_1+u_2}; 1\right) \ln u_2 + G\left(0, \frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_1+u_2}; 1\right) \ln u_2 - 2G\left(0, \frac{1}{u_1+u_2}, \frac{1}{u_1+u_2}; 1\right) \ln u_2 + \\
& 2G\left(0, \frac{1}{u_1+u_2}, \frac{1}{u_1+u_2}; 1\right) \ln u_2 - 2G\left(\frac{1}{u_1}, 0, \frac{1}{u_1+u_2}; 1\right) \ln u_2 + G\left(\frac{1}{u_1}, 0, \frac{1}{u_1+u_2}; 1\right) \ln u_2 + \\
& G\left(\frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_1+u_2}, \frac{1}{u_1+u_2}; 1\right) \ln u_2 + G\left(\frac{1}{u_2}, 0, \frac{1}{u_1+u_2}; 1\right) \ln u_2 + \\
& G\left(\frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_1+u_2}, \frac{1}{u_1+u_2}; 1\right) \ln u_2 - 4H(0, 0, 1; u_1) \ln u_2 - 4H(0, 0, 1; u_2) \ln u_2 + \\
& 4H(0, 0, 1; u_1+u_2) \ln u_2 - H(0, 1, 1; u_1) \ln u_2 + H(0, 1, 1; u_2) \ln u_2 - \\
& 2H(0, 1, 1; u_1+u_2) \ln u_2 - H(1, 0, 1; u_1) \ln u_2 - H(1, 0, 1; u_2) \ln u_2 + H(1, 1, 1; u_2) \ln u_2 - \\
& G\left(\frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_1+u_2}; 1\right) \ln u_1 \ln u_2 + 2H(0, 1; u_1) \ln u_1 \ln u_2 + 2H(0, 1; u_2) \ln u_1 \ln u_2 - \\
& 2H(0, 1; u_1+u_2) \ln u_1 \ln u_2 + H(1, 1; u_1) \ln u_1 \ln u_2 + H(1, 1; u_2) \ln u_1 \ln u_2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -G\left(0, \frac{1}{1-u_2}; 1\right) \ln u_1 + \\
& G\left(1, \frac{1}{1-u_2}; v\right) \ln u_1 + G\left(\frac{1}{1-u_2}, 0; 1\right) \ln u_1 - \\
& G\left(\frac{1}{1-u_2}, 1; v\right) \ln u_1 + G\left(\frac{1}{1-u_2}, \frac{1}{1-u_2}; 1\right) \ln u_1 -
\end{aligned}$$

Classical Polylogarithms for Amplitudes and Wilson Loops

A. B. Goncharov,¹ M. Spradlin,² C. Vergu,² and A. Volovich²

¹*Department of Mathematics, Brown University, Box 1917, Providence, Rhode Island 02912, USA*

²*Department of Physics, Brown University, Box 1843, Providence, Rhode Island 02912, USA*

(Received 8 July 2010; published 7 October 2010)

We present a compact analytic formula for the two-loop six-particle maximally helicity violating remainder function (equivalently, the two-loop lightlike hexagon Wilson loop) in $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric Yang-Mills theory in terms of the classical polylogarithm functions Li_k with cross ratios of momentum twistor invariants as their arguments. In deriving our formula we rely on results from the theory of motives.

Classical Polylogarithms for Amplitudes and Wilson Loops

A. B. Goncharov,¹ M. Spradlin,² C. Vergu,² and A. Volovich²

¹*Department of Mathematics, Brown University, Box 1917, Providence, Rhode Island 02912, USA*

²*Department of Physics, Brown University, Box 1843, Providence, Rhode Island 02912, USA*

(Received 8 July 2010; published 7 October 2010)

We present a compact analytic formula for the two-loop six-particle maximally helicity violating remainder function (equivalently, the two-loop lightlike hexagon Wilson loop) in $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric Yang-Mills theory in terms of the classical polylogarithm functions Li_k with cross ratios of momentum twistor invariants as their arguments. In deriving our formula we rely on results from the theory of motives.

$$\begin{aligned}
 R_6^{(2)}(u_1, u_2, u_3) = & \sum_{i=1}^3 \left(L_4(x_i^+, x_i^-) - \frac{1}{2} \text{Li}_4(1 - 1/u_i) \right) \\
 & - \frac{1}{8} \left(\sum_{i=1}^3 \text{Li}_2(1 - 1/u_i) \right)^2 \\
 & + \frac{1}{24} J^4 + \frac{\pi^2}{12} J^2 + \frac{\pi^4}{72}. \tag{3}
 \end{aligned}$$

'Scattering amplitudes' et identités fonctionnelles

- 'Scattering amplitudes' $I = \int_{\Delta} \Psi$ (important en PPHE)

$$I = I' + \mathcal{R}$$

$$I = I' + \sum_{i \in I} \mathbf{F}_i(x_i)$$

- [dDDS] 'The 2-loop hexagon Wilson loop in $\mathcal{N} = 4$ SYM' (2010)

$\mathcal{R}_{6,WL}^{(2)}$ = 'remainder' : formule de 17 pages !

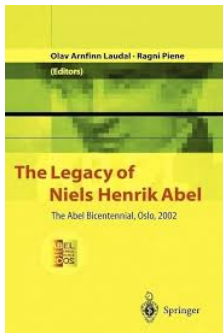
$$[\text{GSVV}] \mathcal{R}_{6,WL}^{(2)} = \sum_{i=1}^3 \left(L_4(x_i^+, x_i^-) - \frac{1}{2} \mathbf{Li}_4(v_i) \right) - \frac{1}{8} \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{Li}_2(v_i) \right)^2 + \dots$$

'Scattering amplitudes' et identités fonctionnelles

- 'Scattering amplitudes' $I = \int_{\Delta} \Psi$ (important en PPHE)
 $I = I' + \mathcal{R}$
 $I = I' + \sum_{i \in I} \mathbf{F}_i(x_i)$
- [dDDS] 'The 2-loop hexagon Wilson loop in $\mathcal{N} = 4$ SYM' (2010)
 $\mathcal{R}_{6,WL}^{(2)}$ = 'remainder' : formule de 17 pages !
[GSVV] $\mathcal{R}_{6,WL}^{(2)} = \sum_{i=1}^3 \left(L_4(x_i^+, x_i^-) - \frac{1}{2} \mathbf{Li}_4(v_i) \right) - \frac{1}{8} \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{Li}_2(v_i) \right)^2 + \dots$
- Importance de simplifier $\sum_{i \in I} \mathbf{F}_i(x_i)$ pour $\mathbf{F}_i =$ polylogarithmes
 $\mathbf{F}_i =$ hyperlogarithmes
 $\mathbf{F}_i =$ polylogs elliptiques

'Scattering amplitudes' et identités fonctionnelles

- 'Scattering amplitudes' $\mathbf{I} = \int_{\Delta} \Psi$ (important en PPHE)
 $\mathbf{I} = \mathbf{I}' + \mathcal{R}$
 $\mathbf{I} = \mathbf{I}' + \sum_{i \in I} \mathbf{F}_i(x_i)$
- [dDDS] 'The 2-loop hexagon Wilson loop in $\mathcal{N} = 4$ SYM' (2010)
 $\mathcal{R}_{6,WL}^{(2)}$ = 'remainder' : formule de 17 pages !
[GSVV] $\mathcal{R}_{6,WL}^{(2)} = \sum_{i=1}^3 \left(L_4(x_i^+, x_i^-) - \frac{1}{2} \mathbf{Li}_4(v_i) \right) - \frac{1}{8} \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{Li}_2(v_i) \right)^2 + \dots$
- Importance de simplifier $\sum_{i \in I} \mathbf{F}_i(x_i)$ pour $\mathbf{F}_i =$ polylogarithmes
 $\mathbf{F}_i =$ hyperlogarithmes
 $\mathbf{F}_i =$ polylogs elliptiques
- Justifie l'étude des identités fonctionnelles $\sum_{j \in J} \mathbf{F}_j(x_j) = \text{cst}$



[Griffiths 2002] *The legacy of Abel in algebraic geometry*

Existe-t-il une suite d'identités fonctionnelles $(\mathbf{IF}_n)_{n \geq 1}$ tq

- $\mathbf{IF}_1 =$ identité $\mathbf{Log}(x) - \mathbf{Log}(y) + \mathbf{Log}(y/x) = 0$ du log
- $\mathbf{IF}_2 =$ identité d'Abel ($\mathcal{A}b$) du dilogarithme
- $\mathbf{IF}_n =$ identité *fondamentale* pour \mathbf{Li}_n , $\forall n \geq 1$?

- En considérant des **hyperlogarithmes** AH^w de poids $w \leq 6$:

Théorème [Castravet-Pirio 2022]

Pour $w = 1, \dots, 6$, on a :

$$\left(\mathbf{HLog}^w \right) \quad \sum_{i=1}^{\kappa} \mathbf{AH}_{\Sigma_i}^w(\phi_i) = 0$$

→ Famille uniforme d'identités hyperlogarithmiques

$$\mathbf{HLog}^1 \iff \mathbf{Log}(x) - \mathbf{Log}(y) + \mathbf{Log}(y/x) = 0$$

$$\mathbf{HLog}^2 \iff \mathbf{R}(x) - \mathbf{R}(y) - \mathbf{R}\left(\frac{x}{y}\right) - \mathbf{R}\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \mathbf{R}\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0$$

⋮

$$\mathbf{HLog}^6 \iff \sum_{i=1}^{2160} \mathbf{AH}_{\Sigma_i}^6(\phi_i(x, y)) = 0$$

Une vue géométrique de l'identité d'Abel

- (Ab) $R(x) - R(y) - R\left(\frac{x}{y}\right) - R\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + R\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0$

Une vue géométrique de l'identité d'Abel

- (Ab)
$$\underset{\parallel}{\mathbf{R}(x)} - \underset{\parallel}{\mathbf{R}(y)} - \underset{\parallel}{\mathbf{R}\left(\frac{x}{y}\right)} - \underset{\parallel}{\mathbf{R}\left(\frac{1-y}{1-x}\right)} + \underset{\parallel}{\mathbf{R}\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)} = 0$$

$U_1 \qquad U_2 \qquad U_3 \qquad U_4 \qquad U_5$

Une vue géométrique de l'identité d'Abel

- ($\mathcal{A}b$)
$$\underset{\underset{U_1}{\parallel}}{\mathbf{R}(x)} - \underset{\underset{U_2}{\parallel}}{\mathbf{R}(y)} - \underset{\underset{U_3}{\parallel}}{\mathbf{R}\left(\frac{x}{y}\right)} - \underset{\underset{U_4}{\parallel}}{\mathbf{R}\left(\frac{1-y}{1-x}\right)} + \underset{\underset{U_5}{\parallel}}{\mathbf{R}\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)} = 0$$
- $U_i : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{C} : \text{fractions rat}^{\text{elles}}$ avec 4 points base (i.e. $U_i(p) = \frac{\infty}{\infty}$)

$$p_1 = [1 : 0 : 0]$$

$$p_2 = [0 : 1 : 0]$$

$$p_3 = [0 : 0 : 1]$$

$$p_4 = [1 : 1 : 1]$$

Une vue géométrique de l'identité d'Abel

- ($\mathcal{A}b$)
$$\underbrace{R(x)}_{U_1} - \underbrace{R(y)}_{U_2} - \underbrace{R\left(\frac{x}{y}\right)}_{U_3} - \underbrace{R\left(\frac{1-y}{1-x}\right)}_{U_4} + \underbrace{R\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)}_{U_5} = 0$$

- $U_i : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{C} : \text{fractions rat}^{\text{elles}}$ avec 4 points base (i.e. $U_i(p) = \frac{\infty}{\infty}$)

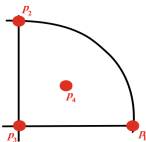
$$p_1 = [1 : 0 : 0]$$

$$p_2 = [0 : 1 : 0]$$

$$p_3 = [0 : 0 : 1]$$

$$p_4 = [1 : 1 : 1]$$

- **Éclatement** $\beta : X_4 = \mathbf{BI}_{p_1, \dots, p_4}(\mathbb{P}^2) \longrightarrow \mathbb{P}^2$



Une vue géométrique de l'identité d'Abel

- $(\mathcal{A}b)$
$$\underbrace{R(x)}_{U_1} - \underbrace{R(y)}_{U_2} - \underbrace{R\left(\frac{x}{y}\right)}_{U_3} - \underbrace{R\left(\frac{1-y}{1-x}\right)}_{U_4} + \underbrace{R\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)}_{U_5} = 0$$

- $U_i : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{C}$: fractions rat^{elles} avec 4 points base (i.e. $U_i(p) = \frac{\infty}{\infty}$)

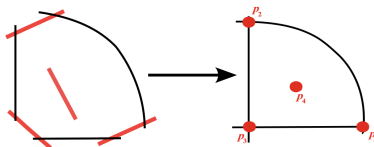
$$p_1 = [1 : 0 : 0]$$

$$p_2 = [0 : 1 : 0]$$

$$p_3 = [0 : 0 : 1]$$

$$p_4 = [1 : 1 : 1]$$

- Éclatement $\beta : X_4 = \mathbf{Bl}_{p_1, \dots, p_4}(\mathbb{P}^2) \longrightarrow \mathbb{P}^2$



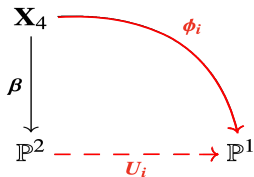
Une vue géométrique de l'identité d'Abel

- ($\mathcal{A}b$)
$$\underset{\underset{U_1}{\parallel}}{\mathbf{R}(x)} - \underset{\underset{U_2}{\parallel}}{\mathbf{R}(y)} - \underset{\underset{U_3}{\parallel}}{\mathbf{R}\left(\frac{x}{y}\right)} - \underset{\underset{U_4}{\parallel}}{\mathbf{R}\left(\frac{1-y}{1-x}\right)} + \underset{\underset{U_5}{\parallel}}{\mathbf{R}\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)} = 0$$
- Éclatement $\beta : X_4 = \mathbf{Bl}_{p_1, \dots, p_4}(\mathbb{P}^2) \longrightarrow \mathbb{P}^2$

Une vue géométrique de l'identité d'Abel

- ($\mathcal{A}b$)
$$\underbrace{R(x)}_{U_1} - \underbrace{R(y)}_{U_2} - \underbrace{R\left(\frac{x}{y}\right)}_{U_3} - \underbrace{R\left(\frac{1-y}{1-x}\right)}_{U_4} + \underbrace{R\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)}_{U_5} = 0$$

- **Éclatement** $\beta : X_4 = \text{Bl}_{p_1, \dots, p_4}(\mathbb{P}^2) \longrightarrow \mathbb{P}^2$

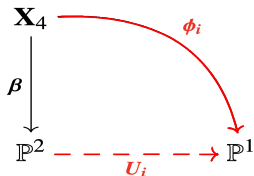


Les $\phi_1, \dots, \phi_5 : X_4 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ sont les cinq fibrations en coniques sur la surface de del Pezzo X_4

Une vue géométrique de l'identité d'Abel

- $(\mathcal{A}b) \quad R(\underset{\parallel U_1}{x}) - R(\underset{\parallel U_2}{y}) - R(\underset{\parallel U_3}{\frac{x}{y}}) - R(\underset{\parallel U_4}{\frac{1-y}{1-x}}) + R(\underset{\parallel U_5}{\frac{x(1-y)}{y(1-x)}}) = 0$

- Éclatement $\beta : X_4 = \mathbf{Bl}_{p_1, \dots, p_4}(\mathbb{P}^2) \longrightarrow \mathbb{P}^2$



Les $\phi_1, \dots, \phi_5 : X_4 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ sont les cinq fibrations en coniques sur la surface de del Pezzo X_4

- $(\mathcal{A}b) \iff \left(\begin{array}{l} \exists (\epsilon_i)_{i=1}^5 \in \{\pm 1\}^5 \\ \exists ! \text{ au signe près} \end{array} \text{ tq } \right) \sum_{i=1}^5 \epsilon_i R(\phi_i) = 0$

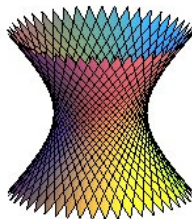
Surfaces avec des familles de courbes “simples”

Surfaces avec des familles de courbes “simples”

- [Wren 1669] *Generatio corporis cylindroidis hyperbolici ...*

L'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ est } 2\text{-reglée}$$

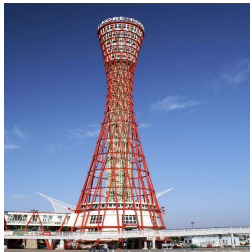
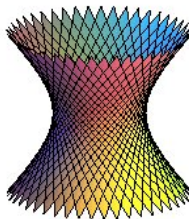


Surfaces avec des familles de courbes “simples”

- [Wren 1669] *Generatio corporis cylindroidis hyperbolici ...*

L'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ est } 2\text{-reglée}$$



Kobe port tower



Shukov tower



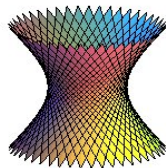
Corp° street bridge

Surfaces avec des familles de courbes “simples”

- [Wren 1669] *Generatio corporis cylindroidis hyperbolici ...*

L'hyperboloïde à une nappe

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ est *2-reglée*

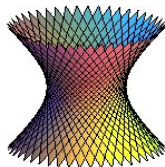


Surfaces avec des familles de courbes “simples”

- [Wren 1669] *Generatio corporis cylindroidis hyperbolici ...*

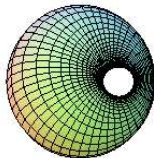
L'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ est } 2\text{-reglée}$$



- [Dupin 1802] *Applications de géométrie et de mécanique, à la Marine, aux Ponts et Chaussées, etc.* (1822)

Découverte des **cyclides** :
surfaces $S \subset \mathbb{E}^3$ dont les lignes
de courbure sont des cercles

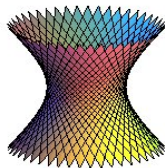


Surfaces avec des familles de courbes “simples”

- [Wren 1669] *Generatio corporis cylindroidis hyperbolici ...*

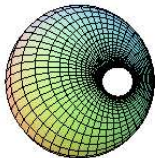
L'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ est } 2\text{-reglée}$$



- [Dupin 1802] *Applications de géométrie et de mécanique, à la Marine, aux Ponts et Chaussées, etc. (1822)*

Découverte des **cyclides** :
surfaces $S \subset \mathbb{E}^3$ dont les lignes
de courbure sont des cercles



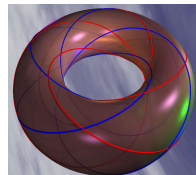
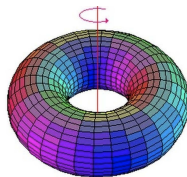
- [Liouville 1847] : Une cyclide de Dupin s'obtient comme inversion
[Thomson "] d'un tore $\mathbf{T} \subset \mathbb{E}^3$ par rapport à une sphère

Surfaces avec des familles de “courbes simples”

Surfaces avec des familles de “courbes simples”

- [Villarceau 1848]

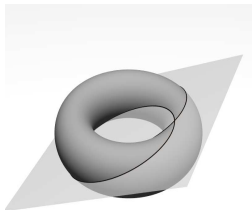
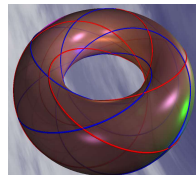
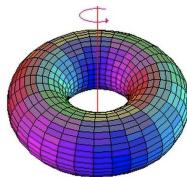
Un tore $\mathbf{T} \subset \mathbb{E}^3$ porte quatre familles de cercles inclus dedans (“Cercles de Villarceau”)



Surfaces avec des familles de “courbes simples”

- [Villarceau 1848]

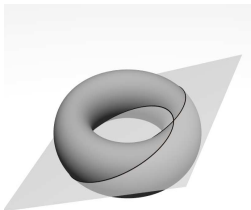
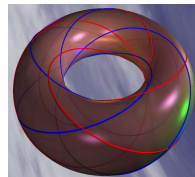
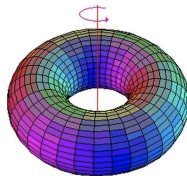
Un tore $\mathbf{T} \subset \mathbb{E}^3$ porte quatre familles de cercles inclus dedans (“Cercles de Villarceau”)



Surfaces avec des familles de “courbes simples”

- [Villarceau 1848]

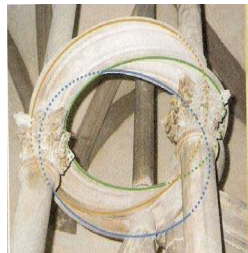
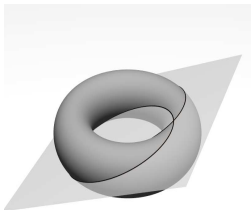
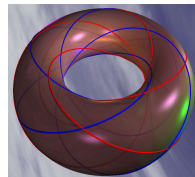
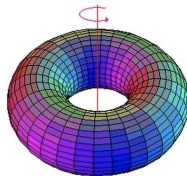
Un tore $\mathbf{T} \subset \mathbb{E}^3$ porte quatre familles de cercles inclus dedans (“Cercles de Villarceau”)



Surfaces avec des familles de “courbes simples”

- [Villarceau 1848]

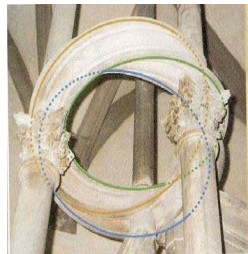
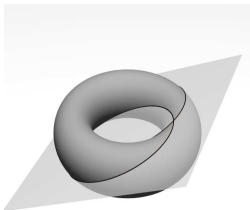
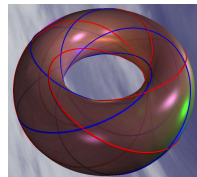
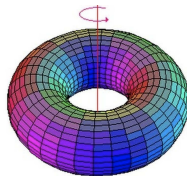
Un tore $\mathbf{T} \subset \mathbb{E}^3$ porte quatre familles de cercles inclus dedans (“Cercles de Villarceau”)



Surfaces avec des familles de “courbes simples”

- [Villarceau 1848]

Un tore $\mathbf{T} \subset \mathbb{E}^3$ porte quatre familles de cercles inclus dedans (“Cercles de Villarceau”)



- [Mannheim 1860] Par un point générique d'une cyclide $S = i(\mathbf{T}) \subset \mathbb{E}^3$ passent au moins quatre cercles inclus dans S

Les 27 droites d'une surface cubique $S \subset \mathbb{P}^3$!

Les 27 droites d'une surface cubique $S \subset \mathbb{P}^3$!

- $S = \{ F = 0 \} \subset \mathbb{P}^3$ avec $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_3]$ homogène, $d^\circ F = 3$

Les 27 droites d'une surface cubique $S \subset \mathbb{P}^3$!

- $S = \{ F = 0 \} \subset \mathbb{P}^3$ avec $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_3]$ homogène, $d^\circ F = 3$

Théorème [Cayley-Salmon 1849]

Une surface cubique $S \subset \mathbb{P}^3$ contient exactement 27 droites

Les 27 droites d'une surface cubique $S \subset \mathbb{P}^3$!

- $S = \{ F = 0 \} \subset \mathbb{P}^3$ avec $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_3]$ homogène, $d^\circ F = 3$

Théorème [Cayley-Salmon 1849]

Une surface cubique $S \subset \mathbb{P}^3$ contient exactement 27 droites

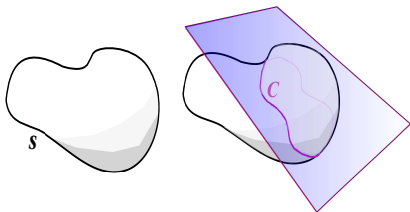


Les 27 droites d'une surface cubique $S \subset \mathbb{P}^3$!

- $S = \{ F = 0 \} \subset \mathbb{P}^3$ avec $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_3]$ homogène, $d^\circ F = 3$

Théorème [Cayley-Salmon 1849]

Une surface cubique $S \subset \mathbb{P}^3$ contient exactement 27 droites

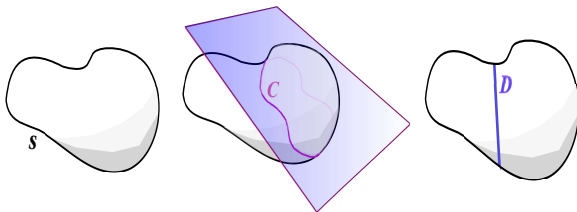


Les 27 droites d'une surface cubique $S \subset \mathbb{P}^3$!

- $S = \{ F = 0 \} \subset \mathbb{P}^3$ avec $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_3]$ homogène, $d^\circ F = 3$

Théorème [Cayley-Salmon 1849]

Une surface cubique $S \subset \mathbb{P}^3$ contient exactement 27 droites

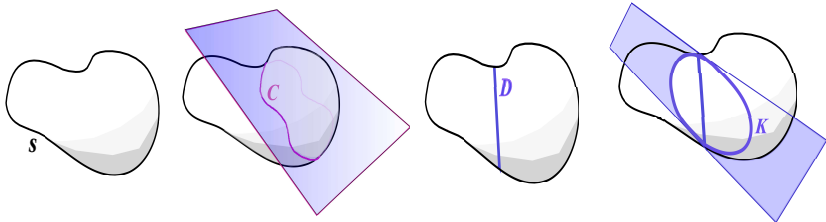


Les 27 droites d'une surface cubique $S \subset \mathbb{P}^3$!

- $S = \{ F = 0 \} \subset \mathbb{P}^3$ avec $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_3]$ homogène, $d^\circ F = 3$

Théorème [Cayley-Salmon 1849]

Une surface cubique $S \subset \mathbb{P}^3$ contient exactement 27 droites

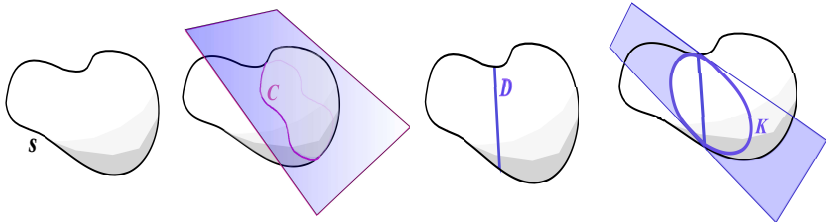


Les 27 droites d'une surface cubique $S \subset \mathbb{P}^3$!

- $S = \{F = 0\} \subset \mathbb{P}^3$ avec $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_3]$ homogène, $d^\circ F = 3$

Théorème [Cayley-Salmon 1849]

Une surface cubique $S \subset \mathbb{P}^3$ contient exactement 27 droites



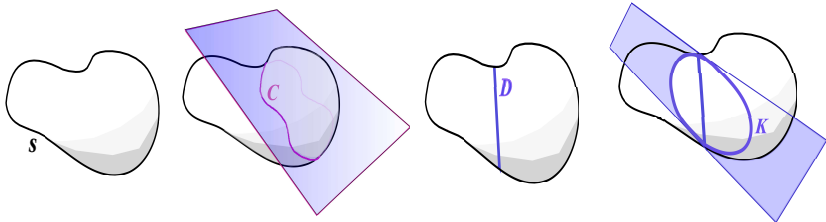
- Fait : \forall droite $D \subset S$ défini un pinceau de coniques incluses ds S

Les 27 droites d'une surface cubique $S \subset \mathbb{P}^3$!

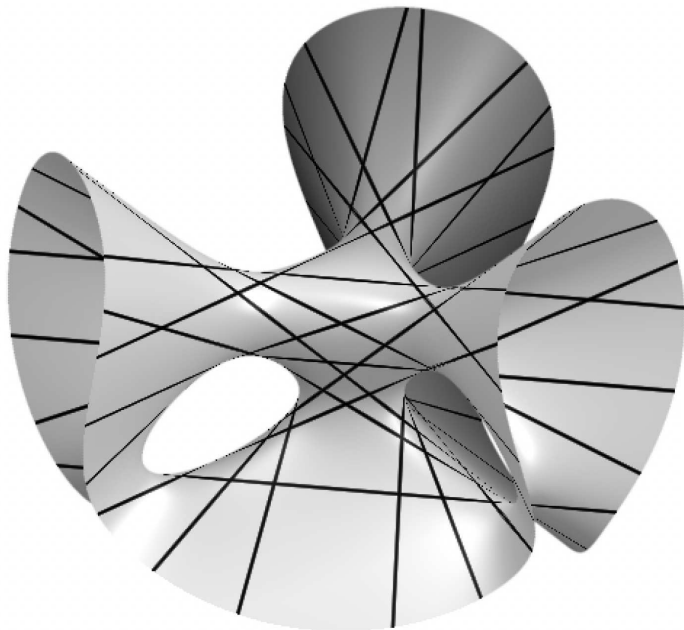
- $S = \{F = 0\} \subset \mathbb{P}^3$ avec $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_3]$ homogène, $d^\circ F = 3$

Théorème [Cayley-Salmon 1849]

Une surface cubique $S \subset \mathbb{P}^3$ contient exactement 27 droites



- **Fait** : \forall droite $D \subset S$ défini un pinceau de coniques incluses ds S
- **Corollaire** Une surface cubique est recouverte par 27 familles de coniques contenues dedans



Surfaces avec des familles de coniques

- **[Cayley-Salmon 1849]** *Il y a 27 droites dans une surface cubique*
→ *Une surface cubique est recouverte par 27 familles de coniques contenues dedans*
- **[Mannheim 1860]** *Une cyclide $\mathcal{S} \subset \mathbb{E}^3$ est recouverte par au moins quatre familles de cercles*

Surfaces avec des familles de coniques

- **[Cayley-Salmon 1849]** *Il y a 27 droites dans une surface cubique*
→ *Une surface cubique est recouverte par 27 familles de coniques contenues dedans*
- **[Mannheim 1860]** *Une cyclide $\mathcal{S} \subset \mathbb{E}^3$ est recouverte par au moins quatre familles de cercles*
- **[Kummer 1863, Moutard 1864, Darboux 1864, etc]**
→ *jusqu'à 10 familles de coniques sur une cyclide !*

Surfaces avec des familles de coniques

- **[Cayley-Salmon 1849]** *Il y a 27 droites dans une surface cubique*
→ *Une surface cubique est recouverte par 27 familles de coniques contenues dedans*
- **[Mannheim 1860]** *Une cyclide $\mathcal{S} \subset \mathbb{E}^3$ est recouverte par au moins quatre familles de cercles*
- **[Kummer 1863, Moutard 1864, Darboux 1864, etc]**
→ *jusqu'à 10 familles de coniques sur une cyclide !*



Une cyclide de **[Blum 1960]** :
surface lisse de \mathbb{E}^3 contenant
6 cercles par chaque point

Des cyclides aux surfaces de del Pezzo

Des cyclides aux surfaces de del Pezzo

- **Engouement pour l'étude des cyclides** : Darboux, Moutard, Laguerre (Fr)
Cayley, Clifford, Crofton, Roberts (UK)

Des cyclides aux surfaces de del Pezzo

- **Engouement pour l'étude des cyclides** : Darboux, Moutard, Laguerre (Fr)
Cayley, Clifford, Crofton, Roberts (UK)
- **Au XIXème, de nvx concepts en géométrie** :
 - *coord. pentasphériques* (espaces projectifs)
 - *imaginaires* (sur \mathbb{C})

Des cyclides aux surfaces de del Pezzo

- **Engouement pour l'étude des cyclides** : Darboux, Moutard, Laguerre (Fr)
Cayley, Clifford, Crofton, Roberts (UK)
- **Au XIXème, de nvx concepts en géométrie** :
 - *coord. pentasphériques* (espaces projectifs)
 - *imaginaires* (sur \mathbb{C})
- Cyclide dans $\mathbb{P}^3 =$ projection $\pi_p(\Sigma)$ d'une surface quartique $\Sigma = Q_1 \cap Q_2 \subset \mathbb{P}^4$

Des cyclides aux surfaces de del Pezzo

- **Engouement pour l'étude des cyclides** : Darboux, Moutard, Laguerre (Fr)
Cayley, Clifford, Crofton, Roberts (UK)

- **Au XIXème, de nvx concepts en géométrie** :
 - *coord. pentasphériques* (espaces projectifs)
 - *imaginaires* (sur \mathbb{C})

- Cyclide dans $\mathbb{P}^3 =$ projection $\pi_p(\Sigma)$ d'une surface quartique $\Sigma = Q_1 \cap Q_2 \subset \mathbb{P}^4$

- **[Del Pezzo 1887] Dét^o des surfaces de degré d dans \mathbb{P}^d pour $d = 3, \dots, 9$** : une telle surface est l'éclatement

$$X_r = \mathbf{Bl}_{p_1, \dots, p_r}(\mathbb{P}^2) \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

du plan projectif en $r = 9 - d$ points en “*position générale*”

Surfaces de del Pezzo : Déf^o et Propriétés

Déf^o : Surface de del Pezzo
 dP_d de degré $d \leq 9$: $\mathbb{P}^2 \supset dP_d = \mathbf{Bl}_{p_1, \dots, p_r}(\mathbb{P}^2)$

Surfaces de del Pezzo : Déf° et Propriétés

Déf° : Surface de del Pezzo
 dP_d de degré $d \leq 9$: $\mathbb{P}^d \supset dP_d = \mathbf{Bl}_{p_1, \dots, p_r}(\mathbb{P}^2)$

Prop : 1. Il y a un nombre fini de droites incluses dans dP_d

2. Il y a un nombre fini κ_r de fibrations en coniques $\phi_1, \dots, \phi_{\kappa} : dP_d \rightarrow \mathbb{P}^1$

3. Pour tout i : $\Sigma_i = \mathbf{Spectre}(\phi_i) \subset \mathbb{P}^1$ a $r - 1$ éléments

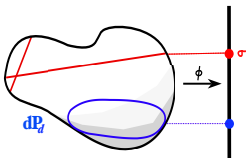
Surfaces de del Pezzo : Déf° et Propriétés

Déf° : Surface de del Pezzo dP_d de degré $d \leq 9$: $\mathbb{P}^d \supset dP_d = \mathbf{Bl}_{p_1, \dots, p_r}(\mathbb{P}^2)$

Prop : 1. Il y a un nombre fini de droites incluses dans dP_d

2. Il y a un nombre fini κ_r de fibrations en coniques $\phi_1, \dots, \phi_{\kappa} : dP_d \rightarrow \mathbb{P}^1$

3. Pour tout i : $\Sigma_i = \mathbf{Spectre}(\phi_i) \subset \mathbb{P}^1$ a $r - 1$ éléments



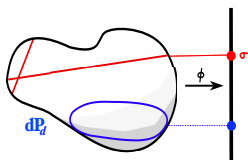
Surfaces de del Pezzo : Déf° et Propriétés

Déf° : Surface de del Pezzo dP_d de degré $d \leq 9$: $\mathbb{P}^d \supset dP_d = \mathbf{Bl}_{p_1, \dots, p_r}(\mathbb{P}^2)$

Prop : 1. Il y a un nombre fini de droites incluses dans dP_d

2. Il y a un nombre fini κ_r de fibrations en coniques $\phi_1, \dots, \phi_{\kappa} : dP_d \rightarrow \mathbb{P}^1$

3. Pour tout i : $\Sigma_i = \mathbf{Spectre}(\phi_i) \subset \mathbb{P}^1$ a $r - 1$ éléments



Def° : L' hyperlogarithme complet antisymétrique de poids $r - 2$: $\mathbf{AH}_{\Sigma_i}^{r-2} : \widehat{\mathbb{P}^1 \setminus \Sigma_i} \rightarrow \mathbb{C}$

Identité hyperlogarithmique sur dP_d

- Soit dP_d une surface de del Pezzo de degré $d \in \{1, \dots, 6\}$

Théorème [Castravet-Pirio 2022]

$\exists (\epsilon_i)_{i=1}^{\kappa} \in \{\pm 1\}^{\kappa}$ unique au signe près tel que

$$\left(\mathbf{HLog}^{r-2} \right) \quad \sum_{i=1}^{\kappa} \epsilon_i \mathbf{AH}_{\Sigma_i}^{r-2}(\phi_i) = 0$$

→ Surfaces de Del Pezzo

→ Hyperlogarithmes (aka “Intégrales itérées sur \mathbb{P}^1 ”)

Hyperlogarithmes

- Poincaré (1884), Lappo-Danilevski (1928), Chen (1973)

Hyperlogarithmes

- Poincaré (1884), Lappo-Danilevski (1928), Chen (1973)
- $a \in \mathbb{C} \rightsquigarrow \omega_a = \frac{du}{u-a}$

Hyperlogarithmes

- Poincaré (1884), Lappo-Danilevski (1928), Chen (1973)

- $a \in \mathbb{C} \rightsquigarrow \omega_a = \frac{du}{u-a} \rightsquigarrow \mathbf{L}_a(z) = \int^z \omega_a = \text{Log}(z - a)$

Hyperlogarithmes

- Poincaré (1884), Lappo-Danilevski (1928), Chen (1973)

- $a \in \mathbb{C} \rightsquigarrow \omega_a = \frac{du}{u-a} \rightsquigarrow \mathbf{L}_a(z) = \int^z \omega_a = \text{Log}(z - a)$

- $a_1, a_2 \in \mathbb{C} \rightsquigarrow \omega_{a_i} = \frac{du}{u-a_i}$

Hyperlogarithmes

- Poincaré (1884), Lappo-Danilevski (1928), Chen (1973)

- $a \in \mathbb{C} \rightsquigarrow \omega_a = \frac{du}{u-a} \rightsquigarrow \mathbf{L}_a(z) = \int^z \omega_a = \text{Log}(z - a)$

- $a_1, a_2 \in \mathbb{C} \rightsquigarrow \omega_{a_i} = \frac{du}{u-a_i} \rightsquigarrow \mathbf{L}_{a_1 a_2}(z) = \int^z \frac{du}{u-a_1} \mathbf{L}_{a_2}(u)$

Hyperlogarithmes

- Poincaré (1884), Lappo-Danilevski (1928), Chen (1973)

- $a \in \mathbb{C} \rightsquigarrow \omega_a = \frac{du}{u-a} \rightsquigarrow \mathbf{L}_a(z) = \int^z \omega_a = \text{Log}(z - a)$

- $a_1, a_2 \in \mathbb{C} \rightsquigarrow \omega_{a_i} = \frac{du}{u-a_i} \rightsquigarrow \mathbf{L}_{a_1 a_2}(z) = \int \frac{du}{u-a_1} \mathbf{L}_{a_2}(u)$

- **Def^o** : Pour $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$, l'hyperlogarithme $\mathbf{L}_{a_1 \dots a_m}$ est la fonction multivaluée sur \mathbb{P}^1 définie inductivement par

$$\mathbf{L}_{a_1 a_2 \dots a_m}(z) = \int \frac{du}{u-a_1} \mathbf{L}_{a_2 \dots a_m}(u)$$

Hyperlogarithmes

- Poincaré (1884), Lappo-Danilevski (1928), Chen (1973)

- $a \in \mathbb{C} \rightsquigarrow \omega_a = \frac{du}{u-a} \rightsquigarrow \mathbf{L}_a(z) = \int^z \omega_a = \text{Log}(z-a)$

- $a_1, a_2 \in \mathbb{C} \rightsquigarrow \omega_{a_i} = \frac{du}{u-a_i} \rightsquigarrow \mathbf{L}_{a_1 a_2}(z) = \int \frac{du}{u-a_1} \mathbf{L}_{a_2}(u)$

- **Def^o** : Pour $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$, l'hyperlogarithme $\mathbf{L}_{a_1 \dots a_m}$ est la fonction multivaluée sur \mathbb{P}^1 définie inductivement par

$$\mathbf{L}_{a_1 a_2 \dots a_m}(z) = \int \frac{du}{u-a_1} \mathbf{L}_{a_2 \dots a_m}(u)$$

- **Def^o** : Pour $\Sigma = \{a_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{C}$, l'**hyperlogarithme complet** :

$$\mathbf{AH}_{\Sigma}^m = \text{Asym}(\mathbf{L}_{a_1 \dots a_m}) = \frac{1}{m!} \sum_{\nu \in \mathfrak{S}_m} (-1)^{\nu} \mathbf{L}_{a_{\nu(1)} \dots a_{\nu(m)}}$$

Hyperlogarithmes

- Poincaré (1884), Lappo-Danilevski (1928), Chen (1973)

- $a \in \mathbb{C} \rightsquigarrow \omega_a = \frac{du}{u-a} \rightsquigarrow \mathbf{L}_a(z) = \int^z \omega_a = \text{Log}(z-a)$

- $a_1, a_2 \in \mathbb{C} \rightsquigarrow \omega_{a_i} = \frac{du}{u-a_i} \rightsquigarrow \mathbf{L}_{a_1 a_2}(z) = \int \frac{du}{u-a_1} \mathbf{L}_{a_2}(u)$

- **Def^o** : Pour $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$, l'hyperlogarithme $\mathbf{L}_{a_1 \dots a_m}$ est la fonction multivaluée sur \mathbb{P}^1 définie inductivement par

$$\mathbf{L}_{a_1 a_2 \dots a_m}(z) = \int \frac{du}{u-a_1} \mathbf{L}_{a_2 \dots a_m}(u)$$

- **Def^o** : Pour $\Sigma = \{a_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{C}$, l'**hyperlogarithme complet** :

$$AH_{\Sigma}^m = \text{Asym}(\mathbf{L}_{a_1 \dots a_m}) = \frac{1}{m!} \sum_{\nu \in \mathfrak{S}_m} (-1)^{\nu} \mathbf{L}_{a_{\nu(1)} \dots a_{\nu(m)}}$$

- **Ex** : $\Sigma = \{0, 1\} \rightsquigarrow \left\langle \begin{array}{l} \omega_0 = du/(u-0) \\ \omega_1 = du/(u-1) \end{array} \right\rangle$

Hyperlogarithmes

- Poincaré (1884), Lappo-Danilevski (1928), Chen (1973)

- $a \in \mathbb{C} \rightsquigarrow \omega_a = \frac{du}{u-a} \rightsquigarrow \mathbf{L}_a(z) = \int^z \omega_a = \text{Log}(z-a)$

- $a_1, a_2 \in \mathbb{C} \rightsquigarrow \omega_{a_i} = \frac{du}{u-a_i} \rightsquigarrow \mathbf{L}_{a_1 a_2}(z) = \int^z \frac{du}{u-a_1} \mathbf{L}_{a_2}(u)$

- **Def^o** : Pour $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$, l'hyperlogarithme $\mathbf{L}_{a_1 \dots a_m}$ est la fonction multivaluée sur \mathbb{P}^1 définie inductivement par

$$\mathbf{L}_{a_1 a_2 \dots a_m}(z) = \int^z \frac{du}{u-a_1} \mathbf{L}_{a_2 \dots a_m}(u)$$

- **Def^o** : Pour $\Sigma = \{a_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{C}$, l'**hyperlogarithme complet** :

$$AH_{\Sigma}^m = \text{Asym}(\mathbf{L}_{a_1 \dots a_m}) = \frac{1}{m!} \sum_{\nu \in \mathfrak{S}_m} (-1)^{\nu} \mathbf{L}_{a_{\nu(1)} \dots a_{\nu(m)}}$$

- **Ex** : $\Sigma = \{0, 1\} \rightsquigarrow \left\langle \begin{array}{l} \omega_0 = du/(u-0) \\ \omega_1 = du/(u-1) \end{array} \right\rangle \quad \text{Li}_n = \mathbf{L}_{0^{n-1}1} \quad \forall n \geq 1$

Hyperlogarithmes

- Poincaré (1884), Lappo-Danilevski (1928), Chen (1973)

- $a \in \mathbb{C} \rightsquigarrow \omega_a = \frac{du}{u-a} \rightsquigarrow \mathbf{L}_a(z) = \int^z \omega_a = \text{Log}(z-a)$

- $a_1, a_2 \in \mathbb{C} \rightsquigarrow \omega_{a_i} = \frac{du}{u-a_i} \rightsquigarrow \mathbf{L}_{a_1 a_2}(z) = \int^z \frac{du}{u-a_1} \mathbf{L}_{a_2}(u)$

- **Def^o** : Pour $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$, l'hyperlogarithme $\mathbf{L}_{a_1 \dots a_m}$ est la fonction multivaluée sur \mathbb{P}^1 définie inductivement par

$$\mathbf{L}_{a_1 a_2 \dots a_m}(z) = \int^z \frac{du}{u-a_1} \mathbf{L}_{a_2 \dots a_m}(u)$$

- **Def^o** : Pour $\Sigma = \{a_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{C}$, l'**hyperlogarithme complet** :

$$\mathbf{AH}_{\Sigma}^m = \text{Asym}(\mathbf{L}_{a_1 \dots a_m}) = \frac{1}{m!} \sum_{\nu \in \mathfrak{S}_m} (-1)^{\nu} \mathbf{L}_{a_{\nu(1)} \dots a_{\nu(m)}}$$

- **Ex** : $\Sigma = \{0, 1\} \rightsquigarrow \left\langle \begin{array}{l} \omega_0 = du/(u-0) \\ \omega_1 = du/(u-1) \end{array} \right\rangle \quad \text{Li}_n = \mathbf{L}_{0^{n-1}} \quad \forall n \geq 1$

$$\mathbf{AH}_{\Sigma}^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{L}_{01} - \mathbf{L}_{10}) = \mathbf{R}$$

$$\left(\mathbf{HLog}^{r-2}\right) \quad \sum_{i=1}^{\kappa} \epsilon_i \mathbf{AH}_{\Sigma_i}^{r-2}(\phi_i) = 0$$

- Une identité \mathbf{HLog}^{r-2} pour chaque del Pezzo $\mathbf{dP}_d = \mathbf{X}_r$ ($d = 9 - r$)

[d = 6] \mathbf{dP}_6 unique, $\mathbf{AH}_{\Sigma_i}^1 = \mathbf{Log} \quad (\forall i)$

$$\left(\mathbf{HLog}^1\right) \quad \mathbf{Log}(\mathbf{x}) - \mathbf{Log}(\mathbf{y}) - \mathbf{Log}(\mathbf{x}/\mathbf{y}) = 0$$

[d = 5] \mathbf{dP}_5 unique, $\mathbf{AH}_{\Sigma_i}^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{L}_{01} - \mathbf{L}_{10}) = \mathbf{R} \quad (\forall i)$

$$\left(\mathbf{HLog}^2\right) \quad \sum_{i=1}^5 \epsilon_i \mathbf{R}(\phi_i) = 0 \quad (\mathcal{A}b)$$

$$\left(\mathbf{HLog}^{r-2}\right) \quad \sum_{i=1}^{\kappa} \epsilon_i \mathbf{AH}_{\Sigma_i}^{r-2}(\phi_i) = 0$$

[d = 4] \mathbf{dP}_4 ∞^2 moduli \rightsquigarrow ∞^2 identités \mathbf{HLog}^3

$$\mathbf{AH}_1^3(x) + \mathbf{AH}_2^3\left(\frac{1}{y}\right) + \mathbf{AH}_3^3\left(\frac{y}{x}\right) + \dots$$

$$\dots + \mathbf{AH}_9^3\left(\frac{y(x-b)}{x(y-a)}\right) + \mathbf{AH}_{10}^3\left(\frac{a(b-x)}{by-ax}\right) = 0$$

$$\left(\mathbf{HLog}^{r-2} \right) \quad \sum_{i=1}^{\kappa} \epsilon_i \mathbf{AH}_{\Sigma_i}^{r-2}(\phi_i) = 0$$

[d = 4] \mathbf{dP}_4 ∞^2 moduli \rightsquigarrow ∞^2 identités \mathbf{HLog}^3

$$\begin{aligned} \mathbf{AH}_1^3(x) + \mathbf{AH}_2^3\left(\frac{1}{y}\right) + \mathbf{AH}_3^3\left(\frac{y}{x}\right) + \dots \\ \dots + \mathbf{AH}_9^3\left(\frac{y(x-b)}{x(y-a)}\right) + \mathbf{AH}_{10}^3\left(\frac{a(b-x)}{by-ax}\right) = 0 \end{aligned}$$

[d = 3] \mathbf{dP}_3 = surface cubique dans \mathbb{P}^3 \rightsquigarrow ∞^4 identités \mathbf{HLog}^4

$$\sum_{i=1}^{27} \mathbf{AH}_i^4(\phi_i) = 0$$



Identité $\sum_i \mathbf{A}H_{\Sigma_i}^{r-2}(\phi_i) = 0$ sur $dP_d = X_r$

Identité $\sum_i \mathbf{A}H_{\Sigma_i}^{r-2}(\phi_i) = 0$ sur $d\mathbf{P}_d = \mathbf{X}_r$

- $\mathcal{L} = \{ \text{Droites } D \text{ incluses dans } \mathbf{X}_r \}$

Identité $\sum_i \mathbf{A}H_{\Sigma_i}^{r-2}(\phi_i) = 0$ sur $d\mathbf{P}_d = \mathbf{X}_r$

- $\mathcal{L} = \{ \text{Droites } D \text{ incluses dans } \mathbf{X}_r \}$
- **Diviseur des droites** : $\mathbf{L} = \bigcup_{D \in \mathcal{L}} D \subset \mathbf{X}_r$

Identité $\sum_i \mathbf{A}H_{\Sigma_i}^{r-2}(\phi_i) = 0$ sur $d\mathbf{P}_d = \mathbf{X}_r$

- $\mathcal{L} = \{ \text{Droites } D \text{ incluses dans } \mathbf{X}_r \}$
- **Diviseur des droites** : $\mathbf{L} = \bigcup_{D \in \mathcal{L}} D \subset \mathbf{X}_r$
- Fib^o en coniques $\rightsquigarrow \sum_i = \{ \sigma \mid \phi_i^{-1}(\sigma) \in \mathcal{L} + \mathcal{L} \} = \{ \sigma_i^k \}_{k=1}^{r-1}$
 $\phi_i : \mathbf{X}_r \rightarrow \mathbb{P}^1$

Identité $\sum_i \mathbf{A}H_{\Sigma_i}^{r-2}(\phi_i) = 0$ sur $dP_d = \mathbf{X}_r$

- $\mathcal{L} = \{ \text{Droites } D \text{ incluses dans } \mathbf{X}_r \}$
- **Diviseur des droites** : $\mathbf{L} = \bigcup_{D \in \mathcal{L}} D \subset \mathbf{X}_r$
- Fib^o en coniques $\rightsquigarrow \Sigma_i = \{ \sigma \mid \phi_i^{-1}(\sigma) \in \mathcal{L} + \mathcal{L} \} = \{ \sigma_i^k \}_{k=1}^{r-1}$
 $\phi_i : \mathbf{X}_r \rightarrow \mathbb{P}^1$
- $\phi_i^* \left(\frac{du}{u - \sigma_i^k} \right) = \frac{d\phi_i}{\phi_i - \sigma_i^k} \in \mathbf{H}^0 \left(\mathbf{X}_r, \Omega_{\mathbf{X}_r}^1(\text{Log } \mathbf{L}) \right) = \mathbf{H}_{\mathbf{X}_r}$

Identité $\sum_i \mathbf{A}H_{\Sigma_i}^{r-2}(\phi_i) = 0$ sur $dP_d = \mathbf{X}_r$

- $\mathcal{L} = \{ \text{Droites } D \text{ incluses dans } \mathbf{X}_r \}$
- **Diviseur des droites** : $\mathbf{L} = \bigcup_{D \in \mathcal{L}} D \subset \mathbf{X}_r$
- Fib° en coniques $\rightsquigarrow \Sigma_i = \{ \sigma \mid \phi_i^{-1}(\sigma) \in \mathcal{L} + \mathcal{L} \} = \{ \sigma_i^k \}_{k=1}^{r-1}$
 $\phi_i : \mathbf{X}_r \rightarrow \mathbb{P}^1$
- $\phi_i^* \left(\frac{du}{u - \sigma_i^k} \right) = \frac{d\phi_i}{\phi_i - \sigma_i^k} \in \mathbf{H}^0 \left(\mathbf{X}_r, \Omega_{\mathbf{X}_r}^1(\text{Log } \mathbf{L}) \right) = \mathbf{H}_{\mathbf{X}_r}$
- $\mathcal{S}_{\text{ymb}} \left(\mathbf{A}H_{\Sigma_i}^{r-2}(\phi_i) \right) = \phi_i^* \mathcal{S}_{\text{ymb}} \left(\mathbf{A}H_{\Sigma_i}^{r-2} \right) = \bigwedge_{k=1}^{r-2} \left(\frac{d\phi_i}{\phi_i - \sigma_i^k} \right) \in \bigwedge^{r-2} \mathbf{H}_{\mathbf{X}_r}$

Identité $\sum_i \mathbf{A}H_{\Sigma_i}^{r-2}(\phi_i) = 0$ sur $dP_d = \mathbf{X}_r$

- $\mathcal{L} = \{ \text{Droites } D \text{ incluses dans } \mathbf{X}_r \}$
- **Diviseur des droites** : $\mathbf{L} = \bigcup_{D \in \mathcal{L}} D \subset \mathbf{X}_r$
- Fib° en coniques $\rightsquigarrow \Sigma_i = \{ \sigma \mid \phi_i^{-1}(\sigma) \in \mathcal{L} + \mathcal{L} \} = \{ \sigma_i^k \}_{k=1}^{r-1}$
 $\phi_i : \mathbf{X}_r \rightarrow \mathbb{P}^1$
- $\phi_i^* \left(\frac{du}{u - \sigma_i^k} \right) = \frac{d\phi_i}{\phi_i - \sigma_i^k} \in \mathbf{H}^0 \left(\mathbf{X}_r, \Omega_{\mathbf{X}_r}^1(\text{Log } \mathbf{L}) \right) = \mathbf{H}_{\mathbf{X}_r}$
- $\mathcal{S}_{\text{ymb}} \left(\mathbf{A}H_{\Sigma_i}^{r-2}(\phi_i) \right) = \phi_i^* \mathcal{S}_{\text{ymb}} \left(\mathbf{A}H_{\Sigma_i}^{r-2} \right) = \wedge_{k=1}^{r-2} \left(\frac{d\phi_i}{\phi_i - \sigma_i^k} \right) \in \wedge^{r-2} \mathbf{H}_{\mathbf{X}_r}$

$$\sum_i \mathbf{A}H_{\Sigma_i}^{r-2}(\phi_i) = 0 \iff \sum_i \wedge_{k=1}^{r-2} \left(\frac{d\phi_i}{\phi_i - \sigma_i^k} \right) = 0 \quad \text{ds} \quad \wedge^{r-2} \mathbf{H}_{\mathbf{X}_r}$$

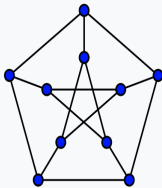
Groupe de Weyl de $d\mathbf{P}_d = \mathbf{X}_r = \mathbf{BI}_{p_1, \dots, p_r}(\mathbb{P}^2)$

- $\mathcal{L}_r = \{ \text{Droites } D \subset \mathbf{X}_r \}$ \rightsquigarrow Graphe d'incidence $\Gamma_{\mathcal{L}_r}$

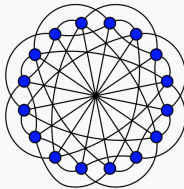
Groupe de Weyl de $dP_d = \mathbf{X}_r = \mathbf{BI}_{p_1, \dots, p_r}(\mathbb{P}^2)$

- $\mathcal{L}_r = \{ \text{Droites } D \subset \mathbf{X}_r \} \rightsquigarrow$ Graphe d'incidence $\Gamma_{\mathcal{L}_r}$

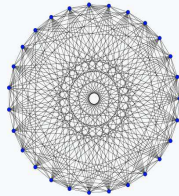
Petersen graph



Clebsch graph

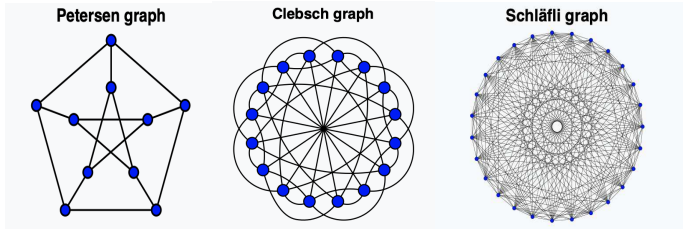


Schläfli graph



Groupe de Weyl de $d\mathbb{P}_d = \mathbf{X}_r = \mathbf{B}I_{p_1, \dots, p_r}(\mathbb{P}^2)$

- $\mathcal{L}_r = \{ \text{Droites } D \subset \mathbf{X}_r \} \rightsquigarrow$ Graphe d'incidence $\Gamma_{\mathcal{L}_r}$



- Def^o/Prop^o : $\text{Aut}(\Gamma_{\mathcal{L}_r}) = W_r$: Groupe de Weyl de type E_r

$$E_4 = A_4 \quad \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet - \bullet - \bullet - \bullet \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \end{array}$$

$$E_5 = D_5 \quad \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet - \bullet - \bullet - \bullet \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \end{array}$$

$$E_6 \quad \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \end{array}$$

$$E_7 \quad \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array}$$

$$E_8 \quad \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \end{array}$$

$$\sum_i \mathbf{A} \mathbf{H}_{\Sigma_i}^{r-2}(\phi_i) = 0 \iff \sum_i \wedge_{k=1}^{r-2} \left(\frac{d\phi_i}{\phi_i - \sigma_i^k} \right) = 0 \quad ds \wedge^{r-2} \mathbf{H}_{X_r}$$

$$\sum_i \mathbf{A} \mathbf{H}_{\Sigma_i}^{r-2}(\phi_i) = 0 \iff \sum_i \wedge_{k=1}^{r-2} \left(\frac{d\phi_i}{\phi_i - \sigma_i^k} \right) = 0 \quad \text{ds} \quad \wedge^{r-2} \mathbf{H}_{X_r}$$

- $\mathbf{H}_{X_r} = \mathbf{H}^0\left(\Omega_{X_r}^1(\text{Log } \mathbf{L}_r)\right) \xrightarrow{\oplus_{\ell} \text{Res}_{\ell}} \mathbb{C} \mathcal{L}_r$ linéaire injective

$$\sum_i \mathbf{A} \mathbf{H}_{\Sigma_i}^{r-2}(\phi_i) = 0 \iff \sum_i \wedge_{k=1}^{r-2} \left(\frac{d\phi_i}{\phi_i - \sigma_i^k} \right) = 0 \quad \text{ds} \quad \wedge^{r-2} \mathbf{H}_{X_r}$$

- $\mathbf{H}_{X_r} = \mathbf{H}^0\left(\Omega_{X_r}^1(\text{Log } L_r)\right) \xrightarrow{\oplus_{\ell} \text{Res}_{\ell}} \mathbb{C} \mathcal{L}_r$ linéaire injective
- $\rightsquigarrow \wedge^{r-2} \mathbf{H}_{X_r} \hookrightarrow \wedge^{r-2} \mathbb{C} \mathcal{L}_r$

$$\sum_i \mathbf{A} \mathbf{H}_{\Sigma_i}^{r-2}(\phi_i) = 0 \iff \sum_i \wedge_{k=1}^{r-2} \left(\frac{d\phi_i}{\phi_i - \sigma_i^k} \right) = 0 \quad \text{ds} \quad \wedge^{r-2} \mathbf{H}_{X_r}$$

- $\mathbf{H}_{X_r} = \mathbf{H}^0\left(\Omega_{X_r}^1(\text{Log } L_r)\right) \xrightarrow{\oplus_{\ell} \text{Res}_{\ell}} \mathbb{C} \mathcal{L}_r$ linéaire injective
- $\rightsquigarrow \wedge^{r-2} \mathbf{H}_{X_r} \hookrightarrow \wedge^{r-2} \mathbb{C} \mathcal{L}_r \longleftarrow \mathbf{W}(E_r)\text{-représentation}$

$$\sum_i \mathbf{A} \mathbf{H}_{\Sigma_i}^{r-2}(\phi_i) = 0 \iff \sum_i \wedge_{k=1}^{r-2} \left(\frac{d\phi_i}{\phi_i - \sigma_i^k} \right) = 0 \quad \text{ds} \quad \wedge^{r-2} \mathbf{H}_{X_r}$$

- $\mathbf{H}_{X_r} = \mathbf{H}^0\left(\Omega_{X_r}^1(\text{Log } L_r)\right) \xrightarrow{\oplus_{\ell} \text{Res}_{\ell}} \mathbb{C} \mathcal{L}_r$ linéaire injective
- $\rightsquigarrow \wedge^{r-2} \mathbf{H}_{X_r} \hookrightarrow \wedge^{r-2} \mathbb{C} \mathcal{L}_r \xleftarrow{\quad} \mathbf{W}(E_r)$ -représentation
- Vu dans $\wedge^{r-2} \mathbb{C} \mathcal{L}_r$, l'élément $\sum_i \wedge_{k=1}^{r-2} \left(\frac{d\phi_i}{\phi_i - \sigma_i^k} \right)$
 - est $\mathbf{W}(E_r)$ -invariant
 - se transforme comme la signature
 - est nul !

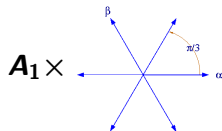
$$\sum_i \mathbf{A} \mathbf{H}_{\Sigma_i}^{r-2}(\phi_i) = 0 \iff \sum_i \wedge_{k=1}^{r-2} \left(\frac{d\phi_i}{\phi_i - \sigma_i^k} \right) = 0 \quad \text{ds} \quad \wedge^{r-2} \mathbf{H}_{X_r}$$

- $\mathbf{H}_{X_r} = \mathbf{H}^0\left(\Omega_{X_r}^1(\text{Log } L_r)\right) \xrightarrow{\oplus_{\ell} \text{Res}_{\ell}} \mathbb{C} \mathcal{L}_r$ linéaire injective
 - $\rightsquigarrow \wedge^{r-2} \mathbf{H}_{X_r} \hookrightarrow \wedge^{r-2} \mathbb{C} \mathcal{L}_r \longleftarrow \mathbf{W}(E_r)$ -représentation
 - Vu dans $\wedge^{r-2} \mathbb{C} \mathcal{L}_r$, l'élément $\sum_i \wedge_{k=1}^{r-2} \left(\frac{d\phi_i}{\phi_i - \sigma_i^k} \right)$
 - est $\mathbf{W}(E_r)$ -invariant
 - se transforme comme la signature
 - est nul!
- \implies On a donc $\sum_i \mathbf{A} \mathbf{H}_{\Sigma_i}^{r-2}(\phi_i) = 0$ □

Logarithme

$$\text{Log}(x) + \text{Log}(y) - \text{Log}(xy) = 0$$

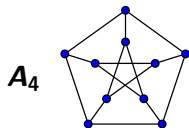
$$dP_6 = \text{BI}_3(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^6$$



Dilogarithme

$$R(x) - R(y) \cdots + R\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0$$

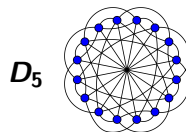
$$dP_5 = \text{BI}_4(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$$



Hyperlog de poids 3

$$\sum_{i=1}^{10} \text{AH}_i^3(U_i(x, y)) = 0$$

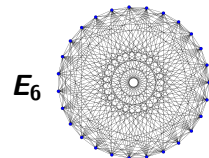
$$dP_4 = Q_1 \cap Q_2 \subset \mathbb{P}^4$$



Hyperlog de poids 4

$$\sum_{i=1}^{27} \text{AH}_i^4(U_i(x, y)) = 0$$

$$dP_3 =$$

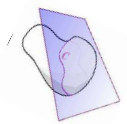


FIN

Merci de votre attention



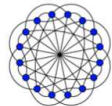
$$L_{a_1 a_2 \dots a_w}(z) = \int \frac{du}{u-a_1} L_{a_2 \dots a_w}(u)$$



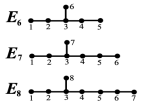
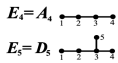
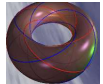
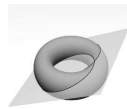
Le logarithme
 $\text{Log}(x) - \text{Log}(y) - \text{Log}(x/y) = 0$



FIN



Merci de votre attention



$$R(x) - R(y) - R\left(\frac{x}{y}\right) - R\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + R\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0$$

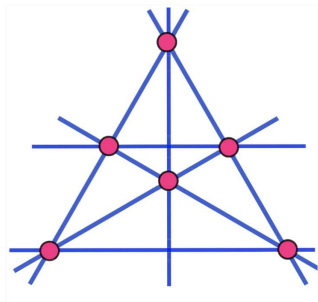
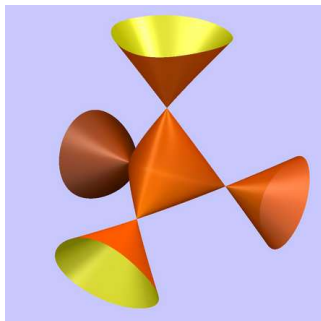
Resources

- **V. Del Duca & al:** *The two-loop hexagon Wilson loop...*
- **A. Goncharov & al:** *Classical Polylogarithms for Amplitudes*
- **P.A. Griffiths :** *The Legacy of Abel in Algebraic Geometry*
- **B. Kloeckner :** *Fibration de Hopf et cercles de Villarceau*
- **N. Lubbes:** *Surfaces that contain two circles through each point*
- **Y. Manin:** *Cubic forms*
- **D. Zagier:** *The Dilogarithm Function*

- **Identité de Spence-Kummer (1809-1840) :**

$$\begin{aligned}
 & 2\mathcal{L}_3(x) + 2\mathcal{L}_3(y) - \mathcal{L}_3\left(\frac{x}{y}\right) + 2\mathcal{L}_3\left(\frac{1-x}{1-y}\right) + 2\mathcal{L}_3\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) - \mathcal{L}_3(xy) \\
 & + 2\mathcal{L}_3\left(-\frac{x(1-y)}{(1-x)}\right) + 2\mathcal{L}_3\left(-\frac{(1-y)}{y(1-x)}\right) - \mathcal{L}_3\left(\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\right) = 0
 \end{aligned}$$

- **La surface cubique de Cayley $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^3$:**



Exemple : Li_4

- $\text{Li}_4(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k/k^4$ $\mathcal{L}_4(x) = \text{Li}_4(x) + \text{Elem}_{<4}(x)$
- **Identité fonctionnelle de Kummer $\mathcal{K}(4)$ (1840) :**

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_4\left(-\frac{x^2y\eta}{\zeta}\right) + \mathcal{L}_4\left(-\frac{y^2x\zeta}{\eta}\right) + \mathcal{L}_4\left(\frac{x^2y}{\eta^2\zeta}\right) + \mathcal{L}_4\left(\frac{y^2x}{\zeta^2\eta}\right) \\ & - 6\mathcal{L}_4(xy) - 6\mathcal{L}_4\left(\frac{xy}{\eta\zeta}\right) - 6\mathcal{L}_4\left(-\frac{xy}{\eta}\right) - 6\mathcal{L}_4\left(-\frac{xy}{\zeta}\right) \\ & - 3\mathcal{L}_4(x\eta) - 3\mathcal{L}_4(y\zeta) - 3\mathcal{L}_4\left(\frac{x}{\eta}\right) - 3\mathcal{L}_4\left(\frac{y}{\zeta}\right) \\ & - 3\mathcal{L}_4\left(-\frac{x\eta}{\zeta}\right) - 3\mathcal{L}_4\left(-\frac{y\zeta}{\eta}\right) - 3\mathcal{L}_4\left(-\frac{x}{\eta\zeta}\right) - 3\mathcal{L}_4\left(-\frac{y}{\eta\zeta}\right) \\ & + 6\mathcal{L}_4(x) + 6\mathcal{L}_4(y) + 6\mathcal{L}_4\left(-\frac{x}{\zeta}\right) + 6\mathcal{L}_4\left(-\frac{y}{\eta}\right) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$(\zeta = 1 - x, \eta = 1 - y)$$