

Généralisations de l'équation du logarithme via les surfaces de del Pezzo et espaces homogènes associés

Luc PIRIO

[LMV – UVSQ (Paris-Saclay)]

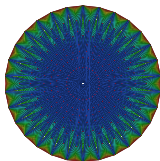
Séminaire de Géométrie (CMLS, École Polytechnique)

15 janvier 2025

Le logarithme

$$\text{Log}(x) + \text{Log}(y) - \text{Log}(xy) = 0$$

E_8

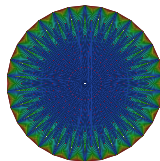


Le logarithme

$$\text{Log}(x) + \text{Log}(y) - \text{Log}(xy) = 0$$



E₈



Plan

I Introduction

Polylogarithmes & Identités fonctionnelles

Théorème : $\mathbf{HLog}^w = 0$ pour $w = 1, \dots, 6$

II Preuve

Surfaces de Del Pezzo

Hyperlogarithmes

III Comparaison de $\mathbf{HLog}^2 = \mathcal{A}b$ avec \mathbf{HLog}^3

IV Approche à la Gelfand-MacPherson

Le logarithme

- $\text{Li}_1(z) = -\mathbf{Log}(1 - z)$ ($z \in \mathbb{C}$)
- Formule intégrale :
$$\mathbf{Log}(z) = \int^z \frac{du}{u-0}$$
$$\text{Li}_1(z) = -\int^z \frac{du}{u-1}$$
- Développement en série :
$$\text{Li}_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$$
- Monodromie :
$$\mathcal{M}_0(\mathbf{Log}) = \mathbf{Log} + 2i\pi$$
- Identité fonctionnelle :
$$\mathbf{Log}(x) - \mathbf{Log}(y) - \mathbf{Log}\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

Indoles logarithmorum hac aequatione fundamentalis continetur [Pfaff 1788]

[La nature des logarithmes est contenue dans cette éq^o fondamentale]

Le dilogarithme Li_2

- $\text{Li}_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} \quad (|z| < 1)$
- Formule Intégrale : $\text{Li}_2(z) = \text{L}_{01}(z) = -\int^z \log(1-u) \frac{du}{u-0}$
 $\text{L}_{10}(z) = \int^z \log(u-0) \frac{du}{1-u}$
- Monodromie : $\mathcal{M}_1(\text{Li}_2) = \text{Li}_2 - 2i\pi \text{Log}$
- Identité fonctionnelle d'Abel ($\mathcal{A}b$) $(0 < x < y < 1)$

$$\text{Li}_2(x) - \text{Li}_2(y) - \text{Li}_2\left(\frac{x}{y}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) =$$
$$\text{Log}(y) \text{Log}\left(\frac{1-y}{1-x}\right) - \frac{\pi^2}{6}$$

Le dilogarithme Li_2

- $\text{Li}_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} \quad (|z| < 1)$

- Formule Intégrale :** $\text{Li}_2(z) = \text{L}_{01}(z) = -\int^z \log(1-u) \frac{du}{u-0}$

$$\text{L}_{10}(z) = \int^z \log(u-0) \frac{du}{1-u}$$

- Monodromie :** $\mathcal{M}_1(\text{Li}_2) = \text{Li}_2 - 2i\pi \text{Log}$

- Identité fonctionnelle d'Abel** ($\mathcal{A}b$) $(0 < x < y < 1)$

$$\text{R}(x) - \text{R}(y) - \text{R}\left(\frac{x}{y}\right) - \text{R}\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \text{R}\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0$$

$$\text{R}(x) = \frac{1}{2} \left(\text{L}_{01}(x) - \text{L}_{10}(x) \right) = \text{Li}_2(x) + \frac{1}{2} \text{Log}(x) \text{Log}(1-x) - \frac{\pi^2}{6}$$

Le n -ième polylogarithme Li_n pour $n \geq 1$

- $\text{Li}_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n} \quad (|z| < 1)$

- Formule intégrale :** $\text{Li}_n(z) = \int^z \text{Li}_{n-1}(u) \frac{du}{u}$

$$\text{Li}_n'(z) = \text{Li}_{n-1}(z)/z$$

- Monodromie :** $\mathcal{M}_1(\text{Li}_n) = \text{Li}_n - 2i\pi \frac{(\text{Log})^{n-1}}{(n-1)!}$

- Identités fonctionnelles en une variable :**

$$\text{Li}_n(z^r) = r^{n-1} \sum_{\omega^r=1} \text{Li}_n(\omega z) \quad (|z| < 1)$$

$$\text{Li}_n(z) + (-1)^n \text{Li}_n(z^{-1}) = -\frac{(2i\pi)^n}{n!} \mathbf{B}_n\left(\frac{\text{Log } z}{2i\pi}\right) \quad (z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[)$$

Le n -ième polylogarithme Li_n pour $n \geq 1$

- $\text{Li}_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n} \quad (|z| < 1)$

- Formule intégrale :** $\text{Li}_n(z) = \int^z \text{Li}_{n-1}(u) \frac{du}{u}$

$$\text{Li}_n'(z) = \text{Li}_{n-1}(z)/z$$

- Monodromie :** $\mathcal{M}_1(\text{Li}_n) = \text{Li}_n - 2i\pi \frac{(\text{Log})^{n-1}}{(n-1)!}$

- Identités fonctionnelles en plusieurs variables ($\exists ?$) :**

$$\sum_{i \in I} c_i \text{Li}_n(\mathbf{U}_i) = \text{Elem}_{<n}$$

$$(I \text{ fini}, c_i \in \mathbb{Z}, \mathbf{U}_i \in \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_N))$$

Le n -ième polylogarithme Li_n pour $n \geq 1$

- $\text{Li}_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n} \quad (|z| < 1)$

- Formule intégrale :** $\text{Li}_n(z) = \int^z \text{Li}_{n-1}(u) \frac{du}{u}$

$$\text{Li}_n'(z) = \text{Li}_{n-1}(z)/z$$

- Monodromie :** $\mathcal{M}_1(\text{Li}_n) = \text{Li}_n - 2i\pi \frac{(\text{Log})^{n-1}}{(n-1)!}$

- Identités fonctionnelles en plusieurs variables ($\exists ?$) :**

$$\sum_{i \in I} c_i \text{Li}_n(\mathbf{U}_i) = \text{Elem}_{<n} \iff \sum_{i \in I} c_i \mathcal{L}_n(\mathbf{U}_i) = \mathbf{0}$$

(I fini, $c_i \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{U}_i \in \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_N)$)

Exemple : Li_3

- $\text{Li}_3(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k/k^3 = \int^z \text{Li}_2(u) \frac{du}{u}$

- Identité de Spence-Kummer \mathcal{SK} (1809-1840) :**

$$\begin{aligned} & 2\text{Li}_3(x) + 2\text{Li}_3(y) - \text{Li}_3\left(\frac{x}{y}\right) + 2\text{Li}_3\left(\frac{1-x}{1-y}\right) + 2\text{Li}_3\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) - \text{Li}_3(xy) \\ & + 2\text{Li}_3\left(-\frac{x(1-y)}{(1-x)}\right) + 2\text{Li}_3\left(-\frac{(1-y)}{y(1-x)}\right) - \text{Li}_3\left(\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\right) \\ & = 2\text{Li}_3(1) - \text{Log}(y)^2 \text{Log}\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \frac{\pi^2}{3} \text{Log}(y) + \frac{1}{3} \text{Log}(y)^3 \end{aligned}$$

Exemple : Li_3

- $\text{Li}_3(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k/k^3 = \int^z \text{Li}_2(u) \frac{du}{u}$

- Identité de Spence-Kummer \mathcal{SK} (1809-1840) :**

$$\begin{aligned} & 2\text{Li}_3(x) + 2\text{Li}_3(y) - \text{Li}_3\left(\frac{x}{y}\right) + 2\text{Li}_3\left(\frac{1-x}{1-y}\right) + 2\text{Li}_3\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) - \text{Li}_3(xy) \\ & + 2\text{Li}_3\left(-\frac{x(1-y)}{(1-x)}\right) + 2\text{Li}_3\left(-\frac{(1-y)}{y(1-x)}\right) - \text{Li}_3\left(\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\right) \\ & = 2\text{Li}_3(1) - \text{Log}(y)^2 \text{Log}\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \frac{\pi^2}{3} \text{Log}(y) + \frac{1}{3} \text{Log}(y)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2\mathcal{L}_3(x) + 2\mathcal{L}_3(y) - \mathcal{L}_3\left(\frac{x}{y}\right) + 2\mathcal{L}_3\left(\frac{1-x}{1-y}\right) + 2\mathcal{L}_3\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) - \mathcal{L}_3(xy) \\ & + 2\mathcal{L}_3\left(-\frac{x(1-y)}{(1-x)}\right) + 2\mathcal{L}_3\left(-\frac{(1-y)}{y(1-x)}\right) - \mathcal{L}_3\left(\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_3(z) = \text{Li}_3(z) - \text{Li}_2(z) \text{Log}|z| + \frac{1}{3} \text{Li}_1(z) (\text{Log}|z|)^2$$

Exemple : Li_4

- $\text{Li}_4(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k/k^4$ $\mathcal{L}_4(x) = \text{Li}_4(x) + \text{Elem}_{<4}(x)$
- **Identité fonctionnelle de Kummer $\mathcal{K}(4)$ (1840) :**

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_4\left(-\frac{x^2y\eta}{\zeta}\right) + \mathcal{L}_4\left(-\frac{y^2x\zeta}{\eta}\right) + \mathcal{L}_4\left(\frac{x^2y}{\eta^2\zeta}\right) + \mathcal{L}_4\left(\frac{y^2x}{\zeta^2\eta}\right) \\ & - 6\mathcal{L}_4(xy) - 6\mathcal{L}_4\left(\frac{xy}{\eta\zeta}\right) - 6\mathcal{L}_4\left(-\frac{xy}{\eta}\right) - 6\mathcal{L}_4\left(-\frac{xy}{\zeta}\right) \\ & - 3\mathcal{L}_4(x\eta) - 3\mathcal{L}_4(y\zeta) - 3\mathcal{L}_4\left(\frac{x}{\eta}\right) - 3\mathcal{L}_4\left(\frac{y}{\zeta}\right) \\ & - 3\mathcal{L}_4\left(-\frac{x\eta}{\zeta}\right) - 3\mathcal{L}_4\left(-\frac{y\zeta}{\eta}\right) - 3\mathcal{L}_4\left(-\frac{x}{\eta\zeta}\right) - 3\mathcal{L}_4\left(-\frac{y}{\eta\zeta}\right) \\ & + 6\mathcal{L}_4(x) + 6\mathcal{L}_4(y) + 6\mathcal{L}_4\left(-\frac{x}{\zeta}\right) + 6\mathcal{L}_4\left(-\frac{y}{\eta}\right) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$(\zeta = 1 - x, \eta = 1 - y)$$

- **Abel 1881 (Spence 1809, Hill 1829, Rogers 1907)**

$$R(x) - R(y) - R\left(\frac{x}{y}\right) - R\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + R\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0 \quad (\mathcal{A}b)$$

- **Spence-Kummer :** $\sum_{i=1}^9 c_i \mathcal{L}_3(U_i(x, y)) = 0 \quad (\mathcal{S}K)$

- **Kummer 1840 :** $\sum_i c_i \mathcal{L}_n(U_i(x, y)) = 0 \quad (n \leq 5) \quad (\mathcal{K}_n)$

- ...

- **Goncharov 1995 :** $\sum_{i=1}^{22} c_i \mathcal{L}_3(U_i(a, b, c)) = 0 \quad (\mathcal{G}on)$

- **Gangl 2003 :** $\sum_i c_i \mathcal{L}_n(U_i(x, y)) = 0 \quad (n = 6, 7) \quad (\mathcal{G}an_n)$

- **Charlton, Gangl, Radchenko, Rudenko, Goncharov-Rudenko, ...**

- **Identités fonctionnelles (IF) des polylogarithmes Li_n :**
 - ▶ Géométrie hyperbolique
 - ▶ Géométrie des tissus ($n \leq 3$)
 - ▶ K-théorie des corps de nombres ($n \leq 4$)
 - ▶ Théorie des périodes (MZVs)
 - ▶ Physique des particules ('*Scattering amplitudes*')
 - ▶ Physique mathématique ('*Y-systèmes*') ($n = 2$)
 - ▶ Algèbres amassées ($n \leq 4$)
 - ▶ Symétrie miroir ('*Scattering diagrams*') ($n = 2$)

- **Problèmes :**
 - trouver des **IF** pour \mathcal{L}_n (e.g. $\exists n \geq 8 ?$)
 - mieux comprendre les **IF** polylogarithmiques

- **Identités fonctionnelles (IF) des polylogarithmes Li_n :**
 - ▶ Géométrie hyperbolique
 - ▶ Géométrie des tissus ($n \leq 3$)
 - ▶ K-théorie des corps de nombres ($n \leq 4$)
 - ▶ Théorie des périodes (MZVs)
 - ▶ Physique des particules ('*Scattering amplitudes*')
 - ▶ Physique mathématique ('*Y-systèmes*') ($n = 2$)
 - ▶ Algèbres amassées ($n \leq 4$)
 - ▶ Symétrie miroir ('*Scattering diagrams*') ($n = 2$)

- **Problèmes :**
 - trouver des **IF** pour \mathcal{L}_n (e.g. $\exists n \geq 8 ?$)
 - mieux comprendre les **FIs** polylogarithmiques

K-théorie et identités polylogarithmiques

- $F =$ corps de nombres $\rightsquigarrow K_n(F) = \begin{cases} n \text{ pair} & \checkmark \text{ (Borel)} \\ n \text{ impair} & ? \end{cases}$

- **[Zagier]** $K_3(F) \rightsquigarrow B_2(F) =$ groupe de Bloch

$$B_2(F) = \frac{\mathbb{Z} \left[F \setminus \{0,1\} \right]}{\left\langle [x] - [y] - \left[\frac{x}{y} \right] - \left[\frac{1-y}{1-x} \right] + \left[\frac{x(1-y)}{y(1-x)} \right] \mid x, y \in F \setminus \{0,1\}, x \neq y \right\rangle}$$
$$\left(R(x) - R(y) - R\left(\frac{x}{y}\right) - R\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + R\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0 \right)$$

- **Régulateurs (de Borel)** $\mathcal{R}_2^B = \mathcal{L}_2 : K_3(F) \rightarrow \mathbb{R}$
 $\mathcal{R}_n^B = \mathcal{L}_n : K_{2n-1}(F) \rightarrow \mathbb{R} \quad (n \geq 2)$

- Comprendre les IF de $\mathcal{L}_n \rightarrow$
 - Desc $^\circ$ de $K_{2n-1}(F)$ par générateurs et relat $^\circ$
 - Applications à la “Conjecture de Zagier”

'Scattering amplitudes' et identités fonctionnelles

- 'Scattering amplitudes' $\mathbf{I} = \int_{\Delta} \Psi$ (important en HEPP)
 $\mathbf{I} = \mathbf{I}' + \mathcal{R}$
 $\mathbf{I} = \mathbf{I}' + \sum_{i \in I} \mathbf{F}_i(x_i)$
- [dDDS] 'The 2-loop hexagon Wilson loop in $\mathcal{N} = 4$ SYM' (2010)
 $\mathcal{R}_{6,WL}^{(2)}$ = 'remainder' : formule de 17 pages !
[GSVV] $\mathcal{R}_{6,WL}^{(2)} = \sum_{i=1}^3 \left(L_4(x_i^+, x_i^-) - \frac{1}{2} \mathbf{Li}_4(v_i) \right) - \frac{1}{8} \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{Li}_2(v_i) \right)^2 + \dots$
- Importance de simplifier $\sum_{i \in I} \mathbf{F}_i(x_i)$ pour $\mathbf{F}_i =$ polylogarithmes
 $\mathbf{F}_i =$ hyperlogarithmes
 $\mathbf{F}_i =$ polylogs elliptiques
- Justifie l'étude des identités fonctionnelles $\sum_{j \in J} \mathbf{F}_j(x_j) = \text{cst}$

- $Ab(x, y) = R(x) - R(y) - R\left(\frac{x}{y}\right) - R\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + R\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) \equiv 0$

Thm [de Jeu 20] $\forall I$ fini, $c_i \in \mathbb{Q}$ et $U_i \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_m]$:

$\sum_{i \in I} c_i R(U_i) \equiv \text{cst} \iff \sum_{i \in I} c_i R(U_i)$ est une CL de spécialisations de $Ab(X_s, Y_s)$ avec $X_s, Y_s \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_{m_s}] \forall s$

- $(\text{Log}(x) - \text{Log}(y) - \text{Log}(x/y) = 0)$ est l'IFF du log ✓
- $Ab \iff (Ab(x, y) \equiv 0)$ est l'IFF du dilog ✓
- $Gon_{22} \iff \sum_{i=1}^{22} c_i \mathcal{L}_3(U_i) = 0$ est l'IFF du trilog ?
- Q_4 [**Goncharov-Rudenko**] est l'IFF du tetralog ?

[Hain – MacPherson 1990] *Higher logarithms*

The dilogarithm has properties analogous to those of the logarithm. It has been widely believed, both in the nineteenth century and more recently, that these two functions should be the first two elements of an infinite sequence of higher logarithms which share analogous properties. To date, several sequences of such functions have been proposed, but no function beyond the dilogarithm in any of these sequences is known to possess all the desired properties.

[Griffiths 2002] *The legacy of Abel in algebraic geometry*

*...intuitively, we are asking **whether or not for each n there is an integer d_n such that there is a “new” d_n -web of maximum rank one of whose abelian relations is a (the ?) functional equation with d_n terms for Li_n ?** Here, ‘new’ means the general extension of the phenomena above for the logarithm when $n = 1$, where $d_1 = 3$, for the 5-term identity when $n = 2$ and $d_2 = 5, \dots$*

[Goncharov-Rudenko 2018] *Motivic correlator, cluster algebras ...*

Conclusion. *If $n > 3$, the problem of writing explicitly functional equations for Li_n might not be the “right” problem. It seems that when n is growing the functional equations become so complicated that one can not write them down on a piece of paper.*

• **Principaux problèmes au sujet des polylogarithmes :**

- Trouver des **IF** pour \mathcal{L}_n (e.g. $\exists n \geq 8 ?$)
- Existe-t-il une suite $(\mathbf{IF}_n)_{n \geq 1}$ de **IF** pour les polylogarithmes ?
- Existe-t-il une **IFF** (fondamentale) pour \mathcal{L}_n pour chaque $n \geq 1$?
- Mieux comprendre les **IF** polylogarithmiques

- Dans cet exposé, en considérant des **hyperlogarithmes** :

- On décrit une série d'identités hyperlogarithmiques

$$\mathbf{HLog}^1 \iff \left(\mathbf{Log}(x) - \mathbf{Log}(y) - \mathbf{Log}(x/y) = 0 \right)$$

$$\mathbf{HLog}^2 \iff \left(\mathbf{R}(x) - \mathbf{R}(y) - \mathbf{R}\left(\frac{x}{y}\right) - \mathbf{R}\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \mathbf{R}\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0 \right)$$

⋮

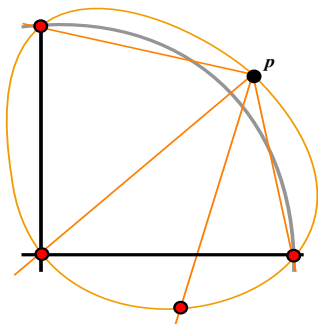
$$\mathbf{HLog}^6 \quad \left(\text{IF hyperlogarithmique de poids } 6 \right)$$

- Pour $w = 1, \dots, 6$, on a

$$\mathbf{HLog}^w \quad : \quad \sum_{i=1}^{\kappa} \mathbf{AH}_i^w(\phi_i) = 0$$

Une vue géométrique de l'identité d'Abel

• (Ab)
$$\underset{\substack{\parallel \\ U_1}}{\mathbf{R}(x)} - \underset{\substack{\parallel \\ U_2}}{\mathbf{R}(y)} - \underset{\substack{\parallel \\ U_3}}{\mathbf{R}\left(\frac{x}{y}\right)} - \underset{\substack{\parallel \\ U_4}}{\mathbf{R}\left(\frac{1-y}{1-x}\right)} + \underset{\substack{\parallel \\ U_5}}{\mathbf{R}\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)} = 0$$



Points base des U_i 's :

– $p_1 = [1, 0, 0]$

– $p_2 = [0, 1, 0]$

– $p_3 = [0, 0, 1]$

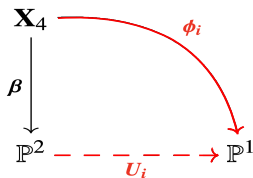
– $p_4 = [1, 1, 1]$

↪ Éclatement $\beta : X_4 = \mathbf{Bl}_{p_1, \dots, p_4}(\mathbb{P}^2) \longrightarrow \mathbb{P}^2$

Une vue géométrique de l'identité d'Abel

- $(\mathcal{A}b)$
$$\underbrace{R(x)}_{U_1} - \underbrace{R(y)}_{U_2} - \underbrace{R\left(\frac{x}{y}\right)}_{U_3} - \underbrace{R\left(\frac{1-y}{1-x}\right)}_{U_4} + \underbrace{R\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)}_{U_5} = 0$$

- **Éclatement** $\beta : X_4 = \text{Bl}_{p_1, \dots, p_4}(\mathbb{P}^2) \longrightarrow \mathbb{P}^2$



Les $\phi_1, \dots, \phi_5 : X_4 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ sont les cinq fibrations en coniques sur la surface de del Pezzo X_4

- $(\mathcal{A}b) \iff \exists (\epsilon_i)_{i=1}^5 \in \{\pm 1\}^5$ tq. $\sum_{i=1}^5 \epsilon_i R(\phi_i) = 0$
($\exists!$ au signe près)

Généralisation aux surfaces de del Pezzo

- $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{P}^2$: points en position générale ($r \in \{3, \dots, 8\}$)
- **Blow-up** $\beta_r : X_r = \mathbf{Bl}_{p_1, \dots, p_r}(\mathbb{P}^2) \longrightarrow \mathbb{P}^2$ ($X_r = dP_{9-r}$)

Prop : 1. Il y a un nombre fini κ_r
de fibrations en coniques $\phi_1, \dots, \phi_{\kappa} : X_r \longrightarrow \mathbb{P}^1$

2. Pour tout i : $\Sigma_i = \mathbf{Spectre}(\phi_i) \subset \mathbb{P}^1$ a $r - 1$ éléments

Def^o : L ' hyperlogarithme complet
antisymétrique de poids $r - 2$: $\mathbf{AH}_{\Sigma_i}^{r-2} : \widehat{\mathbb{P}^1 \setminus \Sigma_i} \longrightarrow \mathbb{C}$

Thm [Castravet-P] $\exists (\epsilon_i)_{i=1}^{\kappa} \in \{\pm 1\}^{\kappa}$, \pm -unique, tel que

$$\left(\mathbf{HLog}^{r-2} \right) \quad \sum_{i=1}^{\kappa} \epsilon_i \mathbf{AH}_{\Sigma_i}^{r-2}(\phi_i) = 0$$

$$\left(\mathbf{HLog}^{r-2} \right) \quad \sum_{i=1}^{\kappa} \epsilon_i \mathbf{AH}_{\Sigma_i}^{r-2}(\phi_i) = 0$$

- Une identité \mathbf{HLog}^{r-2} pour chaque del Pezzo $\mathbf{dP}_d = \mathbf{X}_r$ ($d = 9 - r$)

[d = 6] \mathbf{dP}_6 est unique, $\mathbf{AH}_{\Sigma_i}^1 = \mathbf{Log}$ pour tout i

$$\mathbf{HLog}^1 = \left(\mathbf{Log}(\mathbf{x}) - \mathbf{Log}(\mathbf{y}) - \mathbf{Log}(\mathbf{x}/\mathbf{y}) = 0 \right)$$

[d = 5] \mathbf{dP}_5 est unique : $\mathbf{AH}_{\Sigma_i}^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{L}_{01} - \mathbf{L}_{10}) = \mathbf{R}$ pour tout i

$$\mathbf{HLog}^2 = \left(\sum_{i=1}^5 \epsilon_i \mathbf{R}(\phi_i) = 0 \right) \quad (\mathcal{A}b)$$

$$\left(\mathbf{HLog}^{r-2}\right) \quad \sum_{i=1}^{\kappa} \epsilon_i \mathbf{AH}_{\Sigma_i}^{r-2}(\phi_i) = 0$$

[$d = 4$] $\mathbf{dP}_4 \infty^2$ moduli $\rightsquigarrow \infty^2$ identités \mathbf{HLog}^3

$$\begin{aligned} & \mathbf{AH}_1^3(x) + \mathbf{AH}_2^3\left(\frac{1}{y}\right) + \mathbf{AH}_3^3\left(\frac{y}{x}\right) + \dots \\ & \dots + \mathbf{AH}_9^3\left(\frac{y(x-b)}{x(y-a)}\right) + \mathbf{AH}_{10}^3\left(\frac{a(b-x)}{by-ax}\right) = 0 \end{aligned}$$

[$d = 3$] $\mathbf{dP}_3 =$ surface cubique dans $\mathbb{P}^3 \rightsquigarrow \infty^4$ identités \mathbf{HLog}^4

$$\sum_{i=1}^{27} \mathbf{AH}_i^4(\phi_i) = 0$$



Thm [Castravet-P. 2022]

$\exists (\epsilon_i)_{i=1}^{\kappa} \in \{\pm 1\}^{\kappa}$ unique au signe près tel que

$$\left(\mathbf{HLog}^{r-2}\right) \quad \sum_{i=1}^{\kappa} \epsilon_i \mathbf{AH}_{\Sigma_i}^{r-2}(\phi_i) = 0$$

→ Surfaces de Del Pezzo

→ Hyperlogarithmes (aka “Intégrales itérées sur \mathbb{P}^1 ”)

Surfaces de Del Pezzo I : propriétés

- $d\mathbf{P}_d \subset \mathbb{P}^d$ surface lisse, de degré d ($d = 9 - r$)

$$d\mathbf{P}_d = \mathbf{X}_r = \mathbf{B}l_{\rho_1, \dots, \rho_r}(\mathbb{P}^2) \quad \text{Pic}(d\mathbf{P}_d) = \mathbb{Z}\mathbf{h} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}\ell_i \right)$$

$$-\mathbf{K}_{d\mathbf{P}_d} = 3\mathbf{h} - \sum_{i=1}^r \ell_i \text{ ample } \rightsquigarrow \varphi_{|-\mathbf{K}|} : d\mathbf{P}_d \hookrightarrow \mathbb{P}^d \text{ plongement}$$


- $\text{Pic}(d\mathbf{P}_d) \supset \mathbf{K}^\perp = \langle \rho_1, \dots, \rho_r \rangle$ $\rho_i = \ell_i - \ell_{i+1} \quad i \leq r-1$
 $\rho_r = 3\mathbf{h} - \sum_{i=1}^3 \ell_i$

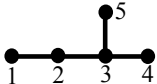
$$-(\cdot, \cdot) + \{\rho_i\}_{i=1}^r \rightsquigarrow \text{Système de racines } E_r \subset R_r = \mathbf{K}^\perp \otimes \mathbb{R}$$

- Pour toute racine ρ : $s_\rho : R_r \longrightarrow R_r$ (reflexion orthog.)
 $d \longmapsto d + (d, \rho)\rho$

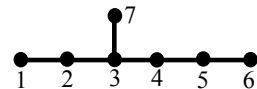
$$\mathbf{W}_r = \mathbf{W}(E_r) = \langle s_{\rho_1}, \dots, s_{\rho_r} \rangle \subset \text{O}(R_r) : \text{gpe de Weyl de type } E_r$$

Surfaces de Del Pezzo I

$$E_4 = A_4$$


$$E_5 = D_5$$


$$E_6$$


$$E_7$$


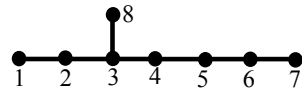
$$E_8$$


Figure – Dynkin diagram E_r (k stands for ρ_k for any $k = 1, \dots, r$)

Droites et coniques sur $\mathbf{X}_r = \mathbf{dP}_d$ ($d = 9 - r$)

- Droites $\mathcal{L}_r = \left\{ \ell \in \mathbf{Pic}(\mathbf{X}_r) \mid (\ell, -\mathbf{K}) = 1, \ell^2 = -1 \right\}$
 \Downarrow
 $\delta \rightsquigarrow |\delta| = \{ \delta \}$ avec $\mathbb{P}^1 \simeq \delta \subset \mathbf{dP}_d$ $\deg(\delta) = 1$

$$\mathcal{L}_r = \mathbf{W}_r \cdot \ell_r$$

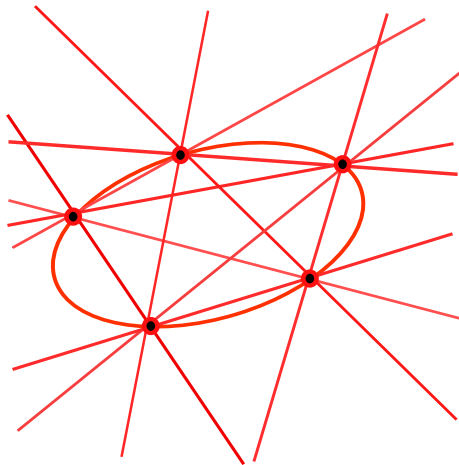
- Cloniques $\mathcal{K}_r = \left\{ \mathbf{c} \in \mathbf{Pic}(\mathbf{X}_r) \mid (\mathbf{c}, -\mathbf{K}) = 2, \mathbf{c}^2 = 0 \right\}$
 \Downarrow
 $\mathbf{c} \rightarrow |\mathbf{c}| \simeq \mathbb{P}^1 \rightsquigarrow$ Fibration en coniques
 $\phi_{\mathbf{c}} : \mathbf{X}_r \rightarrow \mathbb{P}^1$

$$\mathcal{K}_r = \mathbf{W}_r \cdot (\mathbf{h} - \ell_1)$$

r	3	4	5	6	7	8
E_r	$A_2 \times A_1$	A_4	D_5	E_6	E_7	E_8
$W_r = W(E_r)$	$\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_2$	\mathfrak{S}_5	$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4 \rtimes \mathfrak{S}_5$	$W(E_6)$	$W(E_7)$	$W(E_8)$
$\omega_r = W_r $	12	5!	$2^4 \cdot 5!$	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$	$2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	$2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$
$l_r = \mathcal{L}_r $	6	10	16	27	56	240
$\kappa_r = \mathcal{K}_r $	3	5	10	27	126	2160

Exemple : les droites de dP_4 vues dans le plan

- $dP_4 = X_5 = \mathbf{Bl}_{p_1, \dots, p_5}(\mathbb{P}^2) \xrightarrow{\beta} \mathbb{P}^2$



Coniques non irréductibles sur $X_r = d\mathbb{P}_d$

- $L_r = \cup_{\ell \in \mathcal{L}_r} \ell \subset X_r \rightsquigarrow U_r = X_r \setminus L_r$

- $\mathcal{K}_r \ni \mathbf{c} \rightsquigarrow$ Fibration en coniques $\phi_{\mathbf{c}} : X_r \rightarrow \mathbb{P}^1$

$$\begin{aligned}\Sigma_{\mathbf{c}} = \mathbf{Spectre}(\phi_{\mathbf{c}}) &= \left\{ \sigma \in \mathbb{P}^1 \mid \phi_{\mathbf{c}}^{-1}(\sigma) \text{ pas irréductible} \right\} \\ &= \left\{ \sigma_{\mathbf{c}}^1, \dots, \sigma_{\mathbf{c}}^{r-2}, \sigma_{\mathbf{c}}^{r-1} = \infty \right\} \subset \mathbb{P}^1\end{aligned}$$

- Pour $\sigma_{\mathbf{c}}^i \in \Sigma_{\mathbf{c}} : \phi_{\mathbf{c}}^{-1}(\sigma_{\mathbf{c}}^i) = L_{\mathbf{c}}^i + \tilde{L}_{\mathbf{c}}^i \quad (L_{\mathbf{c}}^i, \tilde{L}_{\mathbf{c}}^i \in \mathcal{L}_r)$

- $\mathcal{H}_{\mathbf{c}} = \mathbf{H}^0\left(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(\text{Log } \Sigma_{\mathbf{c}})\right) = \left\langle \frac{dz}{z - \sigma_{\mathbf{c}}^i} \right\rangle_{i=1}^{r-2} \simeq \mathbb{C}^{r-2}$

|}

- $\mathbf{H}_{\mathbf{c}} = \phi_{\mathbf{c}}^*(\mathcal{H}_{\mathbf{c}}) = \left\langle \frac{d\phi_{\mathbf{c}}}{\phi_{\mathbf{c}} - \sigma_{\mathbf{c}}^i} \right\rangle_{i=1}^{r-2} \subset \mathbf{H}^0\left(X_r, \Omega_{X_r}^1(\text{Log } L_r)\right) = \mathbf{H}_{X_r}$

Tissu de del Pezzo \mathcal{W}_{dP_d}

- $\mathcal{W}_{dP_d} = \mathcal{W}(\phi_{\mathbf{c}})_{\mathbf{c} \in \mathcal{K}_r}$: κ_r -tissu en coniques sur dP_d
- Quest^o : $\exists (F_{\mathbf{c}}(\phi_{\mathbf{c}}))_{\mathbf{c} \in \mathcal{K}_r}$ tel que $\sum_{\mathbf{c} \in \mathcal{K}_r} F_{\mathbf{c}}(\phi_{\mathbf{c}}) = 0$
avec les $F_{\mathbf{c}}$ polylogarithmiques ?

Théorème : $\exists (\epsilon_{\mathbf{c}})_{\mathbf{c} \in \mathcal{K}_r} \in \{1, -1\}^{\mathcal{K}_r}$ \pm -unique tel que

$$\left(\text{HLog}^{r-2} \right) \quad \sum_{\mathbf{c} \in \mathcal{K}_r} \epsilon_{\mathbf{c}} \text{AH}'_{\mathbf{c}}{}^{r-2}(\phi_{\mathbf{c}}) = 0$$

où $\forall \mathbf{c}$: $\text{AH}'_{\mathbf{c}}{}^{r-2} =$ hyperlogarithme antisymétrique
complet de poids $r - 2$ sur $\mathbb{P}^1 \setminus \Sigma_{\mathbf{c}}$

Intégrales itérées

- Poincaré (1884), Lappo-Danilevski (1928), Chen (1973)

- \mathbf{Y} variété complexe

- $\mathbf{H} = \langle \omega_1, \dots, \omega_m \rangle \subset \mathbf{H}^0(\mathbf{Y}, \Omega_{\mathbf{Y}}^1) + \left[\begin{array}{l} d\omega_i = 0 \\ \omega_i \wedge \omega_j = 0 \end{array} \right]$

- **Ex :** $\phi : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{C}$ et $\omega_i \in \phi^*(\mathbf{H}^0(\mathbf{C}, \Omega_{\mathbf{C}}^1))$ $i = 1, \dots, m$

- Point base $y \in \mathbf{Y}$, chemin $\gamma^x = \gamma_y^x : [0, 1] \rightarrow \mathbf{Y}$ de y à x :

- $\mathbb{I}_{\omega_i} : x \mapsto \int_{\gamma^x} \omega_i \quad \rightsquigarrow \quad \mathbb{I}_{\omega_i} \in \mathcal{O}_y$

- $\mathbb{I}_{\omega_j \omega_i} : x \mapsto \int_{\gamma^x} \omega_j(u) \cdot \mathbb{I}_{\omega_i}(u) \quad \rightsquigarrow \quad \mathbb{I}_{\omega_j \omega_i} \in \mathcal{O}_y$

- $\mathbb{I}_{\omega_k \omega_j \omega_i} : x \mapsto \int_{\gamma^x} \omega_k(u) \cdot \mathbb{I}_{\omega_j \omega_i}(u) \quad \rightsquigarrow \quad \mathbb{I}_{\omega_k \omega_j \omega_i} \in \mathcal{O}_y$

Intégrales itérées (polylogarithmes)

$$\mathbb{H}^w : \mathbf{H}^{\otimes w} \longrightarrow \mathcal{O}_y$$

- $\underline{\omega} = \omega_{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{i_w} \longmapsto \mathbb{H}_{\underline{\omega}} : z \mapsto \int_{\gamma^z} \omega_{i_1}(u) \cdot \mathbb{H}_{\omega_{i_2} \cdots \omega_{i_w}}(u)$

- $\mathbb{H} : \left(\bigoplus_{w \geq 0} \mathbf{H}^{\otimes w}, \mathbb{H} \right) \longrightarrow \mathcal{O}_y$ morphisme injectif
de \mathbb{C} -algèbres

- $\forall \underline{\omega} : \mathbb{H}_{\underline{\omega}} \in \mathcal{O}_y \cap \tilde{\mathcal{O}}(\mathbf{Y})$
monod. unipotente \longrightarrow Symbole $\mathcal{S}(\mathbb{H}_{\underline{\omega}}) = \underline{\omega}$ ✓

- Ex :** $\mathbf{Y} = \mathbb{P}^1 \setminus \Sigma$ avec $\Sigma = \{0, 1, \infty\}$

$$\mathbf{H} = \left\langle \frac{dz}{z}, \frac{dz}{1-z} \right\rangle = \mathbf{H}^0 \left(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(\text{Log } \Sigma) \right)$$

$$\mathbf{L}_n = \mathbb{H}^n \left(\left(\frac{dz}{z} \right)^{\otimes (n-1)} \otimes \left(\frac{dz}{1-z} \right) \right) \quad (\text{'Polylogarithmes'})$$

Intégrales itérées (hyperlogarithmes)

- **Ex :** $Y = \mathbb{P}^1 \setminus \Sigma$ avec $\Sigma = \{ \sigma^1, \dots, \sigma^{r-2}, \sigma^{r-1} = \infty \}$

$$H = \left\langle \frac{dz}{z-\sigma^1}, \dots, \frac{dz}{z-\sigma^{r-2}} \right\rangle = H^0\left(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}^1(\text{Log } \Sigma)\right)$$

$$H^n\left(\left(\frac{dz}{z-\sigma^1}\right) \otimes \dots \otimes \left(\frac{dz}{z-\sigma^{r-2}}\right)\right) \quad \text{“Hyperlogarithme”}$$

- **Hyperlog antisymétrique complet de poids $r - 2$ sur $\mathbb{P}^1 \setminus \Sigma$:**

$$AH_{\Sigma}^{r-2} = H^n\left(\text{Asym}\left(\left(\frac{dz}{z-\sigma^1}\right) \otimes \dots \otimes \left(\frac{dz}{z-\sigma^{r-2}}\right)\right)\right)$$

$$= H^n\left(\frac{1}{(r-2)!} \sum_{\nu \in \mathfrak{S}_{r-2}} (-1)^{\nu} \left(\frac{dz}{z-\sigma^{\nu(1)}}\right) \otimes \dots \otimes \left(\frac{dz}{z-\sigma^{\nu(r-2)}}\right)\right)$$

- **Ex :** $AH_{\{0,1,\infty\}}^2 = \frac{1}{2} H^2\left(\frac{dz}{z} \otimes \frac{dz}{(1-z)} - \frac{dz}{(1-z)} \otimes \frac{dz}{z}\right) = \mathbf{R}$

III Identité \mathbf{HLog}^{r-2} : preuve(s)

$$\left(\mathbf{HLog}^{r-2}\right) : \sum_{\mathbf{c} \in \mathcal{K}} \epsilon_{\mathbf{c}} \mathbf{AH}_{\mathbf{c}}^{r-2}(\phi_{\mathbf{c}}) = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{AH}_{\mathbf{c}}^{r-2} = \mathbf{AH}_{\Sigma_{\mathbf{c}}}^{r-2}$$

- $\phi_{\mathbf{c}} : \mathbf{X}_r \rightarrow \mathbb{P}^1 \supset \Sigma_{\mathbf{c}} = \{ \sigma_{\mathbf{c}}^i \}_{i=1}^{r-1} \quad \mathcal{H}_{\mathbf{c}} = \mathbf{H}^0\left(\Omega_{\mathbb{P}^1}^1(\text{Log } \Sigma_{\mathbf{c}})\right)$
- $\phi_{\mathbf{c}}^*(\mathcal{H}_{\mathbf{c}}) = \mathbf{H}_{\mathbf{c}} \subset \mathbf{H}_{\mathbf{X}_r} = \mathbf{H}^0\left(\Omega_{\mathbf{X}_r}^1(\text{Log } \mathbf{L}_r)\right)$
- $\mathbf{AH}_{\mathbf{c}}^{r-2}(\phi_{\mathbf{c}}) = \mathbf{H} \left(\left(\frac{d\phi_{\mathbf{c}}}{\phi_{\mathbf{c}} - \sigma_{\mathbf{c}}^1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{d\phi_{\mathbf{c}}}{\phi_{\mathbf{c}} - \sigma_{\mathbf{c}}^{r-2}} \right) \right) \in \mathbf{H}^{r-2}\left(\wedge^{r-2} \mathbf{H}_{\mathbf{c}}\right)$
 $\downarrow \mathcal{S}$ (symbole)
- $\Omega_{\mathbf{c}}^{r-2} = \left(\frac{d\phi_{\mathbf{c}}}{\phi_{\mathbf{c}} - \sigma_{\mathbf{c}}^1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{d\phi_{\mathbf{c}}}{\phi_{\mathbf{c}} - \sigma_{\mathbf{c}}^{r-2}} \right) \in \wedge^{r-2} \mathbf{H}_{\mathbf{c}} \subset \wedge^{r-2} \mathbf{H}_{\mathbf{X}_r}$

$$\left(\mathbf{HLog}^{r-2}\right) \iff \sum_{\mathbf{c}} \epsilon_{\mathbf{c}} \Omega_{\mathbf{c}}^{r-2} = 0 \quad \text{in} \quad \wedge^{r-2} \mathbf{H}_{\mathbf{X}_r}$$

Preuves de : $\mathbf{hlog}^{r-2} = \sum_{\mathbf{c}} \epsilon_{\mathbf{c}} \Omega_{\mathbf{c}}^{r-2} = 0$ dans $\wedge^{r-2} \mathbf{H}_{X_r}$

• $\mathbf{H}_{X_r} = \mathbf{H}^0\left(\Omega_{X_r}^1(\text{Log } L_r)\right) \xrightarrow{\oplus_{\ell} \text{Res}_{\ell}} \mathbb{C}^{\mathcal{L}_r}$ injective

$$\Omega_{\mathbf{c}}^{r-2} \in \wedge^{r-2} \mathbf{H}_{X_r} \hookrightarrow \wedge^{r-2} \mathbb{C}^{\mathcal{L}_r} \curvearrowright \mathbf{W}(E_r)$$

[Pr1] On décompose \mathbf{hlog}^{r-2} dans une base naturelle de $\wedge^{r-2} \mathbb{C}^{\mathcal{L}_r}$

[Pr2] $\text{sign}_r \hookrightarrow \oplus_{\mathbf{c}} (\mathbf{H}_{\mathbf{c}})^{\wedge(r-2)} \longrightarrow \wedge^{r-2} \mathbb{C}^{\mathcal{L}_r} \quad \langle \text{sign}_r, \wedge^{r-2} \mathbb{C}^{\mathcal{L}_r} \rangle = 0$
 $\mathbf{1} \mapsto (\Omega_{\mathbf{c}}^{r-2})_{\mathbf{c}} \mapsto \sum_{\mathbf{c}} \Omega_{\mathbf{c}}^{r-2} \quad (\text{GAP3})$

[Pr3] Descrip^o explicite des droites $\longrightarrow \mathbb{Z}^{\mathcal{L}_r} \simeq \mathbb{Z}^{|\mathcal{L}_r|}$
 + algèbre linéaire sur \mathbb{Z} $\longrightarrow \sum \epsilon_{\mathbf{c}} \Omega_{\mathbf{c}}^{r-2} = 0$ (Maple)

[Pr4] Preuve analytique inductive (... ?)

Logarithme

$$\text{Log}(x) + \text{Log}(y) - \text{Log}(xy) = 0$$

Dilogarithme

$$R(x) - R(y) \cdots + R\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0$$

Hyperlog de poids 3

$$\sum_{i=1}^{10} \text{AH}_i^3(U_i(x, y)) = 0$$

Hyperlog de poids 4

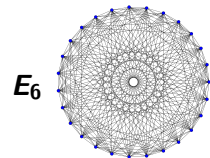
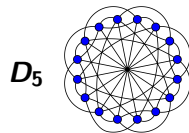
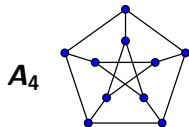
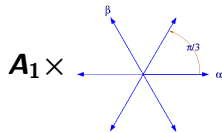
$$\sum_{i=1}^{27} \text{AH}_i^4(U_i(x, y)) = 0$$

$$dP_6 = \text{BI}_3(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^6$$

$$dP_5 = \text{BI}_4(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$$

$$dP_4 = Q_1 \cap Q_2 \subset \mathbb{P}^4$$

$$dP_3 =$$



IV Comparaison entre $H\text{Log}^2$ et $H\text{Log}^3$

- $H\text{Log}^2$ $R(x) - R(y) - R\left(\frac{x}{y}\right) - R\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + R\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0$

- $H\text{Log}^3$ Pour $\Sigma = \{b_1, \dots, b_4\}$ on a

$$AH_{\Sigma}^3(x) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 (-1)^{k-1} \text{Log}\left(1 - \frac{x}{b_k}\right) R_{\Sigma \setminus b_k}(x)$$

$$\begin{aligned} AH_1^3(x) + AH_2^3\left(\frac{1}{y}\right) + AH_3^3\left(\frac{y}{x}\right) + AH_4^3\left(\frac{x-y}{x-1}\right) + AH_5^3\left(\frac{b(a-x)}{ay-bx}\right) \\ + AH_6^3\left(\frac{P(x,y)}{(x-1)(y-b)}\right) + AH_7^3\left(\frac{(x-y)(y-b)}{yP(x,y)}\right) + AH_8^3\left(\frac{xP(x,y)}{(x-y)(x-a)}\right) \\ + AH_9^3\left(\frac{y(x-b)}{x(y-a)}\right) + AH_{10}^3\left(\frac{a(b-x)}{by-ax}\right) = 0 \end{aligned}$$

Tissus de del Pezzo \mathcal{W}_{dP_5} et \mathcal{W}_{dP_4}

- $(\mathcal{A}b)$ $R(\phi_1) - R(\phi_2) - R(\phi_3) - R(\phi_4) + R(\phi_5) = 0$
- Pour chaque i : \mathcal{F}_{ϕ_i} = feuilletage par les $\{\phi_i = \lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{P}^1$

Tissu : $\mathcal{W}_{dP_5} = (\mathcal{F}_{\phi_1}, \dots, \mathcal{F}_{\phi_5})$: 5-uplet de feuilletages

- \mathcal{W}_{dP_5} = objet géométrique $\rightsquigarrow (\mathbf{HLog}^2) = (\mathcal{A}b)$

$\mathcal{W}_{dP_4} = (\mathcal{F}_{\phi_k})_{\substack{\phi_k : dP_4 \rightarrow \mathbb{P}^1 \\ \text{fib}^\circ \text{ en coniques}}} \rightsquigarrow (\mathbf{HLog}^3)$

Comparaison des tissus \mathcal{W}_{dP_5} et \mathcal{W}_{dP_4}

\mathcal{W}_{dP_5} et \mathcal{W}_{dP_4} satisfont des propriétés remarquables similaires :

- ▶ même *déf^o géométrique* : pinces de coniques sur une dP_d
- ▶ *non-linéarisables*
- ▶ de *rang maximal*, toutes leurs RA *hyperlogarithmiques*
- ▶ on a
$$\begin{aligned} \text{RA}(\mathcal{W}_{dP_5}) &= \text{LogRA}^1(\mathcal{W}_{dP_5}) \oplus \langle \text{HLog}^2 \rangle \\ \text{RA}(\mathcal{W}_{dP_4}) &= \text{LogRA}^1(\mathcal{W}_{dP_4}) \oplus \text{HLogRA}^2(\mathcal{W}_{dP_4}) \oplus \langle \text{HLog}^3 \rangle \end{aligned}$$

(décompositions en W_r -*representations irréductibles*)
- ▶ caractérisés par les *matroïdes* de leurs sous-3-tissus hexagonaux
- ▶ sont *canoniquement algébrisables*
- ▶ sont des *tissus modulaires*
- ▶ sont des *tissus clusters* (“amassés”)
- ▶ s’obtiennent géométriquement à la [Gelfand-MacPherson]

Comparaison des tissus \mathcal{W}_{dP_5} et \mathcal{W}_{dP_4}

\mathcal{W}_{dP_5} et \mathcal{W}_{dP_4} satisfont des propriétés remarquables similaires :

- ▶ même *déf^o géométrique* : pinces de coniques sur une dP_d
- ▶ *non-linéarisables*
- ▶ de *rang maximal*, toutes leurs RA *hyperlogarithmiques*
- ▶ on a
$$\begin{aligned} \text{RA}(\mathcal{W}_{dP_5}) &= \text{LogRA}^1(\mathcal{W}_{dP_5}) \oplus \langle \text{HLog}^2 \rangle \\ \text{RA}(\mathcal{W}_{dP_4}) &= \text{LogRA}^1(\mathcal{W}_{dP_4}) \oplus \text{HLogRA}^2(\mathcal{W}_{dP_4}) \oplus \langle \text{HLog}^3 \rangle \end{aligned}$$

(décompositions en W_r -representations irréductibles)
- ▶ caractérisés par les *matroïdes* de leurs sous-3-tissus hexagonaux
- ▶ sont *canoniquement algébrisables*
- ▶ sont des *tissus modulaires*
- ▶ sont des *tissus clusters* (“amassés”)
- ▶ s’obtiennent géométriquement à la [Gelfand-MacPherson]

Seconde partie

Plan (exposé précédent)

I Introduction

Polylogarithmes & Identités fonctionnelles

Théorème : $\mathbf{HLog}^w = 0$ pour $w = 1, \dots, 6$

II Preuve

Surfaces de Del Pezzo

Hyperlogarithmes

III Comparaison de $\mathbf{HLog}^2 = \mathcal{A}b$ avec \mathbf{HLog}^3

IV Approche à la Gelfand-MacPherson

- I **Construction de $H\text{Log}^2$ par Gelfand & MacPherson**

- II **Tissus de Gelfand-MacPherson**
 - Application moment, Polytope moment,
Application-face, etc.

- III **Tissu de Gelfand-MacPherson de \mathbb{S}_5 et $H\text{Log}^3$**

- IV **Les autres cas : G_r/P_r et $H\text{Log}^{r-2}$ pour $r = 4, \dots, 8$**

Préambule

- \mathbf{HLog}^2 $R(x) - R(y) - R\left(\frac{x}{y}\right) - R\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + R\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0$
- \mathbf{HLog}^3 $AH_1^3(x) + AH_2^3\left(\frac{1}{y}\right) + AH_3^3\left(\frac{y}{x}\right) + AH_4^3\left(\frac{x-y}{x-1}\right)$
 $+ AH_5^3\left(\frac{b(a-x)}{ay-bx}\right) + AH_6^3\left(\frac{P(x,y)}{(x-1)(y-b)}\right) + AH_7^3\left(\frac{(x-y)(y-b)}{yP(x,y)}\right)$
 $+ AH_8^3\left(\frac{xP(x,y)}{(x-y)(x-a)}\right) + AH_9^3\left(\frac{y(x-b)}{x(y-a)}\right) + AH_{10}^3\left(\frac{a(b-x)}{by-ax}\right) = 0$
- \mathbf{HLog}^2 et \mathbf{HLog}^3 sont très similaires... .. mais pas complètement !
 - \mathbf{HLog}^2 unique vs il y a $\infty^2 \mathbf{HLog}_{a,b}^3$
 - il n'y a que \mathbf{R} dans \mathbf{HLog}^2 vs il y a les \mathbf{AH}_i^3 dans \mathbf{HLog}^3
 - $\mathbf{W}_{A_4} = \mathbf{Aut}(\mathbf{dP}_5)$ agit géométriquement vs pas \mathbf{W}_{D_5} !

Correspondance de Gelfand–MacPherson

- $R(\mathbf{x}) - R(\mathbf{y}) - R\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}\right) - R\left(\frac{1-\mathbf{y}}{1-\mathbf{x}}\right) + R\left(\frac{\mathbf{x}(1-\mathbf{y})}{\mathbf{y}(1-\mathbf{x})}\right) = 0$

- Isomorphisme $\mathbb{C}^2 \setminus \mathbf{A} \simeq \mathcal{M}_{0,5}(\mathbb{C})$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto [0, 1, \infty, \mathbf{x}, \mathbf{y}]$$

- $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}/\mathbf{y} \\ \frac{1-\mathbf{y}}{1-\mathbf{x}}, \frac{\mathbf{x}(1-\mathbf{y})}{\mathbf{y}(1-\mathbf{x})} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Applications d'oubli} \\ \mathbf{f}_i : \mathcal{M}_{0,5} \rightarrow \mathcal{M}_{0,4} \end{array} \right\}$

- **Gelfand-MacPherson** (sur \mathbb{R}) :

$$\begin{array}{ccc}
 & \overset{a_i}{\curvearrowright} & \\
 \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^5) & \xrightarrow{\mathbf{F}_i} & \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^5/\langle e_i \rangle) \\
 \downarrow /H_4 & & \downarrow /H_{3,i} \quad \longleftarrow \\
 \mathcal{M}_{0,5}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathbf{f}_i} & \mathcal{M}_{0,4}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}
 \end{array}$$

Les flèches verticales sont les quotients par les sous-groupes de Cartan $(\mathbb{R}^*)^4 \simeq H_4 \subset GL(\mathbb{R}^5)$ et $(\mathbb{R}^*)^3 \simeq H_{3,i} \subset GL(\mathbb{R}^5/\langle e_i \rangle)$

Construction de $(\mathcal{A}b)$ par Gelfand et MacPherson

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{a_i} & \\
 \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^5) & \xrightarrow{F_i} & \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^5/\langle e_i \rangle) \\
 \downarrow \nu=\nu_4 & & \downarrow \nu_i=\nu_3 \\
 \mathcal{M}_{0,5}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{M}_{0,4}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} \setminus \{0,1\}
 \end{array}$$

\mathbf{P}_1 : 1ère classe de Pontryagin

$$\mathbf{H}^4(\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^5)) \ni \mathbf{P}_1 = [\Omega]$$

avec $\Omega \in \Omega^4(\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^5))^{\mathbf{SO}_5(\mathbb{R})}$

- \int sur les fibres de la 4-forme $\Omega \longrightarrow$
 - $\omega_{0,5} = \nu_*(\Omega) \in \Omega^0(\mathcal{M}_{0,5}(\mathbb{R}))$
 - $\omega_{0,4,i} = (\nu_i)_*(\Omega_i) \in \Omega^1(\mathcal{M}_{0,4}(\mathbb{R}))$

- En $\nu(\xi) : \omega_{0,5} = \int_{\overline{H \cdot \xi}} \Omega + \overline{H \cdot \xi} \simeq \Delta_2^5$ via $\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^5) \xrightarrow{\mu} \Delta_2^5$
 $\partial[\Delta_2^5] = \sum_{i=1}^5 (-1)^i a_{i*}([\Delta_{2,i}^4])$

- Stokes pour \int sur les fibres :

$$\underbrace{d\omega_{0,5}}_{=0} = \sum_{i=1}^5 (-1)^i \underbrace{f_i^*(\omega_{0,4})}_{=d\mathbf{R}} \implies 0 = \sum_{i=1}^5 (-1)^i f_i^*(d\mathbf{R}) \quad (\mathcal{A}b)$$

Variétés de Cox

- Comment obtenir $\mathbf{G}_2(\mathbb{C}^5)$ à partir de $\mathbf{X}_4 = \mathbf{dP}_5 = \overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ 🤔 ?

C'est sa variété de Cox! 🙌😊

- \mathbf{S} = variété projective (lisse) telle que $\mathbf{Pic}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{S}) = \bigoplus_{i=0}^r \mathbb{Z} \ell_i$
($\mathbf{S} = \mathbf{Bl}_{p_1, \dots, p_r}(\mathbb{P}^2)$ $\ell_0 = \mathbf{h} = [H]$ et $\ell_i = [E_i]$ $i = 1, \dots, r$)

- Def° : Anneau de Cox

$$\mathbf{Cox}(\mathbf{S}) = \bigoplus_{n_0, \dots, n_r \in \mathbb{Z}} \mathbf{H}^0(\mathbf{S}, \mathcal{O}_{\mathbf{S}}(n_0 H + n_1 E_1 + \dots + n_r E_r))$$

- Faits : – $\mathbf{Cox}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ (polynômes homogènes)
– $\mathbf{Cox}(\mathbf{S}) = \mathbb{C}[y_1, \dots, y_m] \iff \mathbf{S}$ est torique
– $\mathbf{Cox}(\mathbf{S})$ de type fini = \mathbf{S} “Mori Dream Space” (MMP ✓)

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \mathbb{C}[\Gamma_1, \dots, \Gamma_m] / \mathcal{J}_{\mathbf{S}} \end{array} \longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{S}) = \text{Spec}(\mathbf{Cox}(\mathbf{S})) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^m$$

Variétés de Cox des surfaces de del Pezzo

- Surface $\mathbf{S} \supset \ell$ avec $\ell \simeq \mathbb{P}^1$ et $\ell^2 = -1$ $\implies \sigma_\ell \in \mathbf{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{X}_r}(\ell)) \setminus \{0\}$ générateur de $\mathbf{Cox}(\mathbf{S})$
- Dans $\mathbf{Bl}_{p_1, \dots, p_9}(\mathbb{P}^2)$: $\exists \infty$ de (-1) -droites $\implies \mathbf{Cox}(\mathbf{Bl}_{p_1, \dots, p_9}(\mathbb{P}^2))$ pas de type fini

Thm [Batyrev, Popov] Pour $r = 3, \dots, 8$, on a

$$\mathbf{Cox}(\mathbf{dP}_d = \mathbf{X}_r = \mathbf{Bl}_{p_1, \dots, p_r}(\mathbb{P}^2)) = \mathbb{C}[\sigma_\ell \mid \ell \in \mathcal{L}_r] / \mathcal{J}_{\mathbf{dP}_d}$$

- $\mathbf{T}_{\text{NS}} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{Pic}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{X}_r), \mathbb{C}^*) \circlearrowleft \mathbf{A}(\mathbf{X}_r) \rightsquigarrow \mathbf{X}_r = \mathbf{A}(\mathbf{X}_r) // \mathbf{T}_{\text{NS}}$
- $\mathbf{A}(\mathbf{X}_r) \hookrightarrow \mathbb{C}^{\mathcal{L}_r} + \mathbb{Z}$ -graduation sur $\mathbf{Cox}(\mathbf{X}_r)$ induite par $(-K, \cdot)$
 $\longrightarrow \mathbf{P}(\mathbf{X}_r) = \underbrace{\text{Proj}(\mathbf{Cox}(\mathbf{X}_r))}_{=(\mathbf{A}(\mathbf{X}_r) - \{0\}) / \mathbb{C}^*} \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}^{\mathcal{L}_r}) \circlearrowleft \mathcal{T}_{\text{NS}} = \mathbf{T}_{\text{NS}} / \mathbb{C}^*$

Variétés de Cox des surfaces de del Pezzo

- $\mathbf{P}(\mathbf{X}_r) = \text{Proj}(\mathbf{Cox}(\mathbf{X}_r)) \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}\mathcal{L}_r) \circlearrowleft \begin{matrix} \mathcal{T}_{\text{NS}} = \mathbf{T}_{\text{NS}}/\mathbb{C}^* \\ \mathbf{W}(E_r) \end{matrix} \right\} \rightsquigarrow \mathbf{G}(E_r)$

Thm [Batyrev, Popov, Derenthal, Serganova-Skorobogatov]

1. $\mathbb{C}\mathcal{L}_r$ est une représentation **minuscule** de $\mathbf{G}_r = \mathbf{G}(E_r)$
2. Plongement $(\mathcal{T}_{\text{NS}}, \mathbf{H}_r)$ -équivariant

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}_r) \hookrightarrow \mathbf{V}_r = \mathbf{G}_r/\mathbf{P}_r \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}\mathcal{L}_r)$$

3. Il y a un plongement $f_{\text{SS}} : \mathbf{X}_r \hookrightarrow \mathcal{Y}_r = \mathbf{V}_r//\mathbf{H}_r$ tel que

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}(\mathbf{X}_r) & \hookrightarrow & \mathbf{V}_r \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}\mathcal{L}_r) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{dP}_{9-r} = \mathbf{X}_r & \xrightarrow{f_{\text{SS}}} & \mathcal{Y}_r = \mathbf{V}_r//\mathbf{H}_r \end{array} \quad \text{soit commutatif}$$

4. Il y a un isomorphisme $\mathbf{W}(E_r) \simeq \text{Aut}(\mathcal{Y}_r)$

- $r = 4$, $\mathbf{A}_4 : \mathbf{P}(\mathbf{X}_4) = \mathbf{V}_4 = \mathbf{G}_2(\mathbb{C}^5) \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}^{\mathcal{L}_4}) \simeq \mathbb{P}^9$ (Plücker)

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{P}(\mathbf{X}_4) & \xlongequal{\quad} & \mathbf{V}_4 = \mathbf{G}_2(\mathbb{C}^5) & \xrightarrow{\pi_i} & \mathbf{G}_2(\mathbb{C}_i^4) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{dP}_5 = \mathbf{X}_4 & \xrightarrow[\sim]{f_{SS}} & \mathcal{Y}_4 = \overline{\mathcal{M}}_{0,5} & \xrightarrow[\sim]{\frac{\pi_i}{f_i}} & \overline{\mathcal{M}}_{0,4} \simeq \mathbb{P}^1 \\
 \longrightarrow & \mathcal{W}_{\mathbf{dP}_5} = f_{SS}^* & (\mathcal{W}_{\overline{\mathcal{M}}_{0,5}}) & &
 \end{array}$$

- Pour $r \in \{4, \dots, 7\}$ ($r = 8?$), on a :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{P}(\mathbf{X}_r) & \hookrightarrow & \mathbf{V}_r = \mathbf{G}_r / \mathbf{P}_r \\
 \downarrow & \nearrow F_{SS} & \downarrow \\
 \mathbf{dP}_{9-r} = \mathbf{X}_r & \xrightarrow{f_{SS}} & \mathcal{Y}_r
 \end{array}$$

- Construire $\mathcal{W}_{\mathbf{dP}_{9-r}}$ et \mathbf{HLog}^{r-2} à partir de $\mathbf{V}_r = \mathbf{G}_r / \mathbf{P}_r$ et \mathcal{Y}_r ?

II Tissus de Gelfand-MacPherson

\mathbf{G} = groupe de Lie simple, type Dynkin D , rang r

- $\mathbf{G} \supset \mathbf{P} \supset \mathbf{H}$: \mathbf{P} = sous-groupe parabolique standard (maximal)
 $\mathbf{H} \simeq (\mathbb{C}^*)^r$ = sous-tore de Cartan

$\mathbf{V} = \mathbf{G}/\mathbf{P}$: variété algébrique projective \mathbf{G} -homogène

$\mathbf{E}_\rho = \text{rep}^\circ$ de \mathbf{G} ($\rho : \mathbf{G} \hookrightarrow \mathbf{GL}(\mathbf{E}_\rho)$) telle que

- $\mathbf{V} \subset \mathbb{P}(\mathbf{E}_\rho)$: $\mathbf{V} = \mathbf{G} \cdot [e_\omega]$ avec $e_\omega \in \mathbf{E}_\rho$ de plus haut poids ω
 $\mathbf{P} = \text{Stab}_{\mathbf{G}}([e_\omega]) = \text{stabilisateur de } [e_\omega] \in \mathbb{P}(\mathbf{E}_\rho)$

$$\mathfrak{W}_\rho = \{ \text{poids de } \rho \} \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \simeq \mathbb{R}^r \quad \left(\mathfrak{h} = \text{Lie}(\mathbf{H}) \right)$$

– $\mathbf{V} \ni v = \left[\sum_{w \in \mathfrak{W}} p^w(v) e_w \right] \in \mathbb{P}(\mathbf{E}_\rho)$ $(p^w(v))_w$ “coordonnées de Plücker généralisées”

- “Application moment” : $\mu = \mu_{D,\rho} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$, $v \longmapsto \frac{\sum_w |p^w(v)|^2 w}{\sum_w |p^w(v)|^2}$

Tissus de Gelfand-MacPherson

- **Application moment** : $\mu : \mathbf{X} \longrightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$, $v \longmapsto \frac{\sum_w |\rho^w(v)|^2 w}{\sum_w |\rho^w(v)|^2}$
- **Polytope moment** : $\mu(\mathbf{X}) = \Delta = \Delta_{D,\rho} = \text{Conv}(\mathfrak{W}_\rho) \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$
- On note $H_+ = \mathbf{H}(\mathbb{R}_{>0}) \simeq (\mathbb{R}_{>0})^r$ (forme déployée)

Thm [Atiyah, Guillemin-Sternberg, Gelfand-Serganova]

1. Pour tout $v \in \mathbf{V}$:

- $\Delta_v = \mu(\overline{H \cdot v})$ est un \mathfrak{W}_ρ -sous-polytope de Δ
- μ induit un isom C^ω de variétés à coins $\overline{H_+ \cdot v} \simeq \Delta_v$

2. Pour v générique, i.e. $v \in \mathbf{V}^\circ = \mu^{-1}(\overset{\circ}{\Delta})$, on a $\Delta_v = \Delta_{D,\rho}$

Tissus de Gelfand-MacPherson

- F face de Δ , de codim 1 : $\mathbf{V}_F = \mu^{-1}(F) \subset \mathbf{V}$

Prop : 1. $\mathbf{V}_F = \mathbf{G}_F / \mathbf{P}_F$ avec $(\mathbf{G}_F, \mathbf{P}_F)$ de type (D_F, ω_F)

et $F \simeq \Delta_{D_F, \omega_F}$

2. On a $\mathbf{E}_\rho = \mathbf{E}_F \oplus \mathbf{E}^F$ comme \mathbf{G}_F -rep $^\circ \rightarrow$

Project $^\circ$ linéaire
 $\Pi_F : \mathbf{E}_\rho \rightarrow \mathbf{E}_F$

$$\mathbf{V}_F = \mathbf{V} \cap \mathbb{P}(\mathbf{E}_F) = \Pi_F(\mathbf{V}) \subset \mathbb{P}(\mathbf{E}_F)$$

3. $\Pi_F(\mathbf{V}^\circ) = \mathbf{V}_F^\circ$ et $\Pi_F : \mathbf{V}^\circ \rightarrow \mathbf{V}_F^\circ$ est une fibration localement^t
triviale en espaces projectifs à poids

4. H -torseur $\nu_H : \mathbf{V}^\circ \rightarrow \mathcal{Y}^\circ = \mathbf{V}^\circ / H$ ($\mathcal{Y}^\circ \subset \mathcal{Y} = \mathbf{V}^{ss} // H$)

5. $\Pi_F : \mathbf{V}^\circ \rightarrow \mathbf{V}_F^\circ$ est (H, H_F) -équivariante ($H \twoheadrightarrow H_F$)

Tissus de Gelfand-MacPherson

5. $\mathbb{P}(\mathbf{E}_\rho) \supset \mathbf{V}^\circ \xrightarrow{\Pi_F} \mathbf{V}_F^\circ \subset \mathbb{P}(\mathbf{E}_F)$ est $(\mathbf{H}, \mathbf{H}_F)$ -équivariante

6. $\exists \pi_F : \mathcal{Y}^\circ \rightarrow \mathcal{Y}_F^\circ = \mathbf{V}_F^\circ / \mathbf{H}_F$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{V}^\circ & \xrightarrow{\Pi_F} & \mathbf{V}_F^\circ \\ \nu_H \downarrow & & \downarrow \nu_{H_F} \\ \mathcal{Y}^\circ & \xrightarrow{\pi_F} & \mathcal{Y}_F^\circ \end{array} \quad \text{soit commutatif}$$

• Def^o : Tissus de Gelfand-MacPherson

$$\mathcal{W}_{G/P}^{GM} = \mathcal{W}\left(\Pi_F \mid F \text{ face de codim 1 de } \Delta\right) \leftarrow \mathbf{H}\text{-équivariant}$$

$$\mathcal{W}_{\mathcal{Y}}^{GM} = \mathcal{W}\left(\pi_F \mid F \text{ face de codim 1 de } \Delta\right) = \left(\mathcal{W}_{G/P}^{GM}\right) / \mathbf{H}$$

Tissus de Gelfand-MacPherson : $\mathbf{G}_k(\mathbb{C}^N)$

- $\mathbf{G}/\mathcal{P} = \mathbf{G}_k(\mathbb{C}^N) \subset \mathbb{P}(\wedge^k \mathbb{C}^N)$ ($\mathbf{G} = \mathrm{GL}(\mathbb{C}^N)$, $D = \mathbf{A}_{N-1}$, etc)

$$\mu : \mathbf{G}_k(\mathbb{C}^N) \longrightarrow \Delta_k^N = \left\{ (t_i)_{i=1}^N \mid \begin{array}{l} 0 \leq t_i \leq 1 \\ \sum_{i=1}^N t_i = k \end{array} \right\} \quad \text{hypersimplexe}$$

$$\begin{array}{l} \text{Faces de } \Delta_k^N \\ \text{de codim 1} \end{array} = \left\{ \begin{array}{l} \Delta_k^N \cap \{t_i = 0\} = \Delta_k^{N-1} \quad \leftarrow \mathbf{G}_k(\mathbb{C}^{N-1}) \\ \Delta_k^N \cap \{t_i = 1\} \simeq \Delta_{k-1}^{N-1} \quad \leftarrow \mathbf{G}_{k-1}(\mathbb{C}^{N-1}) \end{array} \right.$$

Pour chaque $i = 1, \dots, N$, il y a deux “applications faces” :

$$\mathbf{G}_{k-1}^\circ(\mathbb{C}^{N-1}_{\{x_i=0\}}) \xleftarrow{\Pi_{\{t_i=1\}}} \mathbf{G}_k^\circ(\mathbb{C}^N) \xrightarrow{\Pi_{\{t_i=0\}}} \mathbf{G}_k^\circ(\mathbb{C}^N / \langle e_i \rangle)$$

Tissus de Gelfand-MacPherson : $G_k(\mathbb{C}^N)$

- Pour chaque $i = 1, \dots, N$, il y a deux “applications faces” :

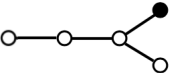
$$\begin{array}{ccccc}
 G_{k-1}^\circ(\mathbb{C}^{N-1}) & \xleftarrow{\Pi_{\{t_i=0\}}} & G_k^\circ(\mathbb{C}^N) & \xrightarrow{\Pi_{\{t_i=1\}}} & G_k^\circ(\mathbb{C}^N / \langle e_i \rangle) \\
 \downarrow \nu_{i,0} & & \downarrow \nu & & \downarrow \nu_{i,1} \\
 \text{Conf}_{N-1}^\circ(\mathbb{P}^{k-2}) & \xleftarrow{\pi_{i,0}} & \text{Conf}_N^\circ(\mathbb{P}^{k-1}) & \xrightarrow{\pi_{i,1}} & \text{Conf}_{N-1}^\circ(\mathbb{P}^{k-1}) \\
 \left[\text{Proj}_{p_i}(p_k) \right]_{k \neq i} & \longleftarrow & [p_1, \dots, p_N] & \longrightarrow & [p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_N]
 \end{array}$$

- Tissu GM :** $\mathcal{W}_{\text{Conf}_N(\mathbb{P}^k)}^{GM} = \mathcal{W} \left(\begin{array}{l} N \text{ applications d'oubli d'un point} + \\ N \text{ applications de proj}^\circ \text{ d'un point} \end{array} \right)$

- $k = 2$: $\text{Conf}_N^\circ(\mathbb{P}^1) = \mathcal{M}_{0,N}$ $\mathcal{W}_{\mathcal{M}_{0,N}}^{GM} = \mathcal{W} \left(\mathcal{M}_{0,N} \xrightarrow{f_i} \mathcal{M}_{0,N-1} \right)$

$+ N = 5$: $\overline{\mathcal{M}}_{0,5} \simeq \mathbf{dP}_5 = \mathbf{X}_4$ $\mathcal{W}_{\mathcal{M}_{0,5}}^{GM} = \mathcal{W}_{\mathbf{dP}_5} \longleftarrow (\mathcal{A}b)$

Exemple : $\mathcal{W}_{\text{dP}_4}$ (cas $r = 5$)

• Type D_5 :  $\mathbf{G}_5 = \text{Spin}_{10}(\mathbb{C}) \xrightarrow{2:1} \text{SO}_{10}(\mathbb{C})$
 $\mathbf{G}_5/\mathbf{P}_5 = \mathbf{S}_5 \subset \mathbb{P}(\mathbf{S}_5^+)$

– $\mathbf{S}_5 \simeq \mathbf{OG}_5^+(\mathbb{C}^{10}) = \text{“Spinor 10-fold”}$

– $\mathbf{S}_5^+ \simeq \mathbb{C}^{16} = \text{“représentation half-spin”}$

$\mu : \mathbf{S}_5 \rightarrow \Delta_{D_5} =$ **demihypercube** : enveloppe convexe des $\frac{1}{2}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_5) \in \frac{1}{2}\{\pm 1\}^5$ avec $\epsilon_1 \cdots \epsilon_5 = 1$

Facettes : $\mathbf{F} = \Delta_{D_5, i}^\epsilon = \Delta_{D_5} \cap \{t_i = \frac{\epsilon}{2}\} \simeq \Delta_{D_4, \mathbb{Q}^6}$ $\left(\begin{matrix} i = 1, \dots, 5 \\ \epsilon \in \{\pm 1\} \end{matrix} \right)$

Diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{P}(\mathbf{X}_5) & \hookrightarrow & \mathbf{S}_5 & \overset{\Pi_F}{\dashrightarrow} & \mathbb{Q}_F^6 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{dP}_4 = \mathbf{X}_5 & \xrightarrow{f_{SS}} & \mathbf{Y}_5 & \overset{\pi_F}{\dashrightarrow} & \mathbf{Y}_F \simeq \mathbb{P}^2 \end{array}$$

Exemple : \mathcal{W}_{dP_4} (cas $r = 5$)

- Diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{P}(\mathbf{X}_5) & \hookrightarrow & \mathbb{S}_5 & \xrightarrow{\pi_F} & \mathbb{Q}_F^6 = \mathbb{S}_4 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 dP_4 = \mathbf{X}_5 & \xrightarrow{f_{SS}} & \mathbf{Y}_5 & \xrightarrow{\pi_F} & \mathbf{Y}_F \simeq \mathbb{P}^2
 \end{array}$$

- Tissu de Gelfand-MacPherson de \mathbb{S}_5 :

$$\mathcal{W}_{\mathbf{Y}_5}^{GM} = \mathcal{W} \left(\begin{array}{l} \pi_i^\varepsilon : \mathbf{Y}_5 \dashrightarrow \mathbb{P}^2 \\ i = 1, \dots, 5, \varepsilon = \pm \end{array} \right) = \begin{array}{l} 10\text{-tissu de codim } 2 \\ \text{sur } \mathbf{Y}_5 \simeq_{\text{birat}} \mathbb{C}^5 \end{array}$$

Thm : On a $\mathcal{W}_{dP_5} = f_{SS}^*(\mathcal{W}_{\mathbf{Y}_5}^{GM})$, $\mathcal{W}_{dP_4} = f_{SS}^*(\mathcal{W}_{\mathbf{Y}_4}^{GM})$

- Question : Peut-on construire $\mathbf{HLog}_{a,b}^3$ à partir de $\mathcal{W}_{\mathbf{Y}_4}^{GM}$? **Oui !**

- $\mathcal{W}_{\mathcal{Y}_5}^{GM} = \mathcal{W} \left(\begin{array}{l} \pi_i^\epsilon : \mathcal{Y}_5 \dashrightarrow \mathbb{P}^2 \\ i = 1, \dots, 5, \epsilon = \pm \end{array} \right) = \begin{array}{l} \text{10-tissu de codim 2} \\ \text{sur } \mathcal{Y}_5 \simeq_{\text{birat}} \mathbb{C}^5 \end{array}$

- $\mathcal{Q} = \overline{\{xy\mathcal{Z} = 0\}} \subset \mathbb{P}^2$: quadrilatère

$$\rightsquigarrow \omega_{\mathcal{Q}} = \mathbf{Asym} \left(\text{Log}(\mathcal{Z}) \left(\frac{dx}{x} \wedge \frac{dy}{y} \right) \right) \in \text{Log} \mathcal{Q} \left(d\text{Log} \mathcal{Q} \wedge d\text{Log} \mathcal{Q} \right)$$

Thm : 1. On a

$$(\mathbf{HLOG}_{\mathcal{Y}_5}) : \sum_{i, \epsilon} (\pi_i^\epsilon)^* (\omega_{\mathcal{Q}}) = 0$$

2. $\mathbf{HLOG}_{\mathcal{Y}_5} \rightsquigarrow \mathbf{HLog}_{a,b}^3$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$

- **Rques : 1.** $\omega_{\mathcal{Q}}$ généralisation 2D de $d\mathbf{R} = \mathbf{Asym} \left(\text{Log}(z) \left(\frac{dz}{z} \right) \right)$

2. Pour $r = 4, \dots, 7$: $\exists \mathbf{HLOG}_{\mathcal{Y}_r} \in \mathbf{AR}^{r-3} \left(\mathcal{W}_{\mathcal{Y}_r}^{GM} \right)$

Questions

- **Question** : Peut-on construire géométriquement “à la Gelfand et MacPherson” la rel^p abélienne \mathbf{HLog}_{y_r} de $\mathcal{W}_{y_r}^{\text{GM}}$ à partir d’une classe caractéristique sur (une forme réelle de) $\mathbf{V}_r = \mathbf{G}_r/\mathbf{P}_r$?

- $\mathbf{V}_6 = \mathbb{O}_{\mathbb{C}}\mathbf{P}^2 \rightsquigarrow \mathbb{O}\mathbf{P}^2 = F_4/\text{Spin}(9) \quad \mathbf{H}^8(\mathbb{O}\mathbf{P}^2) = \mathbb{R}[\Omega_{\mathbb{O}}^8]$

\mathbb{R} -forme scindée : $\mathbb{O}_s\mathbf{P}^2 = E_{6(6)}/F_{4(4)} \quad \mathbf{H}^8(\mathbb{O}_s\mathbf{P}^2) \stackrel{?}{=} \mathbb{R}[\Omega_{\mathbb{O}_s}^8]$

- **Applications** – $\mathbf{HLog}^1 = \left(\mathbf{Log}(x) - \mathbf{Log}(y) - \mathbf{Log}\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \right) \quad \checkmark$
- $\mathbf{HLog}^2 = \left(\mathbf{R}(x) - \mathbf{R}(y) - \mathbf{R}\left(\frac{x}{y}\right) - \mathbf{R}\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \mathbf{R}\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0 \right) \quad \checkmark$
- $\mathbf{HLog}^3 = \left(\sum_{i=1}^{10} \mathbf{AH}_i^3(U_i(x, y)) = 0 \right) \quad ?$

Beaucoup d'autres questions...

- Interprétation de \mathbf{HLog}^3 en termes du **SC** de \mathbf{dP}_4 ?
- Fait : $\mathbb{C}[\widehat{\mathcal{S}}_5^0] = \text{LPA de type fini} \rightsquigarrow \mathbf{SC} \text{ fini (Ducat)}$
Quest° : $\mathbb{C}[\widehat{\mathcal{S}}_5^0]^H = \mathbb{C}[\widehat{\mathcal{Y}}_5^0] = \text{LPA de type fini? } \mathbf{SC} \text{ fini?}$
Si oui : interprétation de $\mathbf{HLOG}_{\mathcal{Y}_5}$ en termes du **SC** ?
- Versions Unival. $\mathbf{HLog}_{\text{univ}}^3$? Quantique \mathbf{HLog}_q^3 ? Motivique $\mathbf{HLog}_{\text{mot}}^3$?
- Surfaces de del Pezzo singulières/réelles ?
- Blow-ups $\mathbf{BI}_{p_1, \dots, p_r}(\mathbb{P}^2)$ avec $r \geq 9$: $\sum_{c \in \mathcal{K}} \mathbf{AH}_c^{r-2}(\varphi_c) = 0$?