Espaces de modules de tores plats et fonctions hypergéometriques elliptiques

Luc PIRIO

(CNRS & Univ. Versailles)

4 octobre 2018

Plan

I **Surfaces plates ($g \geq 0$)**

Veech "*Flat Surfaces*" Amer. J. Math. (1993)

II **Sphères plates ($g = 0$)**

Deligne-Mostow "*Monodromy of hypergeometric functions*"

Thurston "*Shapes of polyhedra*"

III **Tores plats ($g = 1$)**

Ghazouani-Pirio $\begin{cases} [\mathrm{GP}_{\mathrm{geom}}] & = \text{GAFA (2017)} \\ [\mathbf{GP}_{\mathbf{hypergeom}}] & = \text{Mém. SMF} \end{cases}$

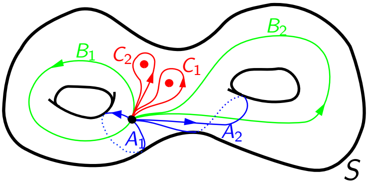
Notations

- $g \geq 0$ et $n \geq 1$ tels que $2g - 3 + n > 0$

- S : surface de genre g
- $p_1, \ldots, p_n$: n points sur S
- $S^* = S \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$

- X : surface de Riemann de genre g
- $x = (x_1, \ldots, x_n)$: n-uplet de points sur X
- $X^* = X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$

- $\pi_1(g,n) = \pi_1(S^*) = \left\langle A_i, B_i, C_1, \ldots, C_n \mid \prod_i [A_i, B_i] = C_n \cdots C_1 \right\rangle$



Définitions :

- un *marquage du π_1 de (X,x)* est un isomorphisme

$$\varphi : \pi_1(g,n) \simeq \pi_1(X^*) \qquad \Big(\text{modulo } \mathbf{Int}\big(\pi_1(g,n)\big)^{\boldsymbol{C}} \Big)$$

- $\mathbf{Teich}_{g,n} = \Big\{ (X, x, \varphi) \,\Big|\, \varphi \text{ marquage de } \pi_1(X^*) \Big\}$

- $\mathbf{PMCG}^{\pm}_{g,n} = \mathbf{Out}\big(\pi_1(g,n)\big)^{\boldsymbol{C}} = \mathbf{Aut}\big(\pi_1(g,n)\big)^{\boldsymbol{C}} \Big/ \mathbf{Int}\big(\pi_1(g,n)\big)^{\boldsymbol{C}}$

Théorie de Teichmüller

- $\mathbf{Teich}_{g,n}$ est isomorphe à un domaine borné de $\mathbb{C}^{3g-3+n}$

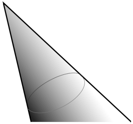
- $\mathbf{PMCG}_{g,n}$ est isomorphe à $\mathbf{Bihol}\left(\mathbf{Teich}_{g,n}\right)$

- $\mathbf{Teich}_{g,n} \big/ \mathbf{PMCG}_{g,n}$ est isomorphe à $\boldsymbol{M}_{g,n}$

- $\mathbf{PMCG}_{g,n}$ est isomorphe à $\boldsymbol{\pi_1^{orb}}\left(\boldsymbol{M_{g,n}}\right)$

Surfaces plates : définitions

- $\forall\,\theta > 0$: $\boldsymbol{C_\theta}$ = cône euclidien d'angle θ =



- **“Plat”** = localement isomorphe à $\mathbb{E}^2 \simeq \big(\mathbb{C}, |dz|^2\big)$

Déf: une métrique plate m sur S^* a une *singularité conique* en p_k si localement en ce point

- $\big(S, m\big) \simeq C_{\theta_k}$ pour un certain *angle conique* $\theta_k > 0$

$\Updownarrow$

- $m = \left|z^{\alpha_k} dz\right|^2$ pour un certain *exposant* $\alpha_k > -1$

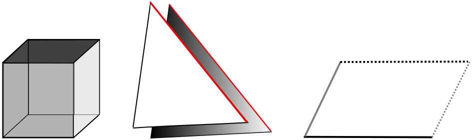
- $\theta_k = 2\pi(1 + \alpha_k)$ $\qquad$ $\boldsymbol{\kappa(p_k)}$ = *courbure en* $p_k = 2\pi - \theta_k$

Gauß-Bonnet : p_k est *conique* $\forall\, k \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 2g - 2$

Surfaces plates : exemples

- **Métriques plates sur X :**
  - $m = |\omega|^2$ avec $\omega \in H^0\big(X, K_X\big)$: surface de translation
  - $m = |\eta|^{2/k}$ avec $\eta \in H^0\big(X, K_X^{\otimes k}\big)$: surface de $\frac{1}{k}$-translation
  - $m = |\mu|^{2/k}$ avec $\mu \in H^0\big(X, K_X^{\otimes k} \otimes L_\rho\big)$, $\rho : \pi_1(X) \to \mathbb{U}$

- **Surface polygonale :** obtenue en recollant des polygônes euclidiens



Thm : **(Décomposition de Delaunay)**

Une surface plate admet une décomposition polygonale canonique

Veech : "*Flat surfaces*"

- $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_k)_{k=1}^n$ fixé tel que $\boldsymbol{\sum_{k=1}^n \alpha_k = 2g-2}$

- $\mathcal{E}_{g,n}^{\boldsymbol{\alpha}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{structures plates sur } S \text{ avec une} \\ \text{singularité } \alpha_k\text{-conique en } p_k \ \forall\, k \end{array} \right\} \Big/ \textit{Isotopie}$

- $(S, m) \in \mathcal{E}_{g,n}^{\boldsymbol{\alpha}}$: $\quad m = \left|z^{\alpha_k} dz\right|^2$ en $p_k \Rightarrow$ structure complexe en p_k

- Application naturelle $$\begin{aligned} \mathcal{E}_{g,n}^{\boldsymbol{\alpha}} &\longrightarrow \textbf{Teich}_{g,n} \\ (S, m) &\longmapsto (X, x) \end{aligned}$$

Thm : [Troyanov]

Pour tout (X, x), il existe une unique métrique plate $m_{X,x}^{\boldsymbol{\alpha}}$ sur X avec $m_{X,x}^{\boldsymbol{\alpha}} = \left|z^{\alpha_k} dz\right|^2$ au voisinage de x_k pour tout $k \leq n$

Veech : “*Flat surfaces*”

- $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_k)_{k=1}^n$ fixé tel que $\boldsymbol{\sum_{k=1}^n \alpha_k = 2g - 2}$

- $\mathcal{E}_{g,n}^{\boldsymbol{\alpha}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{structures plates sur } S \text{ avec une} \\ \text{singularité } \alpha_k\text{-conique en } p_k \ \forall\, k \end{array} \right\} \Big/ \textit{Isotopie}$

- $(S, m) \in \mathcal{E}_{g,n}^{\boldsymbol{\alpha}}$: $m = \left|z^{\alpha_k} dz\right|^2$ en $p_k \Rightarrow$ structure complexe en p_k

- **Isomorphisme**

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}_{g,n}^{\boldsymbol{\alpha}} & \xrightarrow{\sim} & \textbf{Teich}_{g,n} \\ (S, m) & \longmapsto & (X, x) \\ (S, m_{X,x}^{\boldsymbol{\alpha}}) & \longleftarrow & (X, x) \end{array}$$

Thm : [Troyanov]

Pour tout (X, x), il existe une unique métrique plate $m_{X,x}^{\boldsymbol{\alpha}}$ sur X avec $m_{X,x}^{\boldsymbol{\alpha}} = \left|z^{\alpha_k} dz\right|^2$ au voisinage de x_k pour tout $k \leq n$

Pour $(X,x) \in \mathbf{Teich}_{g,n} \simeq \mathcal{E}^{\boldsymbol{\alpha}}_{g,n} \rightsquigarrow$ métrique $\boldsymbol{\alpha}$-plate $m^{\boldsymbol{\alpha}}_{X,x}$ sur X

- $\rho^{\boldsymbol{\alpha}}_{X,x} \; : \; \pi_1(g,n) \xrightarrow{\varphi} \pi_1(X^*) \xrightarrow{\text{holonomie de } m^{\boldsymbol{\alpha}}_{X,x}} \mathbb{U}$

- $\rho^{\boldsymbol{\alpha}}_{X,x} \in K^{\boldsymbol{\alpha}} = \left\{ \rho : \pi_1(g,n) \longrightarrow \mathbb{U} \;\middle|\; \rho(C_k) = e^{i\theta_k} \right\} \simeq \mathbb{U}^{2g}$

- Application d'holonomie $\quad \mathbf{H}^{\boldsymbol{\alpha}} : \mathbf{Teich}_{g,n} \longrightarrow \mathbb{U}^{2g}, \; (X,x) \longmapsto \rho^{\boldsymbol{\alpha}}_{X,x}$

Thm : [Veech]

- $\mathbf{H}^{\boldsymbol{\alpha}} : \mathbf{Teich}_{g,n} \longrightarrow \mathbb{U}^{2g}$ est une submersion C^{ω}

- $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{\rho}} = \left(\mathbf{H}^{\boldsymbol{\alpha}}\right)^{-1}(\rho)$:
  - sous-variété complexe de $\mathbf{Teich}_{g,n}$
  - $\dim_{\mathbb{C}} \left(\boldsymbol{\mathcal{F}}^{\boldsymbol{\alpha}}_{\rho}\right) = 2g - 3 + n$

$\rightsquigarrow$ **Def :** $\mathcal{F}^{\boldsymbol{\alpha}} = \left\{ \mathcal{F}^{\boldsymbol{\alpha}}_{\rho} \;\middle|\; \rho \in K^{\boldsymbol{\alpha}}, \rho \neq \mathbf{1} \right\} =$ **Feuilletage de Veech**

- **"Application de Veech V^{α}_{ρ}"** : pour $\rho \in \mathbf{Im}\left(\mathbf{H}^{\alpha}\right) \setminus \{\mathbf{1}\}$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}^{\alpha}_{\rho} \arrow[rr, "V^{\alpha}_{\rho}"] \arrow[dd, hook] \arrow[drr] & & \mathbb{P}H^1\left(S^*, \mathbb{C}_{\rho}\right) \simeq \mathbb{P}^{2g-3+n} \arrow[d] \\
 & & \rho \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] \\
\mathbf{Teich}_{g,n} \arrow[rr, "\mathbf{H}^{\alpha}"'] & & K^{\alpha}
\end{tikzcd}
$$

Thm : [Veech]

$\bullet\!\rightsquigarrow$ Feuilletage $\mathbf{F}^{\boldsymbol{\alpha}}$ sur $\mathbf{M}_{g,n}$ $\begin{cases} \text{1. transvmt. modelé sur } (\mathbb{U}^{2g})\ \mathbb{E}^{2g} \\ \text{2. feuilles } \mathbf{F}^{\boldsymbol{\alpha}}_{\rho} \text{ de } \dim_{\mathbb{C}} = 2g-3+n\,, \\ \quad \text{localement modelées sur } \mathbb{CH}^{p,q} \end{cases}$

$\bullet \left\{ \begin{array}{c} ds^2_{\mathrm{Euc}} \text{ transversal}^{t} \\ +\ \omega^{\boldsymbol{\alpha}}_{\rho} \text{ sur } \mathcal{F}^{\boldsymbol{\alpha}}_{\rho}\,,\ \forall\ \rho \end{array} \right\} \Longrightarrow$ forme volume $\Omega^{\boldsymbol{\alpha}}$ sur $\mathbf{M}_{g,n}$

Questions :

- Au sujet de $\mathbf{F}^{\boldsymbol{\alpha}}$:
  - dynamique ?
  - géométrie ? ($\exists$ feuille fermée/algébrique ?)
- **“Conjecture du volume de Veech”** :

$$\mathbf{Vol}^{\boldsymbol{\alpha}}\Big(\mathbf{M}_{g,n}\Big) := \int_{\mathbf{M}_{g,n}} \Omega^{\boldsymbol{\alpha}} < +\infty \qquad (??)$$

Soit $(X, x) \in \mathbf{Teich}_{g,n} \simeq \boldsymbol{\mathcal{E}}^{\boldsymbol{\alpha}}_{g,n}$ $\rightsquigarrow$ métrique $\boldsymbol{\alpha}$-plate $m^{\boldsymbol{\alpha}}_{X,x}$ sur X

- **Développante :** $D^{\boldsymbol{\alpha}}_{X,x} : \widetilde{X^*} \to \mathbb{C} \simeq \mathbb{E}^2$ $\quad \left(m^{\boldsymbol{\alpha}}_{X,x} = \left| dD^{\boldsymbol{\alpha}}_{X,x} \right|^2 \right)$

- **“Période relative (tordue)” :**

$$\boldsymbol{\xi}(\gamma) = \int_\gamma dD^{\boldsymbol{\alpha}}_{X,x} \qquad \text{avec} \qquad \gamma \in H_1\Big(X, \{x_k\}, \mathbb{C}_{\rho^{-1}}\Big)$$

Prop : l'application $V^{\boldsymbol{\alpha}}_\rho : \mathcal{F}^{\boldsymbol{\alpha}}_\rho \to \mathbb{P}H^1(S^*, \mathbb{C}_\rho)$ s'écrit explicitement :

$$\mathcal{F}^{\boldsymbol{\alpha}}_\rho \ni (X, x) \longmapsto \Big[\boldsymbol{\xi}(\gamma_i)\Big]_{i=0}^{2g-3+n} \in \mathbb{P}^{2g-3+n}$$

où $(\gamma_0, \ldots, \gamma_{2g-3+n})$ est une base de $H_1\big(X, \{x_k\}, \mathbb{C}_{\rho^{-1}}\big)$

- **Ex.** : $g = 0$: $X = \mathbb{P}^1 \ni x_1, \ldots, x_n$, $\quad m^{\boldsymbol{\alpha}}_{X,x} = \left| \prod_k (t - x_k)^{\alpha_k} dt \right|^2$

$$\boldsymbol{\xi}(\gamma) = \int_\gamma \prod_k (t - x_k)^{\alpha_k} dt = \textbf{intégrale hypergéométrique}$$

II $g = 0$

- $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_k)_{k=1}^n$ avec $\sum_{k=1}^n \alpha_k = -2$
- $\mathbf{H}^{\boldsymbol{\alpha}} : \mathbf{Teich}_{0,n} \longrightarrow K^{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbb{U}^{2g} = \mathbb{U}^0 = \{\bullet\}$
- Le feuilletage de Veech $\mathbf{F}^{\boldsymbol{\alpha}}$ n'a qu'une seule feuille : $\mathbf{M}_{0,n}$
- $\left\{ \begin{matrix} -1 < \alpha_k < 0 \\ (0 < \theta_k < 2\pi) \end{matrix} \right\} \Longrightarrow$ $\mathbb{CH}^{n-3}$-structure sur $\mathbf{M}_{0,n} = \mathbf{M}_{0,n}^{\boldsymbol{\alpha}}$
- Holonomie $\mathcal{H}^{\boldsymbol{\alpha}} : \pi_1\big(\mathbf{M}_{0,n}\big) = \mathbf{PB}_{n-1} \longrightarrow \mathbf{Aut}(\mathbb{CH}^{n-3})$
- Sous-groupe $\Gamma^{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{Im}\big(\mathcal{H}^{\boldsymbol{\alpha}}\big) < \mathbf{Aut}(\mathbb{CH}^{n-3}) = \mathbf{PU}(1, n-3)$
- Critère arithmétique sur $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\big(\mathbf{INT}\big) \quad \forall\, k < \ell \;:\; -1 < \alpha_k + \alpha_\ell \implies \frac{1}{1 + \alpha_k + \alpha_\ell} \in \mathbb{Z}$$

II Deligne-Mostow "*Monodromy of hypergeom. functions*"

- L'application de Veech :

$$V^{\boldsymbol{\alpha}} \ : \ \widetilde{\mathbf{M}_{0,n}} \longrightarrow \mathbb{CH}^{n-3} \subset \mathbb{P}^{n-3}\,,\ x \mapsto \Big[\int_{\gamma_k} \prod (t-x_k)^{\alpha_k}\,dt\Big]_{k=0}^{n-3}$$

coïncide avec l'**"application de Schwarz"**

$$S^{\boldsymbol{\alpha}} \ : \ \widetilde{\mathbf{M}_{0,n}} \longrightarrow \mathbb{CH}^{n-3} \subset \mathbb{P}^{n-3}\,,\ x \mapsto \Big[F_k(x)\Big]_{k=0}^{n-3}$$

(F_k) = base de l'espace sol$^{\mathbf{o}}$ du "**système hypergéométrique**"

$$(\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\boldsymbol{\alpha}}) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{x_i - x_j}\left(\alpha_i \frac{\partial F}{\partial x_j} - \alpha_j \frac{\partial F}{\partial x_i}\right)\,, \quad 1 \leq i < j \leq n-3$$

Thm : [Schwarz (1873) - $\cdots$ - **Deligne-Mostow (1986)**]

1. α satisfait (**INT**) $\Longrightarrow$ $\mathbf{Mon}\big(S^{\boldsymbol{\alpha}}\big) = \Gamma^{\boldsymbol{\alpha}} \subset \mathbf{PU}(1, n-3)$ réseau

II Deligne-Mostow *"Monodromy of hypergeometric fcts."*

- L'application de Veech :

$$V^{\boldsymbol{\alpha}} \ : \ \widetilde{\mathbf{M}_{0,n}} \longrightarrow \mathbb{CH}^{n-3} \subset \mathbb{P}^{n-3}\,,\ x \mapsto \left[\int_{\gamma_k} \prod (t-x_k)^{\alpha_k}\, dt\right]_{k=0}^{n-3}$$

coïncide avec l'**"application de Schwarz"**

$$S^{\boldsymbol{\alpha}} \ : \ \widetilde{\mathbf{M}_{0,n}} \longrightarrow \mathbb{CH}^{n-3} \subset \mathbb{P}^{n-3}\,,\ x \mapsto \Big[F_k(x)\Big]_{k=0}^{n-3}$$

(F_k) = base de l'espace sol$^{\mathbf{o}}$ du "**système hypergéométrique**"

$$(\boldsymbol{\mathcal{E}^{\alpha}}) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{x_i - x_j}\left(\alpha_i \frac{\partial F}{\partial x_j} - \alpha_j \frac{\partial F}{\partial x_i}\right), \quad 1 \leq i < j \leq n{-}3$$

Thm : [Schwarz (1873) - $\cdots$ - **Deligne-Mostow (1986)**]

1. α satisfait (**INT**) $\Longrightarrow$ **Mon**$\big(S^{\boldsymbol{\alpha}}\big) = \Gamma^{\boldsymbol{\alpha}} \subset \mathbf{PU}(1, n-3)$ réseau

2. Construction de réseaux AR & NAR de $\mathbf{PU}(1, m)$, $m \leq 5$

II $g = 0$: Thurston "*Shapes of polyhedra*" (1987)

- $\mathbf{M}_{0,n}^{\boldsymbol{\alpha}} \simeq \mathcal{E}_{0,n}^{\boldsymbol{\alpha}} / \mathbf{PMCG}_{0,n} = \left\{ \begin{array}{l} \text{sphères plates avec singularité} \\ \alpha_k\text{-conique en } p_k,\ k = 1, \ldots, n \end{array} \right\} \Big/ \sim$

Thm : [Thurston] La complétion métrique $\overline{\mathbf{M}_{0,n}^{\boldsymbol{\alpha}}}$:

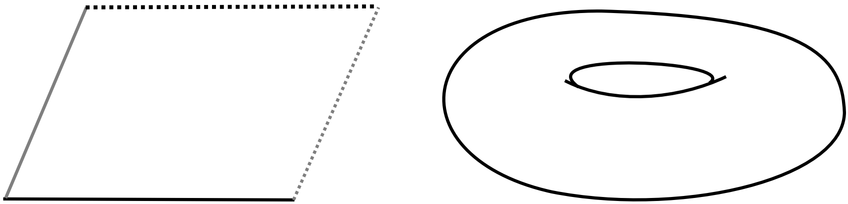
- est une $\mathbb{CH}^{n-3}$-conifolde de volume fini
- s'obtient en rajoutant à $\mathbf{M}_{0,n}^{\boldsymbol{\alpha}}$ des ***C*-strates** $\mathbf{M}_{0,n'}^{\boldsymbol{\alpha}'}$
- $\exists$ formule pour l'angle conifolde autour de $\mathbf{M}_{0,n'}^{\boldsymbol{\alpha}'}$ de codim 1
- est une $\mathbb{CH}^{n-3}$-orbifolde si $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_k)_{k=1}^n$ vérifie

  (**INT**) $\quad \forall\, k < \ell \, : \, -1 < \alpha_k + \alpha_\ell \Longrightarrow \big(1 + \alpha_k + \alpha_\ell\big)^{-1} \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow$ Retrouve réseaux AR & NAR de $\mathbf{PU}(1, m)$ de Deligne-Mostow

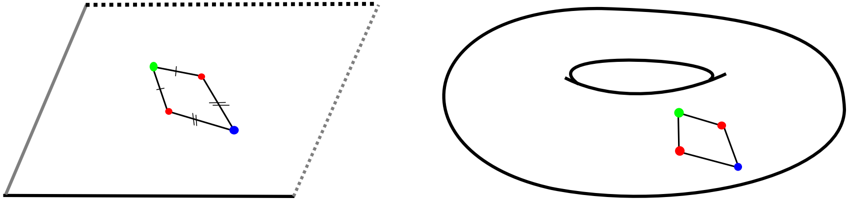
II $g = 0$: Thurston "*Shapes of polyhedra*" (1987)

- **<u>Méthode</u> : chirurgies sur les surfaces plates**



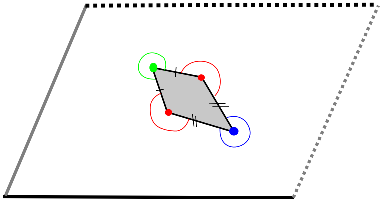
II $g = 0$: Thurston "*Shapes of polyhedra*" (1987)

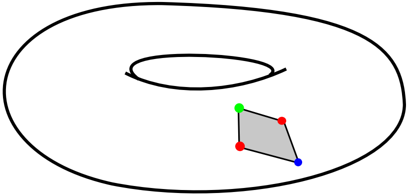
- **Méthode : chirurgies sur les surfaces plates**



II $g = 0$: Thurston "*Shapes of polyhedra*" (1987)

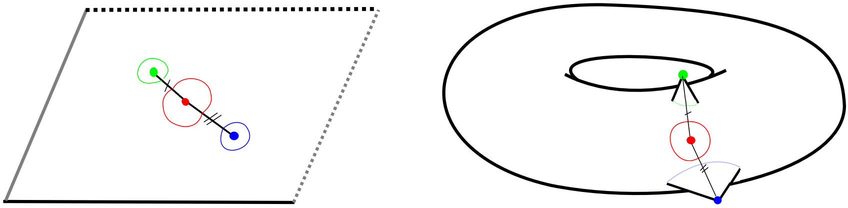
- **<u>Méthode</u> : chirurgies sur les surfaces plates**





II $g = 0$: Thurston "*Shapes of polyhedra*" (1987)

- **<u>Méthode</u> : chirurgies sur les surfaces plates**



III $g = 1$: [GPgeom]

- $\mathbf{M}_{1,n+1}$ de dimension $n+1$
- **[Veech]** $\begin{bmatrix} 2\pi < \theta_1 < 4\pi \\ 0 < \theta_k < 2\pi \\ {\scriptstyle k=2,\dots,n+1} \end{bmatrix} \Longrightarrow$

- feuille $\mathbf{F}^{\boldsymbol{\alpha}}_{\rho}$ de dimension n
- $\mathbb{CH}^n$-structure sur $\mathbf{F}^{\boldsymbol{\alpha}}_{\rho}$
- $\mathbf{\Gamma}^{\boldsymbol{\alpha}}_{\rho} = \mathbf{Im}\big(\pi_1(\mathbf{F}^{\boldsymbol{\alpha}}_{\rho}) \to \mathbf{PU}(1,n)\big)$

Thm : [GP] Pour ρ **de torsion**, la complétion métrique $\overline{\mathbf{F}^{\boldsymbol{\alpha}}_{\rho}}$:

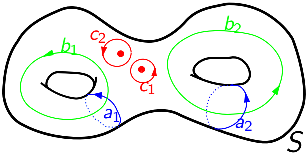
- est une $\mathbb{CH}^n$-conifolde de volume fini
- s'obtient en rajoutant à $\mathbf{F}^{\boldsymbol{\alpha}}_{\rho}$ des – *C-strates* $\mathbf{F}^{\boldsymbol{\alpha}'}_{\rho'}$ (genre 1)
  – *P-strates* $\mathbf{M}^{\boldsymbol{\alpha}'}_{0,n'}$ (genre 0)
- $\exists$ formules pour les angles conifoldes // strates de codim 1

$\Longrightarrow$ $\exists\ \mathbf{\Gamma}^{\boldsymbol{\alpha}}_{\rho}$ = réseaux AR dans $\mathbf{PU}(1,n)$ pour $n \leq 5$

III $g = 1$: [GPhypergeom]

- $(X, x) \in \mathbf{Teich}_{g,n} \simeq \boldsymbol{\mathcal{E}}^{\boldsymbol{\alpha}}_{g,n} \rightsquigarrow$ métrique $\boldsymbol{\alpha}$-plate $m^{\boldsymbol{\alpha}}_{X,x}$ sur X

- $\mathbf{H}^{\boldsymbol{\alpha}}(X) = \rho^{\boldsymbol{\alpha}}_{X,x} : \pi_1(g, n) \longrightarrow \mathbb{U}$ se fact. par $\pi_1(g, n)^{\mathbf{ab}} = H_1(g, n)$



- $\mathbf{Tor}_{g,n} = \left\{ (X, x, \nu) \,\middle|\, \nu \text{ marquage de } H_1(X^*) \right\} = \mathbf{Teich}_{g,n}/\mathcal{G}\mathbf{T}_{g,n}$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Teich}_{g,n} \arrow[r, "\mathbf{H}^{\boldsymbol{\alpha}}"] \arrow[d] & \mathbb{U}^{2g} \\ \mathbf{Tor}_{g,n} \arrow[ur, bend right, "\mathbf{h}^{\boldsymbol{\alpha}}"'] & \end{tikzcd}$$

- $\rightsquigarrow$ Plus naturel d'étudier $\mathcal{F}^{\boldsymbol{\alpha}}$ sur $\mathbf{Tor}_{g,n}$

Thm : [Nag]

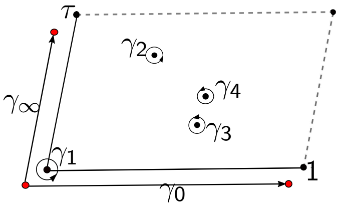
- $\mathbf{Tor}_{1,n} = \left\{ (\tau, z) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} z = (z_1 = 0, z_2, \ldots, z_n) \\ z_k - z_\ell \notin \mathbb{Z}_\tau \,, \ \forall\, k < \ell \end{array} \right\}$
- $\mathbf{PMCG}_{1,n} / \mathcal{G}\mathbf{T}_{1,n} \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \ltimes \left(\mathbb{Z}^2\right)^{n-1}$ avec action standard

- Pour $(\tau, z) \in \mathbf{Tor}_{1,n}$: $m^{\boldsymbol{\alpha}}_{\tau,z} = \left\{ \begin{array}{l} \text{métrique plate sur } E_\tau = \mathbb{C}/\mathbb{Z}_\tau \\ \text{avec } [z_k] = \text{point } \alpha_k\text{-conique} \end{array} \right.$

Prop : [GP] On a $m^{\boldsymbol{\alpha}}_{\tau,z} = \left| T^{\boldsymbol{\alpha}}_{\tau,z}(u) du \right|^2$ avec

- $T^{\boldsymbol{\alpha}}_{\tau,z}(u) = e^{2i\pi\alpha_0 u} \prod_{k=1}^n \theta\big(u - z_k \,,\ \tau\big)^{\alpha_k}$
- $\alpha_0 = \alpha_0(\tau, z) = -\mathfrak{Im}\big(\sum_{k=1}^n \alpha_k z_k \big) \Big/ \mathfrak{Im}(\tau) \in \mathbb{R}$

- $H_1(E^*_{\tau,z}, \mathbb{Z})$ est engendré par $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \gamma_\infty$:



- $\mathbf{Tor}_{1,n} \ni (\tau, z) \longleftrightarrow \Big(E_{\tau,z}\,,\ m^{\boldsymbol{\alpha}}_{\tau,z} = \big| e^{2i\pi\alpha_0 u} \prod_k \theta(u - z_k)^{\alpha_k} du \big|^2 \Big)$

$$\mathbf{h}^{\boldsymbol{\alpha}}(\gamma_0) = e^{2i\pi\alpha_0} \qquad \text{avec} \qquad \alpha_0 = -\mathfrak{Im}\Big(\sum_k \alpha_k z_k\Big) / \mathfrak{Im}(\tau) \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{h}^{\boldsymbol{\alpha}}(\gamma_\infty) = e^{2i\pi\alpha_\infty} \qquad \text{avec} \qquad \alpha_\infty = \alpha_0 \tau + \sum_k \alpha_k z_k \in \mathbb{R}$$

- L'application d'holonomie s'écrit

$$\mathbf{h}^{\boldsymbol{\alpha}} \ : \ \mathbf{Tor}_{1,n} \longrightarrow \mathbb{U}^2\,, \quad (\tau, z) \longmapsto \Big(e^{2i\pi\alpha_0}, e^{2i\pi\alpha_\infty} \Big)$$

- *"holonomie relevée"*

$$\begin{tikzcd} & & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "\exp(2i\pi\cdot)"] \\ \mathbf{Tor}_{1,n} \arrow[urr, bend left, "\xi^{\boldsymbol{\alpha}}=(\alpha_0,\alpha_\infty)"] \arrow[rr, "\mathbf{h}^{\boldsymbol{\alpha}}"'] & & \mathbb{U}^2 \end{tikzcd}$$

Thm : [GP]

- Les feuilles de $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{\boldsymbol{\alpha}}$ dans $\mathbf{Tor}_{1,n}$ sont les sous-variétés affines

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{\alpha}} = \left(\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{\alpha}}\right)^{-1}(\boldsymbol{a}) \;:\; a_0\tau + \sum_k \alpha_k z_k = a_\infty\,, \quad a = (a_0, a_\infty) \in \mathbb{R}^2$$

- $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{\boldsymbol{\alpha}}$ (et donc $\mathbf{F}^{\boldsymbol{\alpha}}$) dépend seulement de $[\boldsymbol{\alpha}] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$

- Cas $\boldsymbol{n = 2}$ **:** alors $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, -\alpha_1)$ avec $0 < \alpha_1 < 1$

$\mathbf{F}^{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{F}^{\alpha_1} =$ feuilletage sur $\mathbf{M}_{1,2}$ $\begin{cases} \text{– canonique (indép}^{\text{t}}\text{. de } \alpha_1) \\ \text{– par des } \mathbb{CH}^1\text{-courbes} \end{cases}$

Thm : [GP]

- Dans $\mathbf{Tor}_{1,2}$, pour tout $a = (a_0, a_\infty) \in \mathbb{R}^2 \setminus \alpha_1\mathbb{Z}^2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &\xrightarrow{\;\;\sim\;\;} \mathcal{F}_a^{\boldsymbol{\alpha}} \\ \tau &\longmapsto \left(\tau, \tfrac{1}{\alpha_1}\left(a_0\tau - a_\infty\right)\right) \end{aligned}$$

- La restriction $\mathcal{F}_a^{\boldsymbol{\alpha}} \to \mathbf{F}_a^{\boldsymbol{\alpha}}$ de $\mathbf{Tor}_{1,2} \longrightarrow \mathbf{M}_{1,2}$ est isomorphe au quotient de $\mathbb{H}$ par
  - $\mathbf{Id} : \tau \mapsto \tau \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{F}_a^{\boldsymbol{\alpha}} \simeq \mathbb{H}$
  - $\mathbf{T} : \tau \mapsto \tau + 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{F}_a^{\boldsymbol{\alpha}} \simeq$ cylindre infini
  - $\Gamma_1(N)\,,\ N \geq 2 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{F}_a^{\boldsymbol{\alpha}} \simeq \mathbb{H}/_{\Gamma_1(N)} = Y_1(N)$

- Feuilles fermées de $\mathbf{F}^{\boldsymbol{\alpha}}$: les $\mathbf{F}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(0,1/N)} \simeq Y_1(N)$ avec $N \geq 2$

- $(N \geq 2)$ Uniformisation de $Y_1(N)^{\alpha_1} = \mathbf{F}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(0,1/N)} \subset \mathbf{M}_{1,2}$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{H} & \longrightarrow & Y_1(N)^{\alpha_1} & \hookrightarrow & \mathbf{M}_{1,2} \\ \tau & \longmapsto & \left(E_\tau, \left[\frac{1}{N}\right]\right) & \longmapsto & \left(E_\tau, [0], \left[\frac{1}{N}\right]\right) \end{array}$$

- En termes de surfaces plates $(\mathbf{M}_{1,2} \simeq \mathbf{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{1,2})$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{H} & \longrightarrow & Y_1(N)^{\alpha_1} & \hookrightarrow & \mathbf{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{1,2} \\ \tau & \longmapsto & & & \left(E_\tau, m^{\alpha_1}_{N,\tau}\right) \end{array}$$

où $m^{\alpha_1}_{N,\tau} = \left| T_\tau(u) du \right|^2$ avec $T_\tau(u) = \frac{\theta(u,\tau)^{\alpha_1}}{\theta\left(u - \frac{1}{N}, \tau\right)^{\alpha_1}}$

- Application de Veech $V^{\alpha_1}_N : \mathbb{H} \simeq \mathcal{F}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(0,1/N)} \longrightarrow \mathbb{CH}^1 \subset \mathbb{P}^1$

$$\tau \longmapsto \left[\int_0^1 T_\tau(u) du : \int_0^\tau T_\tau(u) du \right]$$

Travaux de Mano & Watanabe :

- Interprétation cohomologico-analytique (= "**hypergéométrique**") de

$$F_0(\tau) = \int_{[0,1]} T_\tau(u)du = \Big\langle \mathbf{[0,1]}\, , \, \boldsymbol{[T_\tau(u)du]} \Big\rangle$$

avec $\mathbf{[0,1]} \in H_1\big(E_\tau^*, L_\tau\big)$ et $\boldsymbol{[T_\tau(u)du]} \in H^1\big(E_\tau^*, L_\tau^\vee\big)$

- Quand τ varie dans $\mathbb{H}$ $\rightsquigarrow$ connexion de Gauß-Manin

- $\rightsquigarrow$ Construction de l' **"équation hypergéométrique elliptique"**

$$\big(\boldsymbol{\mathcal{E}_N^{\alpha_1}}\big) \quad : \quad \ddot{F}(\tau) + \boldsymbol{P}_N^{\alpha_1}(\tau)\, \dot{F}(\tau) + \boldsymbol{Q}_N^{\alpha_1}(\tau) F(\tau) = 0$$

telle que $\mathbf{Sol}\big(\boldsymbol{\mathcal{E}_N^{\alpha_1}}\big) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}} \Big\langle \int_{[0,1]} T_\tau(u)du \, , \, \int_{[0,\tau]} T_\tau(u)du \Big\rangle$

Prop : $\big(\boldsymbol{\mathcal{E}_N^{\alpha_1}}\big)$ Fuchsienne en $i\infty$ + formule pour l'indice projectif

Thm : [GP] Pour tout $\alpha_1 \in]0,1[$:

- La $\mathbb{CH}^1$-structure de Veech de $Y_1(N)^{\alpha_1}$ s'étend en une structure conifolde $X_1(N)^{\alpha_1}$ sur la compactification $X_1(N)$

- L'angle conifolde de $X_1(N)^{\alpha_1}$ en $\mathfrak{c} = [a/c] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ est

$$\theta_{\mathfrak{c}} = 2\pi \frac{c(N-c)}{N \cdot \mathrm{pgcd}\big(c,N\big)} \cdot \alpha_1$$

- $\alpha_1 = \frac{N}{\ell N^*}$ avec $\ell \geq 1 \implies X_1(N)^{\alpha_1}$ est une $\mathbb{CH}^1$-orbifolde

- Pour p premier : $\mathbf{Aire}\big(Y_1(p)^{\alpha_1}\big) = \frac{\pi}{6}(1-\alpha_1)(p^2-1)$

- On en déduit $\mathbf{Vol}\Big(\mathbf{M}_{1,2}^{\alpha_1}\Big) = \frac{\pi}{6}(1-\alpha_1) < \infty$

“Hypergéométrie” en dimension 1

Cas classique $(g = 0)$	
$\mathcal{M}_{0,4} \simeq \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$	
$x \rightsquigarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, x, \infty\}$	
$\omega_x^{\boldsymbol{\alpha}} = \prod_{k=1}^{4} (t - u_k)^{\alpha_k} dt$	
$F_\gamma(x) = \int_\gamma \prod_{k=1}^{4} (t - u_k)^{\alpha_k} dt$	
$(\boldsymbol{\mathcal{E}_{a,b,c}}) : \boldsymbol{F}'' + \frac{c-(1+a+b)x}{x(1-x)} \boldsymbol{F}' - \frac{ab}{x(1-x)} \boldsymbol{F} = 0$	
$S^{\boldsymbol{\alpha}} : \widetilde{\mathcal{M}_{0,4}} \longrightarrow \mathbb{H}$	
pour certains $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_4)$ $\boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{\alpha}} < \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est un réseau	

"Hypergéométrie" en dimension 1

Cas classique $(g=0)$	**Cas elliptique** $(g=1)$
$\mathcal{M}_{0,4} \simeq \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$	
$x \quad \rightsquigarrow \quad \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,x,\infty\}$	
$\omega_x^{\boldsymbol{\alpha}} = \prod_{k=1}^4 (t-u_k)^{\alpha_k} dt$	
$F_\gamma(x) = \int_\gamma \prod_{k=1}^4 (t-u_k)^{\alpha_k} dt$	
$(\boldsymbol{\mathcal{E}_{a,b,c}}) \,:\, \boldsymbol{F''} + \frac{c-(1+a+b)x}{x(1-x)}\boldsymbol{F'} - \frac{ab}{x(1-x)}\boldsymbol{F} = 0$	
$S^{\boldsymbol{\alpha}} \,:\, \widetilde{\mathcal{M}_{0,4}} \longrightarrow \mathbb{H}$	
pour certains $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_4)$ $\boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{\alpha}} < \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est un réseau	

"Hypergéométrie" en dimension 1

Cas classique $(g=0)$	**Cas elliptique** $(g=1)$
$\mathcal{M}_{0,4} \simeq \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$	$Y_1(N) = \mathbb{H}_{/\Gamma_1(N)} \quad (N \geq 2)$
$x \rightsquigarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,x,\infty\}$	
$\omega_x^{\boldsymbol{\alpha}} = \prod_{k=1}^4 (t-u_k)^{\alpha_k} dt$	
$F_\gamma(x) = \int_\gamma \prod_{k=1}^4 (t-u_k)^{\alpha_k} dt$	
$(\mathcal{E}_{a,b,c}) : F'' + \frac{c-(1+a+b)x}{x(1-x)} F' - \frac{ab}{x(1-x)} F = 0$	
$S^{\boldsymbol{\alpha}} : \widetilde{\mathcal{M}_{0,4}} \longrightarrow \mathbb{H}$	
pour certains $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_4)$ $\Gamma^{\boldsymbol{\alpha}} < \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est un réseau	

“Hypergéométrie” en dimension 1

Cas classique $(g=0)$	**Cas elliptique** $(g=1)$
$\mathcal{M}_{0,4} \simeq \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$	$Y_1(N) = \mathbb{H}_{/\Gamma_1(N)} \quad (\ N \geq 2\ )$
$x \ \rightsquigarrow\ \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,x,\infty\}$	$\tau\ \rightsquigarrow\ E_\tau \setminus \left\{0, \frac{1}{N}\right\}$
$\omega_x^{\boldsymbol{\alpha}} = \prod_{k=1}^4 (t-u_k)^{\alpha_k} dt$	
$F_\gamma(x) = \int_\gamma \prod_{k=1}^4 (t-u_k)^{\alpha_k} dt$	
$\left(\boldsymbol{\mathcal{E}_{a,b,c}}\right)\ :\ \boldsymbol{F}'' + \frac{c-(1+a+b)x}{x(1-x)}\,\boldsymbol{F}' - \frac{ab}{x(1-x)}\,\boldsymbol{F} = 0$	
$S^{\boldsymbol{\alpha}}\ :\ \widetilde{\mathcal{M}_{0,4}} \longrightarrow \mathbb{H}$	
pour certains $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_4)$ $\boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{\alpha}} < \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est un réseau	

"Hypergéométrie" en dimension 1

Cas classique $(g=0)$	**Cas elliptique** $(g=1)$
$\mathcal{M}_{0,4} \simeq \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$	$Y_1(N) = \mathbb{H}_{/\Gamma_1(N)} \quad (N \geq 2)$
$x \rightsquigarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,x,\infty\}$	$\tau \rightsquigarrow E_\tau \setminus \left\{0, \frac{1}{N}\right\}$
$\omega_x^{\boldsymbol{\alpha}} = \prod_{k=1}^4 (t-u_k)^{\alpha_k} dt$	$\omega_\tau^{\alpha_1} = \frac{\theta(u,\tau)^{\alpha_1}}{\theta\left(u-\frac{1}{N},\tau\right)^{\alpha_1}} du$
$F_\gamma(x) = \int_\gamma \prod_{k=1}^4 (t-u_k)^{\alpha_k} dt$	
$\left(\boldsymbol{\mathcal{E}_{a,b,c}}\right) : \boldsymbol{F''} + \frac{c-(1+a+b)x}{x(1-x)} \boldsymbol{F'} - \frac{ab}{x(1-x)} \boldsymbol{F} = 0$	
$S^{\boldsymbol{\alpha}} : \widetilde{\mathcal{M}_{0,4}} \longrightarrow \mathbb{H}$	
pour certains $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_4)$ $\boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{\alpha}} < \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est un réseau	

“Hypergéométrie” en dimension 1

Cas classique $(g=0)$	**Cas elliptique** $(g=1)$
$\mathcal{M}_{0,4} \simeq \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$	$Y_1(N) = \mathbb{H}_{/\Gamma_1(N)} \quad (\ N \geq 2\ )$
$x \ \rightsquigarrow\ \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,x,\infty\}$	$\tau \ \rightsquigarrow\ E_\tau \setminus \left\{0, \frac{1}{N}\right\}$
$\omega_x^{\boldsymbol{\alpha}} = \prod_{k=1}^4 (t-u_k)^{\alpha_k} dt$	$\omega_\tau^{\alpha_1} = \frac{\theta(u,\tau)^{\alpha_1}}{\theta\left(u-\frac{1}{N},\tau\right)^{\alpha_1}} du$
$F_\gamma(x) = \int_\gamma \prod_{k=1}^4 (t-u_k)^{\alpha_k} dt$	$\Phi_\gamma(\tau) = \int_\gamma \frac{\theta(u,\tau)^{\alpha_1}}{\theta\left(u-\frac{1}{N},\tau\right)^{\alpha_1}} du$
$(\mathcal{E}_{a,b,c})\ :\ F'' + \frac{c-(1+a+b)x}{x(1-x)} F' - \frac{ab}{x(1-x)} F = 0$	
$S^{\boldsymbol{\alpha}}\ :\ \widetilde{\mathcal{M}_{0,4}} \longrightarrow \mathbb{H}$	
pour certains $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_4)$ $\Gamma^{\boldsymbol{\alpha}} < \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est un réseau	

"Hypergéométrie" en dimension 1

Cas classique $(g=0)$	**Cas elliptique** $(g=1)$
$\mathcal{M}_{0,4} \simeq \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$	$Y_1(N) = \mathbb{H}_{/\Gamma_1(N)} \quad (\ N \geq 2\ )$
$x \ \rightsquigarrow\ \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,x,\infty\}$	$\tau \ \rightsquigarrow\ E_\tau \setminus \left\{0, \frac{1}{N}\right\}$
$\omega_x^{\boldsymbol{\alpha}} = \prod_{k=1}^4 (t-u_k)^{\alpha_k} dt$	$\omega_\tau^{\alpha_1} = \frac{\theta(u,\tau)^{\alpha_1}}{\theta\left(u-\frac{1}{N},\tau\right)^{\alpha_1}} du$
$F_\gamma(x) = \int_\gamma \prod_{k=1}^4 (t-u_k)^{\alpha_k} dt$	$\Phi_\gamma(\tau) = \int_\gamma \frac{\theta(u,\tau)^{\alpha_1}}{\theta\left(u-\frac{1}{N},\tau\right)^{\alpha_1}} du$
$\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{a,b,c}}\right) \ :\ \boldsymbol{F}'' + \frac{c-(1+a+b)x}{x(1-x)} \boldsymbol{F}' - \frac{ab}{x(1-x)} \boldsymbol{F} = 0$	$\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{N}}^{\boldsymbol{\alpha_1}}\right) \ :\ \ddot{\boldsymbol{\Phi}} + P_N^{\alpha_1}(\tau)\, \dot{\boldsymbol{\Phi}} + Q_N^{\alpha_1}(\tau)\, \boldsymbol{\Phi} = 0$
$S^{\boldsymbol{\alpha}} \ :\ \widetilde{\mathcal{M}_{0,4}} \longrightarrow \mathbb{H}$	
pour certains $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_4)$ $\boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{\alpha}} < \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est un réseau	

“Hypergéométrie” en dimension 1

Cas classique $(g=0)$	**Cas elliptique** $(g=1)$
$\mathcal{M}_{0,4} \simeq \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$	$Y_1(N) = \mathbb{H}_{/\Gamma_1(N)} \quad (N \geq 2)$
$x \rightsquigarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,x,\infty\}$	$\tau \rightsquigarrow E_\tau \setminus \left\{0, \frac{1}{N}\right\}$
$\omega_x^{\boldsymbol{\alpha}} = \prod_{k=1}^4 (t-u_k)^{\alpha_k} dt$	$\omega_\tau^{\alpha_1} = \frac{\theta(u,\tau)^{\alpha_1}}{\theta\left(u-\frac{1}{N},\tau\right)^{\alpha_1}} du$
$F_\gamma(x) = \int_\gamma \prod_{k=1}^4 (t-u_k)^{\alpha_k} dt$	$\Phi_\gamma(\tau) = \int_\gamma \frac{\theta(u,\tau)^{\alpha_1}}{\theta\left(u-\frac{1}{N},\tau\right)^{\alpha_1}} du$
$\left(\boldsymbol{\mathcal{E}_{a,b,c}}\right) : \boldsymbol{F''} + \frac{c-(1+a+b)x}{x(1-x)} \boldsymbol{F'} - \frac{ab}{x(1-x)} \boldsymbol{F} = 0$	$\left(\boldsymbol{\mathcal{E}_N^{\alpha_1}}\right) : \ddot{\boldsymbol{\Phi}} + P_N^{\alpha_1}(\tau)\, \dot{\boldsymbol{\Phi}} + Q_N^{\alpha_1}(\tau)\, \boldsymbol{\Phi} = 0$
$S^{\boldsymbol{\alpha}} : \widetilde{\mathcal{M}_{0,4}} \longrightarrow \mathbb{H}$	$S_N^{\alpha_1} : \widetilde{Y_1(N)} = \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$
pour certains $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_4)$ $\boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{\alpha}} < \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est un réseau	

"Hypergéométrie" en dimension 1

Cas classique $(g=0)$	**Cas elliptique** $(g=1)$
$\mathcal{M}_{0,4} \simeq \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$	$Y_1(N) = \mathbb{H}_{/\Gamma_1(N)} \quad (\ N \geq 2\ )$
$x \ \rightsquigarrow\ \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,x,\infty\}$	$\tau \ \rightsquigarrow\ E_\tau \setminus \left\{0, \frac{1}{N}\right\}$
$\omega_x^{\boldsymbol{\alpha}} = \prod_{k=1}^4 (t-u_k)^{\alpha_k} dt$	$\omega_\tau^{\alpha_1} = \frac{\theta(u,\tau)^{\alpha_1}}{\theta\left(u-\frac{1}{N},\tau\right)^{\alpha_1}} du$
$F_\gamma(x) = \int_\gamma \prod_{k=1}^4 (t-u_k)^{\alpha_k} dt$	$\Phi_\gamma(\tau) = \int_\gamma \frac{\theta(u,\tau)^{\alpha_1}}{\theta\left(u-\frac{1}{N},\tau\right)^{\alpha_1}} du$
$\left(\mathcal{E}_{a,b,c}\right) \ : \ F'' + \frac{c-(1+a+b)x}{x(1-x)} F' - \frac{ab}{x(1-x)} F = 0$	$\left(\mathcal{E}_N^{\alpha_1}\right) \ : \ \ddot{\Phi} + P_N^{\alpha_1}(\tau)\, \dot{\Phi} + Q_N^{\alpha_1}(\tau)\, \Phi = 0$
$S^{\boldsymbol{\alpha}} \ : \ \widetilde{\mathcal{M}_{0,4}} \longrightarrow \mathbb{H}$	$S_N^{\alpha_1} \ : \ \widetilde{Y_1(N)} = \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$
pour certains $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_4)$ $\boldsymbol{\Gamma}^{\boldsymbol{\alpha}} < \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est un réseau	pour certaines paires (α_1, N) $\boldsymbol{\Gamma}_N^{\alpha_1} < \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est un réseau