M2 AA – ALGÈBRE EFFECTIVE

Épreuve du 23 novembre 2021, 9h30 – *durée : 3 heures*

Les documents et ordinateurs sont autorisés, voire nécessaires. Écrivez lisiblement, numérotez vos pages. Les candidat.e.s peuvent rédiger en français ou en anglais. Les 3 exercices sont indépendants.

Exercice 1. Soit $J = \langle x^2 + yz + z, x + y^2 \rangle \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$. Calculer l'éventail de Gröbner de J, en précisant pour chaque cône la base de Gröbner marquée associée. On pourra considérer les ordres suivants :

(1) lex, $x > y > z$.

(2) lex, $z > x > y$.

(3) degrevlex, $x > y > z$.

(4) lex, $z > y > x$.

(5) lex, $y > z > x$.

(6) lex, $y > x > z$.

Indice : le vecteur $(2, 1, 3)$ fait partie de tous les cônes de Gröbner.

Exercice 2. Soient K et L deux corps, et soit $\alpha \in L \setminus \{0\}$ un élément *algébrique* sur K, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme $f \in K[X]$ tel que $f(\alpha) = 0$. Soit $P_\alpha \in K[X]$ le *polynôme minimal* de α, c'est-à-dire le polynôme unitaire qui engendre l'idéal

$$I_\alpha = \big\{f \in K[X] \mid f(\alpha) = 0\big\}.$$

On considère le corps $K(\alpha)$; le morphisme $K[X] \to K(\alpha) : f(X) \mapsto f(\alpha)$ est surjectif de noyau $\langle P_\alpha \rangle$, de sorte que $K(\alpha) \cong K[X]/\langle P_\alpha \rangle$.

Soit maintenant $\beta \in K(\alpha)$. On peut écrire $\beta = B(\alpha)$, avec $B(X) \in K[X]$. On cherche le polynôme minimal P_β de β sur K.

(1) Considérons l'idéal $I = \langle Y - B(X), P_\alpha(X) \rangle$ de $K[X, Y]$. Montrer que $(Y - B(X), P_\alpha(X))$ est une base de Gröbner de I pour l'ordre lexicographique avec $Y > X$.

(2) Montrer que le morphisme $\varepsilon : K[X, Y] \to K(\alpha) : f(X, Y) \mapsto f(\alpha, \beta)$ a pour noyau I. (Pour l'inclusion de $\ker \varepsilon$ dans I, on pourra effectuer la division multivariée d'un élément $f \in \ker \varepsilon$ par la base de Gröbner trouvée en (1) et montrer que le reste est nul.)

(3) Montrer que l'idéal d'élimination $I \cap K[Y]$ est égal à $\langle P_\beta(Y) \rangle$. (On pourra voir que $\langle P_\beta(Y) \rangle$ est le noyau de l'application $f(Y) \mapsto f(\beta)$, et appliquer (2)).

(4) Utiliser ce qui précède pour calculer le polynôme minimal de $\sqrt[3]{5} - 2(\sqrt[3]{5})^2$ sur $\mathbb{Q}$. Expliquer quelles bases de Gröbner doivent être calculées pour obtenir ce résultat. (On pourra utiliser sans preuve que $X^3 - 5$ est le polynôme minimal de $\sqrt[3]{5}$ sur $\mathbb{Q}$.)

Exercice 3. Considérons l'ensemble N_3 des matrices 3×3 rationnelles *unipotentes supérieures* :

$$N_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Q} \right\}.$$

(1) **Calcul préliminaire.** Pour tout $t \in \mathbb{Q}$, soient

$$E_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considérons le morphisme F_{121} défini par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^3 & \longrightarrow & N \\ (t_1, t_2, t_3) & \longmapsto & E_1(t_1) \cdot E_2(t_2) \cdot E_1(t_3). \end{array}$$

Montrer que $\overline{F_{121}(\mathbb{A}^3)} = N_3$, mais que $F_{121}(\mathbb{A}^3) \neq N_3$. Faire de même pour le morphisme F_{212} défini par $F_{212}(t_1, t_2, t_3) = E_2(t_1) \cdot E_1(t_2) \cdot E_2(t_3)$.

(2) **Ensembles paramétrés par des variables évitant une hypersurface.** On travaille maintenant sur un corps infini K. Considérons un morphisme $F : \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^n$ défini par

$$F(t_1, \ldots, t_m) = \big(f_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, f_n(t_1, \ldots, t_m)\big).$$

Soit $h \in K[t_1, \ldots, t_m]$ non nul, et soit $W = V(h)$. On veut calculer $\overline{F(\mathbb{A}^m \setminus W)}$.

(a) On considère l'anneau $K[u, t_1, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_n]$ comme l'anneau de coordonnées de l'espace affine $\mathbb{A}^{1+m+n}$. Soit $\pi : \mathbb{A}^{1+m+n} \to \mathbb{A}^n$ la projection sur les n dernières coordonnées. Soit

$$J = \langle uh - 1, x_1 - f_1, \ldots, x_n - f_n \rangle \subset K[u, t_1, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_n].$$

Montrer que $\pi\big(V(J)\big) = F(\mathbb{A}^m \setminus W)$.

(b) Considérons l'idéal d'élimination $J_{m+1} = J \cap K[x_1, \ldots, x_n]$. Montrer que $\overline{F(\mathbb{A}^m \setminus W)} = V(J_{m+1})$. (On pourra traiter d'abord le cas où K est algébriquement clos et penser au théorème de clôture.)

(c) Soit maintenant $J_1 = J \cap K[t_1, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_n]$. Montrer que $J_1 = \langle x_1 - f_1, \ldots, x_n - f_n \rangle$. (On pourra montrer que pour l'ordre lexicographique avec $u > x_1 > \ldots > x_n > t_1 > \ldots > t_m$, une base de Gröbner de J est $(uh - 1, x_1 - f_1, \ldots, x_n - f_n)$.

(d) Déduire de ce qui précède que $\overline{F(\mathbb{A}^m \setminus W)} = \overline{F(\mathbb{A}^m)}$.

(3) **Retour aux matrices unipotentes.**

(a) Posons $h = t_1 + t_3 \in \mathbb{Q}[t_1, t_2, t_3]$, $W = V(h)$ et $\varphi : \mathbb{A}^3 \setminus W \to \mathbb{A}^3$ défini par

$$\varphi(t_1, t_2, t_3) = \left(\frac{t_2 t_3}{t_1 + t_3}, t_1 + t_3, \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_3} \right).$$

Vérifier que $F_{121} \circ \varphi = F_{212}$ sur $\mathbb{A}^3 \setminus W$. En déduire que $\overline{F_{212}(\mathbb{A}^3)} \subseteq \overline{F_{121}(\mathbb{A}^3)}$, sans utiliser (1).

(b) Par un argument symétrique, montrer que $\overline{F_{121}(\mathbb{A}^3)} \subseteq \overline{F_{212}(\mathbb{A}^3)}$.