POLYLOGARITHMES, TISSUS et ALGÈBRES AMASSÉES

Luc PIRIO

(CNRS & Univ. Versailles-St. Quentin)

1er Avril 2019

Plan

I Polylogarithmes

$\mathbf{L}\mathrm{i}_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k/k^n$

Équations fonctionnelles

II Tissus

Tissus

Relations abéliennes $\sum_{i=1}^{d} F_i(U_i) = 0$

Tissus algébriques

III Algèbres amassées

Mutations

Tissus amassés

Le logarithme (et le 1er polylogarithme $\mathbf{L}\mathrm{i}_1$)

- $\mathbf{L}_0(x) = \mathrm{Log}(x)$ $\qquad \mathbf{L}\mathrm{i}_1(x) = \mathbf{L}_1(x) = -\mathrm{Log}(1-x)$

Le logarithme (et le 1er polylogarithme $\mathbf{L}\mathrm{i}_1$)

- $\mathbf{L}_0(x) = \mathrm{Log}(x)$ $\qquad$ $\mathbf{L}\mathrm{i}_1(x) = \mathbf{L}_1(x) = -\mathrm{Log}(1-x)$

- **Développement en série :** $\quad \mathbf{L}\mathrm{i}_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$

Le logarithme (et le 1er polylogarithme $\mathbf{L}\mathrm{i}_1$)

- $\mathbf{L}_0(x) = \mathrm{Log}(x)$ $\qquad$ $\mathbf{L}\mathrm{i}_1(x) = \mathbf{L}_1(x) = -\mathrm{Log}(1-x)$

- **Développement en série :** $\quad \mathbf{L}\mathrm{i}_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$

- **Représentations intégrales :** $\quad \mathbf{L}_0(z) = \int^z \omega_0 \qquad \left(\omega_0 = \frac{du}{u} \right)$

$$\mathbf{L}_1(z) = \int^z \omega_1 \qquad \left(\omega_1 = \frac{du}{1-u} \right)$$

Le logarithme (et le 1er polylogarithme $\mathbf{Li}_1$)

- $\mathbf{L}_0(x) = \mathrm{Log}(x)$ $\qquad \mathbf{Li}_1(x) = \mathbf{L}_1(x) = -\mathrm{Log}(1-x)$

- **Développement en série :** $\mathbf{Li}_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$

- **Représentations intégrales :** $\mathbf{L}_0(z) = \int^z \omega_0 \qquad \left(\ \omega_0 = \frac{du}{u}\ \right)$

  $$\mathbf{L}_1(z) = \int^z \omega_1 \qquad \left(\ \omega_1 = \frac{du}{1-u}\ \right)$$

- **Monodromie :** $\mathcal{M}_0\left(\mathbf{L}_0\right) = \mathbf{L}_0 + 2i\pi$

Le logarithme (et le 1er polylogarithme $\mathbf{Li}_1$)

- $\mathbf{L}_0(x) = \mathrm{Log}(x)$ $\qquad \mathbf{Li}_1(x) = \mathbf{L}_1(x) = -\mathrm{Log}(1-x)$

- **Développement en série :** $\mathbf{Li}_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$

- **Représentations intégrales :** $\mathbf{L}_0(z) = \int^z \omega_0 \qquad \left(\omega_0 = \frac{du}{u} \right)$

  $\mathbf{L}_1(z) = \int^z \omega_1 \qquad \left(\omega_1 = \frac{du}{1-u} \right)$

- **Monodromie :** $\mathcal{M}_0\left(\mathbf{L}_0\right) = \mathbf{L}_0 + 2i\pi$

- **Équation fonctionnelle :** $\mathrm{Log}(\boldsymbol{x}) + \mathrm{Log}(\boldsymbol{y}) - \mathrm{Log}(\boldsymbol{xy}) = 0$

"indoles logarithmorum hac aequatione fundamentali continetur"

(Pfaff 1788)

Le dilogarithme $\mathbf{L}\mathrm{i}_2$

- **Développement en série :** $\mathbf{L}\mathrm{i}_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$

- **Représentation intégrale :** $\mathbf{L}\mathrm{i}_2(z) = \mathbf{L}_{01}(z) = \int^z \frac{du}{u} \cdot \mathbf{L}_1(u)$

$$\mathbf{L}_{10}(z) = \int^z \frac{du}{1-u} \cdot \mathbf{L}_0(u)$$

- **Monodromie :** $\mathcal{M}_1\left(\mathbf{L}\mathrm{i}_2\right) = \mathbf{L}\mathrm{i}_2 - 2i\pi \cdot \mathbf{L}_0$

Le dilogarithme $\mathbf{Li}_2$

- **Développement en série :** $\mathbf{Li}_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$

- **Représentation intégrale :** $\mathbf{Li}_2(z) = \mathbf{L}_{01}(z) = \int^z \frac{du}{u} \cdot \mathbf{L}_1(u)$

$$\mathbf{L}_{10}(z) = \int^z \frac{du}{1-u} \cdot \mathbf{L}_0(u)$$

- **Monodromie :** $\mathcal{M}_1\left(\mathbf{Li}_2\right) = \mathbf{Li}_2 - 2i\pi \cdot \mathbf{L}_0$

- **Équation fonctionnelle d'Abel :** $\left(\; 0 < x < y < 1 \; \right)$

$$\mathbf{Li}_2(x) - \mathbf{Li}_2(y) - \mathbf{Li}_2\left(\frac{x}{y}\right) - \mathbf{Li}_2\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \mathbf{Li}_2\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) =$$

$$-\frac{\pi^2}{6} + \log(y)\,\log\left(\frac{1-y}{1-x}\right)$$

Le dilogarithme $\mathbf{Li}_2$

- **Développement en série :** $\mathbf{Li}_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$

- **Représentation intégrale :** $\mathbf{Li}_2(z) = \mathbf{L}_{01}(z) = \int^z \frac{du}{u} \cdot \mathbf{L}_1(u)$

$$\mathbf{L}_{10}(z) = \int^z \frac{du}{1-u} \cdot \mathbf{L}_0(u)$$

- **Monodromie :** $\mathcal{M}_1\left(\mathbf{Li}_2\right) = \mathbf{Li}_2 - 2i\pi \cdot \mathbf{L}_0$

- **Équation fonctionnelle d'Abel :** $\Big(\ 0 < x < y < 1\ \Big)$

$$\mathbf{D}(x) - \mathbf{D}(y) - \mathbf{D}\Big(\frac{x}{y}\Big) - \mathbf{D}\Big(\frac{1-y}{1-x}\Big) + \mathbf{D}\Big(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\Big) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{D}(x) = \mathbf{Li}_2(x) + \frac{1}{2}\mathrm{Log}(x)\mathrm{Log}(1-x) - \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{2}\Big[\,\mathbf{L}_{01}(x) - \mathbf{L}_{10}(x)\,\Big]$$

Polylogarithme $\mathbf{L}\mathrm{i}_n$ ($n \geq 1$)

- **Développement en série :** $\mathbf{L}\mathrm{i}_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^n}$

- **Représentation integrale :** $\mathbf{L}\mathrm{i}_n(z) = \int^z \frac{du}{u} \mathbf{L}\mathrm{i}_{n-1}(u) = \mathbf{L}_{0^{n-1}1}(z)$

  $\mathbf{L}\mathrm{i}_n{}'(z) = \mathbf{L}\mathrm{i}_{n-1}(z)/z$

- **Monodromie :** $\mathcal{M}_1\left(\mathbf{L}\mathrm{i}_n\right) = \mathbf{L}\mathrm{i}_n - 2i\pi \frac{(\mathbf{L}_0)^{n-1}}{(n-1)!}$

Polylogarithme $\mathbf{L}\mathrm{i}_n$ ($n \geq 1$)

- **Développement en série :** $\mathbf{L}\mathrm{i}_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^n}$

- **Représentation integrale :** $\mathbf{L}\mathrm{i}_n(z) = \int^z \frac{du}{u} \mathbf{L}\mathrm{i}_{n-1}(u) = \mathbf{L}_{0^{n-1}1}(z)$

$$\mathbf{L}\mathrm{i}_n{}'(z) = \mathbf{L}\mathrm{i}_{n-1}(z)/z$$

- **Monodromie :** $\mathcal{M}_1\left(\mathbf{L}\mathrm{i}_n\right) = \mathbf{L}\mathrm{i}_n - 2i\pi \frac{(\mathbf{L}_0)^{n-1}}{(n-1)!}$

- **Équations fonctionnelles en une variable :**

$$\mathbf{L}\mathrm{i}_n\Big(z^r\Big) = r^{n-1} \sum_{\omega^r=1} \mathbf{L}\mathrm{i}_n(\omega\, z) \qquad \Big(\ |z| < 1\ \Big)$$

$$\mathbf{L}\mathrm{i}_n(z) + (-1)^n \mathbf{L}\mathrm{i}_n\Big(z^{-1}\Big) = -\frac{(2i\pi)^n}{n!}\, \mathbf{B}_n\Big(\frac{\mathrm{Log}\, z}{2i\pi}\Big) \qquad \Big(\ z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[\ \Big)$$

Polylogarithme $\mathbf{L}\mathrm{i}_n$ ($n \geq 1$)

- **Développement en série :** $\mathbf{L}\mathrm{i}_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^n}$

- **Représentation integrale :** $\mathbf{L}\mathrm{i}_n(z) = \int^z \frac{du}{u} \mathbf{L}\mathrm{i}_{n-1}(u) = \mathbf{L}_{0^{n-1}1}(z)$

$$\mathbf{L}\mathrm{i}_n{}'(z) = \mathbf{L}\mathrm{i}_{n-1}(z)/z$$

- **Monodromie :** $\mathcal{M}_1\left(\mathbf{L}\mathrm{i}_n\right) = \mathbf{L}\mathrm{i}_n - 2i\pi \frac{(\mathbf{L}_0)^{n-1}}{(n-1)!}$

- **Équations fonctionnelles en plusieurs variables ($\exists ?$) :**

$$\sum_i c_i \, \mathbf{L}\mathrm{i}_n(\boldsymbol{U_i}) = \mathbf{Elem}_{<n}$$

$$\left(c_i \in \mathbb{Z}\,, \;\; \boldsymbol{U_i} \in \mathbb{Q}(x,y) \right)$$

Polylogarithme $\mathbf{Li}_n$ ($n \geq 1$)

- **Développement en série :** $\mathbf{Li}_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^n}$

- **Représentation integrale :** $\mathbf{Li}_n(z) = \int^z \frac{du}{u} \mathbf{Li}_{n-1}(u) = \mathbf{L}_{0^{n-1}1}(z)$

$$\mathbf{Li}_n{}'(z) = \mathbf{Li}_{n-1}(z)/z$$

- **Monodromie :** $\mathcal{M}_1\left(\mathbf{Li}_n\right) = \mathbf{Li}_n - 2i\pi \frac{(\mathbf{L}_0)^{n-1}}{(n-1)!}$

- **Équations fonctionnelles en plusieurs variables ($\exists ?$) :**

$$\sum_i c_i\, \mathbf{Li}_n(\boldsymbol{U_i}) = \mathbf{Elem}_{<n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_i c_i\, \boldsymbol{\mathcal{L}}_n(\boldsymbol{U_i}) = 0$$

$$\Big(c_i \in \mathbb{Z}\,, \;\; \boldsymbol{U_i} \in \mathbb{Q}(x,y) \Big)$$

Le trilogarithme $\mathbf{Li}_3$

- $\mathbf{Li}_3(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k/k^3 = \int^x \mathbf{Li}_2(u)\frac{du}{u}$

- **Équation fonctionnelle de Spence-Kummer :**

$$
\begin{aligned}
2\,\mathbf{Li}_3(x) + 2\,\mathbf{Li}_3(y) - \mathbf{Li}_3\Big(\frac{x}{y}\Big) + 2\,\mathbf{Li}_3\Big(\frac{1-x}{1-y}\Big) + 2\,\mathbf{Li}_3\Big(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\Big) - \mathbf{Li}_3\big(xy\big) \\
+ 2\,\mathbf{Li}_3\Big(-\frac{x(1-y)}{(1-x)}\Big) + 2\,\mathbf{Li}_3\Big(-\frac{(1-y)}{y(1-x)}\Big) - \mathbf{Li}_3\Big(\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\Big) \\
= 2\,\mathbf{Li}_3(1) - \log(y)^2 \log\Big(\frac{1-y}{1-x}\Big) + \frac{\pi^2}{3}\log(y) + \frac{1}{3}\log(y)^3
\end{aligned}
$$

Le trilogarithme $\mathbf{Li}_3$

- $\mathbf{Li}_3(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k/k^3 = \int^x \mathbf{Li}_2(u)\frac{du}{u}$

- **Équation fonctionnelle de Spence-Kummer :**

$$2\,\mathbf{Li}_3(x) + 2\,\mathbf{Li}_3(y) - \mathbf{Li}_3\Big(\frac{x}{y}\Big) + 2\,\mathbf{Li}_3\Big(\frac{1-x}{1-y}\Big) + 2\,\mathbf{Li}_3\Big(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\Big) - \mathbf{Li}_3(xy)$$
$$+ 2\,\mathbf{Li}_3\Big(-\frac{x(1-y)}{(1-x)}\Big) + 2\,\mathbf{Li}_3\Big(-\frac{(1-y)}{y(1-x)}\Big) - \mathbf{Li}_3\Big(\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\Big)$$
$$= 2\,\mathbf{Li}_3(1) - \log(y)^2 \log\Big(\frac{1-y}{1-x}\Big) + \frac{\pi^2}{3}\log(y) + \frac{1}{3}\log(y)^3$$

- $\mathcal{L}_3(z) = \mathbf{Li}_3(z) - \mathbf{Li}_2(z)\cdot \mathrm{Log}|z| + \frac{1}{3}\Big(\mathrm{Log}|z|\Big)^2$

$$2\,\mathcal{L}_3(x) + 2\,\mathcal{L}_3(y) - \mathcal{L}_3\Big(\frac{x}{y}\Big) + 2\,\mathcal{L}_3\Big(\frac{1-x}{1-y}\Big) + 2\,\mathcal{L}_3\Big(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\Big) - \mathcal{L}_3(xy)$$
$$+ 2\,\mathcal{L}_3\Big(-\frac{x(1-y)}{(1-x)}\Big) + 2\,\mathcal{L}_3\Big(-\frac{(1-y)}{y(1-x)}\Big) - \mathcal{L}_3\Big(\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\Big) = 0$$

Le tétralogarithme $\mathbf{Li}_4$

- $\mathbf{Li}_4(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k / k^4$

- **Équation fonctionnelle de Kummer :**

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{Li}_4\left(-\frac{x^2 y\eta}{\zeta}\right) + \mathbf{Li}_4\left(-\frac{y^2 x\zeta}{\eta}\right) + \mathbf{Li}_4\left(\frac{x^2 y}{\eta^2\zeta}\right) + \mathbf{Li}_4\left(\frac{y^2 x}{\zeta^2\eta}\right) \\
&- 6\,\mathbf{Li}_4(xy) - 6\,\mathbf{Li}_4\left(\frac{xy}{\eta\zeta}\right) - 6\,\mathbf{Li}_4\left(-\frac{xy}{\eta}\right) - 6\,\mathbf{Li}_4\left(-\frac{xy}{\zeta}\right) \\
&- 3\,\mathbf{Li}_4(x\eta) - 3\,\mathbf{Li}_4(y\zeta) - 3\,\mathbf{Li}_4\left(\frac{x}{\eta}\right) - 3\,\mathbf{Li}_4\left(\frac{y}{\zeta}\right) \\
&- 3\,\mathbf{Li}_4\left(-\frac{x\eta}{\zeta}\right) - 3\,\mathbf{Li}_4\left(-\frac{y\zeta}{\eta}\right) - 3\,\mathbf{Li}_4\left(-\frac{x}{\eta\zeta}\right) - 3\,\mathbf{Li}_4\left(-\frac{y}{\eta\zeta}\right) \\
&+ 6\,\mathbf{Li}_4(x) + 6\,\mathbf{Li}_4(y) + 6\,\mathbf{Li}_4\left(-\frac{x}{\zeta}\right) + 6\,\mathbf{Li}_4\left(-\frac{y}{\eta}\right) = -\frac{3}{2}\log^2(\zeta)\log^2(\eta)
\end{aligned}
$$

avec $\zeta = 1 - x$ et $\eta = 1 - y$

Le tétralogarithme $\mathbf{Li}_4$

- $\mathbf{Li}_4(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k/k^4$ $\qquad\qquad$ $\mathcal{L}_4(x) = \mathbf{Li}_4(x) + \mathbf{Elem}_{<4}(x)$

- **Équation fonctionnelle de Kummer :**

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_4\Big(-\frac{x^2y\eta}{\zeta}\Big) + \mathcal{L}_4\Big(-\frac{y^2x\zeta}{\eta}\Big) + \mathcal{L}_4\Big(\frac{x^2y}{\eta^2\zeta}\Big) + \mathcal{L}_4\Big(\frac{y^2x}{\zeta^2\eta}\Big) \\
&-6\,\mathcal{L}_4\big(xy\big) - 6\,\mathcal{L}_4\Big(\frac{xy}{\eta\zeta}\Big) - 6\,\mathcal{L}_4\Big(-\frac{xy}{\eta}\Big) - 6\,\mathcal{L}_4\Big(-\frac{xy}{\zeta}\Big) \\
(\mathcal{K}_4)\quad &-3\,\mathcal{L}_4\big(x\eta\big) - 3\,\mathcal{L}_4\big(y\zeta\big) - 3\,\mathcal{L}_4\Big(\frac{x}{\eta}\Big) - 3\,\mathcal{L}_4\Big(\frac{y}{\zeta}\Big) \\
&-3\,\mathcal{L}_4\Big(-\frac{x\eta}{\zeta}\Big) - 3\,\mathcal{L}_4\Big(-\frac{y\zeta}{\eta}\Big) - 3\,\mathcal{L}_4\Big(-\frac{x}{\eta\zeta}\Big) - 3\,\mathcal{L}_4\Big(-\frac{y}{\eta\zeta}\Big) \\
&+6\,\mathcal{L}_4\big(x\big) + 6\,\mathcal{L}_4(y) + 6\,\mathcal{L}_4\Big(-\frac{x}{\zeta}\Big) + 6\,\mathcal{L}_4\Big(-\frac{y}{\eta}\Big) = 0
\end{aligned}
$$

avec $\zeta = 1 - x$ et $\eta = 1 - y$ $\qquad\qquad$ (18 termes)

Le pentalogarithme $\mathbf{Li}_5$

- **Équation fonctionnelle de Kummer :**

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{L}_5\Big(-\frac{x^2y\eta}{\zeta}\Big) + \mathcal{L}_5\Big(-\frac{xy^2\zeta}{\eta}\Big) + \mathcal{L}_5\Big(\frac{x^2y}{\eta^2\zeta}\Big) + \mathcal{L}_5\Big(\frac{xy^2}{\eta\zeta^2}\Big) + \mathcal{L}_5\Big(\frac{x^2\eta}{y^2\zeta}\Big) \\
& + \mathcal{L}_5\Big(\frac{x\zeta}{y\eta}\Big) + \mathcal{L}_5\Big(\frac{x^2\zeta\eta^2}{y}\Big) + \mathcal{L}_5\Big(-\frac{x}{y\zeta^2\eta}\Big) + \mathcal{L}_5\Big(\frac{x\eta^2}{y^2\zeta}\Big) - 9\,\mathcal{L}_5(xy) \\
& - 9\,\mathcal{L}_5\Big(\frac{x}{y}\Big) - 9\,\mathcal{L}_5(x\eta) - 9\,\mathcal{L}_5\Big(-\frac{xy}{\eta}\Big) - 9\,\mathcal{L}_5\Big(-\frac{x\eta}{y}\Big) - 9\,\mathcal{L}_5\Big(-\frac{xy}{\zeta}\Big) \\
(\mathcal{K}_5) \quad & - 9\,\mathcal{L}_5\Big(-\frac{x}{y\zeta}\Big) - 9\,\mathcal{L}_5\Big(-\frac{x\eta}{\zeta}\Big) - 9\,\mathcal{L}_5\Big(-\frac{x}{\eta\zeta}\Big) - 9\,\mathcal{L}_5\Big(\frac{xy}{\eta\zeta}\Big) - 9\,\mathcal{L}_5\Big(\frac{x\eta}{y\zeta}\Big) \\
& - 9\,\mathcal{L}_5(y\zeta) - 9\,\mathcal{L}_5(\eta\zeta) - 9\,\mathcal{L}_5\Big(-\frac{y\zeta}{\eta}\Big) - 9\,\mathcal{L}_5\Big(\frac{y}{\zeta}\Big) - 9\,\mathcal{L}_5\Big(\frac{\eta}{\zeta}\Big) - 9\,\mathcal{L}_5\Big(-\frac{y}{\eta\zeta}\Big) \\
& - 9\,\mathcal{L}_5\Big(\frac{x}{\eta}\Big) + 18\,\mathcal{L}_5\Big(\frac{x}{\zeta}\Big) - 18\,\mathcal{L}_5(x) + 18\,\mathcal{L}_5(y) + 18\,\mathcal{L}_5\Big(-\frac{y}{\eta}\Big) = 0
\end{aligned}
$$

$\Big($ 29 termes $\Big)$

- **Abel 1826 (Spence 1809, Hill 1829, Rogers 1907)**

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{D}(\boldsymbol{y}) - \mathbf{D}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right) - \mathbf{D}\left(\frac{\mathbf{1-y}}{\mathbf{1-x}}\right) + \mathbf{D}\left(\frac{\boldsymbol{x}(\mathbf{1-y})}{\boldsymbol{y}(\mathbf{1-x})}\right) = 0 \qquad (\mathcal{A}b)$$

- **Newman 1892 (Kummer 1840)** $\left(x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = 1\right)$

$$2\,\mathbf{Li}_2(\boldsymbol{x}) + 2\,\mathbf{Li}_2(\boldsymbol{y}) + 2\,\mathbf{Li}_2(\boldsymbol{z}) - \mathbf{Li}_2\left(\frac{-\boldsymbol{xy}}{\boldsymbol{z}}\right) - \mathbf{Li}_2\left(\frac{-\boldsymbol{yz}}{\boldsymbol{x}}\right) - \mathbf{Li}_2\left(\frac{-\boldsymbol{xz}}{\boldsymbol{y}}\right) = 0 \quad (\mathcal{N})$$

- **Spence-Kummer :** $\sum_{i=1}^{9} c_i\, \mathcal{L}_3\Big(U_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\Big) = 0$ $\quad(\mathcal{SK})$

- **Kummer 1840 :** $\sum_i \mathcal{L}_n c_i \Big(U_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\Big) = 0 \quad \big(\, n = 4, 5 \,\big)$ $\quad(\mathcal{K}_n)$

- ...

- **Goncharov 1995 :** $\sum_{i=1}^{22} c_i\, \mathcal{L}_3\Big(U_i(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\Big) = 0$ $\quad(\mathcal{G}on)$

- **Gangl 2003 :** $\sum_i c_i\, \mathcal{L}_n\Big(U_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\Big) = 0 \quad \big(\, n = 6, 7 \,\big)$ $\quad(\mathcal{G}an_n)$

- **Équations fonctionnelles des polylogarithmes :**
  - Géométrie hyperbolique
  - Géométrie des tissus
  - K-théorie des corps de nombres
  - Théorie des motifs / des périodes (VZM)
  - Physique des particules ("*Scattering amplitudes*")
  - Y-systèmes et algèbres amassées

- **Problèmes :** – construire des EF pour les $\boldsymbol{\mathcal{L}}_k$ ($\exists\ k \geq 8$?)

  – mieux comprendre les EF polylogarithmiques

EFA : Équation fonctionnelle abélienne

- $\mathbf{D}_{\mathcal{A}b}(x,y) = \mathbf{D}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{D}(\boldsymbol{y}) - \mathbf{D}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right) - \mathbf{D}\left(\frac{\mathbf{1}-\boldsymbol{y}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}}\right) + \mathbf{D}\left(\frac{\boldsymbol{x}(\mathbf{1}-\boldsymbol{y})}{\boldsymbol{y}(\mathbf{1}-\boldsymbol{x})}\right) \equiv 0$

EFA : Équation fonctionnelle abélienne

- $\mathbf{D}_{\mathcal{A}b}(x,y) = \mathbf{D}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{D}(\boldsymbol{y}) - \mathbf{D}\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\Big) - \mathbf{D}\Big(\frac{\boldsymbol{1-y}}{\boldsymbol{1-x}}\Big) + \mathbf{D}\Big(\frac{\boldsymbol{x(1-y)}}{\boldsymbol{y(1-x)}}\Big) \equiv 0$

- $\mathcal{M}_{0_x}\Big(\mathbf{D}_{\mathcal{A}b}\Big) = \mathbf{D}_{\mathcal{A}b} - i\pi\Big[\mathbf{L}\mathrm{i}_1(\boldsymbol{x}) - \mathbf{L}\mathrm{i}_1\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\Big) + \mathbf{L}\mathrm{i}_1\Big(\frac{\boldsymbol{x(1-y)}}{\boldsymbol{y(1-x)}}\Big)\Big] \equiv 0$

EFA : Équation fonctionnelle abélienne

- $\mathbf{D}_{\mathcal{A}b}(x,y) = \mathbf{D}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{D}(\boldsymbol{y}) - \mathbf{D}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right) - \mathbf{D}\left(\frac{\mathbf{1-y}}{\mathbf{1-x}}\right) + \mathbf{D}\left(\frac{\boldsymbol{x}\mathbf{(1-}\boldsymbol{y}\mathbf{)}}{\boldsymbol{y}\mathbf{(1-}\boldsymbol{x}\mathbf{)}}\right) \equiv 0$

- $\mathcal{M}_{0_x}\left(\mathbf{D}_{\mathcal{A}b}\right) = \mathbf{D}_{\mathcal{A}b} - i\pi\left[\mathbf{L}\mathrm{i}_1(\boldsymbol{x}) - \mathbf{L}\mathrm{i}_1\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right) + \mathbf{L}\mathrm{i}_1\left(\frac{\boldsymbol{x}\mathbf{(1-}\boldsymbol{y}\mathbf{)}}{\boldsymbol{y}\mathbf{(1-}\boldsymbol{x}\mathbf{)}}\right)\right] \equiv 0$

- $\mathbf{D}_{\mathcal{A}b} \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{L}\mathrm{i}_1(\boldsymbol{x}) - \mathbf{L}\mathrm{i}_1\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right) + \mathbf{L}\mathrm{i}_1\left(\frac{\boldsymbol{x}\mathbf{(1-}\boldsymbol{y}\mathbf{)}}{\boldsymbol{y}\mathbf{(1-}\boldsymbol{x}\mathbf{)}}\right) \equiv 0$

EFA : Équation fonctionnelle abélienne

- $\mathbf{D}_{\mathcal{A}b}(x,y) = \mathbf{D}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{D}(\boldsymbol{y}) - \mathbf{D}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right) - \mathbf{D}\left(\frac{\boldsymbol{1-y}}{\boldsymbol{1-x}}\right) + \mathbf{D}\left(\frac{\boldsymbol{x(1-y)}}{\boldsymbol{y(1-x)}}\right) \equiv 0$

- $\mathcal{M}_{0_x}\left(\mathbf{D}_{\mathcal{A}b}\right) = \mathbf{D}_{\mathcal{A}b} - i\pi\left[\mathbf{Li}_1(\boldsymbol{x}) - \mathbf{Li}_1\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right) + \mathbf{Li}_1\left(\frac{\boldsymbol{x(1-y)}}{\boldsymbol{y(1-x)}}\right)\right] \equiv 0$

- $\mathbf{D}_{\mathcal{A}b} \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{Li}_1(\boldsymbol{x}) - \mathbf{Li}_1\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right) + \mathbf{Li}_1\left(\frac{\boldsymbol{x(1-y)}}{\boldsymbol{y(1-x)}}\right) \equiv 0$

- Espace vectoriel des $(\boldsymbol{F}_i)_{i=1}^5$ telles que

$$\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{F}_3\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right) + \boldsymbol{F}_4\left(\frac{\boldsymbol{1-y}}{\boldsymbol{1-x}}\right) + \boldsymbol{F}_5\left(\frac{\boldsymbol{x(1-y)}}{\boldsymbol{y(1-x)}}\right) \equiv 0$$

EFA : Équation fonctionnelle abélienne

- $\mathbf{D}_{\mathcal{A}b}(x,y) = \mathbf{D}(x) - \mathbf{D}(y) - \mathbf{D}\left(\frac{x}{y}\right) - \mathbf{D}\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \mathbf{D}\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) \equiv 0$

- $\mathcal{M}_{0_x}\left(\mathbf{D}_{\mathcal{A}b}\right) = \mathbf{D}_{\mathcal{A}b} - i\pi\left[\mathbf{Li}_1(x) - \mathbf{Li}_1\left(\frac{x}{y}\right) + \mathbf{Li}_1\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)\right] \equiv 0$

- $\mathbf{D}_{\mathcal{A}b} \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{Li}_1(x) - \mathbf{Li}_1\left(\frac{x}{y}\right) + \mathbf{Li}_1\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) \equiv 0$

- Espace vectoriel des $(\boldsymbol{F}_i)_{i=1}^5$ telles que

$$\boldsymbol{F}_1(x) + \boldsymbol{F}_2(y) + \boldsymbol{F}_3\left(\frac{x}{y}\right) + \boldsymbol{F}_4\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \boldsymbol{F}_5\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) \equiv 0$$

- **Déf** : **EFA** = *Équation Fonctionnelle Abélienne* : $\sum_{i=1}^d \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{U_i}) \equiv 0$

EFA

- Sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ $\quad \Big($ ou sur $\Omega = (\mathbb{C}^n, 0)$ $\Big)$ $\quad n \geq 2$

EFA

- Sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ $\Big($ ou sur $\Omega = (\mathbb{C}^n, 0)$ $\Big)$ $n \geq 2$
- d-uplet $\underline{\boldsymbol{U}} = (\boldsymbol{U_i})_{i=1}^d$ de submersions $\boldsymbol{U_i} : \Omega \to \mathbb{C}$ $\rightsquigarrow$ **EFA** : $\sum_{i=1}^d \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{U_i}) = 0$

EFA

- Sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ $\Big($ ou sur $\Omega = (\mathbb{C}^n, 0)$ $\Big)$ $n \geq 2$
- d-uplet $\underline{\boldsymbol{U}} = (\boldsymbol{U_i})_{i=1}^d$ de submersions $\boldsymbol{U_i} : \Omega \to \mathbb{C}$ $\rightsquigarrow$ **EFA** : $\sum_{i=1}^d \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{U_i}) = 0$
- $\mathcal{A}(\underline{\boldsymbol{U}}) = \Big\{ (\boldsymbol{F}_i)_{i=1}^d \,\Big|\, \sum_{i=1}^d \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{U_i}) = 0 \Big\}$ $\longleftarrow$ $\mathbb{C}$-ev

EFA

- Sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ $\Big($ ou sur $\Omega = (\mathbb{C}^n, 0)$ $\Big)$ $n \geq 2$
- d-uplet $\underline{\boldsymbol{U}} = (\boldsymbol{U_i})_{i=1}^d$ de submersions $\boldsymbol{U_i} : \Omega \to \mathbb{C}$ $\rightsquigarrow$ **EFA** : $\sum_{i=1}^d \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{U_i}) = 0$
- $\mathcal{A}(\underline{\boldsymbol{U}}) = \left\{ (\boldsymbol{F}_i)_{i=1}^d \,\middle|\, \sum_{i=1}^d \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{U_i}) = 0 \right\}$ $\longleftarrow$ $\mathbb{C}$-ev
- $d\boldsymbol{U_i} \wedge d\boldsymbol{U_j} \equiv 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{U_i} = h(\boldsymbol{U_j}) \Rightarrow \forall \boldsymbol{F} : \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U_i}) - (\boldsymbol{F} \circ h)(\boldsymbol{U_j}) \equiv 0$

  $\Rightarrow$ $\mathbf{dim}\, \mathcal{A}(\underline{\boldsymbol{U}}) = +\infty$

EFA

- Sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ $\Big($ ou sur $\Omega = (\mathbb{C}^n, 0)$ $\Big)$ $n \geq 2$
- d-uplet $\underline{\boldsymbol{U}} = (\boldsymbol{U_i})_{i=1}^d$ de submersions $\boldsymbol{U_i} : \Omega \to \mathbb{C}$ $\rightsquigarrow$ **EFA** : $\sum_{i=1}^d \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{U_i}) = 0$
- $\mathcal{A}(\underline{\boldsymbol{U}}) = \Big\{ (\boldsymbol{F}_i)_{i=1}^d \Big| \sum_{i=1}^d \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{U_i}) = 0 \Big\}$ $\longleftarrow$ $\mathbb{C}$-ev
- $d\boldsymbol{U_i} \wedge d\boldsymbol{U_j} \equiv 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{U_i} = h(\boldsymbol{U_j}) \Rightarrow \forall \boldsymbol{F} : \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U_i}) - (\boldsymbol{F} \circ h)(\boldsymbol{U_j}) \equiv 0$

  $\Rightarrow$ $\mathbf{dim}\, \mathcal{A}(\underline{\boldsymbol{U}}) = +\infty$
- Hypothèse : $\boldsymbol{dU_i \wedge dU_j \neq 0}$ si $i \neq j$

EFA

- Sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ $\quad \Big($ ou sur $\Omega = (\mathbb{C}^n, 0)\Big)$ $\quad n \geq 2$

- d-uplet $\underline{\boldsymbol{U}} = (\boldsymbol{U_i})_{i=1}^d$ de submersions $\boldsymbol{U_i} : \Omega \to \mathbb{C}$ $\quad \rightsquigarrow \quad$ **EFA** : $\sum_{i=1}^d \boldsymbol{F}_i(\,\boldsymbol{U_i}\,) = 0$

- $\mathcal{A}(\underline{\boldsymbol{U}}) = \Big\{ (\boldsymbol{F}_i)_{i=1}^d \,\Big|\, \sum_{i=1}^d \boldsymbol{F}_i(\,\boldsymbol{U_i}\,) = 0 \Big\}$ $\quad \longleftarrow \quad$ $\mathbb{C}$-ev

- $d\boldsymbol{U_i} \wedge d\boldsymbol{U_j} \equiv 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{U_i} = h(\boldsymbol{U_j}) \Rightarrow \forall\, \boldsymbol{F} : \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U_i}) - (\boldsymbol{F} \circ h)(\boldsymbol{U_j}) \equiv 0$

  $\Rightarrow \quad \mathbf{dim}\, \mathcal{A}(\underline{\boldsymbol{U}}) = +\infty$

- Hypothèse : $\boldsymbol{dU_i \wedge dU_j \neq 0}$ si $i \neq j$

- $\Sigma_{i=1}^d \boldsymbol{F_i}(\boldsymbol{U_i}) = 0 \quad \xRightarrow[\text{(Pfaff 1788)}]{\textit{Méthode d' Abel 1923}} \quad \forall\, i : \quad \sum_s c_i^s(\boldsymbol{u_i}) \boldsymbol{F_i}^{(s)}(\boldsymbol{u_i}) = 0$

EFA

- Sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ $\Big($ ou sur $\Omega = (\mathbb{C}^n, 0)$ $\Big)$ $n \geq 2$

- d-uplet $\underline{\boldsymbol{U}} = (\boldsymbol{U_i})_{i=1}^d$ de submersions $\boldsymbol{U_i} : \Omega \to \mathbb{C}$ $\rightsquigarrow$ **EFA** : $\sum_{i=1}^d \boldsymbol{F}_i(\,\boldsymbol{U_i}\,) = 0$

- $\mathcal{A}(\underline{\boldsymbol{U}}) = \Big\{ (\boldsymbol{F}_i)_{i=1}^d \,\Big|\, \sum_{i=1}^d \boldsymbol{F}_i(\,\boldsymbol{U_i}\,) = 0 \Big\}$ $\longleftarrow$ $\mathbb{C}$-ev

- $d\boldsymbol{U_i} \wedge d\boldsymbol{U_j} \equiv 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{U_i} = h(\boldsymbol{U_j}) \Rightarrow \forall\, \boldsymbol{F} : \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U_i}) - (\boldsymbol{F} \circ h)(\boldsymbol{U_j}) \equiv 0$

  $\Rightarrow$ $\mathbf{dim}\, \mathcal{A}(\underline{\boldsymbol{U}}) = +\infty$

- Hypothèse : $\boldsymbol{dU_i \wedge dU_j \neq 0}$ si $i \neq j$

- $\Sigma_{i=1}^d \boldsymbol{F_i}(\boldsymbol{U_i}) = 0$ $\xRightarrow[\text{(Pfaff 1788)}]{\textit{Méthode d' Abel 1923}}$ $\forall\, i :$ $\sum_s c_i^s(\boldsymbol{u_i})\boldsymbol{F_i}^{(s)}(\boldsymbol{u_i}) = 0$

  $\Rightarrow$ $\mathbf{dim}\, \mathcal{A}(\underline{\boldsymbol{U}}) < +\infty$

EFA : approche géométrique

- Hypoth : $\forall\ i \neq j$ $\quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}(\underline{\boldsymbol{U}})$: $\mathbb{C}$-espace vectoriel
  $d\boldsymbol{U_i} \wedge d\boldsymbol{U_j} \neq 0$ $\qquad$ de dimension finie

EFA : approche géométrique

- Hypoth : $\forall\ i \neq j$ $\quad d\boldsymbol{U_i} \wedge d\boldsymbol{U_j} \neq 0$ $\quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}(\underline{\boldsymbol{U}})$: $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie

- $\sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{F}_i(\,\boldsymbol{U_i}\,) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{d} \left(\boldsymbol{F}_i \circ h_i^{-1}\right) \circ \left(\,h_i \circ \boldsymbol{U_i} \circ \varphi\,\right) \equiv 0$

  – h_i fonction inversible $\forall\ i$

  – φ biholomorphisme

EFA : approche géométrique

- Hypoth : $\forall\ i \neq j$ $d\boldsymbol{U_i} \wedge d\boldsymbol{U_j} \neq 0$ $\Longrightarrow$ $\mathcal{A}(\underline{\boldsymbol{U}})$: $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie

- $\sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{F}_i(\,\boldsymbol{U_i}\,) = 0 \iff \sum_{i=1}^{d} \left(\boldsymbol{F}_i \circ h_i^{-1}\right) \circ \Big(\, h_i \circ \boldsymbol{U_i} \circ \varphi \,\Big) \equiv 0$

  – h_i fonction inversible $\forall\ i$

  – φ biholomorphisme

- **Exemples :** les trois EFA suivantes sont "les mêmes"

$$0 = \ \mathbf{Id}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{Id}(\boldsymbol{y}) - \mathbf{Id}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$$

$$0 = \ \mathbf{Log}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{Log}(\boldsymbol{y}) - \mathbf{Log}(\boldsymbol{xy})$$

$$0 = \ \mathbf{Arctan}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{Arctan}(\boldsymbol{y}) - \mathbf{Arctan}\Big(\tfrac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{xy}}\Big)$$

EFA : approche géométrique

- Hypoth : $\forall\ i \neq j$ $\quad d\boldsymbol{U_i} \wedge d\boldsymbol{U_j} \neq 0$ $\quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}(\underline{\boldsymbol{U}})$: $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie

- $\sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{F}_i(\,\boldsymbol{U_i}\,) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{d} \left(\boldsymbol{F}_i \circ h_i^{-1}\right) \circ (\,h_i \circ \boldsymbol{U_i} \circ \boldsymbol{\varphi}\,) \equiv 0$

  – $\forall\ i$: h_i fonction inversible

  – φ biholomorphisme

- $\boldsymbol{U_i} \longleftrightarrow h_i \circ \boldsymbol{U_i}$

EFA : approche géométrique

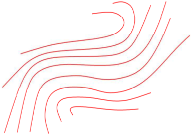
- Hypoth : $\forall\ i \neq j$ $\quad d\boldsymbol{U_i} \wedge d\boldsymbol{U_j} \neq 0$ $\quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}(\underline{\boldsymbol{U}})$: $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie

- $\sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{F}_i(\,\boldsymbol{U_i}\,) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{d} \left(\boldsymbol{F}_i \circ h_i^{-1}\right) \circ (\,h_i \circ \boldsymbol{U_i} \circ \boldsymbol{\varphi}\,) \equiv 0$

  – $\forall\ i$: h_i fonction inversible

  – φ biholomorphisme

- $\boldsymbol{U_i} \longleftrightarrow h_i \circ \boldsymbol{U_i} \quad \rightsquigarrow \quad$ Feuilletage $\mathcal{F}_{\boldsymbol{U_i}}$: $\mathcal{F}_{\boldsymbol{U_i}} = \{\ \boldsymbol{U_i} = \text{cst.}\ \}$

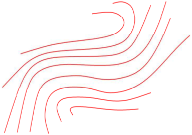


EFA : approche géométrique

- Hypoth : $\forall\ i \neq j$ $\quad d\,\boldsymbol{U_i} \wedge d\,\boldsymbol{U_j} \neq 0$ $\quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}(\underline{\boldsymbol{U}})$: $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie

- $\sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{F}_i(\,\boldsymbol{U_i}\,) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{d} \left(\boldsymbol{F}_i \circ h_i^{-1}\right) \circ (\,h_i \circ \boldsymbol{U_i} \circ \boldsymbol{\varphi}\,) \equiv 0$
  - $\forall\ i$: h_i fonction inversible
  - φ biholomorphisme

- $\boldsymbol{U_i} \longleftrightarrow h_i \circ \boldsymbol{U_i} \quad \rightsquigarrow$ Feuilletage $\mathcal{F}_{\boldsymbol{U_i}}$: $\mathcal{F}_{\boldsymbol{U_i}} = \{\ \boldsymbol{U_i} = \text{cst.}\ \}$



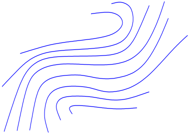
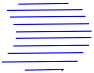
- $\underline{\boldsymbol{U}} = (\boldsymbol{U_1}, \ldots, \boldsymbol{U_d})$ avec $\boldsymbol{U_i} : \Omega \to \mathbb{C}$ submersions t.q. $\boldsymbol{dUi} \wedge \boldsymbol{dU_j} \neq \boldsymbol{0}$ si $i < j$ $\quad \rightsquigarrow \quad$ $\boldsymbol{W_{\underline{U}}} = (\mathcal{F}_{\boldsymbol{U_1}}, \ldots, \mathcal{F}_{\boldsymbol{U_d}})$ avec $\mathcal{F}_{\boldsymbol{U_i}}$: feuilletage holomorphe

Position générale : $\mathcal{F}_{\boldsymbol{U_i}} \pitchfork \mathcal{F}_{\boldsymbol{U_j}}$

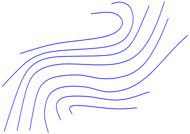
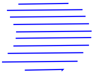
II. Tissus

II. Tissus

- **Feuilletage** = famille localement triviale de sous-variétés :

 $\simeq$ 

II. Tissus

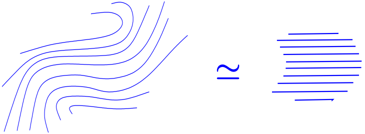
- **Feuilletage** $=$ famille localement triviale de sous-variétés :  $\simeq$ 

- **<u>Déf</u> :** un ***d*-tissu** est une collection de d feuilletages

$$\boldsymbol{W_d} = \left(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_{\boldsymbol{d}}\right) \text{ deux à deux transverses}$$

II. Tissus

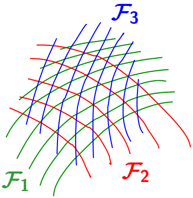
- **Feuilletage** = famille localement triviale de sous-variétés :



- **Déf :** un ***d*-tissu** est une collection de d feuilletages

$$W_d = \Big(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_d\Big) \text{ deux à deux transverses}$$

- **Exemples :** **1.**



un 3-tissu plan

2. $\boldsymbol{W(\underline{U}) = W\Big(U_1, \ldots, U_d\Big)}$ d-tissu sur $\Omega \subset \mathbb{C}^n$

Géometrie des tissus

- **Déf :** $\boldsymbol{W}$ et $\widetilde{\boldsymbol{W}}$ sont **équivalents** si $\exists\ \varphi$ biholom. $\Big/\ \varphi^*(\widetilde{\boldsymbol{W}}) = \boldsymbol{W}$

Géometrie des tissus

- **Déf :** $\boldsymbol{W}$ et $\widetilde{\boldsymbol{W}}$ sont **équivalents** si $\exists\ \varphi$ biholom. $\Big/\ \varphi^*(\widetilde{\boldsymbol{W}}) = \boldsymbol{W}$

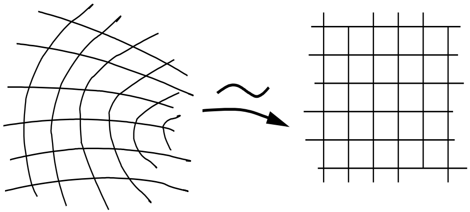
- **Problématique :** **classifier les tissus à équivalence près**

Géometrie des tissus

- **Déf :** $\boldsymbol{W}$ et $\widetilde{\boldsymbol{W}}$ sont **équivalents** si $\exists\ \varphi$ biholom. $\Big/\ \varphi^*(\widetilde{\boldsymbol{W}}) = \boldsymbol{W}$

- **Problématique : classifier les tissus à équivalence près**

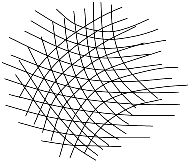
- **Exemple :**



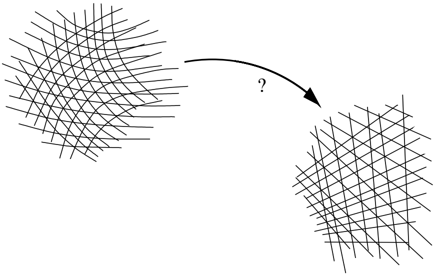
un 2-tissu plan est trivial (localement)

Géometrie des tissus

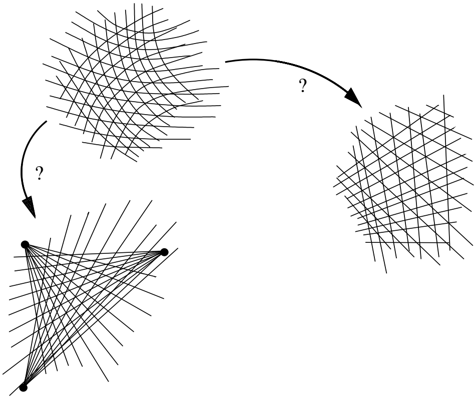
Géometrie des tissus



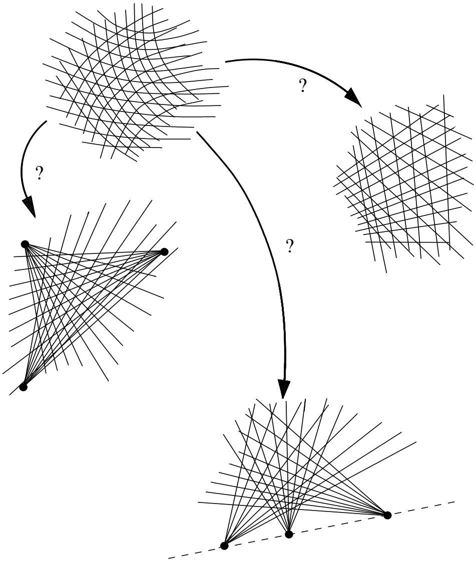
Géometrie des tissus



Géometrie des tissus



Géometrie des tissus



Exemples de tissus

Tissu de Bol $\mathcal{B}$

- Cinq applications d'*'oubli d'un point'* : $\mathcal{M}_{0,5} \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1} \\ \vdots \\ \xrightarrow[f_5]{} \end{array} \mathcal{M}_{0,4} \simeq \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$

$$\mathcal{B} = W\Big(f_1, \ldots, f_5\Big)$$

Exemples de tissus

Tissu de Bol $\mathcal{B}$

- Cinq applications d' *'oubli d'un point'* : $\mathcal{M}_{0,5} \underset{f_5}{\overset{f_1}{\longrightarrow}} \mathcal{M}_{0,4} \simeq \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$

$$\mathcal{B} = W\Big(f_1, \ldots, f_5\Big)$$

- $\mathcal{B} = W\Big(\, x \,,\; y \,,\; \frac{x}{y} \,,\; \frac{1-x}{1-y} \,,\; \frac{x(1-y)}{y(1-x)} \,\Big)$

$$(\mathcal{A}\mathrm{b}) \quad \mathbf{D}(x) - \mathbf{D}(y) - \mathbf{D}\Big(\frac{x}{y}\Big) - \mathbf{D}\Big(\frac{1-y}{1-x}\Big) + \mathbf{D}\Big(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\Big) = 0$$

Tissus algébriques

- $C \subset \mathbb{P}^n$: courbe algébrique de degré d

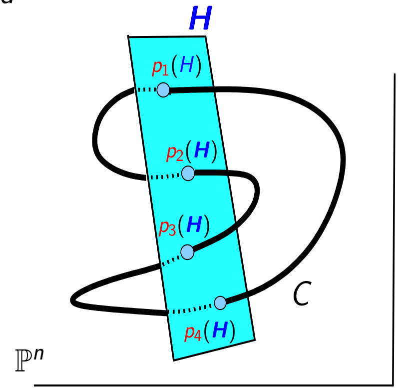
Tissus algébriques

- $C \subset \mathbb{P}^n$: courbe algébrique de degré d
- $\boldsymbol{H} \in \check{\mathbb{P}}^n$: hyperplan générique

Tissus algébriques

- $C \subset \mathbb{P}^n$: courbe algébrique de degré d
- $\boldsymbol{H} \in \check{\mathbb{P}}^n$: hyperplan générique

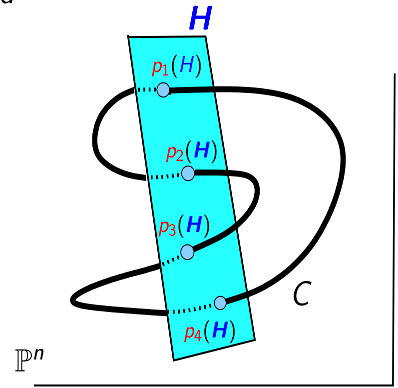
$$\boldsymbol{H} \cdot C = p_1(\boldsymbol{H}) + \cdots + p_d(\boldsymbol{H})$$



Tissus algébriques

- $C \subset \mathbb{P}^n$: courbe algébrique de degré d
- $\boldsymbol{H} \in \check{\mathbb{P}}^n$: hyperplan générique

$$\boldsymbol{H} \cdot C = p_1(\boldsymbol{H}) + \cdots + p_d(\boldsymbol{H})$$

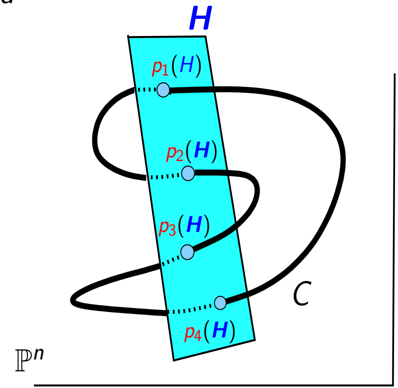


- $\rightsquigarrow$ d submersions locales $\boldsymbol{p_i} : \left(\check{\mathbb{P}}^n, \boldsymbol{H}\right) \longrightarrow C$

Tissus algébriques

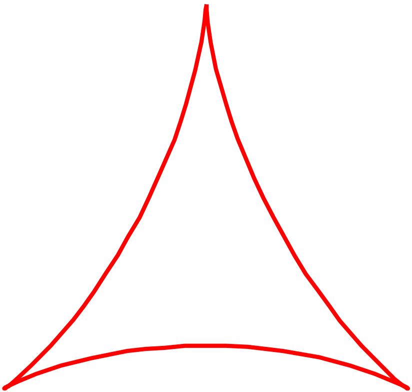
- $C \subset \mathbb{P}^n$: courbe algébrique de degré d
- $\boldsymbol{H} \in \check{\mathbb{P}}^n$: hyperplan générique

$$\boldsymbol{H} \cdot C = p_1(\boldsymbol{H}) + \cdots + p_d(\boldsymbol{H})$$

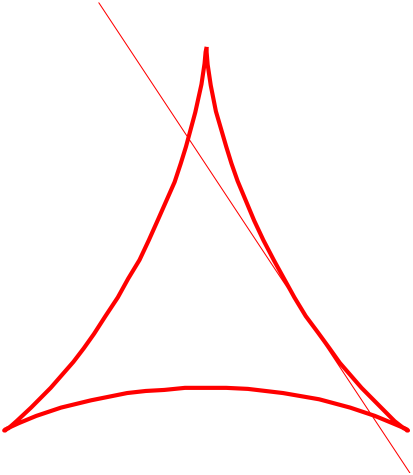


- ⇝ d submersions locales $\boldsymbol{p_i} : \left(\check{\mathbb{P}}^n, \boldsymbol{H}\right) \longrightarrow C$
- ⇝ Localement $\boldsymbol{W}_C = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{p_1}, \ldots, \boldsymbol{p_d})$ $\Big($$d$-tissu en hyperplans sur $\check{\mathbb{P}}^n\Big)$

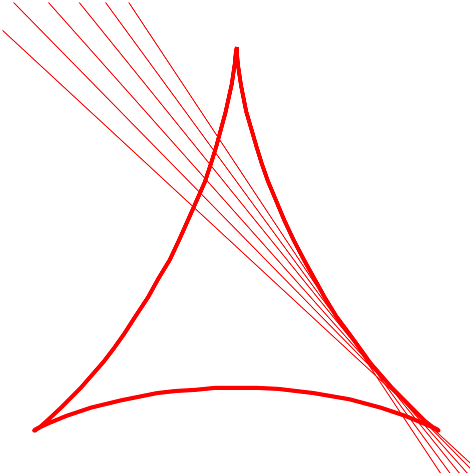
Hypocycloïde à trois cusps



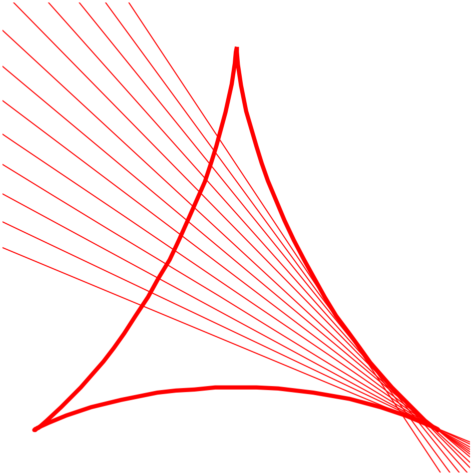
Hypocycloïde à trois cusps



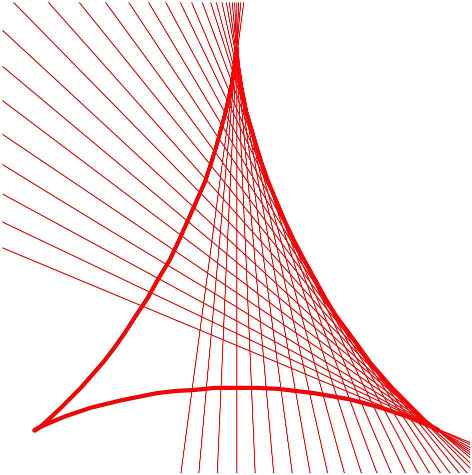
Hypocycloïde à trois cusps



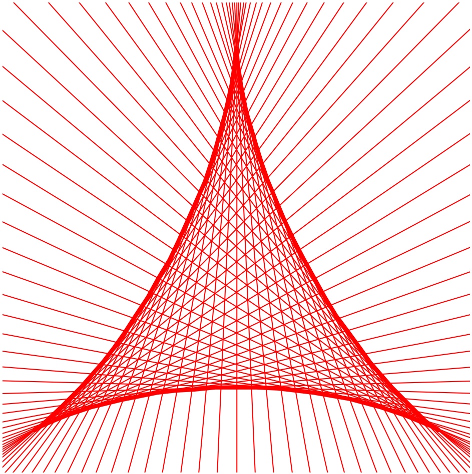
Hypocycloïde à trois cusps



Hypocycloïde à trois cusps



Hypocycloïde à trois cusps



3-tissu algébrique

Relations abéliennes et rang

$\boldsymbol{W}_d = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{U_1}, \boldsymbol{U_2}, \ldots, \boldsymbol{U_d})$ intégrales 1ères $\boldsymbol{U_i} : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$

Définitions :

- **Relation abélienne** de $\boldsymbol{W}_d$ $=$ $\Big(\boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_d\Big) \in \big(\mathcal{O}_{(\mathbb{C},0)}\big)^d$ t.q.

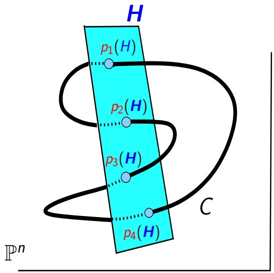
$$\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{U_1}) + \cdots + \boldsymbol{F}_d(\boldsymbol{U_d}) \equiv 0$$

- $\mathcal{A}(\boldsymbol{W}_d) = \Big\{\text{RA de } \boldsymbol{W}_d\Big\} = \left\{ \begin{array}{c} (\boldsymbol{F}_i)_{i=1}^d \text{ tel que} \\ \sum_i \boldsymbol{U_i}^*(d\boldsymbol{F}_i) = 0 \end{array} \right\}$ $\longleftarrow$ $\mathbb{C}$-ev

- **Rang** de $\boldsymbol{W}_d$: $\mathbf{rg}(\boldsymbol{W}_d) = \dim \mathcal{A}(\boldsymbol{W}_d)$ $\longleftarrow$ invariant

Ex. : $\mathcal{A}\Big(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \tfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}})\Big) = \Big\langle \mathrm{Log}(\boldsymbol{x}) - \mathrm{Log}(\boldsymbol{y}) - \mathrm{Log}\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\Big) = 0 \Big\rangle$ $\quad \mathbf{rg} = 1$

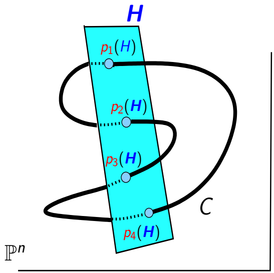
- Courbe $C \subset \mathbb{P}^n$ de degré d $\rightsquigarrow$ d-tissu $\boldsymbol{W}_C$ en hyperplans sur $\check{\mathbb{P}}^n$



- $\boldsymbol{W}_C \overset{\text{loc}}{=} \boldsymbol{W}\Big(\boldsymbol{p_1}, \ldots, \boldsymbol{p_d}\Big)$

Relations abéliennes et rang des tissus algébriques

- Courbe $C \subset \mathbb{P}^n$ de degré d $\rightsquigarrow$ d-tissu $\boldsymbol{W}_C$ en hyperplans sur $\check{\mathbb{P}}^n$

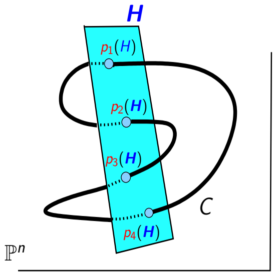


- $\boldsymbol{W}_C \overset{\text{loc}}{=} \boldsymbol{W}\Big(\boldsymbol{p_1}, \ldots, \boldsymbol{p_d}\Big)$

- $\omega \in \mathbf{H}^0(\Omega^1_C)$: **différentielle abélienne**

Relations abéliennes et rang des tissus algébriques

- Courbe $C \subset \mathbb{P}^n$ de degré d $\rightsquigarrow$ d-tissu $\boldsymbol{W}_C$ en hyperplans sur $\check{\mathbb{P}}^n$



- $\boldsymbol{W}_C \overset{\text{loc}}{=} \boldsymbol{W}\big(\boldsymbol{p_1}, \ldots, \boldsymbol{p_d}\big)$
- $\omega \in \mathbf{H}^0(\Omega^1_C)$: **différentielle abélienne**

<u>**Théorème d'Abel**</u> : $\quad \mathbf{Tr}(\omega) \overset{\text{loc}}{=} \sum_i \boldsymbol{p_i}^*(\omega) \equiv 0$ i.e.

$$\int^{\boldsymbol{p_1}(H)} \omega + \int^{\boldsymbol{p_2}(H)} \omega + \cdots + \int^{\boldsymbol{p_d}(H)} \omega = \text{cst.}$$

"Les sommes abéliennes sont constantes"

Relations abéliennes et rang des tissus algébriques

- Courbe $C \subset \mathbb{P}^n$ de degré $d \quad \rightsquigarrow \quad d$-tissu $\boldsymbol{W}_C = \boldsymbol{W}\Big(\boldsymbol{p_1}, \ldots, \boldsymbol{p_d}\Big)$

- $\omega \in \mathbf{H}^0(\Omega^1_C)$: **différentielle abélienne**

Théorème d'Abel : $\quad \mathbf{Tr}(\omega) \overset{\text{loc}}{=} \sum_i \boldsymbol{p_i}^*(\omega) \equiv 0$ i.e.

$$\int^{\boldsymbol{p_1}(H)} \omega + \int^{\boldsymbol{p_2}(H)} \omega + \cdots + \int^{\boldsymbol{p_d}(H)} \omega = \text{cst.}$$

"Les sommes abéliennes sont constantes"

Relations abéliennes et rang des tissus algébriques

- Courbe $C \subset \mathbb{P}^n$ de degré $d \quad \rightsquigarrow \quad d$-tissu $\boldsymbol{W}_C = \boldsymbol{W}\Big(\boldsymbol{p_1}, \ldots, \boldsymbol{p_d}\Big)$

- $\omega \in \mathbf{H}^0(\Omega^1_C)$: **différentielle abélienne**

Théorème d'Abel : $\quad \mathbf{Tr}(\omega) \overset{\text{loc}}{=} \sum_i \boldsymbol{p_i}^*(\omega) \equiv 0$ i.e.

$$\int^{\boldsymbol{p_1}(H)} \omega + \int^{\boldsymbol{p_2}(H)} \omega + \cdots + \int^{\boldsymbol{p_d}(H)} \omega = \text{cst.}$$

"Les sommes abéliennes sont constantes"

- **Isomorphisme :** $\quad \mathbf{H}^0\Big(\Omega^1_C\Big) \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{W}_C)$

$$\omega \longmapsto \Big(\boldsymbol{p_i}^*(\omega)\Big)_{i=1}^{d}$$

Relations abéliennes et rang des tissus algébriques

- Courbe $C \subset \mathbb{P}^n$ de degré $d \quad \rightsquigarrow \quad d$-tissu $\boldsymbol{W}_C = \boldsymbol{W}\Big(\boldsymbol{p_1}, \ldots, \boldsymbol{p_d}\Big)$

- $\omega \in \mathbf{H}^0(\Omega^1_C)$: **différentielle abélienne**

Théorème d'Abel : $\quad \mathbf{Tr}(\omega) \overset{\text{loc}}{=} \sum_i \boldsymbol{p_i}^*(\omega) \equiv 0$ i.e.

$$\int^{\boldsymbol{p_1}(H)} \omega + \int^{\boldsymbol{p_2}(H)} \omega + \cdots + \int^{\boldsymbol{p_d}(H)} \omega = \text{cst.}$$

"Les sommes abéliennes sont constantes"

- **Isomorphisme :** $\quad \mathbf{H}^0\Big(\Omega^1_C\Big) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(\boldsymbol{W}_C) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{g}(C) = \mathbf{rg}(\boldsymbol{W}_C)$

$$\omega \longmapsto \Big(\boldsymbol{p_i}^*(\omega)\Big)_{i=1}^{d}$$

Borne sur le rang

- $\boldsymbol{W}_d = d$-tissu sur $\Omega \subset \mathbb{C}^n$

Théorème : [Bol (n=2), Chern]

$$\mathbf{rg}\Big(\boldsymbol{W}_d\Big) \leq \pi(d,2) = \tfrac{1}{2}(d-1)(d-2) \qquad\qquad (n=2)$$

$$\mathbf{rg}\Big(\boldsymbol{W}_d\Big) \leq \pi(d,n)$$

Borne sur le rang

- $\boldsymbol{W}_d = d$-tissu sur $\Omega \subset \mathbb{C}^n$

Théorème : [Bol (n=2), Chern]

$$\mathbf{rg}\Big(\boldsymbol{W}_d\Big) \leq \pi(d,2) = \tfrac{1}{2}(d-1)(d-2) \qquad\qquad (n=2)$$

$$\mathbf{rg}\Big(\boldsymbol{W}_d\Big) \leq \pi(d,n)$$

- **Définition :** $\boldsymbol{W}_d$ est de **rang maximal** si $\mathbf{rg}(\boldsymbol{W}_d) = \pi(d,n)$

Borne sur le rang

- $\boldsymbol{W}_d$ = d-tissu sur $\Omega \subset \mathbb{C}^n$

Théorème : [Bol (n=2), Chern]

$$\mathbf{rg}\Big(\boldsymbol{W}_d\Big) \leq \pi(d,2) = \tfrac{1}{2}(d-1)(d-2) \qquad\qquad (n=2)$$

$$\mathbf{rg}\Big(\boldsymbol{W}_d\Big) \leq \pi(d,n)$$

- **Définition :** $\boldsymbol{W}_d$ est de **rang maximal** si $\mathbf{rg}(\boldsymbol{W}_d) = \pi(d,n)$

Exemples : – $\mathbf{rg}\Big(\boldsymbol{W}\big(x, y, \tfrac{x}{y}\big)\Big) = \pi(3,2) = 1$

$C \subset \mathbb{P}^2$: – $\mathbf{rg}(\boldsymbol{W}_C) = \boldsymbol{g}(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ si $d = \deg(C)$

Borne sur le rang

- $\boldsymbol{W_d} = d$-tissu sur $\Omega \subset \mathbb{C}^n$

Théorème : [Bol (n=2), Chern]

$$\mathbf{rg}\Big(\boldsymbol{W_d}\Big) \leq \pi(d,2) = \tfrac{1}{2}(d-1)(d-2) \qquad\qquad (n=2)$$

$$\mathbf{rg}\Big(\boldsymbol{W_d}\Big) \leq \pi(d,n)$$

- **Définition :** $\boldsymbol{W_d}$ est de **rang maximal** si $\mathbf{rg}(\boldsymbol{W_d}) = \pi(d,n)$

Exemples : $-$ $\mathbf{rg}\Big(\boldsymbol{W}\big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \tfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\big)\Big) = \pi(3,2) = 1$

$C \subset \mathbb{P}^2$: $-$ $\mathbf{rg}(\boldsymbol{W_C}) = \boldsymbol{g}(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ si $d = \deg(C)$

$-$ $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \boldsymbol{W}\Big(\boldsymbol{x}\,,\ \boldsymbol{y}\,,\ \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\,,\ \frac{\boldsymbol{1-x}}{\boldsymbol{1-y}}\,,\ \frac{\boldsymbol{x(1-y)}}{\boldsymbol{y(1-x)}}\Big)$ $\qquad \mathbf{rg}(\boldsymbol{\mathcal{B}}) = 6$

Tissus exceptionnels

- $\mathcal{B} = \boldsymbol{W}\left(\boldsymbol{x} \ , \ \boldsymbol{y} \ , \ \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \ , \ \frac{1-\boldsymbol{x}}{1-\boldsymbol{y}} \ , \ \frac{\boldsymbol{x}(1-\boldsymbol{y})}{\boldsymbol{y}(1-\boldsymbol{x})} \right)$ $\qquad$ $\mathbf{rg}(\mathcal{B}) = 6$

Tissus exceptionnels

- $\mathcal{B} = W\left(x \, , \, y \, , \, \frac{x}{y} \, , \, \frac{1-x}{1-y} \, , \, \frac{x(1-y)}{y(1-x)} \right)$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{rg}(\mathcal{B}) = 6$

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}) = \mathbf{Aut}(\mathcal{B}) \cdot \left\langle \,\mathrm{Log}(x) - \mathrm{Log}(y) - \mathrm{Log}\left(\frac{x}{y}\right) \right\rangle \oplus \left\langle \, \mathbf{RA}_{\mathcal{A}b} \right\rangle$$

Tissus exceptionnels

- $\mathcal{B} = \boldsymbol{W}\Big(\boldsymbol{x} \,,\, \boldsymbol{y} \,,\, \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \,,\, \frac{1-\boldsymbol{x}}{1-\boldsymbol{y}} \,,\, \frac{\boldsymbol{x}(1-\boldsymbol{y})}{\boldsymbol{y}(1-\boldsymbol{x})} \Big)$ $\qquad\qquad \mathbf{rg}(\mathcal{B}) = 6$

$$\underset{\mathbf{RA}_{\mathcal{A}b}}{\overset{\mathcal{A}(\mathcal{B})}{\Cup}} = \mathbf{Aut}(\mathcal{B}) \cdot \Big\langle \operatorname{Log}(\boldsymbol{x}) - \operatorname{Log}(\boldsymbol{y}) - \operatorname{Log}\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\Big) \Big\rangle \oplus \Big\langle \mathbf{RA}_{\mathcal{A}b} \Big\rangle$$

Tissus exceptionnels

- $\mathcal{B} = \boldsymbol{W}\left(x\ ,\ y\ ,\ \frac{x}{y}\ ,\ \frac{1-x}{1-y}\ ,\ \frac{x(1-y)}{y(1-x)} \right)$ $\qquad \mathbf{rg}(\mathcal{B}) = 6$

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}) = \mathbf{Aut}(\mathcal{B}) \cdot \left\langle \mathrm{Log}(x) - \mathrm{Log}(y) - \mathrm{Log}\left(\frac{x}{y}\right) \right\rangle \oplus \left\langle \mathbf{RA}_{\mathcal{A}b} \right\rangle$$

$$\Cup$$

$$\mathbf{RA}_{\mathcal{A}b} = \left[\mathbf{D}(x) - \mathbf{D}(y) - \mathbf{D}\left(\frac{x}{y}\right) - \mathbf{D}\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \mathbf{D}\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0 \right]$$

Tissus exceptionnels

- $\mathcal{B} = \boldsymbol{W}\Big(x\,,\ y\,,\ \frac{x}{y}\,,\ \frac{1-x}{1-y}\,,\ \frac{x(1-y)}{y(1-x)} \Big)$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{rg}(\mathcal{B}) = 6$

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}) = \mathbf{Aut}(\mathcal{B}) \cdot \Big\langle\, \mathrm{Log}(x) - \mathrm{Log}(y) - \mathrm{Log}\Big(\frac{x}{y}\Big) \,\Big\rangle \oplus \Big\langle\, \mathbf{RA}_{\mathcal{A}b} \,\Big\rangle$$

$$\Cup$$

$$\mathbf{RA}_{\mathcal{A}b} \; = \; \left[\, \mathbf{D}(x) - \mathbf{D}(y) - \mathbf{D}\Big(\frac{x}{y}\Big) - \mathbf{D}\Big(\frac{1-y}{1-x}\Big) + \mathbf{D}\Big(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\Big) = 0 \,\right]$$

- **[Bol 1936] :** $\mathcal{B}$ est **exceptionnel** $\overset{def}{=\!=}$ $\begin{cases} \text{- de rang maximal} \\ \text{- non-algébrisable} \end{cases}$

Tissus exceptionnels

- $\mathcal{B} = W\Big(x\ ,\ y\ ,\ \frac{x}{y}\ ,\ \frac{1-x}{1-y}\ ,\ \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\ \Big)$ $\qquad \mathbf{rg}(\mathcal{B}) = 6$

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}) = \mathbf{Aut}(\mathcal{B}) \cdot \Big\langle \operatorname{Log}(x) - \operatorname{Log}(y) - \operatorname{Log}\Big(\frac{x}{y}\Big) \Big\rangle \oplus \Big\langle \mathbf{RA}_{\mathcal{A}b} \Big\rangle$$

$$\Cup$$

$$\mathbf{RA}_{\mathcal{A}b} = \left[\mathbf{D}(x) - \mathbf{D}(y) - \mathbf{D}\Big(\frac{x}{y}\Big) - \mathbf{D}\Big(\frac{1-y}{1-x}\Big) + \mathbf{D}\Big(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\Big) = 0 \right]$$

- **[Bol 1936] :** $\mathcal{B}$ est **exceptionnel** $\overset{def}{=\!=}$ $\begin{cases} \text{- de rang maximal} \\ \text{- non-algébrisable} \end{cases}$

- **[P. 2005] :** $W_{\mathcal{SK}}$ est **exceptionnel**

$$\begin{aligned} & 2\,\mathcal{L}_3(x) + 2\,\mathcal{L}_3(y) - \mathcal{L}_3\Big(\frac{x}{y}\Big) + 2\,\mathcal{L}_3\Big(\frac{1-x}{1-y}\Big) + 2\,\mathcal{L}_3\Big(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\Big) - \mathcal{L}_3(xy) \\ (\mathcal{SK}) \qquad & + 2\,\mathcal{L}_3\Big(-\frac{x(1-y)}{(1-x)}\Big) + 2\,\mathcal{L}_3\Big(-\frac{(1-y)}{y(1-x)}\Big) - \mathcal{L}_3\Big(\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\Big) = 0 \end{aligned}$$

Tissus exceptionnels

- $\mathcal{B} = \boldsymbol{W}\Big(x\,,\ y\,,\ \frac{x}{y}\,,\ \frac{1-x}{1-y}\,,\ \frac{x(1-y)}{y(1-x)} \Big)$ $\qquad$ $\mathbf{rg}(\mathcal{B}) = 6$

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}) = \mathbf{Aut}(\mathcal{B}) \cdot \Big\langle \operatorname{Log}(x) - \operatorname{Log}(y) - \operatorname{Log}\Big(\frac{x}{y}\Big) \Big\rangle \oplus \Big\langle \mathbf{RA}_{\mathcal{A}b} \Big\rangle$$

$$\Cup$$

$$\mathbf{RA}_{\mathcal{A}b} = \left[\mathbf{D}(x) - \mathbf{D}(y) - \mathbf{D}\Big(\frac{x}{y}\Big) - \mathbf{D}\Big(\frac{1-y}{1-x}\Big) + \mathbf{D}\Big(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\Big) = 0 \right]$$

- **[Bol 1936] :** $\mathcal{B}$ est **exceptionnel** $\stackrel{def}{=\!=}$ $\begin{cases} \text{- de rang maximal} \\ \text{- non-algébrisable} \end{cases}$

- **[P. 2005] :** $\boldsymbol{W}_{\mathcal{SK}}$ est **exceptionnel**

$$F_1(x) + F_2(y) + F_3\Big(\frac{x}{y}\Big) + F_4\Big(\frac{1-x}{1-y}\Big) + F_5\Big(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\Big) + F_6(xy)$$
$$+ F_7\Big(-\frac{x(1-y)}{(1-x)}\Big) + F_8\Big(-\frac{(1-y)}{y(1-x)}\Big) + F_9\Big(\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\Big) = 0$$

Tissus exceptionnels

[**Chern-Griffiths 1981**]

"... we cannot refrain from mentioning what we consider to be the fundamental problem on the subject, which is to determine the maximum rank non-linearizable webs.

The strong conditions must imply that there are not many. It may not be unreasonable to compare the situation with the exceptional simple Lie groups."

Problème de Chern-Griffiths : déterminer les tissus exceptionnels

Algèbres amassées

- **Introduites par Fomin et Zelevinsky** ($\sim$ **2000**)
- **Domaine très vivace avec beaucoup d'intéractions :**
  - Positivité en théorie de Lie
  - Théorie des représentations (carquois)
  - Groupe quantique et quantisation (espaces homogènes)
  - Théorie de Teichmüller supérieure
  - Systèmes intégrables ("*Y-systems*", "*Pentagram maps*")
  - Physique des particules ("*Scattering amplitudes*")
  - Équation fonctionnelles dilogarithmiques
  - Géométrie de Poisson ; Géométrie hyperbolique
  - Géométrie algébrique
  - ...

Algèbres amassées

- **Algèbre amassée** : anneau commutatif équipé d'une structure combinatoire d'un type particulier

- **Graine d'amas initiale** : $\mathcal{G}_{\mathbf{init}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, B)$ avec $\begin{cases} \boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \\ \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \\ B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathrm{ASym}_n(\mathbb{Z}) \end{cases}$

- **Définition :** algèbre amassée A_B associée à $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, B)$:

$$A_B = \left\langle \; a_i' \;\middle|\; (\boldsymbol{a}', \boldsymbol{x}', B') = \mathcal{G}' \sim_{\mathbf{mutation}} \mathcal{G}_{\mathbf{init}} \right\rangle \subset \mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_n)$$

- **Exemples :** $\mathbb{C}\left[\widehat{G_k(\mathbb{C}^n)}\right]$, $\mathbb{C}\left[\widehat{X}\right]$ $X = G/P$, var. de Schubert, etc.

Algèbres amassées : terminologie

- **Graine d'amas** : $\mathcal{G} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, B)$ avec $\begin{cases} \boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n) \\ \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \\ B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathrm{ASym}_n(\mathbb{Z}) \end{cases}$

- **$\mathcal{A}$-graine** : $(\boldsymbol{a}, B)$ **$\mathcal{X}$-graine** : $(\boldsymbol{x}, B)$

  $\mathcal{A}$-amas : $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i=1}^{n}$ **$\mathcal{X}$-amas** : $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=1}^{n}$

  $\mathcal{A}$-variable d'amas : a_j **$\mathcal{X}$-var. d'amas** : x_j

- **Mutation dans la k-ième direction** :

$$\mu_k : (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, B) = \mathcal{G} \longmapsto \mathcal{G}' = (\boldsymbol{a}', \boldsymbol{x}', B')$$

Mutations

- On pose $\mathbf{s}(0) = 0$ et $\mathbf{s}(m) = m/|m| \in \{\pm 1\}$ si $m \neq 0$

***k*-ième mutation μ_k** :

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, B) \overset{\mu_k}{\longmapsto} (\boldsymbol{a}', \boldsymbol{x}', B')$$

$$\boldsymbol{a} \longmapsto \boldsymbol{a}' = (a_1', \ldots, a_n')$$

$$\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{x}' = (x_1', \ldots, x_n')$$

$$B \longmapsto B' = (b_{ij}')_{i,j=1}^n$$

Mutations

- On pose $\mathbf{s}(0) = 0$ et $\mathbf{s}(m) = m/|m| \in \{\pm 1\}$ si $m \neq 0$

$\boldsymbol{k}$-ième mutation $\boldsymbol{\mu_k}$:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, B) \overset{\mu_k}{\longmapsto} (\boldsymbol{a}', \boldsymbol{x}', B')$$

$$\boldsymbol{a} \longmapsto \boldsymbol{a}' = (a'_1, \ldots, a'_n)$$

$$\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{x}' = (x'_1, \ldots, x'_n)$$

$$B \longmapsto B' = (b'_{ij})_{i,j=1}^n$$

$\mathcal{A}$-mutation

- $$a'_j = \begin{cases} a_k^{-1}\left[\prod_{b_{k\ell}>0} a_\ell^{b_{k\ell}} + \prod_{b_{kl}<0} a_l^{-b_{kl}}\right] & j = k \\ a_j & j \neq k \end{cases}$$

$\mathcal{X}$-mutation

- $$x'_j = \begin{cases} x_j^{-1} & j = k \\ x_j\left(1 + x_k^{\mathbf{s}(-b_{kj})}\right)^{-b_{kj}} & j \neq k \end{cases}$$

Mutation matricielle

- $$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & k \in \{i,j\} \\ b_{ij} & k \notin \{i,j\}\,,\ b_{ik}b_{kj} \leq 0 \\ b_{ij} + |b_{ik}|\,b_{kj} & k \notin \{i,j\}\,,\ b_{ik}b_{kj} > 0 \end{cases}$$

- **Matrice** $B = B_Q$ $\longleftrightarrow$ **Carquois** $Q = Q_B$

- **Matrice** $B = B_Q$ $\quad\longleftrightarrow\quad$ **Carquois** $Q = Q_B$

$$B_{A_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad\longleftrightarrow\quad Q_{A_2} \ : \ \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{2}$$

- **Matrice** $B = B_Q \quad \longleftrightarrow \quad$ **Carquois** $Q = Q_B$

$$B_{A_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad Q_{A_2} \;:\; \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{2}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\left(\left(\frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1}{x_2} \right), \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) & \xleftarrow{\mu_2} & \left(\left(\frac{1}{x_1}, x_2 \right), \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) & \xrightarrow{\mu_1} & \left(\left(x_1, \frac{x_2}{1+x_1} \right), \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
\downarrow \mu_1 & & & & \downarrow \mu_2 \\
\left(\left(\frac{x_1}{1+x_2}, \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} \right), \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) & & & & \left(\left(\frac{x_1 x_2}{1+x_1+x_2}, \frac{1+x_1}{x_2} \right), \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)
\end{array}$$

- **Matrice** $B = B_Q \quad \longleftrightarrow \quad$ **Carquois** $Q = Q_B$

$$B_{A_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad Q_{A_2} \ : \ \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{2}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\left(\left(\frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1}{x_2} \right), \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) & \xleftarrow{\mu_2} & \left(\left(\frac{1}{x_1}, x_2 \right), \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) & \xrightarrow{\mu_1} & \left(\left(x_1, \frac{x_2}{1+x_1} \right), \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
\downarrow \mu_1 & & & & \downarrow \mu_2 \\
\left(\left(\frac{x_1}{1+x_2}, \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} \right), \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) & & & & \left(\left(\frac{x_1 x_2}{1+x_1+x_2}, \frac{1+x_1}{x_2} \right), \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)
\end{array}$$

- **$\mathcal{X}$-variables d'amas :** $\quad x_1 \ , \ x_2 \ , \ \frac{1+x_2}{x_1} \ , \ \frac{1+x_1}{x_2} \ , \ \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2}$

- **Matrice** $B = B_Q \quad \longleftrightarrow \quad$ **Carquois** $Q = Q_B$

$$B_{A_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad Q_{A_2} \ : \ \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{2}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\left(\left(\frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1}{x_2} \right), \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) & \xleftarrow{\mu_2} & \left(\left(\frac{1}{x_1}, x_2 \right), \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) & \xrightarrow{\mu_1} & \left(\left(x_1, \frac{x_2}{1+x_1} \right), \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
\downarrow \mu_1 & & & & \downarrow \mu_2 \\
\left(\left(\frac{x_1}{1+x_2}, \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} \right), \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) & & & & \left(\left(\frac{x_1 x_2}{1+x_1+x_2}, \frac{1+x_1}{x_2} \right), \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)
\end{array}$$

- **$\mathcal{X}$-variables d'amas :** $\quad x_1 \ , \ x_2 \ , \ \frac{1+x_2}{x_1} \ , \ \frac{1+x_1}{x_2} \ , \ \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2}$
- On a : $D(x_1) + D(x_2) + D\left(\frac{1+x_2}{x_1}\right) + D\left(\frac{1+x_1}{x_2}\right) + D\left(\frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2}\right) = 0$

- **Matrice** $B = B_Q \quad \longleftrightarrow \quad$ **Carquois** $Q = Q_B$

$$B_{A_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad Q_{A_2} \ : \ \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{2}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\left(\left(\frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1}{x_2}\right), \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) & \xleftarrow{\mu_2} & \left(\left(\frac{1}{x_1}, x_2\right), \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) & \xrightarrow{\mu_1} & \left(\left(x_1, \frac{x_2}{1+x_1}\right), \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
\downarrow \mu_1 & & & & \downarrow \mu_2 \\
\left(\left(\frac{x_1}{1+x_2}, \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2}\right), \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) & & & & \left(\left(\frac{x_1 x_2}{1+x_1+x_2}, \frac{1+x_1}{x_2}\right), \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)
\end{array}$$

- $\mathcal{X}$**-variables d'amas :** $\quad x_1 \ , \ x_2 \ , \ \frac{1+x_2}{x_1} \ , \ \frac{1+x_1}{x_2} \ , \ \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2}$

- On a : $D(x_1) + D(x_2) + D\left(\frac{1+x_2}{x_1}\right) + D\left(\frac{1+x_1}{x_2}\right) + D\left(\frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2}\right) = 0$

$$\mathcal{B} = W_{\mathcal{A}b} = W\left(x \ , \ y \ , \ \frac{y}{x} \ , \ \frac{1-y}{1-y} \ , \ \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$$

- **Matrice** $B = B_Q$ $\quad\longleftrightarrow\quad$ **Carquois** $Q = Q_B$

$$B_{A_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad\longleftrightarrow\quad Q_{A_2} \ : \ \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{2}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\left(\left(\frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1}{x_2}\right), \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) & \xleftarrow{\mu_2} & \left(\left(\frac{1}{x_1}, x_2\right), \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) & \xrightarrow{\mu_1} & \left(\left(x_1, \frac{x_2}{1+x_1}\right), \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
\downarrow \mu_1 & & & & \downarrow \mu_2 \\
\left(\left(\frac{x_1}{1+x_2}, \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2}\right), \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) & & & & \left(\left(\frac{x_1 x_2}{1+x_1+x_2}, \frac{1+x_1}{x_2}\right), \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right)
\end{array}$$

- $\mathcal{X}$**-variables d'amas :** $\quad x_1 \ , \ x_2 \ , \ \dfrac{1+x_2}{x_1} \ , \ \dfrac{1+x_1}{x_2} \ , \ \dfrac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2}$

- On a : $D(x_1) + D(x_2) + D\left(\dfrac{1+x_2}{x_1}\right) + D\left(\dfrac{1+x_1}{x_2}\right) + D\left(\dfrac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2}\right) = 0$

$$\mathcal{B} = W_{\mathcal{Ab}} = W\left(x \ , \ y \ , \ \frac{y}{x} \ , \ \frac{1-y}{1-y} \ , \ \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$$

$$\sim W\left(x_1 \ , \ x_2 \ , \ \frac{1+x_2}{x_1} \ , \ \frac{1+x_1}{x_2} \ , \ \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2}\right)$$

- **Matrice** $B = B_Q \quad \longleftrightarrow \quad$ **Carquois** $Q = Q_B$

$$B_{A_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad Q_{A_2} \ : \ \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{2}$$

$$\begin{tikzcd}
\left(\left(\frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1}{x_2}\right), \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) \arrow[d, "\mu_1"] & \left(\left(\frac{1}{x_1}, x_2\right), \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) \arrow[l, "\mu_2"'] \arrow[r, "\mu_1"] & \left(\left(x_1, \frac{x_2}{1+x_1}\right), \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \arrow[d, "\mu_2"] \\
\left(\left(\frac{x_1}{1+x_2}, \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}\right), \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) & & \left(\left(\frac{x_1x_2}{1+x_1+x_2}, \frac{1+x_1}{x_2}\right), \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right)
\end{tikzcd}$$

- **$\mathcal{X}$-variables d'amas :** $\quad x_1 \ , \ x_2 \ , \ \frac{1+x_2}{x_1} \ , \ \frac{1+x_1}{x_2} \ , \ \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}$

- On a : $D(x_1) + D(x_2) + D\left(\frac{1+x_2}{x_1}\right) + D\left(\frac{1+x_1}{x_2}\right) + D\left(\frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}\right) = 0$

$$\mathcal{B} = W_{\mathcal{Ab}} = W\left(x \ , \ y \ , \ \frac{y}{x} \ , \ \frac{1-y}{1-y} \ , \ \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$$

$$\sim W\left(x_1 \ , \ x_2 \ , \ \frac{1+x_2}{x_1} \ , \ \frac{1+x_1}{x_2} \ , \ \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}\right) \leftarrow \text{sur } \left(\mathbb{R}_{>0}\right)^2$$

Théorèmes : Soit $A = A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, B)$ algèbre amassée

- **Phén. de Laurent** : $a_i' = \frac{P(a)}{a_1^{d_1} \dots a_n^{d_m}}$ avec $\begin{cases} P(a) \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{a}] \\ (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$
- **Positivité** : $P(a) = \prod_{j=1}^{n} F_j(a)^{b'_{ij}},\ F_j(a) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[\boldsymbol{a}]$
- **Sign-coherence** : $\pm(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$

Théorèmes : Soit $A = A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, B)$ algèbre amassée

- **Phén. de Laurent** : $a_i' = \frac{P(a)}{a_1^{d_1} \dots a_n^{d_m}}$ avec $\begin{cases} P(a) \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{a}] \\ (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$
- **Positivité** : $P(a) = \prod_{j=1}^n F_j(a)^{b_{ij}'}$, $F_j(a) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[\boldsymbol{a}]$
- **Sign-coherence** : $\pm(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$

Corollaire : Soit x_i' une $\boldsymbol{\mathcal{X}}$-variable d'amas

- On a $x_i' = \frac{\prod_{j=1}^n F_j(x)^{b_{ij}'}}{x_1^{c_1} \dots x_n^{c_m}} \in \mathbb{Z}_{>0}\left[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^{-}1\right]$
- Elle est *positive* : on a $x_j' \in \mathbb{Q}_{\mathrm{sf}}\left(x_1, \dots, x_n\right)$

$$\Longrightarrow x_j' > 0 \quad \text{pour } \boldsymbol{x} \in \left(\mathbb{R}_{>0}\right)^n$$

Tissus amassés

- Graine initiale $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, Q) \rightsquigarrow$ algèbre A_Q
- Variable d'amas $x \in \mathbb{Q}_{\mathrm{sf}}(\boldsymbol{x}) \implies \mathcal{F}_x$ défini sur $\left(\mathbb{R}_{>0}\right)^n$

Tissus amassés

- Graine initiale $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, Q) \rightsquigarrow$ algèbre A_Q
- Variable d'amas $x \in \mathbb{Q}_{\mathrm{sf}}(\boldsymbol{x}) \implies \mathcal{F}_x$ défini sur $(\mathbb{R}_{>0})^n$
- **Déf. :** $\Sigma = \{x_\sigma\}$ ensemble fini
  de variables d'amas

Tissus amassés

- Graine initiale $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, Q) \rightsquigarrow$ algèbre A_Q
- Variable d'amas $x \in \mathbb{Q}_{\mathrm{sf}}(\boldsymbol{x}) \implies \mathcal{F}_x$ défini sur $(\mathbb{R}_{>0})^n$
- **Déf. :** $\Sigma = \{x_\sigma\}$ ensemble fini de variables d'amas $\rightsquigarrow$ **Tissu amassé** sur $(\mathbb{R}_{>0})^n$ $\boldsymbol{W}_\Sigma = \left(\mathcal{F}_{x_\sigma}\right)_{x_\sigma \in \Sigma}$

Tissus amassés

- Graine initiale $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, Q) \rightsquigarrow$ algèbre A_Q
- Variable d'amas $x \in \mathbb{Q}_{\mathrm{sf}}(\boldsymbol{x}) \Longrightarrow \mathcal{F}_x$ défini sur $\left(\mathbb{R}_{>0}\right)^n$
- **Déf.** : $\Sigma = \{x_\sigma\}$ ensemble fini de variables d'amas $\rightsquigarrow$ **Tissu amassé** sur $\left(\mathbb{R}_{>0}\right)^n$ $\boldsymbol{W}_\Sigma = \left(\mathcal{F}_{x_\sigma}\right)_{x_\sigma \in \Sigma}$

Théorème : [**Fomin-Zelevinsky**]

A_Q de **type fini** $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}var(A_Q)$ est fini $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{X}var(A_Q)$ est fini $\Longleftrightarrow$ $Q \sim_{\mathrm{mut}} \Delta$, Δ Dynkin

Tissus amassés

- Graine initiale $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, Q)$ $\rightsquigarrow$ algèbre A_Q
- Variable d'amas $x \in \mathbb{Q}_{\mathrm{sf}}(\boldsymbol{x})$ $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}_x$ défini sur $\left(\mathbb{R}_{>0}\right)^n$
- **Déf. :** $\Sigma = \{x_\sigma\}$ ensemble fini de variables d'amas $\rightsquigarrow$ **Tissu amassé** sur $\left(\mathbb{R}_{>0}\right)^n$ $\boldsymbol{W}_\Sigma = \left(\mathcal{F}_{x_\sigma}\right)_{x_\sigma \in \Sigma}$

Théorème : [**Fomin-Zelevinsky**]

A_Q de **type fini** $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}\mathit{var}(A_Q)$ est fini $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{X}\mathit{var}(A_Q)$ est fini $\Longleftrightarrow$ $Q \sim_{\mathrm{mut}} \Delta$, Δ Dynkin

- **$\mathcal{X}$-Tissus amassés** : $\mathcal{X}\boldsymbol{W}_\Delta$ $\quad \left(\Delta = A_n, B_n, C_n, D_n, E_k, F_4, G_2\right)$

$$\mathcal{X}\boldsymbol{W}_{A_2} \sim \boldsymbol{\mathcal{B}} = \boldsymbol{W}_{\mathcal{A}b}$$

- Tissu amassé $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{\Sigma}} = \left(\mathcal{F}_{x_\sigma} \right)_{x_\sigma \in \boldsymbol{\Sigma}}$ sur $\left(\mathbb{R}_{>0}\right)^n$

Est-ce que : $x_{\tilde{\sigma}} \neq \left(x_\sigma\right)^{\pm 1} \implies \mathcal{F}_{x_\sigma} \neq \mathcal{F}_{x_{\tilde{\sigma}}}$ *?*

- Tissu amassé $\boldsymbol{W}_\Sigma = \big(\mathcal{F}_{x_\sigma} \big)_{x_\sigma \in \Sigma}$ sur $\big(\mathbb{R}_{>0}\big)^n$

  Est-ce que : $\; x_{\tilde\sigma} \neq \big(x_\sigma\big)^{\pm 1} \implies \mathcal{F}_{x_\sigma} \neq \mathcal{F}_{x_{\tilde\sigma}}$ *?*

- EFA associée $\;\sum_{\sigma\in\Sigma} \boldsymbol{F}_\sigma\big(x_\sigma\big) = 0$

  Quelles sont les $c_\sigma, c_{\tilde\sigma} \in \mathbb{C}$ *t.q.* $\{\, x_\sigma = c_\sigma \,\}$ *et* $\{\, x_{\tilde\sigma} = c_{\tilde\sigma} \,\}$
  aient une composante irréductible en commun ?

- Tissu amassé $\boldsymbol{W}_\Sigma = \left(\mathcal{F}_{x_\sigma} \right)_{x_\sigma \in \Sigma}$ sur $\left(\mathbb{R}_{>0}\right)^n$

Est-ce que : $\quad x_{\tilde\sigma} \neq \left(x_\sigma\right)^{\pm 1} \implies \mathcal{F}_{x_\sigma} \neq \mathcal{F}_{x_{\tilde\sigma}}$ *?*

- EFA associée $\quad \sum_{\sigma\in\Sigma} \boldsymbol{F}_\sigma\left(x_\sigma\right) = 0$

Quelles sont les $c_\sigma, c_{\tilde\sigma} \in \mathbb{C}$ *t.q.* $\{\, x_\sigma = c_\sigma \,\}$ *et* $\{\, x_{\tilde\sigma} = c_{\tilde\sigma} \,\}$ *aient une composante irréductible en commun ?*

Conjecture : Soient x et $\widetilde{x}$ deux variables d'amas de A_Q

1. $\left[\begin{array}{l} \text{On a } dx \wedge d\widetilde{x} \equiv 0 \\ \textit{i.e. } \mathcal{F}_x = \mathcal{F}_{\widetilde{x}} \end{array} \right] \iff x = \widetilde{x} \quad \text{ou} \quad x = 1/\widetilde{x}$

2. $\left[\begin{array}{l} \text{Si } \mathcal{F}_x \neq \mathcal{F}_{\widetilde{x}} \text{ alors } \{\, x = c \,\} \\ \text{et } \{\, \widetilde{x} = \widetilde{c} \,\} \text{ ont une comp.} \\ \text{irréductible } \boldsymbol{H} \text{ en commun} \end{array} \right] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c, \widetilde{c} \in \{0, -1, \infty\} \text{ et} \\ \boldsymbol{H} = (\, F = 0 \,) \text{ avec } F \\ \text{un } F\text{-polynôme de } A_Q \end{array} \right.$

Tissus amassés

- **Conjecture 1 :** prouvée pour $\boldsymbol{\mathcal{X}W}_\Delta, \quad \forall\, \Delta$
- **Conjecture 2 :** vérifiée pour $\boldsymbol{\mathcal{X}W}_\Delta, \quad$ pour beaucoup de Δ

Tissus amassés

- **Conjecture 1 :** prouvée pour $\boldsymbol{\mathcal{X}W}_\Delta, \quad \forall\,\Delta$
- **Conjecture 2 :** vérifiée pour $\boldsymbol{\mathcal{X}W}_\Delta, \quad$ pour beaucoup de Δ

- **Exemples :**

  ▶ $\boldsymbol{\mathcal{X}W}_{A_n} \sim \boldsymbol{W}_{\mathcal{M}_{0,n+3}} = \boldsymbol{W}\left(\mathcal{M}_{0,n+3} \quad \overset{\binom{n+3}{n-1} \text{ oublis de } n-1 \text{ points}}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{\cdots\cdots}}} \quad \mathcal{M}_{0,4} \right)$

Tissus amassés

- **Conjecture 1 :** prouvée pour $\mathcal{X}\boldsymbol{W}_\Delta$, $\quad\forall\,\Delta$
- **Conjecture 2 :** vérifiée pour $\mathcal{X}\boldsymbol{W}_\Delta$, $\quad$ pour beaucoup de Δ

- **Exemples :**
  - $\mathcal{X}\boldsymbol{W}_{A_n} \sim \boldsymbol{W}_{\mathcal{M}_{0,n+3}} = \boldsymbol{W}\left(\mathcal{M}_{0,n+3} \xrightarrow[\cdots\cdots\longrightarrow]{\binom{n+3}{n-1} \textbf{ oublis de } n-1 \textbf{ points}} \mathcal{M}_{0,4} \right)$
  - $\mathcal{X}\boldsymbol{W}_{C_2} \sim \boldsymbol{W}_{\mathcal{N}}$ 6-tissu de Newman

$$(\mathcal{N}) \qquad 2\,\mathbf{L}\mathrm{i}_2(x) + 2\,\mathbf{L}\mathrm{i}_2(y) + 2\,\mathbf{L}\mathrm{i}_2(z) - \mathbf{L}\mathrm{i}_2\left(\frac{-xy}{z}\right) - \mathbf{L}\mathrm{i}_2\left(\frac{-yz}{x}\right) - \mathbf{L}\mathrm{i}_2\left(\frac{-xz}{y}\right) = 0$$

$$\left(1/x + 1/y + 1/z = 1 \right)$$

Y-systèmes

- **Y-systèmes** : Δ, Δ' = diagrammes de Dynkin de rang n et n'

$$Y_{i,i'}(t+1)Y_{i,i'}(t-1) = \frac{\prod_{j\neq i}\Big(1+Y_{j,i'}(t)\Big)^{-a_{ij}}}{\prod_{j'\neq i'}\Big(1+1/Y_{i,j'}(t)\Big)^{-a'_{i'j'}}} \qquad \begin{array}{l} i = 1,\ldots,n \\ i' = 1,\ldots,n' \\ t \in \mathbb{Z} \end{array}$$

- **Périodicité de Zamolodchikov** : [... F-Z, Volkov, Szenes, Keller,...]

$$Y_{\underline{\boldsymbol{i}}}\Big(t+2(h+h')\Big) = Y_{\underline{\boldsymbol{i}}}(t) \qquad \forall\, \underline{\boldsymbol{i}} = (i,i'),\ \forall\, t \in \mathbb{Z}$$

- **EFA dilogarithmique** : [..., Chapoton, Nakanishi, Inoue & al.]

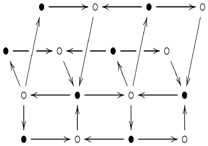
$$\Big(\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{\Delta'}}\Big) \qquad \sum_{(\underline{\boldsymbol{i}},t)\in S_{\Delta,\Delta'}} \boldsymbol{D}\left(\frac{Y_{\underline{\boldsymbol{i}}}(t)}{1+Y_{\underline{\boldsymbol{i}}}(t)}\right) = \frac{\pi^2}{6}\, N_{\Delta,\Delta'}$$

Y-tissus amassés

- Δ, Δ' : diagrammes de Dynkin simplement lacés (type ADE)
  $\rightsquigarrow$ carquois bipartite $\Delta \square \Delta'$

Y-tissus amassés

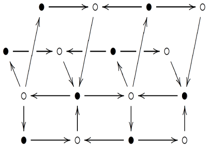
- Δ, Δ' : diagrammes de Dynkin simplement lacés (type ADE) $\rightsquigarrow$ carquois bipartite $\Delta\square\Delta'$:



$A_4\square D_4$

Y-tissus amassés

- Δ, Δ' : diagrammes de Dynkin simplement lacés (type ADE) $\rightsquigarrow$ carquois bipartite $\Delta\square\Delta'$:

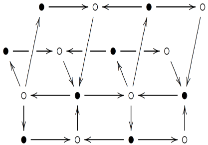


$A_4\square D_4$

- **Mutations** : $\boldsymbol{\mu}_\circ = \prod_{\circ\in\Delta\square\Delta'} \mu_\circ$ et $\boldsymbol{\mu}_\bullet = \prod_{\bullet\in\Delta\square\Delta'} \mu_\bullet$

Y-tissus amassés

- Δ, Δ' : diagrammes de Dynkin simplement lacés (type ADE)
  $\rightsquigarrow$ carquois bipartite $\Delta\square\Delta'$:



$A_4\square D_4$

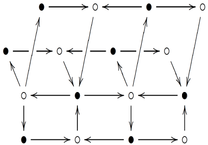
- **Mutations** : $\boldsymbol{\mu}_\circ = \prod_{\circ\in\Delta\square\Delta'} \mu_\circ$ et $\boldsymbol{\mu}_\bullet = \prod_{\bullet\in\Delta\square\Delta'} \mu_\bullet$

- **Z-Périodicité** : $\boldsymbol{\mu}_\square = \boldsymbol{\mu}_\circ\, \boldsymbol{\mu}_\bullet$ est une période pour $A_{\Delta\square\Delta'}$ *i.e.* :

$$\left(\boldsymbol{\mu}_\square\right)^{h+h'}\left(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{x}\,,\,\Delta\square\Delta'\right) = \left(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{x}\,,\,\Delta\square\Delta'\right)$$

Y-tissus amassés

- Δ, Δ' : diagrammes de Dynkin simplement lacés (type ADE) $\rightsquigarrow$ carquois bipartite $\Delta\square\Delta'$:



$A_4\square D_4$

- **Mutations** : $\boldsymbol{\mu}_\circ = \prod_{\circ\in\Delta\square\Delta'} \mu_\circ$ et $\boldsymbol{\mu}_\bullet = \prod_{\bullet\in\Delta\square\Delta'} \mu_\bullet$

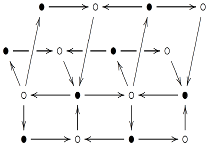
- **Z-Périodicité** : $\boldsymbol{\mu}_\square = \boldsymbol{\mu}_\circ\,\boldsymbol{\mu}_\bullet$ est une période pour $\mathcal{A}_{\Delta\square\Delta'}$ *i.e.* :

$$\Big(\boldsymbol{\mu}_\square\Big)^{h+h'}\Big(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{x}\,,\,\Delta\square\Delta'\Big) = \Big(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{x}\,,\,\Delta\square\Delta'\Big)$$

- **Définition** : pour $\ell \geq 0$ $\quad \boldsymbol{x}_\square^\ell = \big(\boldsymbol{\mu}_\square\big)^\ell(\boldsymbol{x}) = \big(\boldsymbol{x}_{\square,i,i'}^\ell\big)_{\substack{i=1,\ldots,n\\ i'=1,\ldots,n'}}$

Y-tissus amassés

- Δ, Δ' : diagrammes de Dynkin simplement lacés (type ADE) $\rightsquigarrow$ carquois bipartite $\Delta\square\Delta'$:



$A_4\square D_4$

- **Mutations** : $\boldsymbol{\mu}_\circ = \prod_{\circ\in\Delta\square\Delta'} \mu_\circ$ et $\boldsymbol{\mu}_\bullet = \prod_{\bullet\in\Delta\square\Delta'} \mu_\bullet$

- **Z-Périodicité** : $\boldsymbol{\mu}_\square = \boldsymbol{\mu}_\circ\, \boldsymbol{\mu}_\bullet$ est une période pour $A_{\Delta\square\Delta'}$ *i.e.* :

$$\Big(\boldsymbol{\mu}_\square\Big)^{h+h'}\Big(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{x}\,,\,\Delta\square\Delta'\Big) = \Big(\boldsymbol{a}\,,\,\boldsymbol{x}\,,\,\Delta\square\Delta'\Big)$$

- **Définition** : pour $\ell \geq 0$ $\boldsymbol{x}^\ell_\square = \big(\boldsymbol{\mu}_\square\big)^\ell(\boldsymbol{x}) = \big(\boldsymbol{x}^\ell_{\square,i,i'}\big)_{\substack{i=1,\ldots,n\\ i'=1,\ldots,n'}}$

  Y-tissu amassé $\boldsymbol{YW_{\Delta,\Delta'}} = \boldsymbol{W}\left(\boldsymbol{x}^\ell_{\square,i,i'}\ \middle|\ \begin{array}{l} i=1,\ldots,n\\ i'=1,\ldots,n'\\ \ell=1,\ldots,h+h'\end{array}\right)$

- $(\Delta, \Delta') \rightsquigarrow \boldsymbol{YW}_{\Delta,\Delta'}$ sur $\mathbb{C}^{nn'} \rightsquigarrow$ EFA $\sum_{(\boldsymbol{i},\ell)\in S_{\Delta,\Delta'}} \boldsymbol{F}_{\underline{\boldsymbol{i}}}^{\ell}\Big(\boldsymbol{x}_{\Box,\underline{\boldsymbol{i}}}^{\ell}\Big) = 0$

- $(\Delta,\Delta') \rightsquigarrow \boldsymbol{YW}_{\Delta,\Delta'}$ sur $\mathbb{C}^{nn'} \rightsquigarrow$ EFA $\sum_{(\boldsymbol{i},\ell)\in S_{\Delta,\Delta'}} F_{\underline{\boldsymbol{i}}}^{\ell}\Big(\boldsymbol{x}_{\square,\underline{\boldsymbol{i}}}^{\ell}\Big) = 0$

Conjecture $CY_{\Delta,\Delta'}$:

1. $\boldsymbol{YW}_{\Delta,\Delta'} =\ d_{\Delta,\Delta'}$-tissu avec $\ d_{\Delta,\Delta'} = n\,n'(h+h')/2$
2. $\boldsymbol{\rho}^{\bullet}\Big(\boldsymbol{YW}_{\Delta,\Delta'}\Big) = \boldsymbol{\rho}^{\leq 3}\Big(\boldsymbol{YW}_{\Delta,\Delta'}\Big) = \Big(d_{\Delta,\Delta'} - n\,n'\,,\ n\,n'\,,\ 1\Big)$
3. La ramification de $\boldsymbol{YW}_{\Delta,\Delta'}$ est $\{0,-1,\infty\}$

   Les feuilles communes de $\boldsymbol{YW}_{\Delta,\Delta'}$ sont les hypersurfaces découpées par les F-polynômes des Y-variables $\boldsymbol{x}_{\square,\underline{\boldsymbol{i}}}^{\ell}$
4. $\mathcal{A}(\boldsymbol{YW}_{\Delta,\Delta'}) = \mathbf{RALog}(\boldsymbol{YW}_{\Delta,\Delta'}) \oplus \mathbf{RADilog}(\boldsymbol{YW}_{\Delta,\Delta'})$:

   $\mathbf{RALog} = \Big\langle RA_{\underline{\boldsymbol{i}}}(t) \;\Big|\; (\underline{\boldsymbol{i}},t) \in S_{\Delta,\Delta'} \Big\rangle \quad \mathbf{RADilog} = \Big\langle \boldsymbol{D}_{\Delta,\Delta'} \Big\rangle$
5. $\boldsymbol{YW}_{\Delta,\Delta'}$ est de rang maximal : $\mathbf{rg}\Big(\boldsymbol{YW}_{\Delta,\Delta'}\Big) = d_{\Delta,\Delta'} + 1$

- $\boldsymbol{CY_{A_n,A_1}}$ est vérifiée pour $n \geq 2$
- $\boldsymbol{CY_{D_n,A_1}}$ n'est pas vérifiée pour n petit $\Big(\forall\, n \geq 4$? $\Big)$

  $\boldsymbol{CY_{E_k,A_1}}$ n'est pas vérifiée pour $k = 6, 7, 8$

- $\boldsymbol{CY_{A_n,A_1}}$ est vérifiée pour $n \geq 2$

- $\boldsymbol{CY_{D_n,A_1}}$ n'est pas vérifiée pour n petit $\left(\forall\, n \geq 4 \text{ ?} \right)$

  $\boldsymbol{CY_{E_k,A_1}}$ n'est pas vérifiée pour $k = 6, 7, 8$

- $\boldsymbol{CY_{\Delta,A_n}}$ vérifiée pour tout Δ si $n \geq 2$ **?** $\left(\text{ même } \Delta = BCFG\,\textbf{?} \right)$

- $\boldsymbol{CY_{A_n,A_1}}$ est vérifiée pour $n \geq 2$

- $\boldsymbol{CY_{D_n,A_1}}$ n'est pas vérifiée pour n petit $\Big(\forall\, n \geq 4 \text{ ?} \Big)$

  $\boldsymbol{CY_{E_k,A_1}}$ n'est pas vérifiée pour $k = 6, 7, 8$

- $\boldsymbol{CY_{\Delta,A_n}}$ vérifiée pour tout Δ si $n \geq 2$ **?** $\Big($ même $\Delta = BCFG$ **?** $\Big)$

- **Conjecture tissu $\boldsymbol{YW_{B_n}}$** $\Big($ similaire pour $\boldsymbol{YW}_{C_n}$ $\Big)$:
  - $\rho^\bullet\Big(\boldsymbol{YW}_{B_n} \Big) = \Big(n^2 ,\, n(n+1)/2 ,\, 2 \Big)$
  - $\textbf{RADilog}\Big(\boldsymbol{YW}_{B_n}\Big) = \begin{cases} \Big\langle\, \boldsymbol{D}_{B_n} \,\Big\rangle & n \text{ impair} \\ \Big\langle\, \boldsymbol{D}_{B_n} \,,\, \boldsymbol{S}_{B_n} \,\Big\rangle & n \text{ pair} \end{cases}$
  - $\exists$ RA non polylogarithmique : $\sum_{\substack{\underline{i},\ell \\ long.}} \boldsymbol{A}\Big(\boldsymbol{x}^{\ell}_{\boldsymbol{B_n,\underline{i}}}\Big) = n \cdot \frac{\pi}{2}$

Exemple : le tissu amassé de type $B_2 = C_2$

- $\boldsymbol{\mathcal{X}W}_{B_2} = \boldsymbol{YW}_{B_2} = \boldsymbol{W}\left(\boldsymbol{x}\,,\ \boldsymbol{y}\,,\ \frac{(1+y)^2}{x}\,,\ \frac{1+x}{y}\,,\ \frac{(1+x+y)^2}{xy^2}\,,\ \frac{x+(1+y)^2}{xy} \right)$

Exemple : le tissu amassé de type $B_2 = C_2$

- $\mathcal{X}\boldsymbol{W}_{B_2} = \boldsymbol{YW}_{B_2} = \boldsymbol{W}\left(\boldsymbol{x}\,,\ \boldsymbol{y}\,,\ \frac{(1+y)^2}{x}\,,\ \frac{1+x}{y}\,,\ \frac{(1+x+y)^2}{xy^2}\,,\ \frac{x+(1+y)^2}{xy} \right)$
- EFA : $\boldsymbol{F_1}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{F_2}(\boldsymbol{y}) + \cdots + \boldsymbol{F_5}\left(\frac{(1+x+y)^2}{xy^2}\right) + \boldsymbol{F_6}\left(\frac{x+(1+y)^2}{xy}\right) = 0$

Exemple : le tissu amassé de type $B_2 = C_2$

- $\mathcal{X}\boldsymbol{W}_{B_2} = \boldsymbol{YW}_{B_2} = \boldsymbol{W}\left(\boldsymbol{x}\, ,\, \boldsymbol{y}\, ,\, \frac{(1+y)^2}{x}\, ,\, \frac{1+x}{y}\, ,\, \frac{(1+x+y)^2}{xy^2}\, ,\, \frac{x+(1+y)^2}{xy} \right)$

- EFA : $\boldsymbol{F_1(x) + F_2(y) + \cdots + F_5}\Big(\frac{(1+x+y)^2}{xy^2}\Big) + \boldsymbol{F_6}\Big(\frac{x+(1+y)^2}{xy}\Big) = 0$

- Il y a six RA logarithmiques et deux RA dilogarithmiques :

$$\big(\boldsymbol{RA\mathcal{D}_{01}}\big) \qquad \big(\boldsymbol{L_{01}}\, ,\, -2\boldsymbol{L_{10}}\, ,\, \boldsymbol{L_{01}}\, ,\, -2\boldsymbol{L_{10}}\, ,\, \boldsymbol{L_{01}}\, ,\, -2\boldsymbol{L_{10}}\big)$$

$$\big(\boldsymbol{RA\mathcal{D}_{10}}\big) \qquad \big(\boldsymbol{L_{10}}\, ,\, -2\boldsymbol{L_{01}}\, ,\, \boldsymbol{L_{10}}\, ,\, -2\boldsymbol{L_{01}}\, ,\, \boldsymbol{L_{10}}\, ,\, -2\boldsymbol{L_{01}}\big)$$

Exemple : le tissu amassé de type $B_2 = C_2$

- $\boldsymbol{\mathcal{X}W_{B_2}} = \boldsymbol{YW_{B_2}} = \boldsymbol{W}\left(\boldsymbol{x}\,,\, \boldsymbol{y}\,,\, \frac{\boldsymbol{(1+y)^2}}{\boldsymbol{x}}\,,\, \frac{\boldsymbol{1+x}}{\boldsymbol{y}}\,,\, \frac{\boldsymbol{(1+x+y)^2}}{\boldsymbol{xy^2}}\,,\, \frac{\boldsymbol{x+(1+y)^2}}{\boldsymbol{xy}} \right)$

- EFA : $\boldsymbol{F_1(x) + F_2(y) + \cdots + F_5}\left(\frac{\boldsymbol{(1+x+y)^2}}{\boldsymbol{xy^2}}\right) + \boldsymbol{F_6}\left(\frac{\boldsymbol{x+(1+y)^2}}{\boldsymbol{xy}}\right) = 0$

- Il y a six RA logarithmiques et deux RA dilogarithmiques :

$$\left(\boldsymbol{RA\mathcal{D}_{01}}\right) \qquad \left(\boldsymbol{L_{01}}\,,\, -2\boldsymbol{L_{10}}\,,\, \boldsymbol{L_{01}}\,,\, -2\boldsymbol{L_{10}}\,,\, \boldsymbol{L_{01}}\,,\, -2\boldsymbol{L_{10}}\right)$$

$$\left(\boldsymbol{RA\mathcal{D}_{10}}\right) \qquad \left(\boldsymbol{L_{10}}\,,\, -2\boldsymbol{L_{01}}\,,\, \boldsymbol{L_{10}}\,,\, -2\boldsymbol{L_{01}}\,,\, \boldsymbol{L_{10}}\,,\, -2\boldsymbol{L_{01}}\right)$$

- Il y a deux RA non polylogarithmiques :

$$(\boldsymbol{C_2}) \quad \mathbf{1} = \boldsymbol{J}(\mathbf{y}) + \boldsymbol{J}\left(\frac{\mathbf{1+x}}{\mathbf{y}}\right) + \boldsymbol{J}\left(\frac{\mathbf{x+(1+y)^2}}{\mathbf{xy}}\right) \qquad \boldsymbol{J}(u) = 1/(1+u)$$

$$(\boldsymbol{B_2}) \quad \boldsymbol{\pi = A}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}\left(\frac{\boldsymbol{(1+y)^2}}{\boldsymbol{x}}\right) + \boldsymbol{A}\left(\frac{\boldsymbol{(1+x+y)^2}}{\boldsymbol{xy^2}}\right) \quad \boldsymbol{A}(u) = \mathrm{Arctan}\left(\sqrt{u}\right)$$

Variétés amassées

Variétés amassées

- Graine initiale $\mathcal{G}_0 = (\boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{x_0}, B_0) \quad \rightsquigarrow \quad$ algèbre $A = A(\mathcal{G}_0)$

Variétés amassées

- Graine initiale $\mathcal{G}_0 = (\boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{x_0}, B_0) \quad \rightsquigarrow \quad$ algèbre $A = A(\mathcal{G}_0)$
- Pour toute graine $\mathcal{G} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, B) \in |\mathcal{G}_0|$:

Variétés amassées

- Graine initiale $\mathcal{G}_0 = (\boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{x_0}, B_0) \quad \rightsquigarrow \quad$ algèbre $A = A(\mathcal{G}_0)$

- Pour toute graine $\mathcal{G} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, B) \in |\mathcal{G}_0|$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}[\boldsymbol{a}^{\pm 1}] =: \mathcal{A}\mathbb{T}_{\mathcal{G}} & \xrightarrow{\quad \boldsymbol{p} \quad} & \mathcal{X}\mathbb{T}_{\mathcal{G}} := \mathrm{Spec}[\boldsymbol{x}^{\pm 1}] \simeq (\mathbb{C}^*)^n \\ (a_i)_{i=1}^n & \longrightarrow & \Big(\prod_{j=1}^n a_j^{b_{ij}} \Big)_{i=1}^n \end{array}$$

Variétés amassées

- Graine initiale $\mathcal{G}_0 = (\boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{x_0}, B_0) \quad \rightsquigarrow \quad$ algèbre $A = A(\mathcal{G}_0)$
- Pour toute graine $\mathcal{G} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, B) \in |\mathcal{G}_0|$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}[\boldsymbol{a}^{\pm 1}] =: \mathcal{A}\mathbb{T}_{\mathcal{G}} & \xrightarrow{\ \ p\ \ } & \mathcal{X}\mathbb{T}_{\mathcal{G}} := \mathrm{Spec}[\boldsymbol{x}^{\pm 1}] \simeq (\mathbb{C}^*)^n \\ (a_i)_{i=1}^n & \longrightarrow & \left(\prod_{j=1}^n a_j^{b_{ij}}\right)_{i=1}^n \end{array}$$

- **Variétés amassées** :

$$_{\mathcal{A}\text{-mut}}\backslash\left(\bigcup_{\mathcal{G}\in|\mathcal{G}_0|} \mathcal{A}\mathbb{T}_{\mathcal{G}}\right) = \mathcal{A}_A \xrightarrow{\ \ p\ \ } \mathcal{X}_A = \left(\bigcup_{\mathcal{G}\in|\mathcal{G}_0|} \mathcal{X}\mathbb{T}_{\mathcal{G}}\right)\Big/_{\mathcal{X}\text{-mut}}$$

Variétés amassées

- Graine initiale $\mathcal{G}_0 = (\boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{x_0}, B_0) \quad \rightsquigarrow \quad$ algèbre $A = A(\mathcal{G}_0)$

- Pour toute graine $\mathcal{G} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, B) \in |\mathcal{G}_0|$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}[\boldsymbol{a}^{\pm 1}] =: \mathcal{A}\mathbb{T}_{\mathcal{G}} & \xrightarrow{\quad p \quad} & \mathcal{X}\mathbb{T}_{\mathcal{G}} := \mathrm{Spec}[\boldsymbol{x}^{\pm 1}] \simeq (\mathbb{C}^*)^n \\ (a_i)_{i=1}^n & \longrightarrow & \left(\prod_{j=1}^n a_j^{b_{ij}} \right)_{i=1}^n \end{array}$$

- **Variétés amassées** :

$$_{\mathcal{A}\text{-mut}}\backslash\left(\bigcup_{\mathcal{G} \in |\mathcal{G}_0|} \mathcal{A}\mathbb{T}_{\mathcal{G}} \right) = \mathcal{A}_A \xrightarrow{\quad p \quad} \mathcal{X}_A = \left(\bigcup_{\mathcal{G} \in |\mathcal{G}_0|} \mathcal{X}\mathbb{T}_{\mathcal{G}} \right)\Big/_{\mathcal{X}\text{-mut}}$$

- **Secondary cluster variety** :
  - $\mathcal{U}_A = \mathbf{Im}(p) \subset \mathcal{X}_A$
  - lisse, rationnelle, positive
  - $\dim(\mathcal{U}_A) = \mathbf{rg}(B_0)$

Variétés amassées

- Graine initiale $\mathcal{G}_0 = (\boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{x_0}, B_0) \rightsquigarrow$ algèbre $A = A(\mathcal{G}_0)$

- Pour toute graine $\mathcal{G} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, B) \in |\mathcal{G}_0|$:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Spec}[\boldsymbol{a}^{\pm 1}] =: \mathcal{A}\mathbb{T}_{\mathcal{G}} & \xrightarrow{p} & \mathcal{X}\mathbb{T}_{\mathcal{G}} := \mathrm{Spec}[\boldsymbol{x}^{\pm 1}] \simeq (\mathbb{C}^*)^n \\ (a_i)_{i=1}^n & \longrightarrow & \left(\prod_{j=1}^n a_j^{b_{ij}} \right)_{i=1}^n \end{array}$$

- **Variétés amassées** :

$$_{\mathcal{A}\text{-mut}}\backslash\Big(\bigcup_{\mathcal{G}\in|\mathcal{G}_0|} \mathcal{A}\mathbb{T}_{\mathcal{G}} \Big) = \mathcal{A}_A \xrightarrow{p} \mathcal{X}_A = \Big(\bigcup_{\mathcal{G}\in|\mathcal{G}_0|} \mathcal{X}\mathbb{T}_{\mathcal{G}} \Big)\Big/_{\mathcal{X}\text{-mut}}$$

- **Secondary cluster variety** :
  - $\mathcal{U}_A = \mathbf{Im}(p) \subset \mathcal{X}_A$
  - lisse, rationnelle, positive
  - $\dim(\mathcal{U}_A) = \mathbf{rg}(B_0)$

- **Exemple** : $\mathcal{X}_{A_n} \simeq \mathcal{M}_{0,n+3}$

Tissus amassés II

Tissus amassés II

- **Exemple** : $\mathcal{U}_{A_2} = \mathcal{X}_{A_2} \simeq \mathcal{M}_{0,5}$ mais $\mathcal{U}_{A_3} \subsetneq \mathcal{X}_{A_3} \simeq \mathcal{M}_{0,6}$

Tissus amassés II

- **Exemple** : $\boldsymbol{\mathcal{U}}_{A_2} = \boldsymbol{\mathcal{X}}_{A_2} \simeq \mathcal{M}_{0,5}$ mais $\boldsymbol{\mathcal{U}}_{A_3} \subsetneq \boldsymbol{\mathcal{X}}_{A_3} \simeq \mathcal{M}_{0,6}$

- **Définition** : si $p : \boldsymbol{\mathcal{A}}_\Delta \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{X}}_\Delta$ n'est pas surjective :

$$\boldsymbol{p\mathcal{X}W_\Delta} = \boldsymbol{\mathcal{X}W}_\Delta\Big|_{\mathbf{Im}(p)} \qquad \Big(\text{ tissu sur } \mathcal{U}_\Delta \Big)$$

Tissus amassés II

- **Exemple** : $\mathcal{U}_{A_2} = \mathcal{X}_{A_2} \simeq \mathcal{M}_{0,5}$ mais $\mathcal{U}_{A_3} \subsetneq \mathcal{X}_{A_3} \simeq \mathcal{M}_{0,6}$

- **Définition** : si $p : \mathcal{A}_\Delta \longrightarrow \mathcal{X}_\Delta$ n'est pas surjective :

$$p\mathcal{X}W_\Delta = \mathcal{X}W_\Delta\big|_{\mathrm{Im}(p)} \qquad \Big(\text{ tissu sur } \mathcal{U}_\Delta\Big)$$

- **Exemple** :

$$p\mathcal{X}W_{A_3} = W\left(x_1\,,\, x_2\,,\, \frac{1+x_2}{x_1}\,,\, \frac{1+x_1}{x_2}\,,\, \frac{(1+x_1)^2}{x_2}\,,\, \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}\,,\right.$$
$$\left. \frac{1+x_1+x_2}{x_1(1+x_1)}\,,\, \frac{1+2x_1+x_2+x_1^2}{x_1x_2}\,,\, \frac{(1+x_1+x_2)^2}{x_1^2x_2} \right)$$

Tissus amassés II

- **Exemple** : $\mathcal{U}_{A_2} = \mathcal{X}_{A_2} \simeq \mathcal{M}_{0,5}$ mais $\mathcal{U}_{A_3} \subsetneq \mathcal{X}_{A_3} \simeq \mathcal{M}_{0,6}$

- **Définition** : si $p : \mathcal{A}_\Delta \longrightarrow \mathcal{X}_\Delta$ n'est pas surjective :

$$p\mathcal{X}W_\Delta = \mathcal{X}W_\Delta\big|_{\mathrm{Im}(p)} \qquad \Big(\text{ tissu sur } \mathcal{U}_\Delta \Big)$$

- **Exemple** :

$$p\mathcal{X}W_{A_3} = W\bigg(x_1\,,\, x_2\,,\, \frac{1+x_2}{x_1}\,,\, \frac{1+x_1}{x_2}\,,\, \frac{(1+x_1)^2}{x_2}\,,\, \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}\,, \frac{1+x_1+x_2}{x_1(1+x_1)}\,,\, \frac{1+2x_1+x_2+x_1^2}{x_1x_2}\,,\, \frac{(1+x_1+x_2)^2}{x_1^2x_2}\bigg)$$

$$W_{\mathcal{SK}} = W\bigg(x\,,\, y\,,\, xy\,,\, \frac{x}{y}\,,\, \frac{1-x}{1-y}\,,\, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\,,\, -\frac{x(1-y)}{(1-x)}\,,\, -\frac{(1-y)}{y(1-x)}\,,\, \frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\bigg)$$

Tissus amassés II

- **Exemple** : $\mathcal{U}_{A_2} = \mathcal{X}_{A_2} \simeq \mathcal{M}_{0,5}$ mais $\mathcal{U}_{A_3} \subsetneq \mathcal{X}_{A_3} \simeq \mathcal{M}_{0,6}$

- **Définition** : si $p : \mathcal{A}_\Delta \longrightarrow \mathcal{X}_\Delta$ n'est pas surjective :

$$p\mathcal{X}W_\Delta = \mathcal{X}W_\Delta\big|_{\mathrm{Im}(p)} \qquad \Big(\text{ tissu sur } \mathcal{U}_\Delta\Big)$$

- **Exemple** :

$$p\mathcal{X}W_{A_3} = W\bigg(x_1\,,\,x_2\,,\,\frac{1+x_2}{x_1}\,,\,\frac{1+x_1}{x_2}\,,\,\frac{(1+x_1)^2}{x_2}\,,\,\frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}\,,\,\frac{1+x_1+x_2}{x_1(1+x_1)}\,,\,\frac{1+2x_1+x_2+x_1^2}{x_1x_2}\,,\,\frac{(1+x_1+x_2)^2}{x_1^2x_2}\bigg)$$

$$W_{\mathcal{SK}} = W\bigg(x\,,\,y\,,\,xy\,,\,\frac{x}{y}\,,\,\frac{1-x}{1-y}\,,\,\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\,,\,-\frac{x(1-y)}{(1-x)}\,,\,-\frac{(1-y)}{y(1-x)}\,,\,\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\bigg)$$

- On a $p\mathcal{X}W_{A_3} \sim W_{\mathcal{SK}}$

Théorème : [P. (2018)]

Modulo des transformations birationnelles explicites :

- [Rang 2] : $\boldsymbol{W_{\mathcal{A}b}} \simeq \boldsymbol{\mathcal{X}W_{A_2}}$

  $\boldsymbol{W_{\mathcal{N}}} \simeq \boldsymbol{\mathcal{X}W_{C_2}}$
- [Rang 3] : $\boldsymbol{W_{\mathcal{SK}}} \simeq \boldsymbol{p\mathcal{X}W_{A_3}}$
- [Rang 4] : $\boldsymbol{W_{\mathcal{K}_4}} \simeq \boldsymbol{p\mathcal{X}W_{D_4}}$

Théorème : [P. (2018)]

Modulo des transformations birationnelles explicites :

- [Rang 2] : $\boldsymbol{W_{\mathcal{A}b}} \simeq \boldsymbol{\mathcal{X}W_{A_2}}$

  $\boldsymbol{W_{\mathcal{N}}} \simeq \boldsymbol{\mathcal{X}W_{C_2}}$
- [Rang 3] : $\boldsymbol{W_{\mathcal{SK}}} \simeq \boldsymbol{p\mathcal{X}W_{A_3}}$
- [Rang 4] : $\boldsymbol{W_{\mathcal{K}_4}} \simeq \boldsymbol{p\mathcal{X}W_{D_4}}$

- *On a des interprétations en termes d'algèbres amassées de la plupart des EF classiques des polylogs:* $(\mathcal{A}b), (\mathcal{N}), (\mathcal{SK}), (\mathcal{K}_4)$

- *Quid des autres :* $(\mathcal{K}_5)$, $(\mathcal{G}on)$ *?*

Des questions

Des questions

- Notions de quantification / catégorification d'une algèbre amassée

$\rightsquigarrow$ notion de relation dilogarithmique quantique *e.g.*

$$\mathbb{E}(y_1)\,\mathbb{E}(y_2) = \mathbb{E}(y_2)\,E\left(q^{-1/2}y_1y_2\right)\mathbb{E}(y_1)$$

(mot clef : *"Invariant de Donaldson-Thomas"*)

Des questions

- Notions de quantification / catégorification d'une algèbre amassée

$\rightsquigarrow$ notion de relation dilogarithmique quantique *e.g.*

$$\mathbb{E}(y_1)\,\mathbb{E}(y_2) = \mathbb{E}(y_2)\,E\Big(q^{-1/2}y_1y_2\Big)\,\mathbb{E}(y_1)$$

(mot clef : *"Invariant de Donaldson-Thomas"*)

Généralisation à une *RA amassée* $\sum_\sigma \boldsymbol{F}_\sigma(x_\sigma) = 0$ logarithmique ?

dilogarithmique générale ?

polylogarithmique générale ?

Des questions

- Notions de quantification / catégorification d'une algèbre amassée

  $\rightsquigarrow$ notion de relation dilogarithmique quantique *e.g.*

$$\mathbb{E}(y_1)\,\mathbb{E}(y_2) = \mathbb{E}(y_2)\,E\Big(q^{-1/2}y_1y_2\Big)\,\mathbb{E}(y_1)$$

$\Big($ mot clef : *"Invariant de Donaldson-Thomas"* $\Big)$

Généralisation à une *RA amassée* $\sum_\sigma \boldsymbol{F}_\sigma(x_\sigma) = 0$ logarithmique ?

dilogarithmique générale ?

polylogarithmique générale ?

- Carquois bipartite Z-périodiques $\big[$Galashin-Pylyavskyy$\big]$ et tissus

Des questions

- Notions de quantification / catégorification d'une algèbre amassée

  $\rightsquigarrow$ notion de relation dilogarithmique quantique *e.g.*

$$\mathbb{E}(y_1)\,\mathbb{E}(y_2) = \mathbb{E}(y_2)\,E\Big(q^{-1/2}y_1y_2\Big)\,\mathbb{E}(y_1)$$

$\Big($ mot clef : *"Invariant de Donaldson-Thomas"* $\Big)$

Généralisation à une *RA amassée* $\sum_\sigma \boldsymbol{F}_\sigma(x_\sigma) = 0$ logarithmique ?
dilogarithmique générale ?
polylogarithmique générale ?

- Carquois bipartite Z-périodiques [Galashin-Pylyavskyy] et tissus

- Sous-variétés amassées de $\boldsymbol{\mathcal{X}}_A$ et tissus ?

Merci de votre attention

L'invariant ρ

L'invariant ρ

- $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{U_1}, \ldots, \boldsymbol{U_d})$ tissu sur $\Omega \subset \mathbb{C}^n = V \quad \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{U_i}) = 0$

L'invariant ρ

- $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{U_1}, \ldots, \boldsymbol{U_d})$ tissu sur $\Omega \subset \mathbb{C}^n = V$ $\rightsquigarrow \sum_{i=1}^d \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{U_i}) = 0$

- Pour $\omega \in \Omega$: – modulo $T^*_\omega\Omega \simeq V^*$, on a $d(\boldsymbol{U_i})_\omega = \boldsymbol{\ell_i} \in V^*$

  $$- \ \mathbf{W}_\omega = J^1_\omega(\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{W}\Big(\boldsymbol{\ell_1}, \ldots, \boldsymbol{\ell_d}\Big)$$

L'invariant ρ

- $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{U_1}, \ldots, \boldsymbol{U_d})$ tissu sur $\Omega \subset \mathbb{C}^n = V$ $\rightsquigarrow \sum_{i=1}^d \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{U_i}) = 0$

- Pour $\omega \in \Omega$: – modulo $T^*_\omega \Omega \simeq V^*$, on a $d(\boldsymbol{U_i})_\omega = \boldsymbol{\ell_i} \in V^*$

  $$- \ \mathbf{W}_\omega = J^1_\omega(\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{W}\Big(\boldsymbol{\ell_1}, \ldots, \boldsymbol{\ell_d}\Big)$$

- Pour $\sigma \geq 0$: $\boldsymbol{\rho^\sigma_\omega(W)} = \dim \boldsymbol{\mathcal{A}}^\sigma(\mathbf{W}_\omega)$ avec

  $$\boldsymbol{\mathcal{A}}^\sigma(\mathbf{W}_\omega) = \left\{ (c_i)_{i=1}^d \in \mathbb{C}^d \ \Big| \ \sum_{i=1}^d c_i (\boldsymbol{\ell_i})^\sigma = 0 \text{ dans } \mathrm{Sym}^\sigma(V^*) \right\}$$

L'invariant ρ

- $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{U_1}, \ldots, \boldsymbol{U_d})$ tissu sur $\Omega \subset \mathbb{C}^n = V$ $\rightsquigarrow \sum_{i=1}^d \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{U_i}) = 0$

- Pour $\omega \in \Omega$: – modulo $T^*_\omega\Omega \simeq V^*$, on a $d(\boldsymbol{U_i})_\omega = \boldsymbol{\ell_i} \in V^*$

  $$- \ \mathbf{W}_\omega = J^1_\omega(\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{W}\Big(\boldsymbol{\ell_1}, \ldots, \boldsymbol{\ell_d}\Big)$$

- Pour $\sigma \geq 0$: $\boldsymbol{\rho^\sigma_\omega(W)} = \dim \boldsymbol{\mathcal{A}}^\sigma(\mathbf{W}_\omega)$ avec

  $$\boldsymbol{\mathcal{A}}^\sigma(\mathbf{W}_\omega) = \left\{ (c_i)_{i=1}^d \in \mathbb{C}^d \;\middle|\; \sum_{i=1}^d c_i(\boldsymbol{\ell_i})^\sigma = 0 \text{ dans } \mathrm{Sym}^\sigma(V^*) \right\}$$

- **<u>Définition</u>** : $\boldsymbol{\rho}^\sigma(\boldsymbol{W}) = \rho^\sigma_\omega(\boldsymbol{W})$ pour ω générique dans Ω

L'invariant ρ

- $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{U_1}, \ldots, \boldsymbol{U_d})$ tissu sur $\Omega \subset \mathbb{C}^n = V \quad \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{U_i}) = 0$

- Pour $\omega \in \Omega$: – modulo $T^*_\omega\Omega \simeq V^*$, on a $d(\boldsymbol{U_i})_\omega = \boldsymbol{\ell_i} \in V^*$

$$- \ \mathbf{W}_\omega = J^1_\omega(\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{W}\Big(\boldsymbol{\ell_1}, \ldots, \boldsymbol{\ell_d}\Big)$$

- Pour $\sigma \geq 0$: $\boldsymbol{\rho^\sigma_\omega(W)} = \dim \boldsymbol{\mathcal{A}}^\sigma(\mathbf{W}_\omega)$ avec

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^\sigma(\mathbf{W}_\omega) = \Big\{ (c_i)_{i=1}^d \in \mathbb{C}^d \ \Big| \ \textstyle\sum_{i=1}^d c_i (\boldsymbol{\ell_i})^\sigma = 0 \text{ dans } \mathrm{Sym}^\sigma(V^*) \Big\}$$

- **Définition** : $\boldsymbol{\rho}^\sigma(\boldsymbol{W}) = \rho^\sigma_\omega(\boldsymbol{W})$ pour ω générique dans Ω

- $\mathcal{A}(\boldsymbol{W}) \hookrightarrow \bigoplus_{\sigma \geq 0} \boldsymbol{\mathcal{A}}^\sigma(\mathbf{W}_\omega) \implies \mathbf{rg}(\boldsymbol{W}) \leq \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{W}) = \sum_\sigma \rho^\sigma(\boldsymbol{W})$

L'invariant ρ

- $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{U_1}, \ldots, \boldsymbol{U_d})$ tissu sur $\Omega \subset \mathbb{C}^n = V$ $\rightsquigarrow \sum_{i=1}^d \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{U_i}) = 0$

- Pour $\omega \in \Omega$: – modulo $T^*_\omega \Omega \simeq V^*$, on a $d(\boldsymbol{U_i})_\omega = \boldsymbol{\ell_i} \in V^*$

  – $\mathbf{W}_\omega = J^1_\omega(\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{W}\Big(\boldsymbol{\ell_1}, \ldots, \boldsymbol{\ell_d}\Big)$

- Pour $\sigma \geq 0$: $\boldsymbol{\rho^\sigma_\omega(W)} = \dim \boldsymbol{\mathcal{A}}^\sigma(\mathbf{W}_\omega)$ avec

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^\sigma(\mathbf{W}_\omega) = \Big\{ (c_i)_{i=1}^d \in \mathbb{C}^d \;\Big|\; \sum_{i=1}^d c_i (\boldsymbol{\ell_i})^\sigma = 0 \text{ dans } \mathrm{Sym}^\sigma(V^*) \Big\}$$

- **Définition** : $\boldsymbol{\rho}^\sigma(\boldsymbol{W}) = \rho^\sigma_\omega(\boldsymbol{W})$ pour ω générique dans Ω

- $\mathcal{A}(\boldsymbol{W}) \hookrightarrow \bigoplus_{\sigma \geq 0} \boldsymbol{\mathcal{A}}^\sigma(\mathbf{W}_\omega) \implies \mathbf{rg}(\boldsymbol{W}) \leq \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{W}) = \sum_\sigma \rho^\sigma(\boldsymbol{W})$

- **Définition** : $\boldsymbol{W}$ de **rang AMP** si $\mathbf{rg}(\boldsymbol{W}) = \rho(\boldsymbol{W})$

retour