M2 AA – ALGÈBRE EFFECTIVE

Épreuve du 28 novembre 2022, 9h40 – *durée : 3 heures*

Les documents et ordinateurs sont autorisés, voire nécessaires. Écrivez lisiblement, numérotez vos pages. Les candidat·es peuvent rédiger en français ou en anglais. Les 3 exercices sont indépendants.

Exercice 1. Soit $J = \langle x^2 - z, xy - z, xz - y\rangle \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$. Calculer l'éventail de Gröbner de J, en précisant pour chaque cône la base de Gröbner marquée associée. On pourra considérer les différents ordres lexicographiques, ainsi que l'ordre matriciel donné par $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Indication : il y a 5 cônes maximaux.

Exercice 2. Soient $f_1, \ldots, f_n \in k[x_1, \ldots, x_n]$, et soit ϕ le morphisme de k-algèbres défini par

$$\begin{aligned} \phi : k[y_1, \ldots, y_n] &\longrightarrow k[x_1, \ldots, x_n] \\ y_i &\longmapsto f_i. \end{aligned}$$

On veut pouvoir déterminer si ϕ est un isomorphisme.

(1) Soit J l'idéal de $k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ défini par

$$J = \langle y_1 - f_1, \ldots, y_n - f_n\rangle.$$

Montrer que $G = \{y_1 - f_1, \ldots, y_n - f_n\}$ est une base de Gröbner de J pour l'ordre lexicographique avec $y_1 > \ldots > y_n > x_1 > \ldots > x_n$.

(2) Soit $\Phi : k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n] \to k[x_1, \ldots, x_n]$ le morphisme défini par $\Phi(x_i) = x_i$ et $\Phi(y_i) = f_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que $J = \ker \Phi$. En déduire que ϕ est surjective si et seulement si pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $h_i \in k[y_1, \ldots, y_n]$ tel que $x_i - h_i \in J$.

(3) En supposant que ϕ est surjective, et avec les notations ci-dessus, montrer que le morphisme défini par

$$\begin{aligned} \psi : k[x_1, \ldots, x_n] &\longrightarrow k[y_1, \ldots, y_n] \\ x_i &\longmapsto h_i \end{aligned}$$

est tel que $\phi \circ \psi$ est l'application identité. En déduire que ψ est injectif.

(4) En gardant les hypothèses ci-dessus, montrer que ψ est surjective (et donc un isomorphisme) si et seulement si il existe des polynômes $f'_1, \ldots, f'_n \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tels que l'idéal $J' = \langle x_1 - h_1, \ldots, x_n - h_n\rangle$ contient $y_1 - f'_1, \ldots, y_n - f'_n$. Dans ce cas, montrer que ϕ doit être un isomorphisme, et en déduire que $f'_i = f_i$ pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(5) En utilisant ce qui précède, montrer l'énoncé suivant : ϕ est un isomorphisme si et seulement si il existe des polynômes $h_1, \ldots, h_n \in k[y_1, \ldots, y_n]$ tels que $G = \{x_1 - h_1, \ldots, x_n - h_n\}$ est une base de Gröbner de $J = \langle y_1 - f_1, \ldots, y_n - f_n\rangle$ pour l'ordre lexicographique avec $x_1 > \ldots > x_n > y_1 > \ldots > y_n$.

Exercice 3. Dans cet exercice, on s'intéressera aux relations algébriques entre des fonctions trigonométriques.

(1) **Questions préliminaires.** Soit k un corps.

(a) Soient $f_1, \ldots, f_r \in k[y_1, \ldots, y_n]$ des polynômes et soit

$$\begin{aligned} \phi : k[t_1, \ldots, t_r] &\longrightarrow k[y_1, \ldots, y_n] \\ t_i &\longmapsto f_i \end{aligned}$$

le morphisme d'évaluation. On étend ϕ en un morphisme

$$\begin{aligned} \Phi : k[y_1, \ldots, y_n, t_1, \ldots, t_r] &\longrightarrow k[y_1, \ldots, y_n] \\ t_i &\longmapsto f_i \\ y_i &\longmapsto y_i. \end{aligned}$$

Soit enfin I un idéal de $k[y_1, \ldots, y_n]$.

(i) Montrer que $\phi^{-1}(I) = \Phi^{-1}(I) \cap k[t_1, \ldots, t_r]$.

(ii) Montrer que $\Phi^{-1}(I) = \langle t_1 - f_1, \ldots, t_r - f_r, I\rangle$, où I est vu dans le terme de droite comme un sous-ensemble de l'anneau $k[y_1, \ldots, y_n, t_1, \ldots, t_r]$.

(iii) En déduire une façon de calculer $\phi^{-1}(I)$.

(b) Soit I un idéal de l'anneau $k[y_1, \ldots, y_n]$. Pour un polynôme $f \in k[y_1, \ldots, y_n]$, on considère la propriété $(*)$ suivante :

$(*)\ f = y_1 \cdot f_1 + f_0$, avec $f_0, f_1 \in k[y_2, \ldots, y_n]$ et $f_1 \notin I$.

Enfin, soit G la base de Gröbner réduite de I pour l'ordre lexicographique avec $y_1 > \ldots > y_n$.

(i) Montrer que s'il existe $g \in G$ tel que $g = y_1 \cdot g_1 + g_0$ avec $g_0, g_1 \in k[y_2, \ldots, y_n]$, alors g satisfait à la propriété $(*)$.

(ii) Montrer qu'il existe un polynôme f dans I satisfaisant à la propriété $(*)$ si et seulement si il existe un polynôme dans G satisfaisant à la propriété $(*)$.

(2) **Application aux relations entre fonctions trigonométriques.** Soit $\mathcal{C}(\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Pour $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$, on appelle *l'idéal des relations algébriques entre* $h_1, \ldots, h_n$ (exprimé en les variables y_i) le noyau du morphisme d'évaluation

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_n] & \longrightarrow & \mathcal{C}(\mathbb{C}) \\ y_i & \longmapsto & h_i. \end{array}$$

Soient $\cos, \sin \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$ les fonctions trigonométriques habituelles $z \mapsto \cos(z)$ et $z \mapsto \sin(z)$, et soit $\varepsilon : \mathbb{C}[y_1, y_2] \to \mathcal{C}(\mathbb{C})$ le morphisme évaluant y_1 en cos et y_2 en sin.

(a) Montrer que l'idéal des relations algébriques entre cos et sin est engendré par $y_1^2 + y_2^2 - 1$. (Indication : pour $f \in \ker \varepsilon$, appliquer ε au reste de la division de f par $y_1^2 + y_2^2 - 1$, puis évaluer en une infinité de valeurs différentes de z.)

(b) Soit $m > 1$ un entier. Considérons le morphisme d'évaluation

$$\begin{array}{ccc} \phi : \mathbb{C}[t_1, t_2] & \longrightarrow & \mathbb{C}[y_1, y_2] \\ t_i & \longmapsto & y_i^m. \end{array}$$

(i) Montrer que l'idéal des relations algébriques entre $\cos^m$ et $\sin^m$ (exprimé en les variables t_i) est $\ker(\varepsilon \circ \phi) = \phi^{-1}(\ker(\varepsilon))$.

(ii) Calculer des générateurs de cet idéal pour $m \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(c) Pour $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$, soit I leur idéal de relations algébriques dans $\mathbb{C}[y_1, \ldots, y_n]$. On dit que h_1 *est rationnelle sur* $h_2, \ldots, h_n$ s'il existe $f \in I$ satisfaisant à la propriété $(*)$ de la question (1b).

En utilisant le fait que $\cos(3z) = \cos^3(z) - 3\cos(z)\sin^2(z)$, et en considérant la composition de

$$\begin{array}{ccc} \phi : \mathbb{C}[t, t_1, t_2] & \longrightarrow & \mathbb{C}[y_1, y_2] \\ t & \longmapsto & y_1^3 - 3y_1y_2^2 \\ t_i & \longmapsto & y_i^3 \end{array}$$

avec ε, montrer que $\cos(3z)$ est une fonction rationnelle sur $\cos^3$ et $\sin^3$. Exprimer $\cos(3z)$ comme fraction rationnelle de $\cos^3$ et $\sin^3$.

Déterminer si la fonction $\sin(3z)$ est une fonction rationnelle sur $\cos^3$ et $\sin^3$, et si oui, l'exprimer comme fraction rationnelle de $\cos^3$ et $\sin^3$.