Fonctions hypergéométriques et surfaces plates

Luc PIRIO

(CNRS & Université Versailles-Saint Quentin)

11 mai 2017

Plan

I. **Fonction hypergéométrique $F(a, b, c, \cdot)$**

II. **Surfaces plates**

III. **Le cas elliptique**

- $(a)_n = a(a+1)\cdots\big(a+(n-1)\big) \qquad \big(a \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}\big)$

- $(a)_n = a(a+1)\cdots\big(a+(n-1)\big) \qquad \big(a \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}\big)$

- **Série hypergéométrique :**

$$F(a,b,c;x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} \cdot x^n \qquad |x| < 1$$

- $(a)_n = a(a+1)\cdots\big(a+(n-1)\big) \qquad \big(a \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}\big)$

- **Série hypergéométrique :**

$$F(a,b,c;x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} \cdot x^n \qquad |x| < 1$$

- **Équation hypergéométrique :** sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$

$$\big(\mathcal{E}_{\mathbf{a,b,c}}\big) \quad : \quad \mathbf{F}'' + \frac{c-(1+a+b)x}{x(1-x)} \cdot \mathbf{F}' - \frac{ab}{x(1-x)} \cdot \mathbf{F} = 0$$

- $(a)_n = a(a+1)\cdots\big(a+(n-1)\big) \qquad\qquad \big(a \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}\big)$

- **Série hypergéométrique :**

$$F(a,b,c;x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(1)_n} \cdot x^n \qquad |x|< 1$$

- **Équation hypergéométrique :** sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$

$$\big(\mathcal{E}_{\mathbf{a,b,c}}\big) \quad : \quad \mathbf{F}'' + \frac{c-(1+a+b)x}{x(1-x)} \cdot \mathbf{F}' - \frac{ab}{x(1-x)} \cdot \mathbf{F} = 0$$

- **Représentation intégrale :**

$$F(a,b,c;x) = \tfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \cdot \int_{[0,1]} t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-xt)^{-b}dt$$

$$(\mathcal{E}_{\mathbf{a,b,c}}) \qquad x(1-x)\cdot \mathbf{F}'' + \big(c-(1+a+b)x\big)\cdot \mathbf{F}' - ab\cdot \mathbf{F} = 0$$

$$(\mathcal{E}_{\mathbf{a,b,c}}) \qquad x(1-x)\cdot\mathbf{F}'' + \big(c-(1+a+b)x\big)\cdot\mathbf{F}' - ab\cdot\mathbf{F} = 0$$

- **Intégrale hypergéométrique :**

$$F_\gamma(x) = \int_\gamma t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-xt)^{-b}dt$$

$$(\mathcal{E}_{\mathbf{a,b,c}}) \qquad x(1-x)\cdot\mathbf{F}'' + \big(c-(1+a+b)x\big)\cdot\mathbf{F}' - ab\cdot\mathbf{F} = 0$$

- **Intégrale hypergéométrique :**

$$F_\gamma(x) = \int_\gamma t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-xt)^{-b}dt$$

- $\big([\gamma_0]\,,\,[\gamma_\infty]\big)$ base $\iff$ $\mathbf{Sol}\big(\mathcal{E}_{\mathbf{a,b,c}}\big) = \big\langle F_{\gamma_0}\,,\,F_{\gamma_\infty}\big\rangle$

$$(\mathcal{E}_{\mathbf{a,b,c}}) \qquad x(1-x)\cdot \mathbf{F}'' + \big(c-(1+a+b)x\big)\cdot \mathbf{F}' - ab\cdot \mathbf{F} = 0$$

- **Intégrale hypergéométrique :**

$$F_\gamma(x) = \int_\gamma t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-xt)^{-b}dt$$

- $([\gamma_0]\,,\,[\gamma_\infty])$ base $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{Sol}(\mathcal{E}_{\mathbf{a,b,c}}) = \langle F_{\gamma_0}\,,\,F_{\gamma_\infty}\rangle$

- **Application de Schwarz :**

$$S_{a,b,c} = \big[F_{\gamma_0} \,:\, F_{\gamma_\infty}\big] : \widetilde{\mathbb{P}^1\setminus\{0,1,\infty\}} \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

$$\left(\mathcal{E}_{\mathbf{a,b,c}}\right) \qquad x(1-x)\cdot \mathbf{F}'' + \big(c-(1+a+b)x\big)\cdot \mathbf{F}' - ab\cdot \mathbf{F} = 0$$

- **Intégrale hypergéométrique :**

$$F_\gamma(x) = \int_\gamma t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-xt)^{-b}dt$$

- $\big([\gamma_0]\,,\,[\gamma_\infty]\big)$ base $\iff$ $\mathbf{Sol}\big(\mathcal{E}_{\mathbf{a,b,c}}\big) = \big\langle F_{\gamma_0}\,,\,F_{\gamma_\infty}\big\rangle$

- **Application de Schwarz :**

$$S_{a,b,c} = \big[F_{\gamma_0} \,:\, F_{\gamma_\infty}\big] \,:\, \widetilde{\mathbb{P}^1\setminus\{0,1,\infty\}} \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

- **Monodromie :**

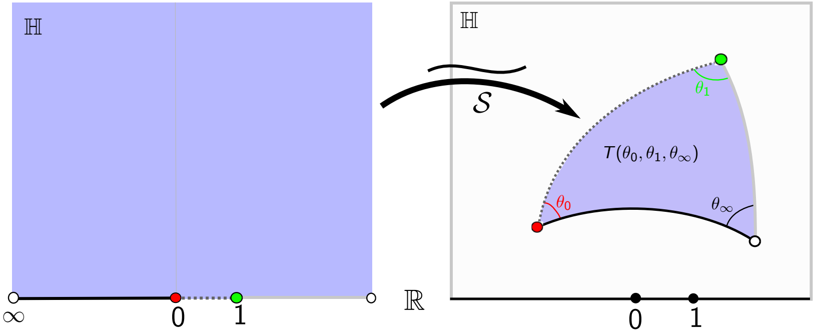
$$\mathbf{Monod} : \pi_1\big(\mathbb{P}^1\setminus\{0,1,\infty\}\big) \longrightarrow \mathbf{P}\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

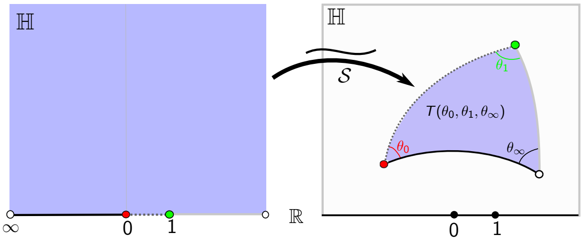
- Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que : $\quad 0 < \begin{array}{c} \theta_0 = \pi|1-c| \\ \theta_1 = \pi|c-a-b| \\ \theta_\infty = \pi|a-b| \end{array} < \pi$

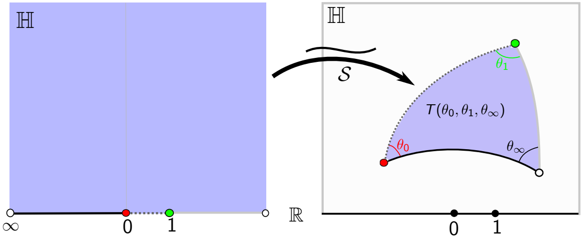
- Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que : $$0 < \begin{array}{l} \theta_0 = \pi|1-c| \\ \theta_1 = \pi|c-a-b| \\ \theta_\infty = \pi|a-b| \end{array} < \pi$$

Théorème : [Schwarz 1873]

- $\mathcal{S} = S_{a,b,c}|_{\mathbb{H}}$ induit un isomorphisme $\mathbb{H} \simeq T(\theta_0, \theta_1, \theta_\infty)$




$\mathbb{H}$
∞
0
1
$\mathbb{R}$
$\widetilde{\mathcal{S}}$
$\mathbb{H}$
θ_1
$T(\theta_0, \theta_1, \theta_\infty)$
θ_0
θ_∞
0
1



Corollaire : • $S_{a,b,c} : \widetilde{\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}} \longrightarrow \mathbb{H} \subset \mathbb{P}^1$

• $\mathbf{\Gamma}_{a,b,c} = \mathbf{Monod}(S_{a,b,c}) < \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$

• $\left[\begin{array}{c} \theta_0 = \frac{\pi}{p}, \quad \theta_1 = \frac{\pi}{q}, \quad \theta_\infty = \frac{\pi}{r} \\ \text{avec} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1 \end{array} \right] \Longrightarrow \mathbf{\Gamma}_{a,b,c}$ réseau de $\mathbf{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

- $F_\gamma(x) = \int_\gamma t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(x-t)^{-b}dt$

- $F_\gamma(x) = \int_\gamma t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(x-t)^{-b}dt$

$$= \int_\gamma \prod_{k=1}^{4}(t-u_k)^{\alpha_k}dt \qquad \text{avec} \quad \left(u_1,\ldots,u_4\right) \in \left(\mathbb{P}^1\right)^4$$

- $F_{\gamma}(x) = \int_{\gamma} t^{a-1}\,(1-t)^{c-a-1}\,(x-t)^{-b} dt$

  $= \int_{\gamma}\ \prod_{k=1}^{4}(t-u_k)^{\alpha_k}\, dt$ avec $\left(u_1,\ldots,u_4\right) \in \left(\mathbb{P}^1\right)^4$

- $u = \left(u_1,\ldots,u_{n+3}\right) \in \left(\mathbb{P}^1\right)^{n+3}$ $\boldsymbol{\alpha} = \left(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+3}\right)$

- $F_\gamma(x) = \int_\gamma t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(x-t)^{-b}dt$

  $= \int_\gamma \prod_{k=1}^4 (t-u_k)^{\alpha_k} dt$ avec $\left(u_1, \ldots, u_4\right) \in \left(\mathbb{P}^1\right)^4$

- $u = (u_1, \ldots, u_{n+3}) \in \left(\mathbb{P}^1\right)^{n+3}$ $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+3})$

$$F_\gamma(u) = \int_\gamma \prod_{k=1}^{n+3} (t-u_k)^{\alpha_k}\, dt \qquad \left(\text{avec } \sum_{k=1}^{n+3} \alpha_k = -2\right)$$

- $F_\gamma(x) = \int_\gamma t^{a-1}\,(1-t)^{c-a-1}\,(x-t)^{-b}dt$

  $= \int_\gamma \,\prod_{k=1}^{4}(t-u_k)^{\alpha_k}dt$ avec $\big(u_1,\ldots,u_4\big) \in \big(\mathbb{P}^1\big)^4$

- $u = (u_1,\ldots,u_{n+3}) \in \big(\mathbb{P}^1\big)^{n+3}$ $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+3})$

$$F_\gamma(u) = \int_\gamma \prod_{k=1}^{n+3}(t-u_k)^{\alpha_k}\,dt \qquad \Big(\text{avec } \sum_{k=1}^{n+3}\alpha_k = -2\Big)$$

- $\big([\gamma_0],\ldots,[\gamma_n]\big)$ base $\Longleftrightarrow$ $\big(F_{\gamma_0},\ldots,F_{\gamma_n}\big)$ base de $\mathbf{Sol}\big(\mathbf{E}^{\boldsymbol{\alpha}}\big)$

- $F_\gamma(x) = \int_\gamma t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(x-t)^{-b}dt$

  $= \int_\gamma \prod_{k=1}^4 (t-u_k)^{\alpha_k} dt$ avec $(u_1, \dots, u_4) \in (\mathbb{P}^1)^4$

- $u = (u_1, \dots, u_{n+3}) \in (\mathbb{P}^1)^{n+3}$ $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+3})$

$$F_\gamma(u) = \int_\gamma \prod_{k=1}^{n+3} (t-u_k)^{\alpha_k}\, dt \qquad \left(\text{avec } \sum_{k=1}^{n+3} \alpha_k = -2\right)$$

- $([\gamma_0], \dots, [\gamma_n])$ base $\iff$ $(F_{\gamma_0}, \dots, F_{\gamma_n})$ base de $\mathbf{Sol}(\mathbf{E}^{\boldsymbol{\alpha}})$

- **Système différentiel hypergéométrique :**

$$(\mathbf{E}^{\boldsymbol{\alpha}}) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{1}{u_i - u_j}\left(\alpha_i \frac{\partial F}{\partial u_j} - \alpha_j \frac{\partial F}{\partial u_i}\right), \quad 1 \leq i,j \leq n$$

- Action de $\mathbf{P}\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ $\rightsquigarrow$ normalisation $\begin{cases} u_{n+1} = 0 \\ u_{n+2} = 1 \\ u_{n+3} = \infty \end{cases}$

- Action de $\mathbf{P}\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ $\rightsquigarrow$ normalisation $\begin{cases} u_{n+1} = 0 \\ u_{n+2} = 1 \\ u_{n+3} = \infty \end{cases}$
- $F_\gamma : \widetilde{\mathcal{M}_{0,n+3}} \longrightarrow \mathbb{C}$: fonction multivaluée sur $\mathcal{M}_{0,n+3}$

- Action de $\mathbf{P}\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ $\rightsquigarrow$ normalisation $\begin{cases} u_{n+1} = 0 \\ u_{n+2} = 1 \\ u_{n+3} = \infty \end{cases}$

- $F_\gamma : \widetilde{\mathcal{M}_{0,n+3}} \longrightarrow \mathbb{C}$: fonction multivaluée sur $\mathcal{M}_{0,n+3}$

- **Application de Schwarz :**

$$S^{\alpha} = \left[F_{\gamma_0} \, : \, \cdots \, : \, F_{\gamma_n}\right] \, : \, \widetilde{\mathcal{M}_{0,n+3}} \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

- Action de $\mathbf{P}\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ $\rightsquigarrow$ normalisation $\begin{cases} u_{n+1} = 0 \\ u_{n+2} = 1 \\ u_{n+3} = \infty \end{cases}$

- $F_\gamma : \widetilde{\mathcal{M}_{0,n+3}} \longrightarrow \mathbb{C}$: fonction multivaluée sur $\mathcal{M}_{0,n+3}$

- **Application de Schwarz :**

$$S^{\boldsymbol{\alpha}} = \left[F_{\gamma_0} : \cdots : F_{\gamma_n}\right] : \widetilde{\mathcal{M}_{0,n+3}} \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

Théorème : • $S^{\boldsymbol{\alpha}} : \widetilde{\mathcal{M}_{0,n+3}} \longrightarrow \mathbb{B}^n = \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{P}^n$

- $\boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{Monod}(S^{\boldsymbol{\alpha}}) < \mathrm{Aut}\left(\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}\right) = \mathbf{P}\mathrm{U}(1,n)$

- $\boldsymbol{\alpha}$ vérifie $(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{INT}) \Longrightarrow \boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{\alpha}}$ réseau de $\mathbf{P}\mathrm{U}(1,n)$

- construction de $\boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{\alpha}}$ réseaux (N)AR de $\mathbf{P}\mathrm{U}(1,n)$

- $F_{\gamma}(u) = \int_{\gamma} \omega_u^{\boldsymbol{\alpha}}(t)$

- $F_{\gamma}(u) = \int_{\gamma} \omega_u^{\boldsymbol{\alpha}}(t)$

- $\omega_u^{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \prod_{k=1}^{n+3}(t - u_k)^{\alpha_k}\, dt$

- $F_\gamma(u) = \int_\gamma \omega_u^{\boldsymbol{\alpha}}(t)$

- $\omega_u^{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \prod_{k=1}^{n+3}(t-u_k)^{\alpha_k}\,dt$ 1-forme multivaluée sur $\mathbb{P}^1$

- $F_\gamma(u) = \int_\gamma \omega_u^{\boldsymbol{\alpha}}(t)$

- $\omega_u^{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \prod_{k=1}^{n+3}(t-u_k)^{\alpha_k}\, dt$ 1-forme multivaluée sur $\mathbb{P}^1$

- $m_u^{\boldsymbol{\alpha}} = \left|\omega_u^{\boldsymbol{\alpha}}(t)\right|^2 = \left|\prod_k (t-u_k)^{\alpha_k}\, dt\right|^2$

- $F_\gamma(u) = \int_\gamma \omega_u^{\boldsymbol{\alpha}}(t)$

- $\omega_u^{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \prod_{k=1}^{n+3}(t-u_k)^{\alpha_k}\, dt$ 1-forme multivaluée sur $\mathbb{P}^1$

- $m_u^{\boldsymbol{\alpha}} = \left|\omega_u^{\boldsymbol{\alpha}}(t)\right|^2 = \left|\prod_k (t-u_k)^{\alpha_k}\, dt\right|^2 =$
  - métrique plate sur $\mathbb{P}^1$,
  - singulière en les u_k

- $F_\gamma(u) = \int_\gamma \omega_u^{\boldsymbol{\alpha}}(t)$

- $\omega_u^{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \prod_{k=1}^{n+3}(t-u_k)^{\alpha_k}\, dt$ 1-forme multivaluée sur $\mathbb{P}^1$

- $m_u^{\boldsymbol{\alpha}} = \left|\omega_u^{\boldsymbol{\alpha}}(t)\right|^2 = \left|\prod_k (t-u_k)^{\alpha_k}\, dt\right|^2 =$
  - métrique plate sur $\mathbb{P}^1$,
  - singulière en les u_k

  - $m_u^{\boldsymbol{\alpha}} \simeq_p |dz|^2 \quad p \notin \{u_1, \ldots, u_{n+3}\}$;

- $F_\gamma(u) = \int_\gamma \omega_u^{\boldsymbol{\alpha}}(t)$
- $\omega_u^{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \prod_{k=1}^{n+3}(t-u_k)^{\alpha_k}\,dt$ 1-forme multivaluée sur $\mathbb{P}^1$
- $m_u^{\boldsymbol{\alpha}} = \left|\omega_u^{\boldsymbol{\alpha}}(t)\right|^2 = \left|\prod_k (t-u_k)^{\alpha_k}\,dt\right|^2 =$
  - métrique plate sur $\mathbb{P}^1$,
  - singulière en les u_k
  - $m_u^{\boldsymbol{\alpha}} \simeq_p |dz|^2 \quad p \notin \{u_1, \ldots, u_{n+3}\}$;
  - $m_u^{\boldsymbol{\alpha}} \simeq_{u_k} \left|z^{\alpha_k} dz\right|^2$

- $F_\gamma(u) = \int_\gamma \omega_u^{\boldsymbol{\alpha}}(t)$

- $\omega_u^{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \prod_{k=1}^{n+3}(t-u_k)^{\alpha_k}\,dt$ 1-forme multivaluée sur $\mathbb{P}^1$

- $m_u^{\boldsymbol{\alpha}} = \left|\omega_u^{\boldsymbol{\alpha}}(t)\right|^2 = \left|\prod_k (t-u_k)^{\alpha_k}\,dt\right|^2 =$
  - métrique plate sur $\mathbb{P}^1$,
  - singulière en les u_k

  - $m_u^{\boldsymbol{\alpha}} \simeq_p |dz|^2 \quad p \notin \{u_1,\ldots,u_{n+3}\}$;
  - $m_u^{\boldsymbol{\alpha}} \simeq_{u_k} \left|z^{\alpha_k}dz\right|^2$

- $\left(\mathbb{P}^1, u, m_u^{\boldsymbol{\alpha}}\right)$ *“sphère plate”* ;

- $F_\gamma(u) = \int_\gamma \omega_u^{\boldsymbol{\alpha}}(t)$

- $\omega_u^{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \prod_{k=1}^{n+3} (t-u_k)^{\alpha_k}\, dt$ 1-forme multivaluée sur $\mathbb{P}^1$

- $m_u^{\boldsymbol{\alpha}} = \left|\omega_u^{\boldsymbol{\alpha}}(t)\right|^2 = \left|\prod_k (t-u_k)^{\alpha_k}\, dt\right|^2 =$
  - métrique plate sur $\mathbb{P}^1$,
  - singulière en les u_k

  - $m_u^{\boldsymbol{\alpha}} \simeq_p |dz|^2 \quad p \notin \{u_1, \ldots, u_{n+3}\}$;
  - $m_u^{\boldsymbol{\alpha}} \simeq_{u_k} \left|z^{\alpha_k} dz\right|^2$

- $\left(\mathbb{P}^1, u, m_u^{\boldsymbol{\alpha}}\right)$ *“sphère plate”* ; $\mathcal{M}_{0,n+3} \simeq \left\{ \begin{array}{c} \text{sphères plates} \\ \text{de cette sorte} \end{array} \right\}_{/\text{isom}}$

- $F_\gamma(u) = \int_\gamma \omega_u^{\boldsymbol{\alpha}}(t)$

- $\omega_u^{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \prod_{k=1}^{n+3}(t-u_k)^{\alpha_k}\,dt$ 1-forme multivaluée sur $\mathbb{P}^1$

- $m_u^{\boldsymbol{\alpha}} = \left|\omega_u^{\boldsymbol{\alpha}}(t)\right|^2 = \left|\prod_k (t-u_k)^{\alpha_k}\,dt\right|^2 =$
  - métrique plate sur $\mathbb{P}^1$,
  - singulière en les u_k

  - $m_u^{\boldsymbol{\alpha}} \simeq_p |dz|^2 \quad p \notin \{u_1,\ldots,u_{n+3}\}$;
  - $m_u^{\boldsymbol{\alpha}} \simeq_{u_k} \left|z^{\alpha_k}dz\right|^2$

- $\left(\mathbb{P}^1, u, m_u^{\boldsymbol{\alpha}}\right)$ *"sphère plate"* ; $\mathcal{M}_{0,n+3} \simeq \left\{ \begin{array}{c} \text{sphères plates} \\ \text{de cette sorte} \end{array} \right\}_{/\text{isom}}$

Théorème : [Deligne-Mostow, Thurston]

- α vérifie $(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{INT}) \Longrightarrow \boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{Monod}(S^{\boldsymbol{\alpha}})$ réseau de $\mathbf{P}\mathrm{U}(1,n)$

Surfaces plates

Surfaces plates

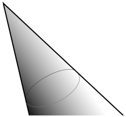
- "Surfaces plates avec des singularités coniques"

Surfaces plates

- "Surfaces plates avec des singularités coniques"
- *"plat"* $=$ localement euclidien (métrique $m = dx^2 + dy^2 = |dz|^2$)

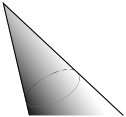
Surfaces plates

- "Surfaces plates avec des singularités coniques"
- *"plat"* = localement euclidien (métrique $m = dx^2 + dy^2 = |dz|^2$)
- avec des singularités *"coniques"* :



Surfaces plates

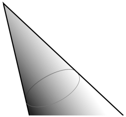
- "Surfaces plates avec des singularités coniques"
- *"plat"* $=$ localement euclidien (métrique $m = dx^2 + dy^2 = |dz|^2$)
- avec des singularités *"coniques"* :



- **Exemples :**

Surfaces plates

- "Surfaces plates avec des singularités coniques"
- *"plat"* $=$ localement euclidien (métrique $m = dx^2 + dy^2 = |dz|^2$)
- avec des singularités *"coniques"* :

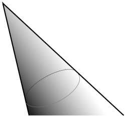


- **Exemples :**
  - *"surface polygonale" :* en recollant des polygônes euclidiens

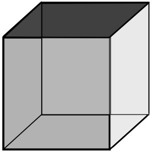
Surfaces plates

- "Surfaces plates avec des singularités coniques"

- *"plat"* $=$ localement euclidien (métrique $m = dx^2 + dy^2 = |dz|^2$)

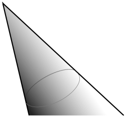
- avec des singularités *"coniques"* : 

- **Exemples :**
  - *"surface polygonale"* : en recollant des polygônes euclidiens

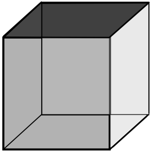


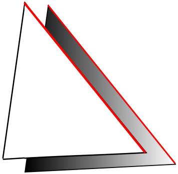
Surfaces plates

- "Surfaces plates avec des singularités coniques"
- *"plat"* = localement euclidien (métrique $m = dx^2 + dy^2 = |dz|^2$)
- avec des singularités *"coniques"* :



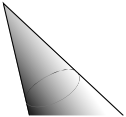
- **Exemples :**
  - *"surface polygonale"* : en recollant des polygônes euclidiens



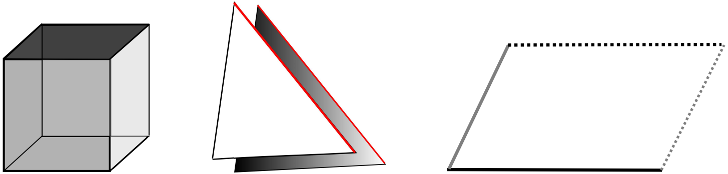


Surfaces plates

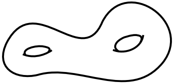
- "Surfaces plates avec des singularités coniques"
- *"plat"* = localement euclidien (métrique $m = dx^2 + dy^2 = |dz|^2$)
- avec des singularités *"coniques"* :



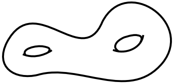
- **Exemples :**
  - *"surface polygonale" :* en recollant des polygônes euclidiens



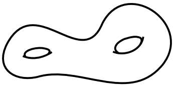
Surfaces plates

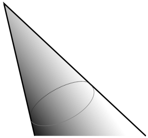
- $S =$  surface de genre g

Surfaces plates

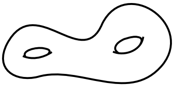
- $S =$  surface de genre g $\qquad S^* = S \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$

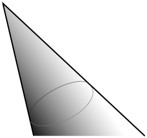
Surfaces plates

- $S =$  surface de genre g $\qquad S^* = S \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$

- C_θ = cône euclidien d'angle $\theta =$  $(\theta > 0)$

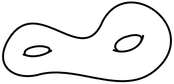
Surfaces plates

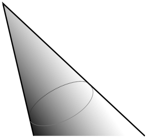
- $S =$  surface de genre g $\qquad S^* = S \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$

- C_θ = cône euclidien d'angle $\theta =$  $(\theta > 0)$

Déf : une métrique plate m sur S^* a une *singularité conique* en p_k si

Surfaces plates

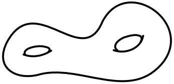
- $S =$  surface de genre g $\qquad S^* = S \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$

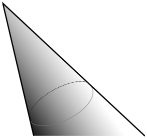
- C_θ = cône euclidien d'angle $\theta =$  $(\theta > 0)$

Déf : une métrique plate m sur S^* a une *singularité conique* en p_k si

- $(S, m) \simeq_{p_k} C_{\theta_k}$ pour un certain *angle conique* $\theta_k > 0$

Surfaces plates

- $S =$  surface de genre g $\qquad S^* = S \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$

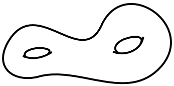
- C_θ = cône euclidien d'angle $\theta =$  $(\theta > 0)$

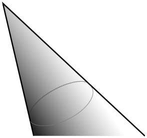
Déf : une métrique plate m sur S^* a une *singularité conique* en p_k si

- $(S, m) \simeq_{p_k} C_{\theta_k}$ pour un certain *angle conique* $\theta_k > 0$

$\iff$ • $m = |z^{\alpha_k} dz|^2$ pour un certain *exposant* $\alpha_k > -1$

Surfaces plates

- $S =$  surface de genre g $\qquad S^* = S \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$

- C_θ = cône euclidien d'angle $\theta =$  $(\theta > 0)$

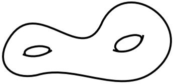
Déf : une métrique plate m sur S^* a une *singularité conique* en p_k si

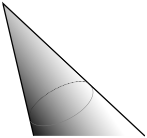
- $(S, m) \simeq_{p_k} C_{\theta_k}$ pour un certain *angle conique* $\theta_k > 0$

$\iff$ • $m = |z^{\alpha_k} dz|^2$ pour un certain *exposant* $\alpha_k > -1$

- $\theta_k = 2\pi(1 + \alpha_k)$

Surfaces plates

- $S =$  surface de genre g $\quad S^* = S \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$

- C_θ = cône euclidien d'angle θ =  $(\theta > 0)$

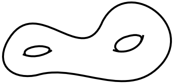
Déf : une métrique plate m sur S^* a une *singularité conique* en p_k si

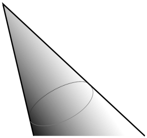
- $(S, m) \simeq_{p_k} C_{\theta_k}$ pour un certain *angle conique* $\theta_k > 0$

$\Longleftrightarrow$ • $m = |z^{\alpha_k} dz|^2$ pour un certain *exposant* $\alpha_k > -1$

- $\theta_k = 2\pi(1 + \alpha_k)$ $\rightsquigarrow$ courbure $\kappa(p_k) = 2\pi - \theta_k$

Surfaces plates

- $S =$  surface de genre g $\qquad S^* = S \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$

- C_θ = cône euclidien d'angle θ =  $(\theta > 0)$

Déf : une métrique plate m sur S^* a une *singularité conique* en p_k si

- $(S, m) \simeq_{p_k} C_{\theta_k}$ pour un certain *angle conique* $\theta_k > 0$

$\Longleftrightarrow$ • $m = |z^{\alpha_k} dz|^2$ pour un certain *exposant* $\alpha_k > -1$

- $\theta_k = 2\pi(1 + \alpha_k)$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ courbure $\kappa(p_k) = 2\pi - \theta_k$

Gauß-Bonnet : les p_k sont tous *coniques* $\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 2g - 2$

- **Exemple : les surfaces de translation**

- **Exemple : les surfaces de translation**
  - X = surface de Riemann compacte
  - différentielle abélienne : $\omega \in H^0\left(X, \Omega_X^1\right)$

- **Exemple : les surfaces de translation**
  - X = surface de Riemann compacte
  - différentielle abélienne : $\omega \in H^0\big(X, \Omega^1_X\big)$

    $\rightsquigarrow$ $\big(X, |\omega|^2\big)$: *"surface de translation"*

- **Exemple : les surfaces de translation**
  - X = surface de Riemann compacte
  - différentielle abélienne : $\omega \in H^0\big(X, \Omega^1_X\big)$

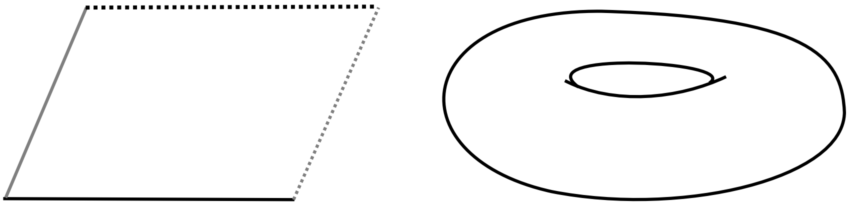
$$\rightsquigarrow \ \big(X, |\omega|^2\big) \ : \ \textit{“surface de translation”}$$

- **Chirurgies sur les surfaces plates :**

- **Exemple : les surfaces de translation**
  - X = surface de Riemann compacte
  - différentielle abélienne : $\omega \in H^0(X, \Omega^1_X)$

    $\rightsquigarrow (X, |\omega|^2)$: *"surface de translation"*

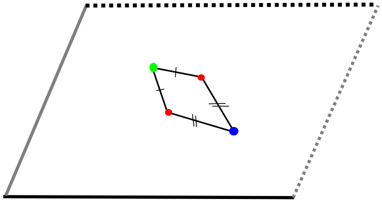
- **Chirurgies sur les surfaces plates :**

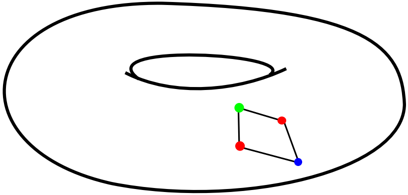


- **Exemple : les surfaces de translation**
  - X = surface de Riemann compacte
  - différentielle abélienne : $\omega \in H^0(X, \Omega^1_X)$

    $\rightsquigarrow$ $(X, |\omega|^2)$: *"surface de translation"*

- **Chirurgies sur les surfaces plates :**

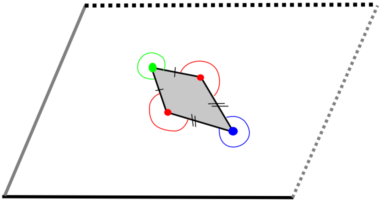


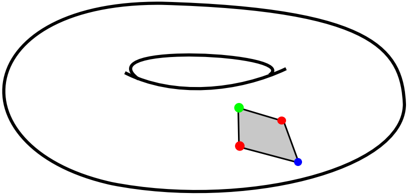


- **Exemple : les surfaces de translation**
  - X = surface de Riemann compacte
  - différentielle abélienne : $\omega \in H^0(X, \Omega^1_X)$

    $\rightsquigarrow$ $(X, |\omega|^2)$: *"surface de translation"*

- **Chirurgies sur les surfaces plates :**

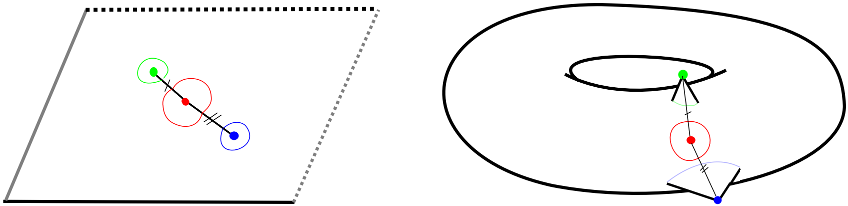




- **Exemple : les surfaces de translation**
  - X = surface de Riemann compacte
  - différentielle abélienne : $\omega \in H^0(X, \Omega^1_X)$

    $\rightsquigarrow (X, |\omega|^2)$: *"surface de translation"*

- **Chirurgies sur les surfaces plates :**



Hypergéométrie (dim = 1)

Cas classique $(g=0)$	**Cas elliptique** $(g=1)$
$\mathcal{M}_{0,4} \simeq \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$	
$x \rightsquigarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,x,\infty\}$	
$\omega_x^{\boldsymbol{\alpha}} = \prod_{k=1}^4 (t-u_k)^{\alpha_k}\,dt$	
$F_\gamma(x) = \int_\gamma \prod_{k=1}^4 (t-u_k)^{\alpha_k}\,dt$	
$(\mathcal{E}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}})\,:\, \mathbf{F}'' + \frac{c-(1+a+b)x}{x(1-x)}\mathbf{F}' - \frac{ab}{x(1-x)}\mathbf{F} = 0$	
$S^{\boldsymbol{\alpha}} \,:\, \widetilde{\mathcal{M}_{0,4}} \longrightarrow \mathbb{H}$	
pour certains $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_4)$ $\boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{\alpha}} < \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est un réseau	

Hypergéométrie (dim = 1)

Cas classique $(g=0)$	**Cas elliptique** $(g=1)$
$\mathcal{M}_{0,4} \simeq \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$	$Y_1(N) = \mathbb{H}_{/\Gamma_1(N)} \quad (\forall\ N \geq 2)$
$x \ \rightsquigarrow \ \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,x,\infty\}$	$\tau \ \rightsquigarrow \ E_\tau \setminus \left\{0, \frac{1}{N}\right\}$
$\omega_x^{\boldsymbol{\alpha}} = \prod_{k=1}^4 (t-u_k)^{\alpha_k} dt$	$\omega_\tau^{\alpha_1} = \frac{\theta(u,\tau)^{\alpha_1}}{\theta\left(u-\frac{1}{N},\tau\right)^{\alpha_1}} du$
$F_\gamma(x) = \int_\gamma \prod_{k=1}^4 (t-u_k)^{\alpha_k} dt$	$\Phi_\gamma(x) = \int_\gamma \frac{\theta(u,\tau)^{\alpha_1}}{\theta\left(u-\frac{1}{N},\tau\right)^{\alpha_1}} du$
$\left(\mathcal{E}_{\mathbf{a,b,c}}\right) \ : \ \mathbf{F}'' + \frac{c-(1+a+b)x}{x(1-x)} \mathbf{F}' - \frac{ab}{x(1-x)} \mathbf{F} = 0$	$\left(\mathcal{E}_{\mathbf{N}}^{\boldsymbol{\alpha_1}}\right) \ : \ \ddot{\boldsymbol{\Phi}} + P_N^{\alpha_1}(\tau)\, \dot{\boldsymbol{\Phi}} + Q_N^{\alpha_1}(\tau)\, \boldsymbol{\Phi} = 0$
$S^{\boldsymbol{\alpha}} \ : \ \widetilde{\mathcal{M}_{0,4}} \longrightarrow \mathbb{H}$	$S_N^{\alpha_1} \ : \ \widetilde{Y_1(N)} = \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$
pour certains $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_4)$ $\boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{\alpha}} < \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est un réseau	pour certaines paires (α_1, N) $\boldsymbol{\Gamma}_N^{\alpha_1} < \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est un réseau