Équations hypergéométriques à solutions algébriques (d'après Schwarz, Klein,...)

Luc PIRIO

(CNRS & Université Versailles-Saint Quentin)

11 octobre 2019

Plan

- **[Wallis 1655] Terme “hypergéométrique”** :

$$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+(n-1)) \qquad (a \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N})$$

- **[Euler 1729] Série & équation hypergéométrique :**
  - $\boldsymbol{F}(a,b,c;x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} x^n \qquad |x| < 1$
  - $(\boldsymbol{E}_{a,b,c}) \quad : \quad \boldsymbol{F}'' + \frac{x(1+a+b)-c}{x(x-1)} \cdot \boldsymbol{F}' + \frac{ab}{x(x-1)} \cdot \boldsymbol{F} = 0$
  - $\boldsymbol{F}(a,b,c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \cdot \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-xt)^{-b} dt$
- **[Legendre, Pfaff 1797]**
- **[Gauss 1813] Étude dans le champs complexe**

$$(\boldsymbol{E_{a,b,c}}) \qquad x(x-1)\,\boldsymbol{F}'' + \big((1+a+b)x - c\big)\,\boldsymbol{F}' + ab\cdot \boldsymbol{F} = 0$$

- **[Kummer 1836]**
- **[Riemann 1857] Monodromie**

$$\mathbf{Mon}_{a,b,c} \,:\, \pi_1\Big(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}\Big) \longrightarrow \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$$

- **[Fuchs 1865] Équations différentielles "Fuchsiennes"**
- **[Schwarz 1873] Géométrie complexe**

$$\boldsymbol{S}_{a,b,c} \,:\, \widetilde{\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}} \longrightarrow \mathbb{H}^2\,,\ \mathbb{E}^2 \ \text{ ou } \ \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{P}^1$$

- **[Klein 1877]**
- **[Goursat 1888, Picard 1889, Lauricella 1893, Landau 1904 ...**
  ...
  Terada, Deligne-Mostow, Katz, GGZ, GZK, Dwork, Beukers..]

- **[Gauss (1812)]** *"Disquisitiones Generales Circa Seriem Infinitam*

$$1 + \frac{ab}{c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot c(c+1)(c+2)}x^3 + etc\text{''}$$

  - $\boldsymbol{F}(a, 1, 1; x) = (1-x)^{-a}$
  - $\boldsymbol{F}\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; x^2\right) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)/(2x)$
  - $\boldsymbol{F}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; x^2\right) = \arcsin(x)/x$
  - $\boldsymbol{F}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; x\right) = \frac{2}{\pi}K(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-xu^2)}}$
  - $\boldsymbol{F}\left(-n, n+1, 1; \frac{1+x}{2}\right) = P_n(x)$

Question : pour quels a, b, c, $\boldsymbol{F}(a, b, c; \cdot)$ est-elle algébrique ?

- **[Schwarz (1873)]** *"Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe..."*

"Alle Fälle zu ermitteln, in denen der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\left(\boldsymbol{E_{a,b,c}}\right) \ : \quad x(x-1)\,\boldsymbol{F}'' + \Big((1+a+b)x - c\Big)\,\boldsymbol{F}' + ab\,\boldsymbol{F} = 0$$

von welcher die Gaussische hypergeometrische Reihe F(a,b,c,x), als Function ihres vierten Elements betrachtet, ein particuläres Integral ist, durch eine algebraisch Function von x genügt werden kann."

Deux cas : 1.– $(\boldsymbol{E_{a,b,c}})$ admet une solution algébrique

2.– $(\boldsymbol{E_{a,b,c}})$ admet deux solutions algébriques ✓

- **Terminologie :** $(\boldsymbol{E_{a,b,c}})$ est dite **"algébrique"** dans le cas **2.**

Le Théorème de Schwarz (1873)

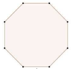
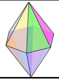
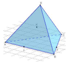
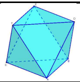
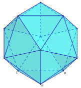
- $\Gamma_{a,b,c} = \mathbf{Im}\Big(\mathbf{M}_{a,b,c} : \pi_1\big(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}\big) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\Big)$ **"Groupe de monodromie de $(E_{a,b,c})$"**
- $(a,b,c) \rightsquigarrow (\lambda,\mu,\nu)$ t.q. $\Gamma_{a,b,c} = \Gamma_{\lambda,\mu,\nu} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$

Théorème de Schwarz Les points suivants sont équivalents :

- $(E_{a,b,c})$ est algébrique
- $\overline{\Gamma}_{\lambda,\mu,\nu} \subset \mathbf{P}\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est fini
- (λ,μ,ν) est tel que $\lambda+\mu+\nu > 1$
- (λ,μ,ν) est dans la **"Liste de Schwarz"**

Sous-groupes finis de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ [Steiner 1838]

- $\zeta_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, $\quad j = \zeta_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\quad \delta = \zeta_5$ et $\Delta = 1 - \delta - \delta^{-1}$
- Liste des sous-groupes finis de $\mathbf{P}\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ (modulo conjugaison)

$\boldsymbol{\Gamma}$	Groupe	Générateurs	$\mathbf{Aut}(P)$	P
$\boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{cyc}}$	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	$z \mapsto \zeta_n z$	$2n$-gone régulier	
$\boldsymbol{\Gamma}_{D_n}$	D_n	$z \mapsto \zeta_n z\,,\ z^{-1}$	Double-pyramide	
$\boldsymbol{\Gamma}_{Tetra}$	$\mathfrak{A}_4$	$z \mapsto j\,z\,,\ \frac{z+2}{z-1}$	Tétraèdre	
$\boldsymbol{\Gamma}_{Octa}$	$\mathfrak{S}_4$	$z \mapsto i\,z\,,\ \frac{z+1}{z-1}$	Octaèdre	
$\boldsymbol{\Gamma}_{Icos}$	$\mathfrak{A}_5$	$z \mapsto \delta\,z\,,\ \frac{z+1}{\Delta z-1}$	Icosaèdre	

	$(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu})$	$\boldsymbol{\Gamma}_{\lambda,\mu,\nu}$	**Primitif**
I.	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{n}\right)$	D_n	✓
II.	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$	Tétra	✓
III.	$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$	Tétra	
IV.	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$	Octa	✓
V.	$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right)$	Octa	
VI.	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right)$	Icos	✓
VII.	$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right)$	Icos	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
XIV.	$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$	Icos	
XV.	$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$	Icos	

Théorème de Klein (1884)

– Toute $(\boldsymbol{E}_{a,b,c})$ algébrique est la tirée-en-arrière d'une équation hypergéométrique associée à l'un des triplets primitifs suivants :

$$\left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{n}\right) \quad \left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{3}\,,\,\frac{1}{3}\right) \quad \left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{3}\,,\,\frac{1}{5}\right) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{3}\,,\,\frac{1}{5}\right)$$

(Diédral) (Tétraédral) (Octaédral) (Icosaédral)

– Soit $(\boldsymbol{E})$: ÉDL $\left[\begin{array}{l}\text{d'ordre deux}\\ \text{méromorphe}\end{array}\right]$ sur une surface de Riemann X

$(\boldsymbol{E})$ est Fuchsienne
$+\ \overline{\boldsymbol{\Gamma}}_{\boldsymbol{E}} \subset \mathbf{P}\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est
fini, non abélien

$\Longrightarrow$

Il existe $\varphi : X \to \mathbb{P}^1$ t.q.
$\boldsymbol{E} \sim_{\text{proj}} \varphi^*(\boldsymbol{E}_{\lambda,\mu,\nu})$
avec (λ, μ, ν) primitif

Dans ce cas, $\varphi : X \to \mathbb{P}^1$ est unique $\left(\text{ sauf cas } \left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right)\right)$

Exemple

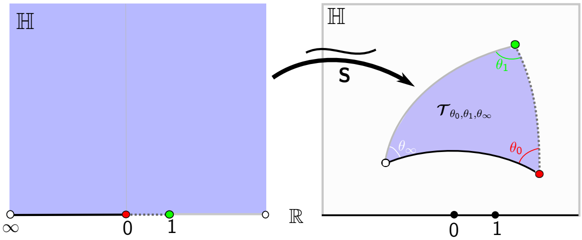
- **Cas diédral** :
  - $D_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \left\langle\, w \mapsto e^{\frac{2i\pi}{n}} w \,,\; w \mapsto \frac{1}{w} \,\right\rangle \subset \mathbf{P}\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$
  - Passage au quotient : $\begin{array}{rcl} \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^1/D_n \simeq \mathbb{P}^1 \\ w & \longmapsto & x(w) = \frac{(1-w^n)^2}{4w^n} \end{array}$
  - Application inverse $x \mapsto w(x)$ est $\mathbf{S}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{n}}$
- **En effet** : cas diédral $D_n \leftrightarrow (\lambda,\mu,\nu) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{n}\right)$
  - Réduite $(\boldsymbol{R}_{\lambda,\mu,\nu})$: $V'' + \left(\frac{3}{16x^2} + \frac{3}{16(x-1)^2} + \frac{n^2+2}{8n^2x(1-x)}\right) V = 0$
  - Solutions : $V_\pm = x^{\frac{1}{4}}(1-x)^{\frac{1}{4}}\left(2x-1+2\sqrt{x(x-1)}\right)^{\pm\frac{1}{2n}}$
  - App.° de Schwarz : $\mathbf{S}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{n}} = \frac{V_+}{V_-} = \left(2x-1+2\sqrt{x(x-1)}\right)^{\frac{1}{n}}$

Preuve de Théorème de Schwarz

- Preuve au tableau

$$\vdots$$

- **Représentation conforme [Schwarz (1870)]**



Théorème : • $\widetilde{\mathbf{S}_{a,b,c} : \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}} \longrightarrow \mathbb{H} \subset \mathbb{P}^1$

- $\overline{\Gamma}_{a,b,c} = \mathbf{Monod}(\mathbf{S}_{a,b,c}) < \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \mathbf{Aut}(\mathbb{H})$

- $\left[\begin{array}{c} \theta_0 = \frac{\pi}{p}, \;\; \theta_1 = \frac{\pi}{q}, \;\;\; \theta_\infty = \frac{\pi}{r} \\ \text{avec} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1 \end{array} \right] \Longrightarrow \overline{\Gamma}_{a,b,c}$ réseau de $\mathbf{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

Théorème de Schwarz : une approche arithmétique

Théorème [Eisenstein (1852)] Soit $Y = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathbb{Q}[[x]]$

Y est algébrique $\Longrightarrow$ $\exists\, A \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. } \forall\, n \geq 0 \; : \; A^n a_n \in \mathbb{Z}$

- $\not\Leftarrow$: $\frac{2}{\pi} K(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-xt^2)}} = \boldsymbol{F}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; x\right)$

$$= 1 + \frac{1}{4}x + \frac{9}{64}x^2 + \frac{25}{256}x^3 + \cdots \qquad (\ A = 16\ )$$

- **[Landau (1904 - 1911)]** : Application à $(\boldsymbol{E}_{a,b,c})$

Théorème de Schwarz : une approche arithmétique

Théorème [Eisenstein (1852)] Soit $Y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in \mathbb{Q}[[x]]$

Y est algébrique $\Longrightarrow$ $\exists\, A \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\forall\, n \geq 0 \;:\; A^n a_n \in \mathbb{Z}$

Théorème [Landau (1904 - 1911)]

1. $\left[\begin{array}{l} (\boldsymbol{E}_{a,b,c}) \text{ a une} \\ \text{solut}^{\text{o}} \text{ algébrique} \end{array}\right] \Rightarrow \quad \lambda + \mu + \nu > 1$

2. —— " —— $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} \forall\, p \text{ 1er t.q.} \\ (p, D) = 1 \end{array}$ on a $\begin{cases} pa < pc < pb \ \mathbf{mod}\ D \\ \qquad \text{ou} \\ pb < pc < pa \ \mathbf{mod}\ D \end{cases}$

- **[Errera (1913)]** Retrouve la liste de Schwarz *(à vérifier !)*

- $\begin{matrix}(\boldsymbol{E}_{a,b,c}) \\ a,b,c \in \mathbb{Q}\end{matrix} \longleftrightarrow$ Connexion $\left(\mathcal{E}_{a,b,c}, \nabla_{a,b,c}\right)$ sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$

$$\Big\downarrow \quad (\ p \text{ premier }\ )$$

Connexion $\left(\mathcal{E}^{(p)}_{a,b,c}, \nabla^{(p)}_{a,b,c}\right)$ sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p} \setminus \{0,1,\infty\}$

Théorème [Katz (1972)] Les points suivants sont équivalents :

- $(\boldsymbol{E}_{a,b,c})$ algébriquement intégrable
- $\left(\nabla^{(p)}_{a,b,c}\right)$ intégrable dans $\mathbb{F}_p[t]$ $(/\mathbb{F}_p[t^p])$ pour presque tout p
- $\left(\nabla^{(p)}_{a,b,c}\right)$ a p-courbure 0 pour presque tout p
- $\forall\ \rho$ t.q. $(\rho, D) = 1$: ρa, ρb et ρc sont entrelacés

Quelques généralisations plus (ou moins) récentes

- Séries hypergéométriques ${}_n\boldsymbol{F}_{n-1}\left(\begin{smallmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{smallmatrix}; \cdot\right)$ $\left[\begin{array}{l}\textit{En une variable}\\ \textit{ÉDL d'ordre } n\\ \textit{Fuchsienne sur}\\ \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}\end{array}\right]$

- Fonctions hypergéom. $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\mu}}$ d'Appell-Lauricella $\left[\begin{array}{l}\textit{En } m \textit{ variables ; Sys-}\\ \textit{-ème diff. d'ordre } 2\\ \textit{À singularités régu-}\\ \textit{-lières sur } \mathcal{M}_{0,m+3}\end{array}\right]$

- Fonctions hypergéométriques elliptiques $\boldsymbol{\Phi}_N^{\alpha_1}$ (avec $N \geq 2$) $\left[\begin{array}{l}\textit{En une variable}\\ \textit{ÉDL d'ordre } 2\\ \textit{Fuchsienne sur}\\ \textit{cb. modulaire } Y_1(N)\end{array}\right]$

- $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ ($b_n = 1$)

- ${}_n\boldsymbol{F}_{n-1}\left(\begin{matrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{matrix} ; x\right) = \sum_{k\geq 0} \frac{(a_1)_k \cdots (a_n)_k}{(b_1)_k \cdots (b_n)_k} x^k$ (**[Thomae (1870)]**)

- Équation hypergéométrique $(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$: ($\theta = x\frac{d}{dx}$)

$$x(\theta + a_1) \cdots (\theta + a_n)\boldsymbol{F} - (\theta + b_1 - 1) \cdots (\theta + b_{n-1} - 1)\theta\boldsymbol{F} = 0$$

d'ordre n, Fuchsienne sur $\mathbb{P}^1$, avec 3 singularités : 0, 1 et ∞

Théorème [Beukers-Heckman (1989)]

1. $(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ est irréductible $\iff$ $a_i - b_j \notin \mathbb{Z}$ $\forall\ i, j = 1, \ldots, n$

2. Sous 1., l'équivalence suivante est satisfaite :

$(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ est algébri-quement intégrable $\iff$ $\forall\ k < D$ t.q. $(k, D) = 1$ les ka_i et kb_j s'entrelacent

Le cas hyperbolique pour $F_{a,b,c}$

- Cas hyperbolique $\iff$ $\lambda + \mu + \nu < 1$

- Cas hyperbolique $\lambda + \mu + \nu < 1$ $\Longrightarrow$ $\overline{\mathbf{\Gamma}}_{\lambda,\mu,\nu} \subset \mathbf{Aut}(\mathbb{H}^2) = \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

- **Question :** pour quels λ, μ, ν : $\overline{\mathbf{\Gamma}}_{\lambda,\mu,\nu} \subset \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est-il un réseau ?

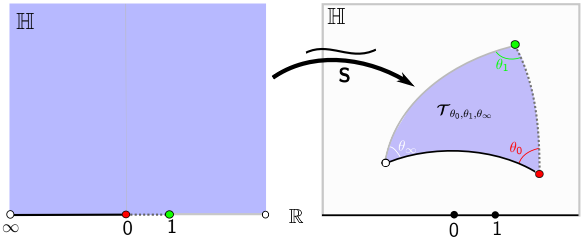
  $\Updownarrow$

  le triangle $\mathcal{T}_{(\pi\lambda,\pi\mu,\pi\nu)}$ pave $\mathbb{H}^2$?

- **Réponse :** si $(\pi\lambda, \pi\mu, \pi\nu) = \left(\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}\right)$ [**Schwarz 1873**]

  $+$ quelques autres cas [**Mostow 1988**]

• Représentation conforme [Schwarz (1870)]



Théorème : • $\mathbf{S}_{a,b,c} : \widetilde{\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}} \longrightarrow \mathbb{H} \subset \mathbb{P}^1$

• $\overline{\mathbf{\Gamma}}_{a,b,c} = \mathbf{Monod}(\mathbf{S}_{a,b,c}) < \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \mathbf{Aut}(\mathbb{H})$

• $\left[\begin{array}{c} \theta_0 = \frac{\pi}{p}, \quad \theta_1 = \frac{\pi}{q}, \quad \theta_\infty = \frac{\pi}{r} \\ \text{avec} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1 \end{array} \right] \Longrightarrow \overline{\mathbf{\Gamma}}_{a,b,c}$ réseau de $\mathbf{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

Fonctions d'Appell-Lauricella : le cas hyperbolique

- $\boldsymbol{F}(a,b,c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_1^\infty u^{a-c}(u-1)^{c-b-1}(u-x)^{-a}du$

- **Appell (1882) - Picard (1885) - Lauricella (1893) :**

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\mu}; x_1,\ldots,x_n) = \int_1^\infty u^{-\mu_0}(u-1)^{-\mu_1}\prod_{i=1}^n (u-x_i)^{-\mu_i}du$$

- $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\mu}; x) = \int_{[1,\infty]} \Omega(\boldsymbol{\mu}, x)$ satisfait

$$(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\mu}}) \ : \ \frac{\partial^2 \boldsymbol{F}}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{1}{x_k - x_l}\left(\mu_l \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x_k} - \mu_k \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x_l}\right) \qquad 1 \leq k < l \leq n$$

- On a $\mathbf{Sol}(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\mu}}) = \left\langle \ \boldsymbol{F}_\gamma(\boldsymbol{\mu};\cdot) = \int_\gamma \Omega(\boldsymbol{\mu},\cdot) \ \middle| \ \gamma \in \mathbf{H}_1\big(\mathbb{P}^1 \setminus \{x\}, \mathcal{L}_{\boldsymbol{\mu}}\big) \ \right\rangle$

- **Application de Schwarz :** $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{\mu}} = \left[\boldsymbol{F}_{\gamma_0} \ : \ \cdots \ : \ \boldsymbol{F}_{\gamma_n}\right] \ : \ \widetilde{\mathcal{M}_{0,n+3}} \longrightarrow \mathbb{P}^n$

Fonctions d'Appell-Lauricella : le cas hyperbolique

- $(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\mu}}) \, : \, \frac{\partial^2 \boldsymbol{F}}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{1}{x_k - x_l}\left(\mu_l \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x_k} - \mu_k \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x_l}\right) \qquad 1 \leq k < l \leq n$

- $\left(\boldsymbol{F}_{\gamma_0}, \cdots : \boldsymbol{F}_{\gamma_n}\right)$ base de $\mathbf{Sol}(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\mu}})$

- **Application de Schwarz :** $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{\mu}} = \left[\boldsymbol{F}_{\gamma_0} : \cdots : \boldsymbol{F}_{\gamma_n}\right] \, : \, \widetilde{\mathcal{M}_{0,n+3}} \longrightarrow \mathbb{P}^n$

> **Théorème :** si $0 < \mu_i < 1$ pour tout i, alors :
>
> 1. $\mathbf{Im}(\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{\mu}}) \subset \mathbb{B}^n = \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{P}^n$
> 2. $\overline{\boldsymbol{\Gamma}}_{\boldsymbol{\mu}} \subset \mathbf{Aut}(\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}) = \mathbf{P}\mathrm{U}(1, n)$

- **Question :** pour quels $\boldsymbol{\mu}$, $\overline{\boldsymbol{\Gamma}}_{\boldsymbol{\mu}}$ est-il un réseau de $\mathbf{P}\mathrm{U}(1,n)$?

- **Réponse : [Deligne-Mostow (1986)]** $+$ qques autres cas

  $\rightsquigarrow$ constructions de réseaux non-AR dans $\mathbf{P}\mathrm{U}(1,n)$!

“Hypergéométrie elliptique” [Ghazouani-Pirio]

Cas classique $(g = 0)$	Cas elliptique $(g = 1)$
$\mathcal{M}_{0,4} \simeq \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$	$Y_1(N) = \mathbb{H}_{/\Gamma_1(N)} \quad (N \geq 2)$
$x \rightsquigarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, x, \infty\}$	$\tau \rightsquigarrow E_\tau \setminus \{0, \frac{1}{N}\}$
$\omega_x^{\boldsymbol{\alpha}} = \prod_{k=1}^4 (t - u_k)^{\alpha_k} dt$	$\omega_\tau^{\alpha_1} = \frac{\theta(u,\tau)^{\alpha_1}}{\theta\left(u-\frac{1}{N},\tau\right)^{\alpha_1}} du$
$\boldsymbol{F}_\gamma^{\boldsymbol{\alpha}}(x) = \int_\gamma \prod_{k=1}^4 (t - u_k)^{\alpha_k} dt$	$\boldsymbol{\Phi}_{N,\gamma}^{\alpha_1}(\tau) = \int_\gamma \frac{\theta(u,\tau)^{\alpha_1}}{\theta\left(u-\frac{1}{N},\tau\right)^{\alpha_1}} du$
$(\boldsymbol{E}_{a,b,c}) : \boldsymbol{F}'' + \frac{c-(1+a+b)x}{x(1-x)} \boldsymbol{F}' - \frac{ab}{x(1-x)} \boldsymbol{F} = 0$	$(\boldsymbol{E}_N^{\alpha_1}) : \ddot{\boldsymbol{\Phi}} + P_N^{\alpha_1}(\tau) \dot{\boldsymbol{\Phi}} + Q_N^{\alpha_1}(\tau) \boldsymbol{\Phi} = 0$
$\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{\alpha}} : \widetilde{\mathcal{M}_{0,4}} \longrightarrow \mathbb{H}$	$\boldsymbol{S}_N^{\alpha_1} : \widetilde{Y_1(N)} \simeq \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$
On connait les $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i)_{i=1}^4$ tels que $\overline{\boldsymbol{\Gamma}}^{\boldsymbol{\alpha}} < \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est un réseau	Pour quelles paires (α_1, N) $\overline{\boldsymbol{\Gamma}}_N^{\alpha_1} < \mathbf{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est un réseau ?

Qques références sur la théorie hypergéométrique classique

- **Théorie de Fuchs des ÉDL dans le champs complexe :**
  - **[Ince]** Ordinary differential equations
  - **[Yoshida]** Fuchsian differential equations
- **Fonction et équation hypergéométriques de Gauss :**
  - **[Kampé de Fériet]** La fonction hypergéométrique
  - **[Gray]** Linear Differential Equations and Group Theory
  - **[Yoshida]** Hypergeometric functions, my love
- **Plus spécifiquement, sur le théorème de Schwarz :**
  - **[Goursat]** Leçons sur les séries hypergéométriques I & II
  - **[Klein]** Vorlesungen über die Hypergeometrische Funktion
  - **[Beukers]** Gauss' Hypergeometric Function
  - **[St.-Gervais]** Uniformisation des surfaces de Riemann
  - **[Matsuda]** Lectures on algebraic solutions of HDE

Quelques références sur diverses généralisations

- **Fonctions hypergéométrique $_nF_{n-1}$ et généralisations :**
  - *Voir les nombreux articles de F. Beukers sur le sujet*
  - **[Beukers]** Hypergeom. Functions, How Special Are They ?
  - **[Beukers]** Notes on A-hypergeometric functions
  - **[Sienstra]** GKZ Hypergeometric Structures

- **Fonctions hypergéométriques d'Appell et Lauricella :**
  - **[Appell-Kampé de Fériet]** Fonctions hypergéométriques et hypersphériques
  - **[Deligne-Mostow]** Monodromy of hypergeometric functions
  - **[Looijenga]** An overview of the theory of Deligne-Mostow