

---

# TYPES MODULO $\ell$ POUR LES FORMES INTÉRIEURES DE $GL_n$ SUR UN CORPS LOCAL NON ARCHIMÉDIEN

par

Alberto Mínguez & Vincent Sécherre

(avec un appendice par Vincent Sécherre et Shaun Stevens)

---

**Abstract.** — Let  $F$  be a non-Archimedean locally compact field of residue characteristic  $p$ , let  $D$  be a finite dimensional central division  $F$ -algebra and let  $\ell$  be a prime number different from  $p$ . We develop a theory of  $\ell$ -modular types for the group  $GL_m(D)$ ,  $m \geq 1$ , in preparation of the study of the  $\ell$ -modular smooth representations of this group.

## Introduction

**1.** Soit  $F$  un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle  $p$  et soit  $D$  une algèbre à division centrale de dimension finie sur  $F$  dont le degré réduit est noté  $d$ . Étant donné  $m \geq 1$ , on pose  $G = GL_m(D)$ , qui est une forme intérieure de  $GL_{md}(F)$ . La théorie des types complexes pour  $G$  a été développée dans une série d'articles [28, 29, 30, 32, 5, 33] à la suite des travaux de Bushnell et Kutzko [10, 12] pour  $GL_n(F)$ ,  $n \geq 1$ . C'est un outil puissant, qui permet une description explicite de la catégorie des représentations lisses complexes de  $G$ . Dans cet article, nous développons une théorie des types modulaires pour  $G$  dans l'objectif d'étudier les représentations lisses modulaires de  $G$ , c'est-à-dire à coefficients dans un corps  $R$  algébriquement clos de caractéristique  $\ell$  différente de 0 et de  $p$  (voir [23, 24, 25]).

**2.** La théorie des représentations modulaires des groupes réductifs  $p$ -adiques a été développée par Vignéras [36, 37]. Comparée à la théorie complexe, elle présente de grandes similarités mais aussi des différences importantes, à la fois dans les résultats et dans les méthodes. Les représentations modulaires d'un sous-groupe ouvert compact ne sont pas semi-simples en général. Le fait que  $\ell$  soit différent de  $p$  équivaut à l'existence d'une mesure de Haar à valeurs dans  $R$  sur le groupe, mais la mesure d'un sous-groupe ouvert compact peut être nulle. Il faut distinguer entre les deux notions de représentation irréductible cuspidale (c'est-à-dire dont tous les modules de Jacquet relativement à un sous-groupe parabolique propre sont nuls) et supercuspidale (c'est-à-dire qui n'est sous-quotient d'aucune induite parabolique d'une représentation irréductible d'un sous-groupe de Levi propre). On a une notion de support supercuspidal pour une représentation irréductible, mais on ignore en général s'il est unique. Il n'existe pas de version modulaire de la

formule des traces ni du théorème de Paley-Wiener. Il y a des représentations irréductibles non isomorphes d'un même groupe dont tous les modules de Jacquet propres sont isomorphes.

**3.** L'un des principaux outils dont on dispose pour étudier les représentations modulaires d'un groupe réductif  $p$ -adique est la théorie des types, pour les groupes pour lesquels une telle théorie existe. Une théorie des types modulaires a été développée pour le groupe  $GL_n(\mathbb{F})$  (voir [36, 37]) et l'objet du présent article est de produire une théorie analogue pour ses formes intérieures. On l'utilise dans [25] pour construire une classification à la Zelevinski des représentations modulaires irréductibles de  $G$  en termes de multisegments, et dans [23] pour classer les représentations banales de  $G$ . V. Sécherre et S. Stevens l'utilisent dans [34] pour obtenir une décomposition en blocs de la catégorie des représentations lisses modulaires de  $G$ .

**4.** Notre première tâche est d'étendre au cas modulaire la construction des types semi-simples de  $GL_n(\mathbb{F})$  et de ses formes intérieures. Pour cela, nous reprenons les arguments de la théorie complexe [29, 30, 32, 33] en expliquant comment les adapter au cas modulaire.

La principale nouveauté tient à ce que, dans le cas modulaire, l'algèbre des endomorphismes d'une représentation lisse d'un groupe compact peut être triviale sans que la représentation soit irréductible. Ceci intervient dans le problème du transfert des  $\beta$ -extensions (voir le lemme 2.2 et la proposition 2.3) et à propos de l'irréductibilité de certaines représentations (voir le lemme 2.6 et le corollaire 2.7). Nous renvoyons aussi au calcul de l'algèbre de Hecke d'un type simple : comme dans le cas complexe, c'est une algèbre de Hecke affine de type A, mais la preuve de [30] nécessite quelques ajustements pour être valable dans le cas modulaire (voir le lemme 2.16).

Une nouveauté d'un autre ordre concerne la construction des types semi-simples non homogènes (paragraphe 2.9). L'argument utilisé dans le cas complexe par Bushnell et Kutzko ([12]), que nous reprenons, repose sur le fait que tout élément inversible à gauche de l'algèbre de Hecke d'un type semi-simple est inversible. La preuve dans le cas complexe ([11, 7.15]) doit être légèrement modifiée. D'autre part, nous déterminons la structure de cette algèbre non pas *a priori* à l'aide de [11, Theorem 12.1] comme dans le cas complexe, mais *a posteriori* grâce à une majoration de l'ensemble d'entrelacement d'un type semi-simple effectuée dans l'appendice par V. Sécherre et S. Stevens (voir le corollaire A.11 et le lemme A.12).

Le lecteur trouvera des détails supplémentaires dans l'introduction à la section 2.

L'apparition de ces nouveautés n'est pas liée au fait que le groupe  $G$  n'est pas déployé. Celles-ci sont déjà présentes dans le cas du groupe déployé  $GL_n(\mathbb{F})$ ,  $n \geq 1$  ; toutefois elles n'apparaissent pas clairement dans [36, 37].

**5.** Nous obtenons plusieurs résultats sur les types semi-simples, qui sont nouveaux même dans le cas complexe. Étant donné un type semi-simple  $(\mathbf{J}, \lambda)$  de  $G$ , nous définissons une décomposition :

$$\lambda = \kappa \otimes \sigma$$

analogue à la décomposition bien connue pour les types simples,  $\kappa$  et  $\sigma$  étant des représentations irréductibles de  $\mathbf{J}$  et  $\sigma$  étant triviale sur le radical pro-unipotent  $\mathbf{J}^1$  de  $\mathbf{J}$ . La restriction de  $\kappa$  à  $\mathbf{J}^1$  est une représentation irréductible  $\eta$  dont l'entrelacement est calculé (proposition 2.31) grâce à la majoration de l'appendice. Ce calcul est essentiel dans la preuve du théorème B ci-dessous. Voir aussi la proposition 2.27, qui fournit une propriété de paire couvrante de  $(\mathbf{J}^1, \eta)$  bien utile dans la section 5 (dans le cas homogène).

**6.** La section 3 est consacrée à la construction des représentations irréductibles cuspidales de  $G$  en termes de certains types semi-simples, appelés types simples maximaux, de  $G$ . Comme dans

le cas complexe, les types simples maximaux de  $G$  forment une famille de paires composées d'un sous-groupe ouvert compact  $J \subseteq G$  et d'une représentation lisse irréductible  $\lambda$  de  $J$ , possédant les propriétés suivantes (voir la proposition 3.1 et le théorème 3.11) :

(1) pour toute représentation irréductible cuspidale  $\rho$  de  $G$ , il existe un type simple maximal  $(J, \lambda)$ , unique à  $G$ -conjugaison près, telle que la restriction de  $\rho$  à  $J$  admette une sous-représentation isomorphe à  $\lambda$  ;

(2) si  $\rho$  est une représentation irréductible cuspidale de  $G$ , et si  $(J, \lambda)$  est un type simple maximal contenu dans  $\rho$ , il y a une unique représentation du  $G$ -normalisateur de  $(J, \lambda)$  qui prolonge  $\lambda$  et dont l'induite compacte à  $G$  soit isomorphe à  $\rho$  ;

(3) deux représentations irréductibles cuspidales de  $G$  contiennent un même type simple maximal  $(J, \lambda)$  si et seulement si elles sont inertiellement équivalentes.

Comme dans le cas complexe, la preuve de ce résultat suit le schéma maintenant classique élaboré par Bushnell et Kutzko et fondé sur la méthode des paires couvrantes [11, 37] : il s'agit de prouver que toute représentation irréductible cuspidale de  $G$  contient une strate fondamentale non scindée, puis un caractère simple, puis un type semi-simple, enfin de prouver que celui-ci est un type simple maximal. Seule la preuve de la proposition 3.1 nécessite quelques adaptations à cause du problème de l'irréductibilité déjà rencontré au paragraphe 4. Signalons qu'à ce stade, il n'existe aucune différence de traitement entre les représentations cuspidales et les représentations supercuspidales.

**7.** Cette description des représentations irréductibles cuspidales de  $G$  en termes de types simples maximaux permet, étant donné un nombre premier  $\ell$  différent de  $p$ , d'étudier la réduction modulo  $\ell$  des  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations irréductibles cuspidales entières. Ceci donne le premier résultat différent du cas déployé : voir le théorèmes 3.15, que l'on comparera au théorème III.1.1 de [36].

**Théorème A.** — *Étant donnée une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale  $\rho$  de  $G$ , il y a un entier  $a \geq 1$  et une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale  $\bar{\rho}$  de  $G$  telle que la réduction modulo  $\ell$  de  $\rho$  est :*

$$\bar{\rho} \oplus \bar{\rho}\bar{\nu} \oplus \dots \oplus \bar{\rho}\bar{\nu}^{a-1}$$

où  $\bar{\nu}$  est le  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractère non ramifié défini comme la valeur absolue de la norme réduite de  $G$ .

Il y a ainsi des  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations irréductibles cuspidales entières dont la réduction modulo  $\ell$  n'est pas irréductible, et des  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentations irréductibles cuspidales n'admettant pas de relèvement à  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$  (voir les exemples 3.25 et 3.31). On renvoie aussi au théorème 3.27 (et à la remarque 3.28), premier résultat faisant une différence entre représentations cuspidales et représentations supercuspidales, que l'on comparera au théorème III.5.10 de [36].

**8.** La théorie abstraite des types de Bushnell et Kutzko ([11]) – par opposition à la théorie des types semi-simples qui en est une réalisation concrète pour certains groupes – est un programme dont l'objectif est de décrire la décomposition de Bernstein de la catégorie des représentations lisses complexes d'un groupe réductif  $p$ -adique en fonction de catégories de modules sur les algèbres d'entrelacement – ou de Hecke – des types impliqués. La notion de type est caractérisée par plusieurs propriétés importantes (voir le paragraphe d'introduction à la section 4). Dans le cas modulaire, il n'existe pas à l'heure actuelle de théorème général de décomposition en blocs en termes de classes d'inertie de paires (super)cuspidales pour la catégorie des représentations lisses modulaires d'un groupe réductif  $p$ -adique, non plus qu'une notion claire de ce que devrait être un type pour un tel groupe. Notre objectif ici n'est pas de développer une théorie abstraite

des types modulaires, mais plutôt d'étudier comment la théorie des types semi-simples – tels qu'ils sont définis dans la section 2 – permet de comparer la théorie des représentations lisses modulaires de  $G$  à celle de certaines algèbres de Hecke affines.

**9.** Contrairement au cas complexe ([12, 33]), cette comparaison n'est pas parfaite (on n'a pas en général d'équivalence de catégories décrivant les blocs de la catégorie des représentations lisses de  $G$ ) mais permet toutefois d'étudier les représentations irréductibles de  $G$  grâce à la propriété de presque-projectivité introduite par Dipper [16] et développée par Vignéras et Arabia [37, 38] (voir le paragraphe 4.1). Le point de départ est le résultat suivant, qui est l'un des principaux résultats de cet article (voir la proposition 4.8).

***Théorème B.** — Soit  $(\mathbf{J}, \lambda)$  un type semi-simple de  $G$ . Alors l'induite compacte  $\text{ind}_{\mathbf{J}}^G(\lambda)$  est quasi-projective.*

L'un des principaux ingrédients de la preuve de ce résultat est le calcul de l'entrelacement de la représentation  $\eta$  introduite au paragraphe 5.

Grâce à cette propriété, nous avons une bijection naturelle entre les modules à droite simples sur l'algèbre de Hecke de  $(\mathbf{J}, \lambda)$  et les classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de  $G$  dont la restriction à  $\mathbf{J}$  contient  $\lambda$  (voir le théorème 4.2). En outre, la proposition 4.11 montre que ces représentations-ci sont caractérisées par la classe inertielle de leur support cuspidal.

**10.** La suite de la section 4 est consacrée au problème important de la comparaison entre induites paraboliques et modules induits. On donne notamment des conditions suffisantes pour qu'une induite parabolique soit irréductible, dont un corollaire est le théorème 4.16 permettant de ramener le problème de la classification de toutes les représentations irréductibles de  $G$  à celui des représentations irréductibles dont le support cuspidal est simple, c'est-à-dire inertiuellement équivalent à un support cuspidal de la forme  $\rho + \dots + \rho$  où  $\rho$  est une représentation irréductible cuspidale fixée. Plusieurs résultats de cette partie sont inspirés de [37] (notamment du paragraphe V.2) même si nos preuves sont en général différentes. Mentionnons enfin le théorème de comparaison 4.19 (dont on ne trouve pas d'analogue dans [37]), qui permet d'établir des critères d'irréductibilité d'induites par changement de groupe (paragraphe 4.4) et d'associer à toute représentation irréductible cuspidale  $\rho$  de  $G$  un caractère non ramifié  $\nu_\rho$  de ce groupe possédant la propriété suivante (voir la proposition 4.40).

***Théorème C.** — Si  $\rho'$  est une représentation irréductible cuspidale de  $\text{GL}_{m'}(\mathbb{D})$ ,  $m' \geq 1$ , alors l'induite normalisée de  $\rho \otimes \rho'$  est réductible si et seulement si  $m' = m$  et  $\rho'$  est isomorphe à  $\rho\nu_\rho$  ou à  $\rho\nu_\rho^{-1}$ .*

Comme déjà dans le cas complexe, et contrairement au cas où  $G$  est déployé, ce caractère  $\nu_\rho$  dépend de  $\rho$ .

**11.** Si l'on essaie d'étendre à  $G$  les techniques employées dans [36, 37] pour le groupe déployé  $\text{GL}_n(\mathbb{F})$ , on est confronté au fait que les représentations irréductibles cuspidales de  $G$  n'ont pas de modèle de Whittaker et qu'il n'y a pas de théorie des dérivées pour les représentations de  $G$ , dont l'usage est crucial dans [37] pour la classification des représentations irréductibles. C'est la raison pour laquelle on introduit dans la section 5 un outil technique important, permettant de faire un lien entre représentations de  $G$  et représentations de groupes linéaires généraux sur une extension finie du corps résiduel de  $\mathbb{F}$ . Un tel outil a déjà été utilisé dans [36] pour étudier les représentations irréductibles cuspidales modulaires de  $\text{GL}_n(\mathbb{F})$ , et de façon plus systématique

dans [27] pour définir une stratification de la catégorie des représentations complexes de  $GL_n(F)$  affinant la décomposition de Bernstein.

**12.** Le point de départ est un processus associant à toute représentation irréductible cuspidale de  $G$  un objet appelé son endo-classe. Il est décrit dans [7, 5] pour les représentations complexes et fonctionne de façon similaire pour les représentations modulaires. On en trouve dans [8] une interprétation arithmétique dans le cas complexe pour  $GL_n(F)$ . Ensuite, étant donnée une représentation irréductible cuspidale  $\rho$  de  $G$ , on peut lui attacher un entier  $r \geq 1$ , une extension finie  $\mathfrak{k}$  du corps résiduel de  $F$  et un foncteur  $\mathbf{K}$  de la catégorie des représentations lisses de  $G$  dans la catégorie des représentations du groupe fini  $GL_r(\mathfrak{k})$  possédant les propriétés suivantes :

- le foncteur  $\mathbf{K}$  est exact ;
- il envoie représentations admissibles sur représentations de dimension finie et représentations cuspidales sur représentations cuspidales (ou nulles) ;
- il annule les représentations irréductibles de  $G$  – *et uniquement celles-là* – dont le support cuspidal contient une représentation cuspidale dont l’endo-classe diffère de celle de  $\rho$ .

Par exemple, si  $\rho$  est de niveau zéro, alors  $\mathfrak{k}$  est le corps résiduel de  $D$  et  $\mathbf{K}$  est le foncteur associant à toute représentation lisse de  $G$  la représentation de  $GL_m(\mathfrak{k})$  sur l’espace de ses invariants sous le radical pro-unipotent du sous-groupe compact maximal  $GL_m(\mathcal{O})$ , où  $\mathcal{O}$  est l’anneau des entiers de  $D$ .

**13.** La propriété d’annulation du foncteur  $\mathbf{K}$  (troisième point ci-dessus), qui jouera un rôle essentiel dans des travaux ultérieurs (voir par exemple [25]), constitue un des principaux résultats de cet article (voir tout le paragraphe 5.2, notamment la proposition 5.6). Dans le cas complexe, le résultat découle du résultat principal de [33], à savoir que tout type semi-simple de  $G$  est un type pour un bloc de Bernstein bien déterminé. Dans le cas modulaire, nous avons procédé par relèvement de  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$  à  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$  pour pouvoir utiliser le résultat en caractéristique nulle.

La suite et fin de la section 5 est consacrée à l’établissement de deux autres propriétés importantes du foncteur  $\mathbf{K}$ , c’est-à-dire sa compatibilité à l’induction et à la restriction paraboliques (voir les propositions 5.9 et 5.16). Toutes ces propriétés fondamentales du foncteur  $\mathbf{K}$  sont dans le cas modulaire des résultats nouveaux, même dans le cas de  $GL_n(F)$ . Dans le cas complexe, la compatibilité à l’induction parabolique est prouvée dans [27], mais la preuve qui y est donnée ne s’applique pas au cas modulaire.

Ces foncteurs sont utilisés dans [25] pour prouver l’unicité du support supercuspidal d’une représentation irréductible et définir la notion de représentation résiduellement non dégénérée de  $G$ , qui généralise celle de représentation non dégénérée et est à la base de notre classification des représentations irréductibles de  $G$  en termes de multisegments.

## Remerciements

Nous remercions Jean-François Dat, Guy Henniart, Vanessa Miemietz, Shaun Stevens et Marie-France Vignéras pour de nombreuses discussions à propos de ce travail, et plus particulièrement Shaun Stevens pour ses idées qui ont abouti à la rédaction de l’appendice.

Une partie de ce travail a été réalisée lors du séjour des auteurs à l’Erwin Schrödinger Institute en janvier-février 2009 et du second auteur à l’Institut Henri Poincaré de janvier à mars 2010 ; que ces deux institutions soient remerciées pour leur accueil et leur soutien financier. Une autre

partie en a été réalisée lors de plusieurs séjours à l'University of East Anglia : nous remercions celle-ci pour son accueil et Shaun Stevens pour ses nombreuses invitations.

Alberto Mínguez remercie le CNRS pour les six mois de délégation dont il a bénéficié en 2011.

Vincent Sécherre remercie l'Université de la Méditerranée et l'Institut de Mathématiques de Luminy, où il était en poste durant la majeure partie de ce travail.

Enfin, nous remercions chaleureusement le rapporteur pour sa lecture rigoureuse et sa critique d'une première version de ce texte, qu'il a contribué à améliorer.

## Notations et conventions

**1.** Dans cet article,  $F$  est un corps commutatif localement compact et non archimédien de caractéristique résiduelle notée  $p$ , et  $R$  est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de  $p$ .

**2.** Toutes les  $F$ -algèbres sont supposées unitaires et de dimension finie. Par  $F$ -algèbre à division on entend  $F$ -algèbre centrale dont l'anneau sous-jacent est un corps, pas forcément commutatif. Si  $K$  est une algèbre à division sur une extension finie de  $F$ , notons  $\mathcal{O}_K$  son anneau d'entiers,  $\mathfrak{p}_K$  son idéal maximal,  $\mathfrak{k}_K$  son corps résiduel et  $q_K$  le cardinal de  $\mathfrak{k}_K$ . Posons enfin  $q = q_F$ .

**3.** Une  $R$ -représentation lisse d'un groupe topologique  $G$  est la donnée d'un  $R$ -espace vectoriel  $V$  et d'un homomorphisme de  $G$  dans  $GL(V)$  tel que le stabilisateur dans  $G$  de tout vecteur de  $V$  soit ouvert. Une  $R$ -représentation lisse est dite *admissible* si, pour tout sous-groupe ouvert et compact  $K$  de  $G$ , l'espace  $V^K$  des vecteurs de  $V$  invariants par  $K$  est de dimension finie. *Dans cet article, toutes les représentations sont des  $R$ -représentations lisses.*

Un  $R$ -caractère de  $G$  est un homomorphisme de  $G$  dans  $R^\times$  de noyau ouvert. Si  $\pi$  est une  $R$ -représentation de  $G$  et  $\chi$  un  $R$ -caractère de  $G$ , on note  $\chi\pi$  ou  $\pi\chi$  la représentation  $g \mapsto \chi(g)\pi(g)$ .

Si aucune ambiguïté n'est à craindre, on écrira *caractère* et *représentation* plutôt que  $R$ -caractère et  $R$ -représentation.

## 1. Préliminaires

**1.1.** On fixe une  $F$ -algèbre à division  $D$  de degré réduit  $d$ . Pour  $m \geq 1$ , on note  $A_m = \mathcal{M}_m(D)$  la  $F$ -algèbre des matrices de taille  $m \times m$  à coefficients dans  $D$ , et on pose  $G_m = GL_m(D)$ .

**1.2.** Soit  $G = G_m$  pour  $m \geq 1$ . On désigne par  $\mathcal{R}_R(G)$  la catégorie abélienne des représentations de  $G$  (qui sont lisses et à coefficients dans  $R$ ), par  $\text{Irr}_R(G)$  l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations irréductibles de  $G$  et par  $\mathcal{G}(G, R)$  le groupe de Grothendieck des représentations de longueur finie de  $G$ . Ce dernier est un  $\mathbb{Z}$ -module libre de base  $\text{Irr}_R(G)$ , canoniquement muni d'une relation d'ordre partiel, notée  $\leq$ .

Pour toute représentation de longueur finie  $\sigma$  de  $G$ , notons  $[\sigma]$  son image dans  $\mathcal{G}(G, R)$ . Si  $\sigma$  est irréductible,  $[\sigma]$  désigne donc sa classe d'isomorphisme.

D'après [36, II.2.8], toute représentation irréductible de  $G$  est admissible.

**1.3.** On fixe une fois pour toutes une racine carrée de  $q$  dans  $R$ . Si  $P = MN$  est un sous-groupe parabolique de  $G$  muni d'une décomposition de Levi, on note  $r_P^G$  le foncteur de restriction parabolique normalisé de  $\mathcal{R}_R(G)$  dans  $\mathcal{R}_R(M)$  et  $i_P^G$  son adjoint à droite, le foncteur d'induction parabolique normalisé lui correspondant. Ces foncteurs sont exacts et ils préservent l'admissibilité et le fait d'être de longueur finie (voir [36], chapitre II, paragraphes 2.1, 3.8 et 5.13).

Soit  $P^-$  le sous-groupe parabolique de  $G$  opposé à  $P$  relativement à  $M$ .

**Proposition 1.1.** — *Si  $\pi$  et  $\sigma$  sont des représentations admissibles de  $G$  et de  $M$  respectivement, il y a un isomorphisme de  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels :*

$$(1.1) \quad \mathrm{Hom}_G(\mathbf{i}_{P^-}^G(\sigma), \pi) \simeq \mathrm{Hom}_M(\sigma, \mathbf{r}_P^G(\pi))$$

dit de seconde adjonction (voir [36, II.3.8]).

Si  $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$  est une famille d'entiers  $\geq 1$  de somme  $m$ , il lui correspond le sous-groupe de Levi standard  $M_\alpha$  de  $G_m$  constitué des matrices diagonales par blocs de tailles  $m_1, \dots, m_r$  respectivement, que l'on identifie naturellement à  $G_{m_1} \times \dots \times G_{m_r}$ . On note  $P_\alpha$  le sous-groupe parabolique de  $G_m$  de facteur de Levi  $M_\alpha$  formé des matrices triangulaires supérieures par blocs de tailles  $m_1, \dots, m_r$  respectivement, et on note  $N_\alpha$  son radical unipotent. Les foncteurs  $\mathbf{i}_{P_\alpha}^{G_m}$  et  $\mathbf{r}_{P_\alpha}^{G_m}$  sont simplement notés respectivement  $\mathbf{i}_\alpha$  et  $\mathbf{r}_\alpha$ . Si, pour chaque entier  $i \in \{1, \dots, r\}$ , on a une représentation  $\pi_i$  de  $G_{m_i}$ , on pose :

$$\pi_1 \times \dots \times \pi_r = \mathbf{i}_\alpha(\pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_r).$$

**1.4.** Une représentation irréductible de  $G$  est *cuspidale* si son image par  $\mathbf{r}_P^G$  est nulle pour tout sous-groupe parabolique propre  $P$  de  $G$ , c'est-à-dire si elle n'est isomorphe à aucune sous-représentation (ou, de façon équivalente, à aucun quotient) d'une induite parabolique propre.

Une représentation irréductible de  $G$  est *supercuspidale* si elle n'est isomorphe à aucun sous-quotient d'une représentation de la forme  $\mathbf{i}_P^G(\sigma)$ , où  $P$  est un sous-groupe parabolique propre de  $G$  et  $\sigma$  une représentation irréductible<sup>(1)</sup> d'un facteur de Levi de  $P$ .

Étant donnée une représentation irréductible  $\pi$  de  $G$ , il existe des entiers  $m_1, \dots, m_r \geq 1$  de somme  $m$ , et, pour chaque  $i \in \{1, \dots, r\}$ , il existe une représentation irréductible cuspidale  $\rho_i$  de  $G_{m_i}$ , de telle sorte que  $\pi$  soit une sous-représentation de  $\rho_1 \times \dots \times \rho_r$ . On note :

$$\mathrm{cusp}(\pi)$$

la somme formelle  $[\rho_1] + \dots + [\rho_r]$  dans le monoïde commutatif libre de base la réunion disjointe des  $\mathrm{Irr}_R(G_m)$ ,  $m \geq 1$ . Elle est uniquement déterminée et s'appelle le support cuspidal de  $\pi$ . En outre, il y a une permutation  $w$  de  $\{1, \dots, r\}$  telle que  $\pi$  soit un quotient de  $\rho_{w(1)} \times \dots \times \rho_{w(r)}$ . Pour tous ces résultats, on renvoie à [36, II.2.20] et [25, §2].

**1.5.** Soient  $H$  un sous-groupe ouvert de  $G$  et  $\sigma$  une représentation de  $H$  sur un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $V$ . On note  $\mathrm{ind}_H^G(\sigma)$  l'induite compacte de  $\sigma$  à  $G$ , constituée des fonctions  $f : G \rightarrow V$  localement constantes à support compact modulo  $H$  telles que  $f(hg) = \sigma(h)f(g)$  pour  $h \in H$ ,  $g \in G$ , et :

$$\mathcal{H}(G, \sigma)$$

l'*algèbre de Hecke* de  $G$  relativement à  $\sigma$ , c'est-à-dire l'algèbre des  $G$ -endomorphismes de  $\mathrm{ind}_H^G(\sigma)$ . Par réciprocity de Frobenius et décomposition de Mackey, elle s'identifie à l'algèbre de convolution des fonctions  $f : G \rightarrow \mathrm{End}_R(V)$  telles que  $f(hgh') = \sigma(h) \circ f(g) \circ \sigma(h')$  pour tous  $h, h' \in H$  et  $g \in G$  et dont le support est une union finie de  $H$ -doubles classes.

Si  $\sigma$  est le caractère trivial du groupe  $H$ , on note simplement  $\mathcal{H}(G, H)$  l'algèbre de Hecke qui lui correspond.

<sup>(1)</sup>On peut prouver qu'on peut omettre la condition d'irréductibilité sur  $\sigma$  dans cette définition, c'est-à-dire qu'une représentation supercuspidale de  $G$  n'est isomorphe à aucun sous-quotient d'une induite parabolique propre de la forme  $\mathbf{i}_P^G(\sigma)$  avec  $\sigma$  lisse ; voir [34].

On appelle *ensemble d'entrelacement* de  $\sigma$  dans  $G$  l'ensemble des  $g \in G$  pour lesquels il existe une fonction  $f \in \mathcal{H}(G, \sigma)$  telle que  $f(g) \neq 0$ .

**1.6.** Soit  $\ell$  un nombre premier différent de  $p$ . On note  $\mathbb{Q}_\ell$  le corps des nombres  $\ell$ -adiques,  $\mathbb{Z}_\ell$  son anneau d'entiers et  $\mathbb{F}_\ell$  le corps résiduel de  $\mathbb{Z}_\ell$ . On fixe une clôture algébrique  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$  de  $\mathbb{Q}_\ell$ , on note  $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$  son anneau d'entiers et  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$  le corps résiduel de  $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ , qui est une clôture algébrique de  $\mathbb{F}_\ell$ .

**Définition 1.2.** — Une représentation de  $G$  sur un  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -espace vectoriel  $V$  est *entière* si elle est admissible et si elle admet une *structure entière*, c'est-à-dire un sous- $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ -module de  $V$  stable par  $G$  et engendré par une base de  $V$  sur  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$  (voir [36, 39]).

Soit  $\pi$  une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible entière de  $G$ . On a les propriétés suivantes, d'après [40, Theorem 1] et [36, II.5.11] :

- (1) toutes les structures entières de  $\pi$  sont de type fini comme  $\overline{\mathbb{Z}}_\ell G$ -modules ;
- (2) si  $\mathfrak{v}$  est une structure entière de  $\pi$ , la représentation de  $G$  sur  $\mathfrak{v} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$  est de longueur finie ;
- (3) la semi-simplifiée de  $\mathfrak{v} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ , qu'on note  $\mathbf{r}_\ell(\pi)$  et qu'on appelle la *réduction modulo  $\ell$*  de  $\pi$ , ne dépend pas du choix de  $\mathfrak{v}$  mais seulement de la classe d'isomorphisme de  $\pi$ .

Par linéarité, ceci définit un morphisme de groupes :

$$(1.2) \quad \mathbf{r}_\ell : \mathcal{G}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{\text{ent}} \rightarrow \mathcal{G}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell),$$

le membre de gauche étant le sous-groupe de  $\mathcal{G}(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$  engendré par les classes de  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations irréductibles entières de  $G$ .

**Remarque 1.3.** — Si  $H$  est un groupe profini, alors toute  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation de dimension finie de  $H$  est entière ([35, théorème 32]) et on a un morphisme de réduction  $\mathbf{r}_\ell$  analogue à (1.2).

**1.7.** Soit  $\sigma$  une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation entière d'un sous-groupe ouvert  $H \subseteq G$ . Si  $\mathfrak{v}$  est une structure entière de  $\sigma$ , alors d'après [40, Proposition II.3] le sous-module  $i(\mathfrak{v})$  des fonctions à valeurs dans  $\mathfrak{v}$  est une structure entière de  $\text{ind}_H^G(\sigma)$  et l'homomorphisme naturel de  $\text{ind}_H^G(\mathfrak{v} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell)$  dans  $i(\mathfrak{v}) \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$  est un isomorphisme de  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentations. Si en outre  $\text{ind}_H^G(\sigma)$  est de longueur finie, alors sa réduction modulo  $\ell$  est égale à  $\text{ind}_H^G(\mathbf{r}_\ell(\sigma))$  dans  $\mathcal{G}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ .

**1.8.** On choisit des racines carrées de  $q$  dans  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$  et  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$  de sorte que la seconde soit la réduction modulo  $\ell$  de la première. Soit  $P = MN$  un sous-groupe parabolique de  $G$ . Si  $\mathfrak{v}$  est une structure entière d'une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation entière  $\sigma$  de  $M$ , alors d'après [36, II.4.14] le sous-espace  $i(\mathfrak{v})$  des fonctions à valeurs dans  $\mathfrak{v}$  est une structure entière de  $i_P^G(\sigma)$  et le morphisme naturel de  $i(\mathfrak{v}) \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$  dans  $i_P^G(\mathfrak{v} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell)$  est un isomorphisme de  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentations. Si en outre  $\sigma$  est de longueur finie, la réduction modulo  $\ell$  de  $i_P^G(\sigma)$  est égale à  $i_P^G(\mathbf{r}_\ell(\sigma))$  dans  $\mathcal{G}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ .

## 2. Types semi-simples

Dans [10, 12], Bushnell et Kutzko ont construit des représentations irréductibles complexes de certains sous-groupes ouverts compacts de  $\text{GL}_n(\mathbb{F})$ , pour  $n \geq 1$ , appelées types semi-simples, permettant une étude très fine et exhaustive des représentations lisses complexes de ce groupe. Cette construction a ensuite été adaptée aux représentations modulaires de  $\text{GL}_n(\mathbb{F})$  par Vignéras [36, 37] et généralisée aux représentations complexes de  $\text{GL}_m(\mathbb{D})$ , pour  $m \geq 1$ , par Broussous, Sécherre, Stevens [3, 28, 29, 30, 33]. Dans cette section, nous définissons plus généralement les types semi-simples de  $\text{GL}_m(\mathbb{D})$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$ .



Dans les paragraphes 2.1 à 2.6, nous construisons les R-types simples de  $GL_m(D)$  à partir des strates et des caractères simples, et nous calculons leurs algèbres de Hecke. La construction est très proche de celle développée dans le cas complexe et ne s'en écarte qu'en trois occasions :

(1) Pour prouver l'existence des  $\beta$ -extensions (voir le paragraphe 2.4), elle-même s'appuyant sur l'existence des relations de cohérence et du transfert (voir la proposition 2.3), nous utilisons le lemme 2.2 dont la preuve nécessite un argument adapté au cas où la caractéristique de  $R$  est non nulle. Ceci est dû au fait que, dans ce cas, une représentation lisse d'un groupe compact n'est pas toujours semi-simple, et avoir une algèbre d'endomorphismes de dimension 1 n'équivaut pas à être irréductible.

(2) Pour la même raison, on ne peut pas appliquer l'argument de [10, 5.3.2] dans le cas modulaire pour prouver l'irréductibilité de certaines représentations. On introduit le lemme 2.6, d'où dérivent les corollaires 2.7 et 2.8.

(3) Pour déterminer la structure de l'algèbre de Hecke d'un type simple (paragraphe 2.6), un argument adapté au cas où la caractéristique de  $R$  est non nulle est nécessaire pour prouver le lemme 2.16, car dans le cas modulaire une homothétie non nulle peut être de trace nulle.

Aux paragraphes 2.8 et 2.9, nous définissons les R-types semi-simples de  $GL_m(D)$  comme des paires couvrantes de types simples maximaux de sous-groupes de Levi. Dans le cas homogène, c'est-à-dire lorsqu'une seule endo-classe de ps-caractère apparaît, la méthode suivie dans le cas complexe ([12, 33]) s'adapte sans difficulté au cas modulaire. Des difficultés apparaissent dans le cas non homogène :

(1) Une fois construit un type semi-simple  $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$  par récurrence comme dans le cas complexe (proposition 2.28), nous suivons l'argument de [12, Corollary 6.6] pour prouver que  $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$  est une paire couvrante. Celui-ci repose sur le fait que tout élément inversible à gauche de l'algèbre de Hecke  $\mathcal{H}(G, \boldsymbol{\lambda})$  est inversible, ce fait lui-même étant prouvé à partir de [11, 7.15], c'est-à-dire que tout module à droite simple sur  $\mathcal{H}(G, \boldsymbol{\lambda})$  est de dimension finie. Dans le cas modulaire, on ne peut pas appliquer l'argument prouvant [11, 7.15] dans le cas complexe, car on ne sait pas que tout tel module est, à isomorphisme près, de la forme  $\text{Hom}_{\mathbf{J}}(\boldsymbol{\lambda}, \pi)$  pour une représentation irréductible  $\pi$  de  $G$  convenable — du moins on ne le sait pas encore puisque ce sera une conséquence de la proposition 4.8 et du théorème 4.2. A la place, on utilise [2, Proposition III.2].

(2) Dans le cas complexe, la structure de  $\mathcal{H}(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$  est déterminée à l'aide de [11, 12.1], dont la preuve n'est pas valable (ou pour le moins nécessite des explications) dans le cas modulaire. A la place, nous utilisons une majoration de l'ensemble d'entrelacement de  $\boldsymbol{\lambda}$  dans  $G$  effectuée en appendice (voir ci-dessous).

Au paragraphe 2.10, les résultats que nous obtenons sont nouveaux, même dans le cas complexe. Étant donné un type semi-simple  $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$  de  $G$ , nous définissons une décomposition :

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\kappa} \otimes \boldsymbol{\sigma}$$

analogue à la décomposition bien connue pour les types simples. La restriction de  $\boldsymbol{\kappa}$  au radical pro-unipotent  $\mathbf{J}^1$  de  $\mathbf{J}$  est une représentation irréductible  $\boldsymbol{\eta}$  dont l'entrelacement est déterminé grâce au travail effectué dans l'appendice. Il est de la forme  $\mathbf{J}(L \cap B^\times)\mathbf{J}$  où  $B^\times$  est le centralisateur d'un certain élément  $\beta$  dans  $G$  et où  $L$  est un sous-groupe de Levi de  $G$  correspondant à la présence de plusieurs endo-classes lorsque  $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$  n'est pas homogène. Cette formule d'entrelacement est utilisée dans la preuve de la proposition importante 4.8.

Dans le paragraphe 2.11 enfin, étant donné un nombre premier  $\ell \neq p$ , nous étudions la réduction modulo  $\ell$  des  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -types simples, ce qui fournit une preuve de l'existence des  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -types simples différente de celle des paragraphes 2.4 et 2.5.

### 2.1. Strates simples

Dans tout ce qui suit, on suppose le langage des strates simples connu du lecteur. On trouvera plus de détails dans [28, 32] (voir aussi [10, 12] dans le cas déployé). On fixe un entier  $m \geq 1$  ; on pose  $A = A_m$  et  $G = G_m$ .

Soit  $[\Lambda, n, 0, \beta]$  une strate simple de  $A$  (au sens par exemple de [32, §1.6]). Elle est constituée d'une  $\mathcal{O}_D$ -suite de réseaux  $\Lambda$  de  $D^m$  et d'un élément  $\beta \in A$  satisfaisant à certaines conditions. Il correspond à  $\Lambda$  une famille décroissante  $(U_k(\Lambda))_{k \geq 0}$  de sous-groupes ouverts compacts de  $G$  et un  $\mathcal{O}_F$ -ordre héréditaire de  $A$ , noté  $\mathfrak{A}(\Lambda)$ . La sous- $F$ -algèbre de  $A$  engendrée par  $\beta$  est un corps, noté  $F(\beta)$ .

À cette strate simple on associe (voir [32, §2.4]) deux sous-groupes ouverts compacts  $H(\beta, \Lambda)$ ,  $J(\beta, \Lambda)$  de  $U(\Lambda) = U_0(\Lambda)$ . Chacun d'eux est filtré par une suite décroissante de pro- $p$ -sous-groupes ouverts compacts :

$$H^k(\beta, \Lambda) = H(\beta, \Lambda) \cap U_k(\Lambda), \quad J^k(\beta, \Lambda) = J(\beta, \Lambda) \cap U_k(\Lambda), \quad k \geq 1.$$

On renvoie à [28, §3.3] et à [32, §2] pour une étude détaillée des propriétés de ces groupes.

### 2.2. Caractères simples

On choisit un homomorphisme injectif  $\iota_{p,R}$  du groupe  $\mu_{p^\infty}(\mathbb{C})$  des racines complexes de l'unité d'ordre une puissance de  $p$  vers le groupe multiplicatif  $\mathbb{R}^\times$  ainsi qu'un caractère complexe additif  $\psi_{F,\mathbb{C}} : F \rightarrow \mathbb{C}^\times$  trivial sur  $\mathfrak{p}_F$  mais pas sur  $\mathcal{O}_F$ .

Soit  $[\Lambda, n, 0, \beta]$  une strate simple de  $A$ , et soit  $q_0 = -k_0(\beta, \Lambda)$  l'opposé de son exposant critique. Dans [32, §2.4], on associe à cette strate simple et à tout entier  $m$  tel que  $0 \leq m \leq q_0 - 1$  un ensemble fini  $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\Lambda, m, \beta)$  (qui dépend de  $\psi_{F,\mathbb{C}}$ ) de caractères complexes de  $H^{m+1}(\beta, \Lambda)$  appelés caractères simples de niveau  $m$ .

Les  $H^{m+1}(\beta, \Lambda)$  étant des pro- $p$ -groupes pour  $m \in \{0, \dots, q_0 - 1\}$ , l'application  $\theta \mapsto \iota_{p,R} \circ \theta$  est bien définie pour tout  $\theta \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\Lambda, m, \beta)$ . L'image de  $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\Lambda, m, \beta)$  par cette application, notée  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(\Lambda, m, \beta)$  – ou simplement  $\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$  si aucune ambiguïté n'en résulte – est un ensemble fini de  $\mathbb{R}$ -caractères de  $H^{m+1}(\beta, \Lambda)$  appelés *R-caractères simples de niveau  $m$* .

Toutes les propriétés des caractères simples complexes se transportent aux  $\mathbb{R}$ -caractères simples. On renvoie le lecteur à [10, 12, 28, 32, 5, 33] pour une étude détaillée de ces propriétés. On rappelle simplement ici le principe du transfert. Soit un entier  $m' \geq 1$ , et soit  $[\Lambda', n', 0, \beta']$  une strate simple de  $A_{m'}$ . On suppose qu'il y a un isomorphisme de  $F$ -algèbres  $\varphi$  de  $F(\beta)$  vers  $F(\beta')$  tel que  $\varphi(\beta) = \beta'$ . Il existe alors une bijection :

$$\mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta) \rightarrow \mathcal{C}(\Lambda', 0, \beta')$$

canoniquement associée à  $\varphi$ , appelée application de transfert (voir [32, §2.6]).

On utilisera également la notion de ps-caractère, ainsi que la relation d'endo-équivalence entre ps-caractères, pour lesquelles on renvoie à [7, §8] et à [5].

### 2.3. Représentations de Heisenberg

Soit  $[\Lambda, n, 0, \beta]$  une strate simple de  $A$ . Posons  $E = F(\beta)$ . Le centralisateur  $B$  de  $E$  dans  $A$  est une  $E$ -algèbre centrale simple. L'égalité  $J(\beta, \Lambda) = (U(\Lambda) \cap B^\times)J^1(\beta, \Lambda)$  induit un isomorphisme

canonique de groupes :

$$(2.1) \quad \mathbf{J}(\beta, \Lambda)/\mathbf{J}^1(\beta, \Lambda) \simeq (\mathbf{U}(\Lambda) \cap \mathbf{B}^\times)/(\mathbf{U}_1(\Lambda) \cap \mathbf{B}^\times)$$

permettant d'associer canoniquement et bijectivement une représentation de  $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\beta, \Lambda)$  triviale sur  $\mathbf{J}^1 = \mathbf{J}^1(\beta, \Lambda)$  à une représentation de  $\mathbf{U}(\Lambda) \cap \mathbf{B}^\times$  triviale sur  $\mathbf{U}_1(\Lambda) \cap \mathbf{B}^\times$ .

Soit  $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$  un caractère simple. On note  $\mathfrak{K}(\Lambda)$  le normalisateur de  $\Lambda$  dans  $\mathbf{G}$  ; c'est un sous-groupe ouvert et compact modulo le centre de  $\mathbf{G}$ . D'après [32, §2.10], le groupe  $(\mathfrak{K}(\Lambda) \cap \mathbf{B}^\times)\mathbf{J}$  normalise  $\theta$  et l'ensemble d'entrelacement (voir le paragraphe 1.5) de  $\theta$  dans  $\mathbf{G}$  est égal à  $\mathbf{J}^1\mathbf{B}^\times\mathbf{J}^1$ .

**Proposition 2.1.** — *Il existe une représentation irréductible  $\eta$  de  $\mathbf{J}^1$ , unique à isomorphisme près, dont la restriction à  $\mathbf{H}^1 = \mathbf{H}^1(\beta, \Lambda)$  contient  $\theta$ . Elle possède les propriétés suivantes :*

- (1) sa dimension sur  $\mathbf{R}$  est égale à  $(\mathbf{J}^1 : \mathbf{H}^1)^{1/2}$  et sa restriction à  $\mathbf{H}^1$  est un multiple de  $\theta$  ;
- (2) son ensemble d'entrelacement dans  $\mathbf{G}$  est égal à  $\mathbf{J}^1\mathbf{B}^\times\mathbf{J}^1$  et, pour tout  $y \in \mathbf{B}^\times$ , le  $\mathbf{R}$ -espace d'entrelacement  $\text{Hom}_{\mathbf{J}^1 \cap (\mathbf{J}^1)^y}(\eta, \eta^y)$  est de dimension 1.

*Démonstration.* — Puisque  $\mathbf{J}^1$  est un pro- $p$ -groupe, et  $\mathbf{R}$  étant algébriquement clos et de caractéristique différente de  $p$ , toutes ses représentations sont semi-simples, et la preuve existant dans le cas complexe (voir [6, §8.3] et [33, Lemma 5.1]) s'applique.  $\square$

Une telle représentation  $\eta$  s'appelle *représentation de Heisenberg* associée à  $\theta$ . Sa classe d'isomorphisme est normalisée par  $(\mathfrak{K}(\Lambda) \cap \mathbf{B}^\times)\mathbf{J}$ , et l'induite de  $\eta$  à  $\mathbf{U}_1(\Lambda)$  est irréductible.

#### 2.4. $\beta$ -extensions

Une  $\beta$ -extension de  $\eta$  (ou de  $\theta$ ) est une représentation irréductible de  $\mathbf{J}$  prolongeant  $\eta$  et dont l'ensemble d'entrelacement contient  $\mathbf{B}^\times$ . Lorsque  $\mathbf{R}$  est le corps des nombres complexes, on sait d'après [29, Théorème 2.28] et [33, Proposition 6.4] que tout caractère simple admet une  $\beta$ -extension. La méthode utilisée dans [29, 33] est encore valable lorsque le corps  $\mathbf{R}$  est quelconque. Toutes les étapes peuvent être reprises une à une, à l'exception du résultat suivant qui nécessite un argument adapté au cas où la caractéristique de  $\mathbf{R}$  est non nulle.

**Lemme 2.2.** — *Soit  $\mu$  une représentation irréductible de  $\mathbf{J}$  contenant  $\eta$ . Alors l'induite de  $\mu$  au groupe  $(\mathbf{U}(\Lambda) \cap \mathbf{B}^\times)\mathbf{U}_1(\Lambda)$  est irréductible.*

*Démonstration.* — On note  $\rho$  l'induite de  $\mu$  à  $(\mathbf{U}(\Lambda) \cap \mathbf{B}^\times)\mathbf{U}_1(\Lambda)$  et  $\mathbf{W}$  l'espace de  $\mu$ . Comme  $\mathbf{J}^1$  est un pro- $p$ -groupe, la restriction de  $\mu$  à  $\mathbf{J}^1$  se décompose sous la forme :

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}(\eta) \oplus \mathbf{W}'$$

où  $\mathbf{W}(\eta)$  est une somme directe non nulle de copies de  $\eta$  et où aucun sous-quotient irréductible de  $\mathbf{W}'$  n'est isomorphe à  $\eta$ . Comme  $\mathbf{J}$  normalise la classe d'isomorphisme de  $\eta$ , il laisse stable le sous-espace  $\mathbf{W}(\eta)$ . Comme  $\mu$  est irréductible, on en déduit que  $\mathbf{W} = \mathbf{W}(\eta)$ . La restriction de  $\mu$  à  $\mathbf{J}^1$  est donc un multiple de  $\eta$ .

Par application de la formule de Mackey, la restriction de  $\rho$  à  $\mathbf{J}$  est la somme directe des :

$$\mathbf{I}(u) = \text{ind}_{\mathbf{J} \cap \mathbf{J}^u}^{\mathbf{J}}(\mu^u),$$

pour  $u$  décrivant un système de représentants de doubles classes de  $(\mathbf{U}(\Lambda) \cap \mathbf{B}^\times)\mathbf{U}_1(\Lambda) \bmod \mathbf{J}$ . Comme la restriction de  $\mu$  à  $\mathbf{J}^1$  est un multiple de  $\eta$ , et comme l'ensemble d'entrelacement de  $\eta$  dans  $(\mathbf{U}(\Lambda) \cap \mathbf{B}^\times)\mathbf{U}_1(\Lambda)$  est égal à  $\mathbf{J}$ , l'espace  $\text{Hom}_{\mathbf{J}^1}(\eta, \mathbf{I}(u))$  est non nul si et seulement si  $u \in \mathbf{J}$ . Par conséquent,  $\mu$  est un facteur direct de la restriction de  $\rho$  à  $\mathbf{J}$ , et c'en est le seul sous-quotient irréductible contenant  $\eta$ . En particulier, l'algèbre des endomorphismes de  $\rho$  est de dimension 1

sur  $R$ . Mais ceci ne suffit pas, quand  $R$  est de caractéristique non nulle, pour en déduire que  $\rho$  est irréductible. Nous allons appliquer le critère d'irréductibilité [38, Lemma 4.2].

Il faut montrer que, pour tout quotient irréductible  $\pi$  de  $\rho$ , la représentation  $\mu$  est un quotient de la restriction de  $\pi$  à  $J$ . Soit  $\pi$  un tel quotient irréductible. Par réciprocity de Frobenius, sa restriction à  $J$  contient  $\mu$ . On déduit du paragraphe précédent de la preuve que  $\mu$  est un facteur direct, donc un quotient, de la restriction de  $\pi$  à  $J$ .  $\square$

Grâce à ce lemme, on peut prouver comme dans le cas où  $R$  est le corps des nombres complexes (voir [29, §2.4] et [33, Proposition 6.4]) le résultat suivant.

**Proposition 2.3.** — *Soit  $[\Lambda', n', 0, \beta]$  une strate simple de  $A$  telle qu'on ait  $U(\Lambda) \subseteq U(\Lambda')$ , soit  $\theta' \in \mathcal{C}(\Lambda', 0, \beta)$  le transfert du caractère simple  $\theta$  et soit  $\eta'$  la représentation de Heisenberg de  $\theta'$ .*

(1) *Si  $\kappa$  est une représentation de  $J$  prolongeant  $\eta$ , il existe une unique représentation  $\kappa'$  de  $J(\beta, \Lambda')$  prolongeant  $\eta'$  telle qu'on ait :*

$$\mathrm{ind}_{J(\beta, \Lambda)}^{(U(\Lambda) \cap B^\times)U_1(\Lambda)}(\kappa) \simeq \mathrm{ind}_{(U(\Lambda) \cap B^\times)J^1(\beta, \Lambda')}^{(U(\Lambda) \cap B^\times)U_1(\Lambda)}(\kappa'),$$

*ces induites étant irréductibles.*

(2) *L'application  $\kappa \mapsto \kappa'$  ainsi définie induit une bijection (appelée application de transfert) entre les  $\beta$ -extensions de  $\eta$  et les  $\beta$ -extensions de  $\eta'$ .*

A partir de là, on prouve comme dans le cas complexe l'existence de  $\beta$ -extensions pour tout  $R$ -caractère simple.

**Proposition 2.4.** — *Tout  $R$ -caractère simple  $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$  admet une  $\beta$ -extension.*

Dans le cas où  $R = \overline{\mathbb{F}}_\ell$ , on verra au paragraphe 2.11 comment prouver ce résultat par réduction modulo  $\ell$ , à partir de l'existence de  $\beta$ -extensions dans le cas complexe.

Comme dans [33, Proposition 6.4], si  $\kappa$  est une  $\beta$ -extension de  $\theta$ , alors l'ensemble des  $\beta$ -extensions de  $\theta$  est égal à :

$$(2.2) \quad \{\kappa \otimes (\chi \circ N_{B/E}) \mid \chi \text{ caractère de } \mathcal{O}_E^\times \text{ trivial sur } 1 + \mathfrak{p}_E\},$$

où  $N_{B/E}$  désigne la norme réduite de  $B$  sur  $E$ , et où  $\chi \circ N_{B/E}$  est vu comme un caractère de  $J$  trivial sur  $J^1$  grâce à (2.1).

L'importance des  $\beta$ -extensions est justifiée par le résultat suivant, qui se démontre exactement comme dans le cas complexe (voir [10, 5.3.2] et [30, Lemme 4.2(2)]).

**Lemme 2.5.** — *Soient  $\kappa$  une  $\beta$ -extension de  $\theta$  et  $\xi$  une représentation irréductible de  $J$  triviale sur  $J^1$ . Pour tout  $g \in B^\times$ , on a :*

$$\mathrm{Hom}_{J \cap J^g}(\kappa \otimes \xi, \kappa^g \otimes \xi^g) = \mathrm{Hom}_{J \cap J^g}(\kappa, \kappa^g) \otimes \mathrm{Hom}_{J \cap J^g}(\xi, \xi^g).$$

Pour prouver qu'une représentation de  $J$  de la forme  $\kappa \otimes \xi$  comme ci-dessus est irréductible, l'argument de [10, 5.3.2] ne s'applique pas dans le cas modulaire, pour la même raison que celle invoquée dans la preuve du lemme 2.2. Voici d'abord un lemme général.

**Lemme 2.6.** — *Soit  $\kappa$  une représentation irréductible d'un groupe profini  $J$ . Supposons qu'il y a un pro- $p$ -sous-groupe ouvert distingué  $J^1$  de  $J$  tel que la restriction  $\eta$  de  $\kappa$  à  $J^1$  soit irréductible. Alors le foncteur  $W \mapsto \kappa \otimes W$  induit une équivalence entre :*

- (1) *la catégorie des représentations de  $J/J^1$  ;*
- (2) *la catégorie  $\mathcal{R}(J, \eta)$  des représentations de  $J$  dont la restriction à  $J^1$  est  $\eta$ -isotypique.*

*Démonstration.* — Comme  $J^1$  est un pro- $p$ -groupe, et comme l'induction préserve la projectivité, l'induite  $P$  de  $\eta$  à  $J$  est projective dans la catégorie des représentation de  $J$ . Comme  $J$  normalise la classe d'isomorphisme de  $\eta$ , la restriction de  $P$  (donc de chacun de ses sous-quotients) à  $J^1$  est  $\eta$ -isotypique. Ainsi  $P$  est un progénérateur de  $\mathcal{R}(J, \eta)$ . Il s'ensuit (voir par exemple [26, Proposition 1.1]) que le foncteur  $\pi \mapsto \text{Hom}_{J^1}(\eta, \pi)$  induit une équivalence entre  $\mathcal{R}(J, \eta)$  et la catégorie des modules à droite sur  $\text{End}_J(P)$  ; un quasi-inverse est donné par le foncteur  $\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m} \otimes P$ .

Identifions maintenant  $P$  à la représentation  $\kappa \otimes P_1$  où  $P_1$  désigne la représentation régulière de  $J/J^1$ , c'est-à-dire l'induite à  $J$  du caractère trivial de  $J^1$ . L'application  $f \mapsto \kappa \otimes f$  définit un isomorphisme de  $R$ -algèbres de  $R[J/J^1]$ , l'algèbre de groupe de  $J/J^1$ , vers  $\text{End}_J(P)$ . Le résultat s'ensuit.  $\square$

Appliquons ce lemme au cas où  $\kappa$  est une représentation du groupe  $J = J(\beta, \Lambda)$  prolongeant  $\eta$  et  $J^1 = J^1(\beta, \Lambda)$ .

**Corollaire 2.7.** — *Soit  $\kappa$  une représentation de  $J$  prolongeant  $\eta$ , et soit  $\xi$  une représentation irréductible de  $J/J^1$ . Alors la représentation  $\kappa \otimes \xi$  est irréductible.*

**Corollaire 2.8.** — *Soit  $\pi$  une représentation irréductible d'un sous-groupe ouvert de  $G$  contenant  $J$ . On suppose que  $\pi$  contient  $\theta$ . Alors il y a une représentation  $\kappa$  de  $J$  prolongeant  $\eta$  et une représentation irréductible  $\xi$  de  $J$  triviale sur  $J^1$  telle que  $\kappa \otimes \xi$  soit une sous-représentation (irréductible) de la restriction de  $\pi$  à  $J$ .*

*Démonstration.* — Puisque  $J^1$  est un pro- $p$ -groupe, la restriction de  $\pi$  à  $J^1$  est semi-simple. Elle contient donc la représentation  $\eta$  et se décompose sous la forme :

$$W = W(\eta) \oplus W'$$

où  $W(\eta)$  est une somme directe non nulle de copies de  $\eta$  et où aucun sous-quotient irréductible de  $W'$  n'est isomorphe à  $\eta$ . Notons  $V$  la représentation de  $J$  sur  $W(\eta)$ , et notons  $Y$  la représentation de  $J/J^1$  lui correspondant par le lemme 2.6. Comme  $J/J^1$  est fini,  $Y$  admet une sous-représentation irréductible  $\xi$ . Par le lemme 2.6 encore,  $\kappa \otimes \xi$  est une sous-représentation irréductible de  $V$ , donc de la restriction de  $\pi$  à  $J$ .  $\square$

## 2.5. Types simples

On définit les  $R$ -types simples de  $G$  comme dans le cas complexe (voir [30, §4.1] – en particulier la remarque 4.1 permettant de faire des types simples de niveau zéro un cas particulier de types simples – ainsi que [33, §5.5]). Rappelons brièvement cette définition.

Soit  $[\Lambda, n, 0, \beta]$  une strate simple de  $A$  telle que  $\mathfrak{A}(\Lambda) \cap B$  soit un  $\mathcal{O}_E$ -ordre principal de  $B$ , de période notée  $r$ . On fixe un isomorphisme de  $E$ -algèbres :

$$(2.3) \quad \Phi : B \rightarrow \mathcal{M}_{m'}(D')$$

où  $m'$  est un entier et  $D'$  une  $E$ -algèbre à division convenables, identifiant  $\mathfrak{A}(\Lambda) \cap B$  à un ordre principal standard. Plus précisément, si  $d'$  désigne le degré réduit de  $D'$  sur  $E$ , on a :

$$(2.4) \quad m'd' = \frac{md}{[E : F]}.$$

On en déduit des isomorphismes de groupes :

$$(2.5) \quad J/J^1 \simeq (U(\Lambda) \cap B^\times)/(U_1(\Lambda) \cap B^\times) \simeq GL_s(\mathfrak{k}_{D'})^r$$

où  $s$  est l'entier défini par  $m' = rs$ . Soit  $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$  et soit  $\kappa$  une  $\beta$ -extension de  $\theta$ . Fixons une représentation irréductible cuspidale  $\sigma_0$  de  $\mathrm{GL}_s(\mathfrak{k}_{D'})$ . La représentation  $\sigma_0^{\otimes r}$  défini par (2.5) et par inflation une représentation irréductible  $\sigma$  de  $J$  triviale sur  $J^1$ . Posons  $\lambda = \kappa \otimes \sigma$ .

**Définition 2.9.** — Un couple de la forme  $(J, \lambda)$  est appelé un *type simple* de  $G$ .

Compte tenu du corollaire 2.7, tout type simple de  $G$  est irréductible.

Si  $U(\Lambda) \cap B^\times$  est un sous-groupe ouvert compact maximal de  $B^\times$ , le type simple  $(J, \lambda)$  est dit *maximal*. C'est équivalent à la condition  $r = 1$ .

Si la strate simple  $[\Lambda, n, 0, \beta]$  est nulle, le type simple  $(J, \lambda)$  est dit *de niveau 0*. Dans ce cas, on a  $E = F$  et  $J = U(\Lambda)$ , et on choisira systématiquement pour  $\kappa$  le caractère trivial de  $U(\Lambda)$ .

**Exemple 2.10.** — Soit  $I$  le sous-groupe d'Iwahori standard de  $G$ , c'est-à-dire le sous-groupe de  $\mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_D)$  formé des matrices dont la réduction modulo  $\mathfrak{p}_D$  est triangulaire supérieure, et soit  $1_I$  son caractère trivial. Alors le couple  $(I, 1_I)$  est un type simple de niveau 0 de  $G$ .

Comme dans le cas complexe (voir [9, Proposition 1]), on a la propriété suivante.

**Proposition 2.11.** — Fixons un caractère simple  $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$ .

(1) Soit  $[\Lambda', n', 0, \beta]$  une strate simple de  $A$  telle que  $U(\Lambda) \subseteq U(\Lambda')$  et soit  $\theta' \in \mathcal{C}(\Lambda', 0, \beta)$  le transfert de  $\theta$ . Toute représentation irréductible de  $G$  contenant  $\theta$  contient aussi  $\theta'$ .

(2) Soit  $\pi$  une représentation irréductible de  $G$  contenant une représentation irréductible de  $J$  de la forme  $\kappa \otimes \xi$  où  $\xi$  est une représentation irréductible de  $J$  triviale sur  $J^1$ . Supposons que  $\xi$  considérée comme représentation de  $\mathrm{GL}_s(\mathfrak{k}_{D'})^r$  n'est pas cuspidale. Alors il y a une strate simple  $[\Lambda', n', 0, \beta]$  de  $A$  telle que  $U(\Lambda') \subsetneq U(\Lambda)$  et telle que  $\pi$  contient le transfert  $\theta' \in \mathcal{C}(\Lambda', 0, \beta)$  de  $\theta$ .

*Démonstration.* — L'assertion 1 suit des propriétés de transfert des représentations de Heisenberg (voir [29, Proposition 2.12]). Pour l'assertion 2, on raisonne comme dans la preuve de [32, Proposition 5.15].  $\square$

## 2.6. Algèbre de Hecke d'un type simple

Soit  $(J, \lambda)$  un type simple de  $G$ . On note  $b(\lambda)$  le cardinal de l'orbite de la classe d'isomorphisme de  $\sigma$  sous l'action du groupe de Galois :

$$(2.6) \quad \Gamma = \mathrm{Gal}(\mathfrak{k}_{D'}/\mathfrak{k}_E)$$

où  $\sigma$  est considérée comme une représentation de  $\mathrm{GL}_s(\mathfrak{k}_{D'})^r$  grâce au choix de  $\Phi$ . Cet entier ne dépend ni de ce choix ni de celui de  $\kappa$ .

**Remarque 2.12.** — Dans le cas déployé, c'est-à-dire lorsque  $D$  est égal à  $F$ , le groupe de Galois  $\Gamma$  est trivial et on a  $b(\lambda) = 1$  pour tout type simple  $(J, \lambda)$ .

On fixe une uniformisante  $\varpi$  de  $D'$ , et on note  $\mathcal{W}_\lambda$  le sous-groupe de  $\mathrm{GL}_r(D')$  constitué des matrices monomiales dont les coefficients non nuls sont des puissances de :

$$(2.7) \quad \varpi_\lambda = \varpi^{b(\lambda)}.$$

On voit  $\mathcal{W}_\lambda$  comme un sous-groupe de  $B^\times$  par l'intermédiaire de  $\Phi$  et du plongement diagonal de  $D'$  dans  $\mathcal{M}_s(D')$ .

**Lemme 2.13.** — L'ensemble d'entrelacement de  $\lambda$  dans  $G$  est la réunion disjointe des  $JwJ$  pour  $w \in \mathcal{W}_\lambda$  et, pour chaque  $w \in \mathcal{W}_\lambda$ , on a  $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Hom}_{J \cap J^w}(\lambda, \lambda^w) = 1$ .

*Démonstration.* — Dans le cas où  $(J, \lambda)$  est de niveau 0, on utilise la proposition 1.2 et le lemme 1.5 de [18] dont les preuves sont encore valables dans le cas modulaire. Dans le cas de niveau non nul, on utilise le lemme 2.5 pour se ramener au cas de niveau 0.  $\square$

**Remarque 2.14.** — Supposons que  $(J, \lambda)$  est un type simple maximal. L'ensemble d'entrelacement de  $\lambda$  dans  $G$  est égal au normalisateur de  $\lambda$  dans  $G$ , noté  $N_G(\lambda)$ . Celui-ci est engendré par  $J$  et  $\varpi_\lambda$ . Comme le normalisateur de  $U(\Lambda) \cap B^\times$  dans  $B^\times$  est engendré par  $U(\Lambda) \cap B^\times$  et  $\varpi$ , l'entier  $b(\lambda)$  est égal à l'indice de  $N_G(\lambda)$  dans  $N_{B^\times}(U(\Lambda) \cap B^\times)J$ .

Notons  $\mathcal{H}(r, q(\lambda))$  l'algèbre de Hecke affine de type  $A_{r-1}$  et de paramètre  $q(\lambda) = q^{fd's}$ , où  $f$  désigne le degré résiduel de  $E$  sur  $F$ . C'est la  $R$ -algèbre engendrée par des éléments  $S_0, \dots, S_{r-1}$  et  $\Pi, \Pi^{-1}$  avec pour tout  $i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$  les relations :

$$(2.8) \quad (S_i + 1)(S_i - q(\lambda)) = 0,$$

$$(2.9) \quad S_i S_j = S_j S_i, \quad j \notin \{i-1, i+1\},$$

$$(2.10) \quad S_i S_{i+1} S_i = S_{i+1} S_i S_{i+1},$$

$$(2.11) \quad \Pi S_i = S_{i-1} \Pi,$$

$$(2.12) \quad \Pi \Pi^{-1} = \Pi^{-1} \Pi = 1.$$

Le groupe  $\mathcal{W}_\lambda$  est engendré par les matrices de permutation  $s_1, \dots, s_{r-1}$  correspondant aux transpositions  $i \leftrightarrow i+1$  et par l'élément :

$$h = h_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \text{id}_{r-1} \\ \varpi_\lambda & 0 \end{pmatrix} \in GL_r(D')$$

où  $\text{id}_{r-1}$  est la matrice identité de  $\mathcal{M}_{r-1}(D')$ . Si l'on pose  $s_0 = h s_1 h^{-1}$ , tout élément  $w \in \mathcal{W}_\lambda$  peut s'écrire sous la forme  $w = h^a s_{i_1} \dots s_{i_l}$  avec  $a \in \mathbb{Z}$  et  $l \geq 0$  et  $i_1, \dots, i_l \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ , et :

$$(2.13) \quad S_w = \Pi^a S_{i_1} \dots S_{i_l}$$

ne dépend pas du choix de cette écriture. Les  $S_w$ ,  $w \in \mathcal{W}_\lambda$  forment une base d'espace vectoriel de  $\mathcal{H}(r, q(\lambda))$  sur  $R$ .

**Proposition 2.15.** — On a un isomorphisme de  $R$ -algèbres :

$$(2.14) \quad \Psi : \mathcal{H}(r, q(\lambda)) \rightarrow \mathcal{H}(G, \lambda)$$

tel que, pour tout  $w \in \mathcal{W}_\lambda$ , la fonction  $\Psi(S_w)$  soit de support  $JwJ$ .

*Démonstration.* — On reprend l'argument de [30] en précisant les modifications devant lui être apportées. On fixe une strate simple  $[\Lambda_{\max}, n_{\max}, 0, \beta]$  de  $A$  telle que l'intersection  $U(\Lambda_{\max}) \cap B^\times$  soit un sous-groupe compact maximal de  $B^\times$  contenant  $U(\Lambda) \cap B^\times$  et dont l'image par (2.3) soit le sous-groupe compact maximal standard  $GL_{m'}(\mathcal{O}_{D'})$ . On pose :

$$\begin{aligned} \overline{G} &= (U(\Lambda_{\max}) \cap B^\times) / (U_1(\Lambda_{\max}) \cap B^\times), \\ \overline{P} &= (U(\Lambda) \cap B^\times) (U_1(\Lambda_{\max}) \cap B^\times) / (U_1(\Lambda_{\max}) \cap B^\times), \\ \overline{M} &= (U(\Lambda) \cap B^\times) / (U_1(\Lambda) \cap B^\times). \end{aligned}$$

On identifie  $\overline{G}$  au groupe  $GL_{m'}(\mathfrak{k}_{D'})$  et  $\overline{M}$  au sous-groupe de Levi standard  $GL_s(\mathfrak{k}_{D'})^r$ . La représentation  $\sigma$  identifiée à une représentation de  $\overline{M}$  est de la forme  $\sigma_0^{\otimes r}$ . D'après [22, Theorem 4.12], l'algèbre des endomorphismes de l'induite parabolique de  $\sigma$  à  $\overline{G}$  le long de  $\overline{P}$  est isomorphe à la

sous-R-algèbre  $\mathcal{H}^0(r, q(\lambda))$  engendrée par  $S_1, \dots, S_{r-1}$ . Plus précisément, il y a un isomorphisme de R-algèbres :

$$(2.15) \quad \Psi^0 : \mathcal{H}^0(r, q(\lambda)) \rightarrow \mathcal{H}(U(\Lambda_{\max}) \cap B^\times, \sigma)$$

tel que, pour tout  $i \in \{1, \dots, r-1\}$ , la fonction  $\Psi^0(S_i)$  soit de support  $J S_i J$ .

Notons  $\theta_{\max} \in \mathcal{C}(\Lambda_{\max}, 0, \beta)$  le transfert de  $\theta$  et  $\kappa_{\max}$  la  $\beta$ -extension de  $\theta_{\max}$  transfert de  $\kappa$ . Reprenant la preuve du lemme 4.4 et de la proposition 4.5 de [30], on obtient des morphismes de R-algèbres :

$$(2.16) \quad \mathcal{H}(U(\Lambda_{\max}) \cap B^\times, \sigma) \rightarrow \mathcal{H}(J(\beta, \Lambda_{\max}), \kappa_{\max} \otimes \sigma) \hookrightarrow \mathcal{H}(G, \lambda),$$

le premier étant un isomorphisme et le second injectif. En composant (2.15) et (2.16), on obtient un homomorphisme injectif  $\Psi$  de R-algèbres de  $\mathcal{H}^0(r, q(\lambda))$  dans  $\mathcal{H}(G, \lambda)$ . Fixons maintenant une fonction  $\varphi \in \mathcal{H}(G, \lambda)$  de support  $JhJ$ . On va montrer qu'il existe un unique isomorphisme de R-algèbres (2.14) prolongeant  $\Psi$  et satisfaisant à la condition  $\Psi(\Pi) = \varphi$ . Pour cela, on reprend la preuve de [30, Théorème 4.6], à ceci près que la preuve de [30, Lemme 4.14] doit être modifiée comme indiqué ci-dessous.

**Lemme 2.16.** — *L'élément  $\varphi$  est inversible dans  $\mathcal{H}(G, \lambda)$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\varphi' \in \mathcal{H}(G, \lambda)$  une fonction de support  $Jh^{-1}J$ . Le produit de convolution  $\varphi * \varphi'$  est un multiple scalaire de l'élément neutre dans  $\mathcal{H}$ . Il est donc soit nul, soit inversible, et on va montrer que sa valeur en 1 n'est pas nulle. Fixons un ensemble  $X$  de représentants de  $J$  modulo  $J \cap h^{-1}Jh$ , qu'on peut supposer être contenu dans  $J^1$ . On a :

$$\varphi * \varphi'(1) = \sum_{x \in X} \lambda(x) \circ \varphi(h) \circ \varphi'(h^{-1}) \circ \lambda(x)^{-1}.$$

D'après le lemme 2.5, l'opérateur d'entrelacement  $\varphi(h) \in \text{Hom}_{J \cap J^1 h}(\lambda, \lambda^h)$  se décompose sous la forme  $\Phi_\kappa \otimes \Phi_\sigma$  avec  $\Phi_\kappa \in \text{Hom}_{J \cap J^1 h}(\kappa, \kappa^h)$  et  $\Phi_\sigma \in \text{Hom}_{J \cap J^1 h}(\sigma, \sigma^h)$ . En reprenant l'argument de [18, Lemma 1.5], on montre qu'on a un isomorphisme de R-espaces vectoriels :

$$\text{Hom}_{J \cap J^1 h}(\sigma, \sigma^h) \simeq \text{Hom}_{J/J^1}(\sigma, \sigma^h),$$

ce qui prouve que  $\Phi_\sigma$  est inversible. De façon analogue, l'opérateur d'entrelacement  $\varphi'(h^{-1})$  se décompose sous la forme  $\Phi'_\kappa \otimes \Phi'_\sigma$ , où  $\Phi'_\sigma$  est l'inverse de  $\Phi_\sigma$ . On a donc  $\varphi * \varphi'(1) = \Omega \otimes \text{id}_\sigma$  où  $\text{id}_\sigma$  est l'identité sur l'espace de  $\sigma$  et où :

$$\Omega = \sum_{x \in X} \eta(x) \circ \Phi_\kappa \circ \Phi'_\kappa \circ \eta(x)^{-1}.$$

Comme  $J^1 \cap h^{-1}J^1 h$  est un pro- $p$ -groupe, la restriction de  $\eta$  à celui-ci est semi-simple. Il y a donc un unique facteur irréductible en commun  $V$  entre les restrictions à  $J^1 \cap h^{-1}J^1 h$  de  $\eta$  et de  $\eta^h$ , et l'opérateur  $\Phi_\kappa \circ \Phi'_\kappa$  est un multiple non nul de la projection sur  $V$ . En tant que représentation lisse irréductible d'un pro- $p$ -groupe, la dimension de  $V$  est une puissance de  $p$ , qui est non nulle dans  $\mathbb{R}$ . On en déduit que la trace de  $\Omega$  est non nulle, ce qui termine la démonstration du lemme 2.16.  $\square$

À partir de là, on termine en reprenant l'argument de [30, Théorème 4.6]. Ceci met fin à la preuve de la proposition 2.15.  $\square$

Compte tenu de ce qui précède, on obtient le résultat suivant.



**Corollaire 2.17.** — *Tout élément non nul de  $\mathcal{H}(G, \lambda)$  supporté par une double classe mod  $J$  est inversible.*

**Exemple 2.18.** — Si l'on prend pour  $(J, \lambda)$  le type simple  $(I, 1_I)$  de l'exemple 2.10, la proposition 2.15 montre que l'algèbre de Hecke-Iwahori  $\mathcal{H}(G, I)$  est isomorphe à la  $R$ -algèbre de Hecke affine  $\mathcal{H}(m, q^d)$ .

## 2.7. Paires couvrantes

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques faits concernant la théorie des paires couvrantes. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [11, 37].

Soit  $\tau$  une représentation irréductible d'un sous-groupe ouvert compact  $K$  de  $G$ . Il lui correspond la  $R$ -algèbre  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(G, \tau)$  définie au paragraphe 1.5 et le foncteur :

$$\mathbf{M}_\tau : \sigma \mapsto \text{Hom}_K(\tau, \sigma)$$

de  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_R(G)$  vers la catégorie des  $\mathcal{H}$ -modules à droite. Par réciprocity de Frobenius, celui-ci s'identifie au foncteur  $\sigma \mapsto \text{Hom}_G(\text{ind}_K^G(\tau), \sigma)$ .

Soit  $M$  un sous-groupe de Levi de  $G$  et soit  $\tau_M$  une représentation irréductible d'un sous-groupe ouvert compact  $K_M$  de  $M$ . Supposons que  $(K, \tau)$  est une paire couvrante de  $(K_M, \tau_M)$  au sens de [11, 8.1].

**Remarque 2.19.** — Dans [11], l'algèbre associée à la paire  $(K, \tau)$  est l'algèbre  $\mathcal{H}(G, \tau^\vee)$  associée à la contragrédiente  $\tau^\vee$  de  $\tau$ . Elle est opposée à  $\mathcal{H}$  (voir [11, 2.3]). Dans la condition (iii) de [11, 8.1] il faut donc remplacer “(P, J)-positive” par “(P, J)-negative”.

On a fixé au paragraphe 1.3 une racine carrée de  $q$  dans  $R$ . Soit  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$  muni d'une décomposition de Levi  $P = MN$ . Il lui correspond un homomorphisme injectif de  $R$ -algèbres :

$$(2.17) \quad j_P : \mathcal{H}(M, \tau_M) \rightarrow \mathcal{H}(G, \tau)$$

faisant de  $\mathcal{H}$  un module à gauche sur  $\mathcal{H}_M = \mathcal{H}(M, \tau_M)$  (voir [37, II.10] : pour la raison donnée à la remarque 2.19, l'homomorphisme  $j_P$  préserve les supports des fonctions de  $\mathcal{H}_M$  supportées par les éléments  $P$ -négatifs de  $M$ , et non pas  $P$ -positifs comme dans [11]). Cet homomorphisme définit un foncteur de restriction, noté  $j_P^*$ , de la catégorie des  $\mathcal{H}$ -modules à droite vers la catégorie des  $\mathcal{H}_M$ -modules à droite. Pour toute représentation  $\sigma$  de  $G$ , la projection naturelle de  $\sigma$  vers son module de Jacquet  $r_P^G(\sigma)$  induit un isomorphisme :

$$(2.18) \quad j_P^*(\mathbf{M}_\tau(\sigma)) \simeq \mathbf{M}_{\tau_M}(r_P^G(\sigma))$$

de  $\mathcal{H}_M$ -modules à droite (voir [37, II.10.1]).

**Remarque 2.20.** — On déduit de (2.18) que, si une représentation  $\sigma$  de  $G$  contient une paire couvrante, alors  $r_P^G(\sigma)$  est non nul. En particulier, une représentation irréductible de  $G$  contenant une paire couvrante pour  $M \subsetneq G$  n'est pas cuspidale.

La propriété (2.18) permet d'obtenir le résultat suivant.

**Proposition 2.21.** — *Pour tout  $\mathcal{H}_M$ -module à droite  $\mathfrak{m}$  de dimension finie, on a un isomorphisme de représentations de  $G$  :*

$$\mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{H}_M} \text{ind}_K^G(\tau) \simeq \mathbf{i}_{P^-}^G(\mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{H}_M} \text{ind}_{K_M}^M(\tau_M)),$$

où  $P^-$  désigne le sous-groupe parabolique de  $G$  opposé à  $P$  relativement à  $M$ .

**Remarque 2.22.** — L’hypothèse sur la dimension de  $\mathfrak{m}$  provient du fait que notre preuve utilise la propriété de seconde adjonction (1.1).

*Démonstration.* — Le foncteur  $\mathbf{M}_\tau$  admet un adjoint à gauche :

$$\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{H}} \mathrm{ind}_K^G(\tau)$$

de la catégorie des  $\mathcal{H}$ -modules à droite vers la catégorie  $\mathcal{R}$ , et le foncteur  $\mathbf{j}_P^*$  admet un adjoint à gauche  $\mathfrak{m} \mapsto \mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{H}_M} \mathcal{H}$  de la catégorie des  $\mathcal{H}_M$ -modules à droite vers celle des  $\mathcal{H}$ -modules à droite. À partir de (2.18) et en utilisant la seconde adjonction (1.1), on obtient le résultat.  $\square$

D’après Blondel [2, II] (voir aussi Dat [13, §2]), on a un isomorphisme :

$$(2.19) \quad \Phi_P : \mathrm{ind}_K^G(\tau) \rightarrow \mathbf{i}_P^G(\mathrm{ind}_{K_M}^M(\tau_M)), \quad \Phi_P(f)(g)(x) = \int_N f(uxg) \, du,$$

de représentations de  $G$  et de  $\mathcal{H}_M$ -modules à gauche, où  $du$  est la mesure de Haar sur  $N$  normalisée de telle sorte que  $K \cap N$  soit de volume 1, avec  $f \in \mathrm{ind}_K^G(\tau)$ ,  $g \in G$  et  $x \in M$ .

**Proposition 2.23.** — Soit  $\sigma$  une représentation de  $M$  engendrée par sa composante  $\tau_M$ -isotypique. Alors l’induite  $\mathbf{i}_P^G(\sigma)$  est engendrée par sa composante  $\tau$ -isotypique.

*Démonstration.* — Par hypothèse,  $\sigma$  est quotient d’une somme directe de copies de  $\mathrm{ind}_{K_M}^M(\tau_M)$ , c’est-à-dire qu’il existe un ensemble  $S$  et un homomorphisme surjectif de représentations de  $M$  :

$$\bigoplus_S \mathrm{ind}_{K_M}^M(\tau_M) \rightarrow \sigma.$$

Si l’on applique le foncteur exact  $\mathbf{i}_P^G$  (qui commute aux sommes directes arbitraires) et la formule (2.19), on voit que l’induite parabolique  $\mathbf{i}_P^G(\sigma)$  est un quotient d’une somme de copies de  $\mathrm{ind}_K^G(\tau)$ , c’est-à-dire qu’elle est engendrée par sa composante  $\tau$ -isotypique.  $\square$

## 2.8. Types semi-simples I : le cas homogène

Soit  $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$  une famille d’entiers  $\geq 1$  de somme  $m$ . Pour chaque entier  $i \in \{1, \dots, r\}$ , fixons un type simple maximal  $(J_i, \lambda_i)$  de  $G_{m_i}$ . On pose  $M = M_\alpha$ ,  $P = P_\alpha$ ,  $N = N_\alpha$  et on note  $\lambda_M$  la représentation  $\lambda_1 \otimes \dots \otimes \lambda_r$  du groupe  $J_M = J_1 \times \dots \times J_r$ .

Pour chaque  $i \in \{1, \dots, r\}$ , fixons une strate simple  $[\Lambda_i, n_i, 0, \beta_i]$  de  $A_{m_i}$  telle que  $J_i$  soit égal à  $J(\beta_i, \Lambda_i)$  et fixons un caractère simple  $\theta_i \in \mathcal{C}(\Lambda_i, 0, \beta_i)$  contenu dans le type simple  $\lambda_i$ . On note  $(\Theta_i, 0, \beta_i)$  le ps-caractère (voir [5, Définition 1.5]) défini par le couple  $([\Lambda_i, n_i, 0, \beta_i], \theta_i)$ .

**Définition 2.24.** — Un couple de la forme  $(J_M, \lambda_M)$  est appelé un *type simple maximal* de  $M$ .

Dans ce paragraphe, on suppose que les ps-caractères  $(\Theta_i, 0, \beta_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$  sont tous endo-équivalents (au sens de [5, Définition 1.10]) à un ps-caractère fixé  $(\Theta, 0, \beta)$ . On peut supposer, comme dans [33, §8.1], que les caractères simples  $\theta_1, \dots, \theta_r$  sont des réalisations de  $(\Theta, 0, \beta)$ .

Fixons une strate simple  $[\Lambda, n, 0, \beta]$  de  $A$  telle que :

(1) on a  $\Lambda = (\Lambda \cap D^{m_1}) \oplus \dots \oplus (\Lambda \cap D^{m_r})$  et la  $\mathcal{O}_D$ -suite de réseaux  $\Lambda \cap D^{m_i}$  est dans la classe affine de  $\Lambda_i$  pour chaque  $i \in \{1, \dots, r\}$  ;

(2) il existe un isomorphisme de  $E$ -algèbres  $\Phi : B \rightarrow \mathcal{M}_{m'}(D')$  identifiant  $\mathfrak{A}(\Lambda) \cap B$  à un ordre héréditaire standard dont la réduction modulo  $\mathfrak{p}_{D'}$  est formée des matrices triangulaire par blocs de taille  $(m'_1, \dots, m'_r)$ , où  $m'_i$  est l’entier associé à  $m_i$  par la relation (2.4).

Quitte à dilater chaque suite  $\Lambda_i$  par un entier convenable, on supposera dans la suite que toutes les  $\Lambda_i$  ont la même période, égale à celle de  $\Lambda$ . Notons  $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$  la réalisation de  $(\Theta, 0, \beta)$  associée à cette strate simple et choisissons une  $\beta$ -extension  $\kappa$  de  $\theta$ . On définit des sous-groupes :

$$\mathbf{J} = H^1(\beta, \Lambda)(J(\beta, \Lambda) \cap P), \quad \mathbf{J}^1 = H^1(\beta, \Lambda)(J^1(\beta, \Lambda) \cap P).$$

Comme aux paragraphes 6.3 et 6.4 de [33] (où les groupes définis ci-dessus sont notés  $J_P$  et  $J_P^1$ ) on définit des représentations irréductibles  $\eta$  et  $\kappa$  de  $\mathbf{J}^1$  et  $\mathbf{J}$  respectivement, dont les propriétés sont décrites par les propositions 6.5 et 6.6 de [33] (où ces représentations sont notées  $\eta_P$  et  $\kappa_P$ ). En particulier, l'induite de  $\eta$  à  $J^1(\beta, \Lambda)$  est isomorphe à la restriction de  $\kappa$  à ce groupe et, pour toute représentation irréductible  $\xi$  de  $U(\Lambda) \cap B^\times$  triviale sur  $U^1(\Lambda) \cap B^\times$ , on a un isomorphisme canonique de représentations :

$$(2.20) \quad \text{ind}_{\mathbf{J}}^{J(\beta, \Lambda)}(\kappa \otimes \xi) \simeq \kappa \otimes \xi.$$

La restriction de  $\kappa$  à  $\mathbf{J} \cap M$  se décompose sous la forme  $\kappa_1 \otimes \cdots \otimes \kappa_r$  où  $\kappa_i$  est une  $\beta$ -extension de  $\theta_i$  pour chaque  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Décomposons  $\lambda_i$  sous la forme  $\kappa_i \otimes \sigma_i$  où  $\sigma_i$  est une représentation irréductible de  $J_i$  triviale sur  $J^1(\beta, \Lambda_i)$ . L'isomorphisme  $\Phi$  induit un isomorphisme de  $A_{m_i} \cap B$  vers  $\mathcal{M}_{m'_i}(D')$  permettant d'identifier  $\sigma_i$  à une représentation cuspidale de  $GL_{m'_i}(\mathfrak{k}_{D'})$ .

On réunit  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  suivant leur classe de conjugaison sous le groupe  $\Gamma = \text{Gal}(\mathfrak{k}_{D'}/\mathfrak{k}_E)$ , ce qui définit une partition :

$$\{1, \dots, r\} = I_1 \cup \cdots \cup I_u, \quad u \geq 1.$$

Quitte à renuméroter les types simples  $(J_i, \lambda_i)$ , on peut supposer pour simplifier qu'il existe des entiers  $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_u = r$  tels qu'on ait  $I_j = \{i \in \{1, \dots, r\} \mid a_{j-1} < i \leq a_j\}$  pour chaque  $j \in \{1, \dots, u\}$ . Ceci définit un sous-groupe de Levi *standard*  $M'$  de  $G$  contenant  $M$ .

Notons  $\sigma$  la représentation  $\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_r$  considérée comme représentation de  $\mathbf{J}$  triviale sur  $\mathbf{J}^1$  et posons  $\lambda = \kappa \otimes \sigma$ . On pose  $\mathbf{J}_{M'} = \mathbf{J} \cap M'$  et on note  $\lambda_{M'}$  la restriction de  $\lambda$  à  $\mathbf{J}_{M'}$ .

**Remarque 2.25.** — Dans le cas où  $u = 1$ , c'est-à-dire où  $M' = G$ , la propriété (2.20) implique que l'induite de  $\lambda$  à  $J(\beta, \Lambda)$  est un type simple  $\lambda$ . Il y a donc un isomorphisme canonique de  $R$ -algèbres de  $\mathcal{H}(G, \lambda)$  sur  $\mathcal{H}(G, \lambda)$  préservant les supports, la structure de cette dernière étant donnée par la proposition 2.15. En reprenant l'argument de [33, Proposition 6.7], on en déduit que  $(\mathbf{J}, \lambda)$  est une paire couvrante de  $(J_M, \lambda_M)$ .

Pour  $j \in \{1, \dots, u\}$ , notons  $r_j$  le cardinal de  $I_j$  et posons  $f_j = fd^m'_i$ , où  $f$  est le degré résiduel de  $E$  sur  $F$  et où  $m'_i$  ne dépend pas de  $i \in I_j$ .

**Proposition 2.26.** — (1) La paire  $(\mathbf{J}, \lambda)$  est une paire couvrante de  $(\mathbf{J}_{M'}, \lambda_{M'})$ , qui est elle-même une paire couvrante de  $(J_M, \lambda_M)$ .

(2) On a un isomorphisme de  $R$ -algèbres de  $\mathcal{H}(M', \lambda_{M'})$  dans  $\mathcal{H}(G, \lambda)$  préservant les supports.

(3) On a un isomorphisme :

$$\mathcal{H}(r_1, q^{f_1}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}(r_u, q^{f_u}) \rightarrow \mathcal{H}(G, \lambda)$$

de  $R$ -algèbres.

*Démonstration.* — Dans le cas où  $R$  est  $\mathbb{C}$ , le résultat est donné par la proposition 8.1 de [33]. Dans le cas général, il suffit de reprendre la preuve de [32, Proposition 5.17] pour prouver que  $(\mathbf{J}, \lambda)$  est décomposée au-dessus de  $(\mathbf{J}_{M'}, \lambda_{M'})$  et que l'ensemble d'entrelacement de  $\lambda$  dans  $G$  est inclus dans  $\mathbf{J}M'\mathbf{J}$ , les propositions [18, 1.2] et [33, 6.6] étant encore valables dans le cas modulaire. En raisonnant comme dans la preuve de [11, Theorem 7.2] (voir aussi [37, II.8]), on en

déduit que  $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$  est une paire couvrante de  $(\mathbf{J}_{M'}, \boldsymbol{\lambda}_{M'})$  et on a un isomorphisme de R-algèbres préservant les supports de  $\mathcal{H}(M', \boldsymbol{\lambda}_{M'})$  dans  $\mathcal{H}(G, \boldsymbol{\lambda})$ .

Le fait que  $(\mathbf{J}_{M'}, \boldsymbol{\lambda}_{M'})$  est une paire couvrante de  $(\mathbf{J}_M, \lambda_M)$  est une conséquence de la remarque 2.25, et l'isomorphisme du point 3 est une conséquence de la proposition 2.15.  $\square$

Pour chaque  $i \in \{1, \dots, r\}$ , notons  $\eta_i$  la restriction de  $\kappa_i$  à  $\mathbf{J}^1(\beta, \Lambda_i)$  et posons :

$$(2.21) \quad \eta_M = \eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_r, \quad \kappa_M = \kappa_1 \otimes \cdots \otimes \kappa_r, \quad \mathbf{J}_M^1 = \mathbf{J}_M \cap \mathbf{U}_1(\Lambda).$$

Les paires  $(\mathbf{J}^1, \boldsymbol{\eta})$  et  $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\kappa})$  sont décomposées au-dessus de  $(\mathbf{J}_M^1, \eta_M)$  et  $(\mathbf{J}_M, \kappa_M)$  respectivement. On a le résultat suivant<sup>(2)</sup>, qui à notre connaissance est nouveau même dans le cas complexe.

**Proposition 2.27.** — *La paire  $(\mathbf{J}^1, \boldsymbol{\eta})$  est une paire couvrante de  $(\mathbf{J}_M^1, \eta_M)$ .*

*Démonstration.* — D'après le corollaire qui suit [2, Proposition III.2], il suffit de prouver que, pour toute représentation lisse irréductible  $\pi$  de  $G$ , l'application naturelle :

$$(2.22) \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}^1}(\boldsymbol{\eta}, \pi) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}_M^1}(\eta_M, \mathbf{r}_\alpha(\pi))$$

induite par la surjection canonique de  $\pi$  sur son module de Jacquet est injective, ce que l'on va faire par récurrence sur la dimension de  $M$ . Fixons une représentation irréductible  $\pi$  de  $G$ . Au moyen de l'isomorphisme de E-algèbres  $\Phi$  fixé au début du paragraphe 2.8, identifions :

$$\mathbf{J}/\mathbf{J}^1 \simeq \mathbf{J}_M/\mathbf{J}_M^1 \simeq (\mathbf{U}(\Lambda) \cap \mathbf{B}^\times)/(\mathbf{U}_1(\Lambda) \cap \mathbf{B}^\times)$$

à un sous-groupe de Levi standard :

$$\overline{\mathbf{M}} = \mathrm{GL}_{m'_1}(\mathfrak{k}_{D'}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{m'_r}(\mathfrak{k}_{D'}) \subseteq \mathrm{GL}_{m'}(\mathfrak{k}_{D'}).$$

Munissons  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{J}^1}(\boldsymbol{\eta}, \pi)$  de l'action de  $\mathbf{J}$  définie, pour  $x \in \mathbf{J}$  et  $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}^1}(\boldsymbol{\eta}, \pi)$ , par la formule :

$$x \cdot f = \pi(x) \circ f \circ \boldsymbol{\kappa}(x)^{-1}.$$

C'est une représentation de  $\mathbf{J}$  triviale sur  $\mathbf{J}^1$  que l'on voit comme une représentation de  $\overline{\mathbf{M}}$ . De façon analogue, le membre de droite de (2.22) est muni d'une structure de représentation de  $\overline{\mathbf{M}}$ .

Considérons maintenant (2.22) comme un homomorphisme de représentations de  $\overline{\mathbf{M}}$  et notons  $\mathcal{V}$  son noyau, que l'on suppose non nul. Il existe donc un sous-groupe de Levi standard  $\overline{\mathbf{M}}^* \subseteq \overline{\mathbf{M}}$  et une représentation irréductible cuspidale  $\boldsymbol{\tau}$  de  $\overline{\mathbf{M}}^*$  telle que  $\mathcal{V}$  possède une sous-représentation irréductible de support cuspidal  $(\overline{\mathbf{M}}^*, \boldsymbol{\tau})$ . Si  $\overline{\mathbf{M}}^* = \overline{\mathbf{M}}$ , le calcul du composant  $\boldsymbol{\tau}$ -isotypique donne une suite exacte de R-espaces vectoriels :

$$0 \rightarrow \mathcal{V}^{\boldsymbol{\tau}} \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}}(\boldsymbol{\kappa} \otimes \boldsymbol{\tau}, \pi) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}_M}(\kappa_M \otimes \boldsymbol{\tau}, \mathbf{r}_\alpha(\pi)).$$

Comme  $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\kappa} \otimes \boldsymbol{\tau})$  est une paire couvrante de  $(\mathbf{J}_M, \kappa_M \otimes \boldsymbol{\tau})$  d'après la proposition 2.26, on trouve  $\mathcal{V}^{\boldsymbol{\tau}} = 0$ , ce qui contredit l'hypothèse faite sur  $\boldsymbol{\tau}$ . En particulier, si  $m'_1 = \cdots = m'_r = 1$ , alors on a toujours  $\overline{\mathbf{M}}^* = \overline{\mathbf{M}}$  et ainsi (2.22) est un isomorphisme dans ce cas.

On suppose maintenant que  $\overline{\mathbf{M}}^*$  est un sous-groupe de Levi standard propre de  $\overline{\mathbf{M}}$ . Il y a une famille d'entiers  $\gamma = (t_1, \dots, t_s)$  de somme  $m$  telle que, si l'on note  $(t'_1, \dots, t'_s)$  la famille d'entiers de somme  $m'$  associée à  $\gamma$  par la relation (2.4), alors :

$$\overline{\mathbf{M}}^* = \mathrm{GL}_{t'_1}(\mathfrak{k}_{D'}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{t'_s}(\mathfrak{k}_{D'}) \subseteq \mathrm{GL}_{m'}(\mathfrak{k}_{D'}).$$

En particulier,  $\gamma$  est plus fine que  $\alpha$ . Fixons une strate simple  $[\Lambda', n_{\Lambda'}, 0, \beta]$  de  $A$  telle que :

- (1) on a  $\Lambda' = (\Lambda' \cap \mathbf{D}^{t_1}) \oplus \cdots \oplus (\Lambda' \cap \mathbf{D}^{t_s})$  ;

<sup>(2)</sup>V. Sécherre remercie Shaun Stevens pour une discussion sur une version préliminaire de la preuve de ce résultat.

(2)  $\Phi(\mathfrak{A}(\Lambda') \cap B)$  est un ordre héréditaire standard dont la réduction modulo  $\mathfrak{p}_D$  est formée des matrices triangulaire par blocs de taille  $(t'_1, \dots, t'_s)$ .

On définit les deux sous-groupes :

$$\mathbf{J}' = H^1(\beta, \Lambda')(J(\beta, \Lambda') \cap P_\gamma), \quad \mathbf{J}'^1 = H^1(\beta, \Lambda')(J^1(\beta, \Lambda') \cap P_\gamma).$$

Soit  $\kappa'$  le transfert de  $\kappa$  en une  $\beta$ -extension du transfert  $\theta' \in \mathcal{C}(\Lambda', 0, \beta)$  de  $\theta$ . Notons  $\kappa'$  la représentation de  $\mathbf{J}'$  sur l'espace des vecteurs de  $\kappa'$  invariants par  $J(\beta, \Lambda') \cap N_\gamma$  et  $\eta'$  la restriction de  $\kappa'$  à  $\mathbf{J}'^1$ . La restriction de  $\eta'$  à :

$$J_\gamma^1 = J^1(\beta, \Lambda' \cap D^{t_1}) \times \dots \times J^1(\beta, \Lambda' \cap D^{t_s})$$

est égale à  $\eta'_\gamma = \eta'_1 \otimes \dots \otimes \eta'_s$  où  $\eta'_j$  est la représentation de Heisenberg du transfert de  $\theta$  dans  $\mathcal{C}(\Lambda' \cap D^{t_j}, 0, \beta)$ , pour chaque  $j \in \{1, \dots, s\}$ .

Notons  $\bar{U}^*$  le sous-groupe unipotent standard de  $\bar{M}$  correspondant à  $\bar{M}^*$ . Calculant les espaces de vecteurs  $\bar{U}^*$ -invariants grâce aux relations de cohérence entre  $\beta$ -extensions, on obtient des isomorphismes de représentations de  $\bar{M}^*$  :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{J}'^1}(\eta', \pi)^{\bar{U}^*} &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{J}'^1}(\eta', \pi), \\ \text{Hom}_{\mathbf{J}'^1_M}(\eta'_M, r_\alpha(\pi))^{\bar{U}^*} &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{J}'^1 \cap M}(\eta'_M, r_\alpha(\pi)), \end{aligned}$$

où  $\eta'_M$  est la restriction de  $\eta'$  à  $\mathbf{J}'^1 \cap M$ . Par hypothèse de récurrence, la paire  $(\mathbf{J}'^1 \cap M, \eta'_M)$  est une paire couvrante de  $(J_\gamma^1, \eta'_\gamma)$ . On en déduit que l'application naturelle :

$$\text{Hom}_{\mathbf{J}'^1 \cap M}(\eta'_M, r_\alpha(\pi)) \rightarrow \text{Hom}_{J_\gamma^1}(\eta'_\gamma, r_\gamma(\pi))$$

est un isomorphisme. Appliquant le foncteur des  $\bar{U}^*$ -invariants à (2.22) puis prenant la composante  $\tau$ -isotypique, on obtient une suite exacte de  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels :

$$0 \rightarrow \mathcal{V}^{\bar{U}^*, \tau} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{J}'}(\kappa' \otimes \tau, \pi) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{J}'_\gamma}(\kappa'_\gamma \otimes \tau, r_\gamma(\pi))$$

où  $\kappa'_\gamma = \kappa'_1 \otimes \dots \otimes \kappa'_s$  est la restriction de  $\kappa'$  à :

$$J'_\gamma = J(\beta, \Lambda' \cap D^{t_1}) \times \dots \times J(\beta, \Lambda' \cap D^{t_s}),$$

$\kappa'_j$  étant une  $\beta$ -extension de  $\eta'_j$ . Comme  $(\mathbf{J}', \kappa' \otimes \tau)$  est une paire couvrante de  $(\mathbf{J}'_\gamma, \kappa'_\gamma \otimes \tau)$  par la proposition 2.26, on en déduit que  $\mathcal{V}^{\bar{U}^*, \tau} = 0$ , ce qui donne une contradiction.  $\square$

## 2.9. Types semi-simples II : le cas général

Nous traitons maintenant le cas général. Réunissons les  $(\Theta_i, 0, \beta_i)$  suivant leur classe d'endo-équivalence, ce qui définit une partition :

$$\{1, \dots, r\} = I_1 \cup \dots \cup I_l, \quad l \geq 1.$$

Ceci définit un sous-groupe de Levi  $L$  de  $G$  contenant  $M$ . Quitte à renuméroter les types simples  $(J_i, \lambda_i)$ , nous pouvons supposer pour simplifier que  $L$  est standard et définit une décomposition :

$$D^m = V^1 \oplus \dots \oplus V^l$$

où, pour chaque  $k \in \{1, \dots, l\}$ ,  $V^k$  désigne la somme directe des  $D^{m_i}$ ,  $i \in I_k$ . On suppose comme dans le paragraphe 2.8 que les  $\theta_i$ ,  $i \in I_k$  sont des réalisations d'un même ps-caractère  $(\Theta^k, 0, \beta^k)$  et que les  $\Lambda_i$ ,  $i \in I_k$  ont toutes la même période ; on fixe une suite de réseaux  $\Lambda^k$  de  $V^k$  satisfaisant à la condition du paragraphe 2.8 relativement aux  $\Lambda_i$ ,  $i \in I_k$  ; on note  $M_k$  le sous-groupe de Levi standard formé des  $G_{m_i}$ ,  $i \in I_k$  ; on a un type simple maximal  $(J_{M_k}, \lambda_{M_k})$  de  $M_k$  formé des

$(\mathbf{J}_i, \lambda_i)$ ,  $i \in I_k$ . On note enfin  $(\mathbf{J}_k, \lambda_k)$  la paire couvrante de  $(\mathbf{J}_{M_k}, \lambda_{M_k})$  dans  $G_{\dim V^k}$  associée à la paire  $(\beta^k, \Lambda^k)$  par la proposition 2.26.

Posons :

$$(2.23) \quad \mathbf{J}_L = \mathbf{J}_1 \times \cdots \times \mathbf{J}_l, \quad \lambda_L = \lambda_1 \times \cdots \times \lambda_l.$$

Par construction,  $(\mathbf{J}_L, \lambda_L)$  est une paire couvrante de  $(\mathbf{J}_M, \lambda_M)$  dans  $L$ . Ici encore, quitte à dilater les suites de réseaux, on peut supposer que  $\Lambda^1, \dots, \Lambda^l$  ont toutes la même période ; notons  $\Lambda$  la somme directe des  $\Lambda^k$  et notons  $\beta$  la somme des  $\beta^k$ . Ceci définit une strate  $[\Lambda, n, 0, \beta]$  de  $A$ , pas forcément simple. On note  $B$  le centralisateur de  $\beta$  dans  $A$ .

Pour ce qui suit, nous aurons besoin de la notion d'approximation commune d'une famille de caractères simples ([33, Définition 5.5]).

**Proposition 2.28.** — *Il existe une paire couvrante  $(\mathbf{J}, \lambda)$  de  $(\mathbf{J}_L, \lambda_L)$ , donc de  $(\mathbf{J}_M, \lambda_M)$ , dans  $G$  possédant les propriétés suivantes :*

(1) *On a  $U_{n+1}(\Lambda) \subseteq \mathbf{J} \subseteq U(\Lambda)$ .*

(2) *Si  $([\Lambda, n, 0, \gamma], \vartheta, t)$  est une approximation commune de  $(\theta_1, \dots, \theta_r)$ , le groupe  $\mathbf{J}$  contient et normalise  $(H^t(\gamma, \Lambda) \cap L)H^{t+1}(\gamma, \Lambda)$ , la restriction de  $\lambda$  à  $H^{t+1}(\gamma, \Lambda)$  est un multiple de  $\vartheta$  et la restriction de  $\lambda$  à  $H^t(\gamma, \Lambda) \cap M$  est un multiple de  $\theta_1 \otimes \cdots \otimes \theta_r$ .*

*Démonstration.* — On procède par récurrence sur  $l$  comme dans le cas complexe ([33, Theorem 8.2]). Une fois construite une paire  $(\mathbf{J}, \lambda)$  vérifiant les propriétés 1 et 2, le seul passage requérant un peu d'attention pour prouver que c'est une paire couvrante de  $(\mathbf{J}_L, \lambda_L)$  est la fin de la preuve de [12, Corollary 6.6].

D'après [2, Proposition III.2], tout module à droite simple sur  $\mathcal{H}(G, \lambda)$  est de dimension finie. D'après l'argument de [11, 7.15], qui est encore valable dans le cas modulaire, on en déduit que tout élément inversible à gauche de  $\mathcal{H}(G, \lambda)$  est inversible. A partir de là, on conclut comme dans le cas complexe que  $(\mathbf{J}, \lambda)$  est une paire couvrante. Voir l'introduction à la section 2 pour plus de détails.  $\square$

**Définition 2.29.** — Un *type semi-simple* de  $G$  est une paire couvrante d'un type simple maximal d'un sous-groupe de Levi de  $G$  de la forme  $(\mathbf{J}, \lambda)$  définie par la proposition 2.28.

## 2.10. La représentation $\eta$ et son ensemble d'entrelacement

Soit  $(\mathbf{J}, \lambda)$  un type semi-simple. Le groupe  $\mathbf{J}$  a une décomposition d'Iwahori :

$$\mathbf{J} = (\mathbf{J} \cap N^-) \cdot (\mathbf{J} \cap M) \cdot (\mathbf{J} \cap N)$$

où  $N^-$  est le radical unipotent opposé à  $N$  par rapport à  $M$ . Pour  $k \in \{1, \dots, l\}$ , notons  $\eta_k$  la représentation irréductible de  $\mathbf{J}_k^1 = \mathbf{J}_k \cap U_1(\Lambda^k)$  contenue dans  $\lambda_k$ , et posons :

$$\eta_L = \eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_l.$$

C'est une représentation irréductible de  $\mathbf{J}_L^1 = \mathbf{J}_1^1 \times \cdots \times \mathbf{J}_l^1$ . Posons  $\mathbf{J}^1 = \mathbf{J} \cap U_1(\Lambda)$  et reprenons les notations de (2.21). Nous voulons définir des représentations irréductibles  $\eta$  et  $\kappa$  de  $\mathbf{J}^1$  et  $\mathbf{J}$  généralisant celles du paragraphe 2.8 dans le cas homogène, avec une décomposition  $\lambda = \kappa \otimes \sigma$ .

**Proposition 2.30.** — *Il y a une unique paire décomposée  $(\mathbf{J}^1, \eta)$  au-dessus de  $(\mathbf{J}_L^1, \eta_L)$ , donc aussi au-dessus de  $(\mathbf{J}_M^1, \eta_M)$ . La restriction de  $\lambda$  à  $\mathbf{J}^1$  est  $\eta$ -isotypique.*

*Démonstration.* — On a une décomposition d'Iwahori :

$$\mathbf{J}^1 = (\mathbf{J}^1 \cap N^-) \cdot \mathbf{J}_M^1 \cdot (\mathbf{J}^1 \cap N).$$

Pour tout  $y \in \mathbf{J}^1$  se décomposant sous la forme  $y = uxu'$  avec  $u \in \mathbf{J}^1 \cap N^-$ ,  $x \in \mathbf{J}_M^1$ ,  $u' \in \mathbf{J}^1 \cap N$ , on pose  $\boldsymbol{\eta}(y) = \eta_M(x)$ . Ceci définit une application  $\boldsymbol{\eta}$  de  $\mathbf{J}^1$  dans  $GL(\mathcal{V})$ , où  $\mathcal{V}$  désigne l'espace de  $\eta_M$ , et il s'agit de montrer que c'est un homomorphisme de groupes. La restriction de  $\boldsymbol{\lambda}$  à  $\mathbf{J}^1$  est triviale sur  $\mathbf{J}^1 \cap N^-$  et  $\mathbf{J}^1 \cap N$  et la restriction de  $\boldsymbol{\lambda}$  à  $\mathbf{J}^1 \cap M$ , qui est égale à la restriction de  $\lambda_M$  à  $\mathbf{J}_M^1$ , est un multiple de  $\eta_M$ . Ainsi l'ensemble :

$$(\mathbf{J}^1 \cap N^-) \cdot \text{Ker}(\eta_M) \cdot (\mathbf{J}^1 \cap N) = \text{Ker}(\boldsymbol{\lambda}) \cap \mathbf{J}^1$$

est un sous-groupe de  $G$ . Par conséquent (voir [1, Lemme 1]) l'application  $\boldsymbol{\eta}$  est une représentation irréductible de  $\mathbf{J}^1$  et la paire  $(\mathbf{J}^1, \boldsymbol{\eta})$  est décomposée au-dessus de  $(\mathbf{J}_M^1, \eta_M)$ .  $\square$

**Proposition 2.31.** — *L'ensemble d'entrelacement de  $\boldsymbol{\eta}$  dans  $G$  est égal à  $\mathbf{J}(L \cap B^\times)\mathbf{J}$  et, pour tout  $g \in L \cap B^\times$ , l'espace  $\text{Hom}_{\mathbf{J}^1 \cap (\mathbf{J}^1)^g}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}^g)$  est de dimension 1 sur  $\mathbb{R}$ .*

*Démonstration.* — Si  $g \in G$  entrelace  $\boldsymbol{\eta}$ , on peut supposer grâce au lemme A.12 qu'il appartient à  $L$ . Comme  $\boldsymbol{\eta}$  et  $\boldsymbol{\eta}_L$  ont le même ensemble d'entrelacement dans  $L$ , il suffit de calculer celui de  $\boldsymbol{\eta}_L$ . Pour  $k \in \{1, \dots, l\}$ , notons  $B^k$  le centralisateur de  $\beta^k$  dans  $\text{End}_D(V^k)$ . La composante  $g_k$  de  $g$  dans le  $k$ -ième bloc de  $L$  entrelace  $\boldsymbol{\eta}_k$ , donc elle appartient à  $\mathbf{J}_k^1(B^k)^\times \mathbf{J}_k^1$  et :

$$\dim_{\mathbb{R}} \text{Hom}_{\mathbf{J}^1 \cap (\mathbf{J}^1)^{g_k}}(\boldsymbol{\eta}_k, \boldsymbol{\eta}_k^{g_k}) = 1$$

d'après la proposition 2.1. On conclut en remarquant que  $L \cap B^\times = (B^1)^\times \times \dots \times (B^l)^\times$ .  $\square$

La proposition 2.31 fournissant une majoration de l'ensemble d'entrelacement de  $\boldsymbol{\lambda}$  dans  $G$ , nous en déduisons le résultat suivant. Notons  $Q$  le sous-groupe parabolique standard de  $G$  de sous-groupe de Levi standard  $L$ .

**Corollaire 2.32.** — *Le morphisme de  $\mathbb{R}$ -algèbres  $j_Q : \mathcal{H}(L, \boldsymbol{\lambda}_L) \rightarrow \mathcal{H}(G, \boldsymbol{\lambda})$  est un isomorphisme préservant les supports.*

Pour chaque  $k \in \{1, \dots, l\}$ , fixons une décomposition  $\boldsymbol{\lambda}_k = \boldsymbol{\kappa}_k \otimes \boldsymbol{\sigma}_k$  comme au paragraphe 2.8 et posons :

$$\boldsymbol{\kappa}_L = \boldsymbol{\kappa}_1 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\kappa}_l, \quad \boldsymbol{\sigma}_L = \boldsymbol{\sigma}_1 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\sigma}_l.$$

Ainsi  $\boldsymbol{\kappa}_L$  est une représentation irréductible de  $\mathbf{J}_L$  prolongeant  $\boldsymbol{\eta}_L$ . Aussi,  $\boldsymbol{\sigma}_L$  est une représentation irréductible de  $\mathbf{J}_L$  triviale sur  $\mathbf{J}_L^1$  et on a la décomposition  $\boldsymbol{\lambda}_L = \boldsymbol{\kappa}_L \otimes \boldsymbol{\sigma}_L$ . Notons  $\boldsymbol{\sigma}$  la représentation  $\boldsymbol{\sigma}_L$  considérée comme une représentation irréductible de  $\mathbf{J}$  triviale sur  $\mathbf{J}^1$  grâce à l'isomorphisme  $\mathbf{J}/\mathbf{J}^1 \simeq \mathbf{J}_L/\mathbf{J}_L^1$ . On reprend les notations de (2.21).

**Proposition 2.33.** — (1) *Il y a une unique paire décomposée  $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\kappa})$  au-dessus de  $(\mathbf{J}_L, \boldsymbol{\kappa}_L)$ , donc aussi au-dessus de  $(\mathbf{J}_M, \boldsymbol{\kappa}_M)$ . La restriction de  $\boldsymbol{\kappa}$  à  $\mathbf{J}^1$  est égale à  $\boldsymbol{\eta}$  et on a  $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\kappa} \otimes \boldsymbol{\sigma}$ .*

(2) *L'ensemble d'entrelacement de  $\boldsymbol{\kappa}$  dans  $G$  est  $\mathbf{J}(L \cap B^\times)\mathbf{J}$ .*

*Démonstration.* — Grâce à la décomposition d'Iwahori de  $\mathbf{J}$ , on peut définir de façon analogue à  $\boldsymbol{\eta}$  une application  $\boldsymbol{\kappa}$  de  $\mathbf{J}$  dans  $GL(\mathcal{V})$  prolongeant  $\boldsymbol{\kappa}_M$  et triviale sur  $\mathbf{J} \cap N^-$ ,  $\mathbf{J} \cap N$ . Comme  $\mathbf{J} \cap N = \mathbf{J}^1 \cap N$  et  $\mathbf{J} \cap N^- = \mathbf{J}^1 \cap N^-$ , on a :

$$(\mathbf{J} \cap N) \cdot (\mathbf{J} \cap N^-) \subseteq \text{Ker}(\boldsymbol{\lambda}) \cap \mathbf{J}^1 \subseteq (\mathbf{J} \cap N^-) \cdot \text{Ker}(\boldsymbol{\kappa}_M) \cdot (\mathbf{J} \cap N).$$

On en déduit que  $(\mathbf{J} \cap N^-) \cdot \text{Ker}(\boldsymbol{\kappa}_M) \cdot (\mathbf{J} \cap N)$  est un sous-groupe de  $G$ . Ainsi l'application  $\boldsymbol{\kappa}$  est une représentation irréductible de  $\mathbf{J}$  et la paire  $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\kappa})$  est décomposée au-dessus de  $(\mathbf{J}_M, \boldsymbol{\kappa}_M)$ .

Le point 2 se montre comme pour  $\eta$ . □

Le résultat suivant sera utile pour prouver le lemme 3.2 et la proposition 4.8.

**Proposition 2.34.** — *Soit  $(\mathbf{J}, \lambda)$  un type semi-simple de  $G$ . Alors la représentation de  $\mathbf{J}$  sur la composante  $\eta$ -isotypique de  $\text{ind}_{\mathbf{J}}^G(\lambda)$  est une somme directe de conjugués de  $\lambda$ .*

*Démonstration.* — Fixons une décomposition de  $\lambda$  sous la forme  $\kappa \otimes \sigma$ . Comme  $\mathbf{J}^1$  est un  $p$ -groupe, la restriction de  $\text{ind}_{\mathbf{J}}^G(\lambda)$  à  $\mathbf{J}^1$  est semi-simple et se décompose sous la forme  $V \oplus W$  où  $V$  est une somme directe de copies de  $\eta$  et où aucun sous-quotient irréductible de  $W$  n'est isomorphe à  $\eta$ . Comme  $\mathbf{J}$  normalise la classe d'isomorphisme de  $\eta$  (puisque  $\kappa$  prolonge  $\eta$  à  $\mathbf{J}$ ), il stabilise les sous-espaces  $V$  et  $W$ . Posons :

$$\Pi = \text{Hom}_{\mathbf{J}^1}(\eta, \text{ind}_{\mathbf{J}}^G(\lambda))$$

que l'on munit de l'action de  $\mathbf{J}$  définie, pour  $x \in \mathbf{J}$  et  $f \in \Pi$ , par la formule :

$$x \cdot f = \pi(x) \circ f \circ \kappa(x)^{-1}$$

où  $\pi$  est la représentation de  $\mathbf{J}$  sur  $\text{ind}_{\mathbf{J}}^G(\lambda)$ . C'est une représentation de  $\mathbf{J}$  triviale sur  $\mathbf{J}^1$ , et  $V$  est isomorphe à  $\kappa \otimes \Pi$ . Nous allons montrer que la représentation  $\Pi$  est une somme directe de conjugués de  $\sigma$ , ce dont on déduira le résultat voulu.

Par la formule de Mackey, la restriction de  $\text{ind}_{\mathbf{J}}^G(\lambda)$  à  $\mathbf{J}^1$  est la somme directe des  $\text{ind}_{\mathbf{J}^1 \cap \mathbf{J}^x}^{\mathbf{J}^1}(\lambda^x)$  pour  $x \in \mathbf{J} \backslash G / \mathbf{J}^1$ . Par conséquent, on a la décomposition :

$$\Pi = \bigoplus_{x \in \mathbf{J} \backslash G / \mathbf{J}^1} \text{Hom}_{\mathbf{J}^1 \cap \mathbf{J}^x}(\eta, \lambda^x)$$

de  $\Pi$  en une somme directe de  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels. Si l'on écrit :

$$\text{Hom}_{\mathbf{J}^1 \cap \mathbf{J}^x}(\eta, \lambda^x) \subseteq \text{Hom}_{\mathbf{J}^1 \cap (\mathbf{J}^1)^x}(\eta, \eta^x) \otimes \mathcal{V}_{\sigma}$$

où  $\mathcal{V}_{\sigma}$  désigne l'espace de  $\sigma$  qui compte ici comme un espace de multiplicité, on voit que seuls les  $x \in G$  qui entrelacent  $\eta$  apportent une contribution non nulle. On peut donc supposer que  $x$  appartient à  $L \cap B^{\times}$ .

**Lemme 2.35.** — *Supposons que  $x \in L \cap B^{\times}$ . Alors :*

$$\text{Hom}_{\mathbf{J}^1 \cap \mathbf{J}^x}(\eta, \lambda^x) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{J}^1 \cap \mathbf{J}^x}(1, \sigma^x) = \text{Hom}_{(U_1(\Lambda) \cap B^{\times}) \cap (U(\Lambda) \cap B^{\times})^x}(1, \sigma^x).$$

*Démonstration.* — Il suffit de reprendre la preuve de la proposition [10, 5.3.2], en sachant que l'espace  $\text{Hom}_{\mathbf{J}^1 \cap \mathbf{J}^x}(\eta, \kappa^x)$  est de dimension 1 sur  $\mathbb{R}$  d'après la proposition 2.31.

L'égalité provient du fait que  $\mathbf{J}^1 \cap B^{\times} = U_1(\Lambda) \cap B^{\times}$  et  $\mathbf{J} \cap B^{\times} = U(\Lambda) \cap B^{\times}$ . □

Comme  $\sigma$  est cuspidale, seuls les  $x \in L \cap B^{\times}$  normalisant  $U(\Lambda) \cap B^{\times}$  apportent une contribution non nulle. Pour de tels  $x$ , on voit que  $\text{Hom}_{\mathbf{J}^1 \cap \mathbf{J}^x}(\kappa, \lambda^x)$  est isomorphe à  $\sigma^x$  comme représentation de  $\mathbf{J}$ . □



### 2.11. Réduction modulo $\ell$ des types simples

Soit  $\ell$  un nombre premier différent de  $p$ . Rappelons que toute  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible d'un groupe profini peut être réduite modulo  $\ell$  (voir la remarque 1.3).

Rappelons d'abord la théorie de la réduction modulo  $\ell$  des représentations cuspidales de  $\mathrm{GL}_n$  sur un corps fini de caractéristique  $p$  (voir [22]). Soient  $\mathfrak{k}$  un corps fini de caractéristique  $p$  et  $\overline{\mathfrak{k}}$  une clôture algébrique de  $\mathfrak{k}$ . Pour  $n \geq 1$ , notons  $\mathfrak{k}_n$  l'extension de  $\mathfrak{k}$  de degré  $n$  contenue dans  $\overline{\mathfrak{k}}$ . Si  $R$  est  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$  ou  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ , notons  $X_n(R)$  l'ensemble des  $R$ -caractères de  $\mathfrak{k}_n^\times$  dont l'orbite sous  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathfrak{k}}/\mathfrak{k})$  est de cardinal  $n$ . D'après Green [19], on a une correspondance surjective :

$$(2.24) \quad \tilde{\chi} \mapsto \mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\tilde{\chi})$$

de  $X_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$  vers l'ensemble des classes de  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations irréductibles cuspidales de  $\mathrm{GL}_n(\mathfrak{k})$ , et l'ensemble des antécédents de  $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\tilde{\chi})$  par (2.24) est l'orbite de  $\tilde{\chi}$  sous  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathfrak{k}}/\mathfrak{k})$ .

**Théorème 2.36 (James [22]).** — Soit un entier  $n \geq 1$ .

(1) Pour tout caractère  $\tilde{\chi} \in X_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ , la représentation  $\mathfrak{r}_\ell(\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\tilde{\chi}))$  est irréductible et cuspidale, et elle ne dépend que de la réduction modulo  $\ell$  de  $\tilde{\chi}$ .

(2) On a une correspondance surjective :

$$(2.25) \quad \chi \mapsto \mathfrak{j}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\chi) = \mathfrak{r}_\ell(\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\tilde{\chi}))$$

de l'ensemble des  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractères  $\chi$  de  $\mathfrak{k}_n^\times$  admettant un relèvement  $\tilde{\chi}$  dans  $X_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$  vers l'ensemble des classes de  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentations irréductibles cuspidales de  $\mathrm{GL}_n(\mathfrak{k})$  ; l'ensemble des antécédents de  $\mathfrak{j}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\chi)$  est l'orbite de  $\chi$  sous  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathfrak{k}}/\mathfrak{k})$ .

(3) La représentation  $\mathfrak{j}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\chi)$  est supercuspidale si et seulement si  $\chi \in X_n(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ .

Soit maintenant  $[\Lambda, n, 0, \beta]$  une strate simple de  $A$ . Fixons des homomorphismes :

$$\iota_{p, \overline{\mathbb{Q}}_\ell} : \mu_{p^\infty}(\mathbb{C}) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times, \quad \iota_{p, \overline{\mathbb{F}}_\ell} : \mu_{p^\infty}(\mathbb{C}) \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$$

comme au paragraphe 2.2 et supposons que le second est le composé du premier avec le morphisme de réduction mod  $\ell$ . Posons  $J = J(\beta, \Lambda)$ ,  $J^1 = J^1(\beta, \Lambda)$  et  $H^1 = H^1(\beta, \Lambda)$ . Comme  $H^1$  est un pro- $p$ -groupe, la réduction mod  $\ell$  définit une bijection :

$$\mathcal{C}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\Lambda, m, \beta) \rightarrow \mathcal{C}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\Lambda, m, \beta)$$

pour tout  $m$  tel que  $0 \leq m \leq -k_0(\beta, \Lambda) - 1$ . Appelons *relèvement* d'un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractère simple  $\theta$  son image réciproque par cette bijection.

**Proposition 2.37.** — Soit  $\theta \in \mathcal{C}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\Lambda, 0, \beta)$  un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractère simple, soit  $\tilde{\theta}$  le relèvement de  $\theta$  et soit  $\tilde{\kappa}$  une  $\beta$ -extension de  $\tilde{\theta}$ .

(1) Si  $\mathfrak{r}$  est une structure entière de  $\tilde{\kappa}$ , alors  $\mathfrak{r} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$  est une  $\beta$ -extension de  $\theta$ .

(2) Si  $\kappa$  est une  $\beta$ -extension de  $\theta$ , il y a une  $\beta$ -extension de  $\tilde{\theta}$  dont la réduction mod  $\ell$  est  $\kappa$ .

*Démonstration.* — La preuve est analogue à celle donnée dans [36, III.4.18]. Notons  $\kappa$  la représentation  $\mathfrak{r} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$  de  $J$ . La restriction de  $\tilde{\kappa}$  à  $H^1$  est un multiple de  $\tilde{\theta}$ , donc la restriction de  $\kappa$  à  $H^1$  est un multiple de  $\theta$ . Ainsi la restriction de  $\kappa$  au pro- $p$ -groupe  $J^1$  contient la représentation de Heisenberg  $\eta$ , et a la même dimension. Enfin, d'après [36, Lemme I.9.8], l'ensemble d'entrelacement de  $\kappa$  dans  $G$  est égal à  $\mathrm{JB}^\times J$ . C'est donc une  $\beta$ -extension de  $\theta$ .

Soit maintenant  $\kappa'$  une  $\beta$ -extension de  $\theta$ . D'après (2.2), il existe un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractère  $\chi$  de  $\mathfrak{k}_E^\times$  tel que  $\kappa$  soit isomorphe à  $\kappa' \otimes (\chi \circ N_{B/E})$ , c'est-à-dire que  $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\kappa})$  est égale à  $\kappa' \otimes (\chi \circ N_{B/E})$ . Si l'on note  $\alpha$  l'unique  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -caractère de  $\mathfrak{k}_E^\times$  d'ordre premier à  $\ell$  dont la réduction mod  $\ell$  soit  $\chi^{-1}$ , alors l'image de  $\tilde{\kappa}' \otimes (\alpha \circ N_{B/E})$  par  $\mathbf{r}_\ell$  est égale à  $\kappa'$ .  $\square$

**Remarque 2.38.** — Deux  $\beta$ -extensions de  $\tilde{\theta}$  ont des réductions mod  $\ell$  isomorphes si et seulement si elles sont tordues l'une de l'autre par un  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -caractère d'ordre une puissance de  $\ell$ .

On réduit maintenant les types simples modulo  $\ell$ .

**Proposition 2.39.** — Soit  $\theta \in \mathcal{C}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\Lambda, 0, \beta)$  un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractère simple et soit  $\tilde{\theta}$  son relèvement.

(1) Si  $\mathfrak{l}$  est une structure entière d'un  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -type simple contenant  $\tilde{\theta}$ , alors  $\mathfrak{l} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$  est un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -type simple contenant  $\theta$ .

(2) Pour tout  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -type simple  $\lambda$  contenant  $\theta$ , il existe un  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -type simple contenant  $\tilde{\theta}$  dont la réduction mod  $\ell$  est  $\lambda$ .

*Démonstration.* — Traitons d'abord le cas de niveau 0. En considérant un type simple de niveau 0 comme une représentation du quotient  $U(\Lambda)/U_1(\Lambda)$ , on se ramène au problème de la réduction des représentations irréductibles cuspidales du groupe fini  $GL_s(\mathfrak{k}_D)$  avec  $s \geq 1$ .

Supposons maintenant que le niveau est non nul. On fixe un  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -type simple  $\tilde{\lambda}$  contenant  $\tilde{\theta}$ , qu'on écrit  $\tilde{\kappa} \otimes \tilde{\sigma}$ . Si  $\mathfrak{k}$  et  $\mathfrak{s}$  sont des structures entières de  $\tilde{\kappa}$  et  $\tilde{\sigma}$  respectivement,  $\mathfrak{k} \otimes \mathfrak{s}$  est une structure entière de  $\tilde{\lambda}$ . Le résultat est alors une conséquence de la propositions 2.37 et du cas de niveau 0.  $\square$

La proposition 2.39 montre que l'existence des  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -types simples de  $G$  se déduit de l'existence des  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -types simples prouvée dans [29, 33].

### 3. Représentations cuspidales

Soit  $m \geq 1$  un entier et soit  $G = GL_m(D)$ . Dans cette section, on effectue la classification des représentations irréductibles cuspidales de  $G$  en termes de types simples maximaux (théorème 3.11). Ceci a été fait par Bushnell-Kutzko [10] et Sécherre-Stevens [32] dans le cas complexe, et par Vignéras [36] pour  $GL_n(\mathbb{F})$  dans le cas modulaire. Cette classification permet d'associer certains invariants à une représentation irréductible cuspidale de  $G$  (paragraphe 3.4 et 4.5).

On étudie ensuite les problèmes de la réduction et du relèvement des représentations irréductibles cuspidales de  $G$ . On montre que, contrairement au cas déployé traité dans [36], une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale entière de  $G$  ne se réduit pas toujours en une représentation irréductible (théorème 3.15) et qu'une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale de  $G$  n'admet pas toujours un relèvement (paragraphe 3.6).

Néanmoins, on prouve que toute  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible supercuspidale de  $G$  contenant un type simple maximal supercuspidal se relève à  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$  (théorème 3.27, remarque 3.28) et on donne dans le cas déployé une nouvelle preuve du fait (dû à Vignéras) selon lequel la réduction modulo  $\ell$  d'une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale entière est irréductible (corollaire 3.22, remarque 3.23).

### 3.1. Types simples maximaux

Soit  $(J, \lambda)$  un type simple maximal de  $G$ . Notons :

$$K = N_G(J, \lambda)$$

le normalisateur de la classe d'isomorphisme de  $\lambda$  dans  $G$ . On peut supposer que  $(J, \lambda)$  est défini par rapport à une strate simple  $[\Lambda, n, 0, \beta]$  où  $\Lambda$  est une  $\mathcal{O}_D$ -suite de réseaux stricte de  $D^m$ . Dans ce cas, il est d'usage dans les notations de remplacer cette suite par l'ordre héréditaire  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\Lambda)$  qu'elle définit.

**Proposition 3.1.** — *Pour toute représentation  $\Sigma$  prolongeant  $\lambda$  à  $K$ , l'induite  $\text{ind}_K^G(\Sigma)$  est une représentation irréductible cuspidale de  $G$ . En outre, l'application :*

$$(3.1) \quad \Sigma \mapsto \text{ind}_K^G(\Sigma)$$

*induit une bijection entre prolongements de  $\lambda$  à  $K$  et classes d'isomorphisme de représentations irréductibles cuspidales de  $G$  contenant  $\lambda$ .*

*Démonstration.* — La preuve s'inspire de [38, §8] mais des modifications doivent y être apportées. Soit  $\Sigma$  une représentation de  $K$  prolongeant  $\lambda$ . Comme l'entrelacement de  $\Sigma$  dans  $G$  est  $K$  (voir la remarque 2.14), la  $R$ -algèbre des endomorphismes de l'induite compacte  $\text{ind}_K^G(\Sigma)$  est isomorphe à  $R$ . Pour prouver qu'elle est irréductible, nous allons appliquer [38, Lemma 4.2].

Soit  $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$  une strate simple de  $A$  définissant  $(J, \lambda)$ . On pose  $U = U(\mathfrak{A}) \cap B^\times$ , qui est un sous-groupe compact maximal de  $B^\times$ .

**Lemme 3.2.** — *La représentation de  $K$  sur la composante  $\eta$ -isotypique de  $\text{ind}_K^G(\Sigma)$  est isomorphe à la somme directe des  $\Sigma^n$ , avec  $n \in N_{B^\times}(U)J/K$ , où  $N_{B^\times}(U)$  est le normalisateur de  $U$  dans  $B^\times$ .*

**Remarque 3.3.** — Dans le cas où  $D = F$ , on a  $K = N_{B^\times}(U)J$ , de sorte que la représentation de  $K$  sur la composante  $\eta$ -isotypique de  $\text{ind}_K^G(\Sigma)$  est isomorphe à  $\Sigma$  : voir [38, Corollary 8.4].

*Démonstration.* — La preuve est analogue à celle de la proposition 2.34. On trouve un isomorphisme :

$$\text{Hom}_{J^1}(\eta, \text{ind}_K^G(\Sigma)) \simeq \bigoplus_{g \in N_{B^\times}(U)J/K} \text{Hom}_{J^1}(\eta, \Sigma^g)$$

et le résultat s'ensuit.  $\square$

Pour appliquer le critère d'irréductibilité [38, Lemma 4.2], il faut montrer que, pour tout quotient irréductible  $\pi$  de  $\text{ind}_K^G(\Sigma)$ , la représentation  $\Sigma$  est un quotient de la restriction de  $\pi$  à  $K$ . Soit  $\pi$  un tel quotient irréductible ; par réciprocity de Frobenius,  $\Sigma$  est donc une sous-représentation de la restriction de  $\pi$  à  $K$ . Comme  $J^1$  est un pro- $p$ -groupe, la composante  $\eta$ -isotypique de  $\pi$  est un quotient de celle de  $\text{ind}_K^G(\Sigma)$  comme représentation de  $K$ . Mais c'est aussi un facteur direct de la restriction de  $\pi$  à  $J^1$  (qui est semi-simple), de sorte que  $\pi$  a la propriété attendue.

Enfin,  $\text{ind}_K^G(\Sigma)$  est cuspidale, puisque ses coefficients sont à support compact modulo le centre de  $G$  (voir [36, II.2.7]).

Il ne reste qu'à prouver que l'application (3.1) est bijective. Notons  $Z$  le centre de  $G$  et fixons un caractère  $\omega : Z \rightarrow R^\times$  dont la restriction à  $J \cap Z$  coïncide avec le caractère par lequel agit la restriction de  $\lambda$  à  $J \cap Z$ . Notons  $\lambda_\omega$  la représentation de  $JZ$  prolongeant  $\lambda$  et dont la restriction à  $Z$  agit par le caractère  $\omega$ . On va prouver que (3.1) induit une bijection entre prolongements

de  $\lambda_\omega$  à  $K$  et classes d'isomorphisme de représentations irréductibles cuspidales de  $G$  contenant  $\lambda_\omega$ .

Par un argument similaire à celui de [36, III.4.27], la représentation  $\lambda_\omega$  admet un prolongement  $\Sigma$  à  $K$  et l'application  $\chi \mapsto \Sigma\chi$  est une bijection entre les caractères de  $K$  triviaux sur  $JZ$  et les prolongements de  $\lambda_\omega$  à  $K$ . On en déduit que (3.1) est injective. Si maintenant  $\rho$  est une représentation irréductible cuspidale de  $G$  contenant  $\lambda_\omega$ , alors  $\rho$  est un quotient de  $\text{ind}_K^G(\Sigma \otimes R[K/JZ])$  où  $R[K/JZ]$  est la représentation régulière du groupe fini cyclique  $K/JZ$ . Il existe donc un caractère  $\chi$  de  $K$  trivial sur  $JZ$  tel que  $\rho$  soit un quotient de (et donc soit isomorphe à) l'induite  $\text{ind}_K^G(\Sigma\chi)$ . Ceci met fin à la démonstration de la proposition 3.1.  $\square$

Un couple de la forme  $(K, \Sigma)$  produit à partir d'un type simple maximal  $(J, \lambda)$  de  $G$  est appelé une *type simple maximal étendu* de  $G$ .

### 3.2. Représentations cuspidales de niveau 0

Rappelons qu'une représentation irréductible de  $G$  est de niveau 0 s'il y a un  $\mathcal{O}_F$ -ordre héréditaire  $\mathfrak{A}$  de  $A = \mathcal{M}_m(D)$  tel qu'elle possède un vecteur non nul invariant par  $U^1(\mathfrak{A}) = 1 + \mathfrak{P}$ , où  $\mathfrak{P}$  est le radical de  $\mathfrak{A}$ .

**Théorème 3.4.** — *Toute représentation irréductible cuspidale de niveau 0 de  $G$  contient un type simple maximal de niveau 0.*

*Démonstration.* — Soit  $\rho$  une représentation irréductible cuspidale de niveau 0 de  $G$ , et soit  $\mathfrak{A}$  un ordre héréditaire minimal parmi ceux pour lesquels  $\rho$  a des vecteurs invariants par  $U^1 = U^1(\mathfrak{A})$ , que l'on peut supposer standard. On pose  $U = U(\mathfrak{A})$ . On a un isomorphisme de groupes :

$$(3.2) \quad U/U^1 \rightarrow \text{GL}_{m_1}(\mathbb{F}_D) \times \cdots \times \text{GL}_{m_r}(\mathbb{F}_D),$$

où  $r$  est la période de  $\mathfrak{A}$  et les  $m_i$  sont des entiers dont la somme est égale à  $m$ . De cette façon, le groupe de Galois  $\text{Gal}(\mathbb{F}_D/\mathbb{F}_F)$  opère sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations de  $U/U^1$ .

**Lemme 3.5.** — *Il existe une représentation irréductible  $\sigma$  de  $U$  triviale sur  $U^1$  telle qu'on ait  $\text{Hom}_U(\sigma, \rho) \neq 0$ , et qui est cuspidale en tant que représentation de  $U/U^1$ .*

*Démonstration.* — L'existence d'une représentation irréductible  $\sigma$  de  $U$  triviale sur  $U^1$  telle que  $\text{Hom}_U(\sigma, \rho) \neq 0$  est donnée par le corollaire 2.8. Supposons qu'une telle représentation  $\sigma$  n'est pas cuspidale comme représentation de  $U/U^1$ . Alors la proposition 2.11 contredit la minimalité de  $\mathfrak{A}$ .  $\square$

Fixons une représentation  $\sigma$  de  $U$  satisfaisant aux conditions du lemme 3.5. Le couple  $(U, \sigma)$  est un type semi-simple homogène (de niveau 0) de  $G$ . On a le résultat général suivant.

**Proposition 3.6.** — *Soit  $\pi$  une représentation irréductible cuspidale de  $G$ . Si  $\pi$  contient un type semi-simple, alors ce type semi-simple est un type simple maximal.*

*Démonstration.* — D'après la remarque 2.20, un tel type semi-simple ne peut pas être une paire couvrante relativement à un sous-groupe de Levi propre de  $G$ . Par conséquent, c'est une paire couvrante d'un type simple maximal  $(J_M, \lambda_M)$  avec  $M = G$ , c'est-à-dire que c'est un type simple maximal.  $\square$

D'après la proposition 3.6, puisque le type semi-simple  $(U, \sigma)$  apparaît dans une représentation cuspidale, c'est un type simple maximal, ce qui met fin à la démonstration du théorème 3.4.  $\square$

### 3.3. Représentations cuspidales de niveau non nul

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant.

**Théorème 3.7.** — *Toute représentation irréductible cuspidale de niveau non nul de  $G$  contient un type simple maximal de niveau non nul.*

Soit  $\rho$  une représentation irréductible cuspidale de niveau non nul de  $G$ . Dans un premier temps, il s'agit de montrer que  $\rho$  contient un caractère simple. Fixons comme au paragraphe 2.2 un homomorphisme  $\iota_{p,R}$  et un caractère  $\psi_{F,C} : F \rightarrow \mathbb{C}^\times$ . Considérons une strate  $[\mathfrak{A}, n, n-1, \beta]$  de  $A$  (où  $\mathfrak{A}$  est un  $\mathcal{O}_F$ -ordre héréditaire de  $A$ ). Il lui correspond le caractère :

$$(3.3) \quad \psi_\beta : x \mapsto \iota_{p,R} \circ \psi_{F,C} \circ \text{tr}_{A/F}(\beta(x-1))$$

du sous-groupe ouvert compact  $U^n(\mathfrak{A}) = 1 + \mathfrak{P}^n$ , où  $\mathfrak{P}$  est le radical de  $\mathfrak{A}$ , et où  $\text{tr}_{A/F}$  désigne la trace réduite de  $A$  sur  $F$ .

**Lemme 3.8.** — *Il existe une strate simple  $[\mathfrak{A}, n, n-1, \beta]$  de  $A$  telle que la restriction de  $\rho$  à  $U^n(\mathfrak{A})$  contienne  $\psi_\beta$ .*

*Démonstration.* — La démonstration de Broussous [4] dans le cas complexe, elle-même inspirée de celle de Bushnell et Kutzko [12] concernant  $GL_n(F)$ , s'adapte ici. Rappelons-en les principales étapes.

(1) D'abord, on montre que toute représentation de  $G$  de niveau non nul contient une strate fondamentale au sens de [32, Définition 3.9].

(2) Ensuite, on montre qu'une représentation de  $G$  de niveau non nul contenant une strate fondamentale scindée (au sens de [32, Définition 3.9]) a un module de Jacquet non nul relativement à un sous-groupe parabolique propre de  $G$ .

(3) Enfin, on montre que toute représentation de  $G$  de niveau non nul contenant une strate fondamentale non scindée de  $A$  contient également une strate simple de  $A$ .

L'étape 1 (voir par exemple [21]) repose sur [4, Proposition 1.2.2] qui ne dépend pas du corps  $R$ . L'étape 2 repose principalement sur les propositions 2.3.2 et 2.4.3 de [4] (qui correspondent respectivement au théorème 3.7 et au lemme 3.9 de [12]) ; la première est indépendante de  $R$ , et la preuve de la seconde reste valable dans le cas modulaire – notamment l'argument “inversible à gauche implique inversible” de [11, 7.15] car, contrairement à ce qui se passe dans la preuve de la proposition 2.28, le groupe sous-jacent est ici un pro- $p$ -groupe. Enfin l'étape 3 repose sur [4, Théorème 1.2.5], qui ne dépend pas du corps  $R$ .  $\square$

**Lemme 3.9.** — *Il existe une strate simple  $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$  de  $A$  et un caractère simple  $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}, 0, \beta)$  tels que la restriction de  $\rho$  à  $H^1(\beta, \mathfrak{A})$  contienne  $\theta$ .*

*Démonstration.* — La démonstration de [32] dans le cas complexe s'adapte ici. Il faut prouver que, si le résultat n'est pas vrai,  $\rho$  contient ou bien une strate scindée, ou bien un caractère scindé au sens de la définition 3.22 de [32], et que dans chacun de ces deux cas,  $\rho$  a un module de Jacquet non nul relativement à un sous-groupe parabolique propre. La première étape repose sur [32, Théorème 3.23], dont la preuve ne dépend pas de  $R$ . La seconde étape repose principalement sur le théorème 4.3 et le corollaire 4.6 de [32] (ce dernier correspondant à [12, Corollary 6.6]) ;

la preuve du théorème ne dépend pas du corps  $R$  et celle du corollaire reste valable dans le cas modulaire.  $\square$

On fixe une strate simple  $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$  de  $A$  et un caractère simple  $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}, 0, \beta)$  satisfaisant à la condition du lemme 3.9, en choisissant  $\mathfrak{A}$  minimal pour cette propriété. On pose  $J = J(\beta, \mathfrak{A})$  et  $J^1 = J^1(\beta, \mathfrak{A})$  et on fixe une  $\beta$ -extension  $\kappa$  de  $\theta$ . D'après le lemme 2.8, la représentation  $\rho$  contient une sous-représentation de la forme  $\kappa \otimes \sigma$ , avec  $\sigma$  une représentation irréductible de  $J$  triviale sur  $J^1$ .

**Lemme 3.10.** — *En tant que représentation de  $J/J^1 \simeq \mathrm{GL}_s(\mathfrak{k}_{D'})^r$ , la représentation  $\sigma$  est cuspidale.*

*Démonstration.* — Si elle ne l'était pas, la proposition 2.11 contredirait la minimalité de  $\mathfrak{A}$ .  $\square$

D'après la propriété (2.20), et avec les notations du paragraphe 2.8, la représentation  $\kappa \otimes \sigma$  est l'induite du type semi-simple homogène  $\kappa \otimes \sigma$ . D'après la proposition 3.6, ce type semi-simple est un type simple maximal. Ceci met fin à la démonstration du théorème 3.7.

### 3.4. Invariants associés à une représentation cuspidale

Le théorème suivant subsume les théorèmes 3.4 et 3.7, et il les complète en fournissant une classification des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles cuspidales de  $G$  par la théorie des types simples.

**Théorème 3.11.** — *L'application :*

$$(3.4) \quad (\mathbf{K}, \Sigma) \mapsto \mathrm{ind}_{\mathbf{K}}^{\mathbf{G}}(\Sigma)$$

*induit une bijection entre classes de  $G$ -conjugaison de types simples maximaux étendus et classes d'isomorphisme de représentations irréductibles cuspidales de  $G$ .*

*Démonstration.* — D'après la proposition 3.1, cette application est bien définie, et elle est surjective d'après les théorèmes 3.4 et 3.7. Pour prouver qu'elle est injective, on reprend l'argument de [33, Theorem 7.2].  $\square$

Soit  $\rho$  une représentation irréductible cuspidale de  $G$ . Nous voulons associer à  $\rho$  des invariants. Fixons un type simple maximal  $(J, \lambda)$  de  $G$  contenu dans  $\rho$  ainsi qu'une strate simple  $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$  le définissant. Posons  $E = F(\beta)$  et écrivons  $\lambda$  sous la forme  $\kappa \otimes \sigma$ . Fixons un isomorphisme de  $E$ -algèbres (2.3) et notons  $\Gamma$  le groupe de Galois défini par (2.6). Notons  $(\mathbf{K}, \Sigma)$  le type simple maximal étendu prolongeant  $(J, \lambda)$  et contenu dans  $\rho$ .

**Définition 3.12.** — On note  $\ell$  l'exposant caractéristique de  $R$ , égal à 1 si  $R$  est de caractéristique nulle et égal à la caractéristique de  $R$  sinon.

Si  $\chi$  est un  $R$ -caractère non ramifié de  $G$ , alors  $\rho\chi$  est isomorphe à  $\rho$  si et seulement si  $\Sigma\chi = \Sigma$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\chi$  est trivial sur  $\mathbf{K}$ . D'après la remarque 2.14, c'est encore équivalent à  $\chi(\varpi_\lambda) = 1$ , où l'élément  $\varpi_\lambda \in G$  est défini par (2.7). Comme un caractère non ramifié de  $G$  est caractérisé par sa valeur en n'importe quel élément dont la norme réduite est une uniformisante de  $F$ , le groupe des  $R$ -caractères non ramifiés  $\chi$  de  $G$  tels que  $\rho\chi$  soit isomorphe à  $\rho$  est fini et cyclique. Son cardinal, noté :

$$n(\rho),$$

est le plus grand diviseur premier à  $\ell$  de la valuation de la norme réduite de  $\varpi_\lambda$  (dans le cas où  $R$  est de caractéristique nulle, voir [31, Proposition 4.1]). Rappelons que  $d$  est le degré réduit de  $D$  sur  $F$  et notons :

$$f(\rho)$$

le quotient de  $md$  par l'indice de ramification de  $E$  sur  $F$ . Notons ensuite :

$$s(\rho)$$

l'ordre du stabilisateur de  $\sigma$  dans  $\Gamma$  et :

$$b(\rho)$$

le cardinal de l'orbite de  $\sigma$  sous  $\Gamma$ , qui avait été noté  $b(\lambda)$  au paragraphe 2.6.

Remarquons que  $s(\rho)$  est l'indice de  $E^\times J$  dans le  $G$ -normalisateur de  $\lambda$  et que  $s(\rho)b(\rho) = d'$ , le degré réduit de  $D'$  sur  $E$ . L'entier  $f(\rho)$  s'écrit aussi :

$$(3.5) \quad f(\rho) = em'd'$$

où  $e$  est l'indice de ramification de  $E$  sur  $F$ , ce qui implique que  $s(\rho)$  divise  $f(\rho)$  et que le quotient de  $f(\rho)$  par  $s(\rho)$  est la valuation de la norme réduite de  $\varpi_\lambda$ . On en déduit que :

$$(3.6) \quad f(\rho) = n(\rho)s(\rho)\ell^u, \quad u \geq 0.$$

Rappelons que la classe d'inertie de  $\rho$  est l'ensemble des classes d'isomorphisme de la forme  $[\rho\chi]$  où  $\chi$  décrit l'ensemble des caractères non ramifiés de  $G$ .

**Proposition 3.13.** — *Les quantités  $n(\rho)$ ,  $f(\rho)$ ,  $b(\rho)$ ,  $s(\rho)$  ne dépendent que de la classe d'inertie de  $\rho$ , et pas du type simple maximal  $(J, \lambda)$  ni de la strate  $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ .*

*Démonstration.* — Par définition,  $n(\rho)$  ne dépend que de la classe d'inertie de  $\rho$ . Ensuite, fixons un type simple maximal  $(J', \lambda')$  contenu dans  $\rho$ , une strate simple  $[\mathfrak{A}', n', 0, \beta']$  le définissant et écrivons  $\lambda'$  sous la forme  $\kappa' \otimes \sigma'$ . D'après le théorème 3.11, le type simple  $(J', \lambda')$  est conjugué à  $(J, \lambda)$  sous  $G$ . On peut donc supposer que  $(J', \lambda')$  est égal à  $(J, \lambda)$ . D'après [5, Theorem 9.4], l'indice de ramification et le degré résiduel de  $E$  sur  $F$  ne dépendent pas du choix de la strate simple  $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ , c'est-à-dire qu'ils sont respectivement égaux à l'indice de ramification et au degré résiduel de  $F(\beta')$  sur  $F$ . L'entier  $f(\rho)$  ne dépend donc pas des choix effectués, non plus que le degré réduit de  $D'$  sur  $E$ . Il reste donc à prouver que  $b(\rho)$  ne dépend pas du choix de  $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$  ni de  $\sigma$ . Si l'on considère  $\sigma$  comme une représentation de  $J/J^1$ , alors  $b(\rho)$  est égal à l'indice de  $N_G(\lambda)$  dans  $N_G(J)$ , donc  $b(\rho)$  et  $s(\rho)$  ne dépendent que de la classe d'inertie de  $\rho$ .  $\square$

### 3.5. Réduction d'une représentation cuspidale entière

Soit  $\ell$  un nombre premier différent de  $p$ . Soit  $\tilde{\rho}$  une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale de  $G$ . Fixons un type simple maximal étendu  $(\tilde{K}, \tilde{\Sigma})$  de  $G$  contenu dans  $\tilde{\rho}$ , c'est-à-dire que  $\tilde{\rho}$  est isomorphe à l'induite compacte de  $\tilde{\Sigma}$  à  $G$ .

**Lemme 3.14.** — *La  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation  $\tilde{\rho}$  est entière si et seulement si  $\tilde{\Sigma}$  est entière.*

*Démonstration.* — Si  $\tilde{\Sigma}$  est entière, alors son induite compacte à  $G$  l'est également (paragraphe 1.7), donc  $\tilde{\rho}$  est entière. Inversement, si  $\tilde{\rho}$  est entière, alors sa restriction à  $\tilde{K}$  l'est également, ainsi que  $\tilde{\Sigma}$  qui en est un facteur direct (voir le lemme 3.2).  $\square$

Supposons dorénavant que  $\tilde{\rho}$  est entière. Soit  $J$  le sous-groupe compact maximal de  $\tilde{K}$ , et soit  $\tilde{\lambda}$  la restriction de  $\tilde{\Sigma}$  à  $J$ . Alors  $(J, \tilde{\lambda})$  est un type simple maximal de  $G$ . Si  $\mathfrak{l}$  est une structure entière de  $\tilde{\Sigma}$ , c'est aussi une structure entière de  $\tilde{\lambda}$  et la représentation  $\lambda = \mathfrak{l} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$  est un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -type simple maximal de  $G$  d'après la proposition 2.39. Soit  $K$  le normalisateur de  $\lambda$  dans  $G$ . Le groupe  $\tilde{K}$  est contenu dans  $K$  et (remarque 2.14) il est d'indice fini dans  $K$ . Posons :

$$a = a_\ell(\tilde{\rho}) = (K : \tilde{K}).$$

Notons  $\nu$  le caractère non ramifié de  $G$  obtenu en composant la norme réduite de  $G$  dans  $F^\times$ , la valuation de  $F^\times$  dans  $\mathbb{Z}$  (normalisée en envoyant une uniformisante sur 1) et l'unique morphisme de  $\mathbb{Z}$  dans  $\overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$  envoyant 1 sur l'inverse de  $q \bmod \ell$ .

**Théorème 3.15.** — *Il y a une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale  $\rho$  de  $G$  telle que :*

$$(3.7) \quad \mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho}) = [\rho] + [\rho\nu] + \cdots + [\rho\nu^{a-1}]$$

dans le groupe de Grothendieck de  $G$ .

*Démonstration.* — On note  $\Sigma^\flat$  la représentation de  $\tilde{K}$  sur  $\mathfrak{l} \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ . C'est un prolongement de  $\lambda$  à  $\tilde{K}$ , que l'on peut prolonger à  $K$  d'après le lemme suivant.

**Lemme 3.16.** — *Il existe une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation  $\Sigma$  de  $K$  prolongeant  $\Sigma^\flat$ .*

*Démonstration.* — On choisit une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation  $\Sigma_0$  de  $K$  prolongeant  $\lambda$ . Les  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentations de  $K$  prolongeant  $\lambda$  sont de la forme  $\Sigma_0\chi$ , où  $\chi$  est un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractère de  $K$  trivial sur  $J$ . Soit  $\chi'$  un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractère de  $\tilde{K}$  trivial sur  $J$  tel que la restriction de  $\Sigma_0$  à  $\tilde{K}$  soit isomorphe à  $\Sigma^\flat\chi'$ . Puisque le groupe  $K/J$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , il existe un caractère  $\chi$  de  $K$  prolongeant  $\chi'$ . Alors  $\Sigma = \Sigma_0\chi$  est une représentation de  $K$  prolongeant  $\Sigma^\flat$ .  $\square$

On choisit une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation  $\Sigma$  de  $K$  prolongeant  $\Sigma^\flat$ . D'après la proposition 3.1, l'induite compacte de  $\Sigma$  à  $G$ , notée  $\rho$ , est une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale. La réduction mod  $\ell$  commutant à l'induction compacte,  $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho})$  est la semi-simplifiée de l'induite compacte de  $\Sigma^\flat$  à  $G$ . Écrivons :

$$\mathrm{ind}_K^K(\Sigma^\flat) = \Sigma \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell[K/\tilde{K}]$$

où  $\overline{\mathbb{F}}_\ell[K/\tilde{K}]$  désigne la représentation régulière du groupe cyclique  $K/\tilde{K}$ , c'est-à-dire l'induite à  $K$  du  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractère trivial de  $\tilde{K}$ . La semi-simplifiée de cette dernière est égale à :

$$[1] + [\alpha] + \cdots + [\alpha^{a-1}]$$

où  $\alpha$  est un générateur quelconque du groupe des  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractères de  $K/\tilde{K}$ , ce groupe étant cyclique et d'ordre égal au plus grand diviseur de  $a$  premier à  $\ell$ . On en déduit que :

$$\mathbf{r}_\ell(\mathrm{ind}_K^K(\tilde{\Sigma})) = [\Sigma] + [\Sigma\alpha] + \cdots + [\Sigma\alpha^{a-1}].$$

En induisant à  $G$ , on trouve que :

$$\mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho}) = [\rho] + [\rho\chi] + \cdots + [\rho\chi^{a-1}]$$

où  $\chi$  est n'importe quel caractère non ramifié de  $G$  prolongeant  $\alpha$ .

Si  $a$  est égal à 1, il n'y a rien d'autre à prouver. Sinon, pour terminer la preuve du théorème 3.15, il suffit de prouver que la restriction de  $\nu$  à  $K$  est un générateur du groupe des  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractères de  $K/\tilde{K}$ . Le groupe  $K$  étant engendré par  $J$  et l'élément  $\varpi_\lambda$  défini par (2.7), il suffit de prouver que l'ordre de  $\nu(\varpi_\lambda) \in \mathbb{R}^\times$  est égal au plus grand diviseur de  $a$  premier à  $\ell$ . Un calcul simple montre que la valuation de la norme réduite de  $\varpi_\lambda \in G$  est égale à  $f(\rho)s(\rho)^{-1}$ .



**Définition 3.17.** — Pour tout entier  $k \geq 1$  premier à  $\ell$ , notons  $o_\ell(k)$  l'ordre de  $k$  dans  $\mathbb{F}_\ell^\times$ .

Compte tenu de (3.6), on en déduit que la restriction de  $\nu$  à  $K$  est d'ordre :

$$o_\ell(q^{n(\rho)}).$$

Il s'agit donc maintenant de prouver que  $a$  est égal à 1, ou est de la forme  $o_\ell(q^{n(\rho)})\ell^u$  pour un entier  $u \geq 0$ .

Reprenons les notations du paragraphe 2.11.

**Lemme 3.18.** — Soient  $\mathfrak{k}$  un corps fini de caractéristique  $p$ , soit  $\bar{\mathfrak{k}}$  une clôture algébrique de  $\mathfrak{k}$  et soit  $m \geq 1$  un entier. Soit un caractère  $\tilde{\chi} : \mathfrak{k}_m^\times \rightarrow \bar{\mathbb{Z}}_\ell^\times$  et soit  $\chi$  la réduction de  $\tilde{\chi}$  modulo  $\ell$ . On note respectivement  $f(\tilde{\chi})$  et  $f(\chi)$  les cardinaux de leurs orbites sous  $\text{Gal}(\bar{\mathfrak{k}}/\mathfrak{k})$ .

- (1) Si  $\ell$  ne divise pas l'ordre de  $\tilde{\chi}$ , alors  $f(\chi) = f(\tilde{\chi})$ .
- (2) Sinon, il existe un entier  $u \geq 0$  tel que :

$$(3.8) \quad f(\tilde{\chi}) = f(\chi) \cdot o_\ell(q^{f(\chi)}) \ell^u$$

où  $q$  désigne le cardinal de  $\mathfrak{k}$ .

*Démonstration.* — On note  $k$  l'ordre de  $\tilde{\chi}$ . L'entier  $f(\tilde{\chi})$  est l'ordre de  $q$  dans  $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^\times$ . Si  $\ell$  est premier à  $k$ , alors  $\chi$  est d'ordre  $k$ , donc on a  $f(\chi) = f(\tilde{\chi})$ . Sinon, on écrit  $k$  sous la forme  $k'\ell^r$ , avec  $k'$  premier à  $\ell$  et  $r \geq 1$ . L'ordre de  $q$  dans  $(\mathbb{Z}/k'\mathbb{Z})^\times$  est égal à  $f(\chi)$ , tandis que l'ordre de  $q$  dans  $(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})^\times$  est de la forme  $o_\ell(q)\ell^u$ ,  $u \geq 0$ . On obtient la formule annoncée en remarquant que l'ordre de  $q$  dans  $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^\times$  est le plus petit multiple commun aux ordres de  $q$  dans  $(\mathbb{Z}/k'\mathbb{Z})^\times$  et  $(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})^\times$  respectivement.  $\square$

**Lemme 3.19.** — L'entier  $a$  est soit égal à 1, soit de la forme  $o_\ell(q^{n(\rho)})\ell^u$  avec  $u \geq 0$ .

*Démonstration.* — Fixons une décomposition de  $\tilde{\lambda}$  de la forme  $\tilde{\kappa} \otimes \tilde{\sigma}$  et identifions  $\tilde{\sigma}$  à une représentation irréductible cuspidale de  $GL_{m'}(\mathfrak{k}_{D'})$ , avec les notations du paragraphe 2.5. Fixons un antécédent  $\tilde{\chi}$  de  $\tilde{\sigma}$  par la correspondance (2.24). Soit  $\chi$  la réduction de  $\tilde{\chi}$  modulo  $\ell$  et soit  $\sigma$  la réduction de  $\tilde{\sigma}$  modulo  $\ell$ , c'est-à-dire l'image de  $\chi$  par la correspondance (2.25). Remarquons que :

$$(3.9) \quad a = \frac{b(\tilde{\rho})}{b(\rho)} = \frac{s(\rho)}{s(\tilde{\rho})}.$$

Ensuite, notons  $f(\chi)$  et  $f(\tilde{\chi})$  les cardinaux des orbites de  $\chi$  et  $\tilde{\chi}$  sous  $\text{Gal}(\bar{\mathfrak{k}}/\mathfrak{k}_E)$ , et notons  $f'(\chi)$  et  $f'(\tilde{\chi})$  les cardinaux des orbites de  $\chi$  et  $\tilde{\chi}$  sous  $\text{Gal}(\bar{\mathfrak{k}}/\mathfrak{k}_{D'})$ . On a :

$$f(\tilde{\chi}) = b(\tilde{\rho})f'(\tilde{\chi}) \quad \text{et} \quad f(\chi) = b(\rho)f'(\chi),$$

ce qui permet d'écrire la relation :

$$a = \frac{f(\tilde{\chi})}{f(\chi)} \cdot \frac{f'(\chi)}{f'(\tilde{\chi})}.$$

Si l'on applique le lemme 3.18 avec  $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_{D'}$  puis avec  $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_E$ , on en déduit d'une part que, si  $\ell$  ne divise pas l'ordre de  $\tilde{\chi}$ , alors  $a = 1$ , et d'autre part que, si  $\ell$  divise l'ordre de  $\tilde{\chi}$ , alors on a :

$$a = o_\ell(q_E^{f(\chi)}) \cdot o_\ell(q_{D'}^{f'(\chi)})^{-1} \cdot \ell^u, \quad u \geq 0,$$

où  $q_{D'}$  et  $q_E$  désignent les cardinaux de  $\mathfrak{k}_{D'}$  et  $\mathfrak{k}_E$  respectivement. Supposons dorénavant qu'on est dans ce second cas. Remarquons que  $f'(\tilde{\chi}) = m'$  et posons  $\delta = m'f'(\chi)^{-1}$ . Si l'on note  $f_{E/F}$  le degré résiduel de  $E$  sur  $F$ , on obtient grâce à la relation (3.6) :

$$f_{E/F}f(\chi) = f_{E/F}b(\rho)f'(\chi) = n(\rho)\delta^{-1}.$$

Ensuite, on a le lemme suivant.

**Lemme 3.20.** — *L'entier  $\delta$  est égal à 1 ou est de la forme  $o_\ell\left(q_{D'}^{f'(\chi)}\right)\ell^u$  avec  $u \geq 0$ .*

*Démonstration.* — Le caractère  $\chi$  est un caractère du groupe multiplicatif de l'unique extension de degré  $m'$  de  $\mathfrak{k}_{D'}$  contenue dans  $\bar{\mathfrak{k}}$ . Il se factorise sous la forme  $\mu \circ N$ , où  $\mu$  est un caractère du groupe multiplicatif de l'unique extension de degré  $f'(\chi)$  de  $\mathfrak{k}_{D'}$  contenue dans  $\bar{\mathfrak{k}}$  et où  $N$  est le morphisme de norme qui convient.

Par la correspondance (2.25), le caractère  $\mu$  définit une représentation irréductible supercuspidale  $\tau$  de  $\mathrm{GL}_{f'(\chi)}(\mathfrak{k}_{D'})$ . D'après [17] (voir aussi [36, III.2.8]), la représentation  $\sigma$  est l'unique sous-quotient irréductible cuspidal de l'induite parabolique à  $\mathrm{GL}_{f'(\chi)}(\mathfrak{k}_{D'})$  de  $\tau \otimes \cdots \otimes \tau$  ( $\delta$  fois) et  $\delta$  est soit égal à 1 (si  $\sigma$  est supercuspidale), soit de la forme :

$$\delta = o_\ell\left(q_{D'}^{f'(\chi)}\right)\ell^u, \quad u \geq 0.$$

Le résultat annoncé s'ensuit. □

On en déduit que  $a$  est de la forme  $o_\ell(q^{n(\rho)/\delta})\delta^{-1}\ell^u$  pour un entier  $u \geq 0$ , ce qui prouve le lemme 3.19. □

Le lemme 3.19 met fin à la preuve du théorème 3.15. □

**Remarque 3.21.** — La représentation  $\rho$  dépend du choix de  $\Sigma$ , c'est-à-dire que changer de  $\Sigma$  a pour effet de tordre  $\rho$  par une puissance de  $\nu$ . Cependant  $n(\rho)$ ,  $f(\rho)$ ,  $b(\rho)$ ,  $s(\rho)$  ne dépendent que de  $\ell$  et de la classe d'inertie de  $\tilde{\rho}$ . On a  $f(\tilde{\rho}) = f(\rho)$  ainsi que la formule :

$$a_\ell(\tilde{\rho}) \equiv \frac{n(\tilde{\rho})}{n(\rho)} \pmod{\ell^{\mathbb{Z}}},$$

qui provient des relations (3.6) et (3.9).

**Corollaire 3.22.** — *Soit  $\tilde{\rho}$  une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale entière de  $G$ . Supposons que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

- (1)  $D$  est égale à  $F$  (cas déployé).
- (2) On a  $o_\ell(q^d) > m$  (cas banal).

Alors  $a_\ell(\tilde{\rho}) = 1$ , c'est-à-dire que  $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho})$  est irréductible.

*Démonstration.* — Dans le cas 1, on a  $b(\tilde{\rho}) = b(\rho) = 1$  (voir la remarque 2.12) donc  $a$  est égal à 1 d'après (3.9).

Dans le cas 2, si l'on reprend les notations de la preuve du théorème 3.15, il suffit de montrer que  $\ell$  ne divise pas l'ordre de  $\tilde{\chi}$ . Supposons au contraire que  $\ell$  divise l'ordre de  $\tilde{\chi}$ . Celui-ci est un caractère du groupe multiplicatif de l'extension de degré  $m'$  de  $\mathfrak{k}_{D'}$ , donc  $\ell$  divise aussi l'ordre de ce groupe, c'est-à-dire :

$$q^{f(\rho)} - 1.$$

Comme  $f(\rho)$  divise  $md$ , on trouve que  $q^{md}$  est congru à 1 mod  $\ell$ , ce qui contredit l'hypothèse. □

**Remarque 3.23.** — Dans le cas où  $D$  est égale à  $F$ , on obtient une nouvelle preuve du théorème [36, III.1.1], qui n'utilise pas la théorie des dérivées.

**Corollaire 3.24.** — Si  $a_\ell(\tilde{\rho}) > 1$ , c'est-à-dire si  $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho})$  est réductible, alors  $o_\ell(q^{f(\rho)}) = 1$ .

*Démonstration.* — D'après (3.9), l'entier  $a_\ell(\tilde{\rho})$  divise  $s(\rho)$ . D'après le lemme 3.19, on en déduit que  $o_\ell(q^{n(\rho)})$  divise  $s(\rho)$ . Le résultat se déduit de la relation (3.6).  $\square$

**Exemple 3.25.** — On suppose que  $D$  est un corps de quaternions sur  $F$  (c'est-à-dire que  $d = 2$ ). Soit  $(U, \tilde{\chi})$  un  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -type simple de niveau 0 de  $D^\times$ , c'est-à-dire que  $U = \mathcal{O}_D^\times$  et que le caractère :

$$\tilde{\chi} : U \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$$

est trivial sur  $1 + \mathfrak{p}_D$ , de sorte qu'on peut le voir comme un caractère de  $\mathfrak{k}_D^\times$ . Soient  $b(\tilde{\chi})$  l'indice du normalisateur de  $\tilde{\chi}$  dans  $D^\times$  et  $\tilde{\rho}$  une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible entière de  $D^\times$  contenant  $\tilde{\chi}$ . Celle-ci est cuspidale de niveau 0 et de dimension finie égale à  $b(\tilde{\chi})$ .

Si  $b(\tilde{\chi}) = 1$ , alors  $\tilde{\rho}$  est un  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -caractère entier de  $D^\times$  et sa réduction mod  $\ell$  est un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractère de  $D^\times$ .

Supposons maintenant que  $b(\tilde{\chi}) = 2$ , c'est-à-dire que  $\tilde{\chi}^q \neq \tilde{\chi}$ . Soit  $\chi$  la réduction mod  $\ell$  de  $\tilde{\chi}$  et soit  $b(\chi)$  l'indice du normalisateur de  $\chi$  dans  $D^\times$ . Si l'ordre de  $\tilde{\chi}^{q-1}$  n'est pas une puissance de  $\ell$ , alors  $b(\chi) = 2$  et  $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho})$  est une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible. Sinon, on a :

$$(3.10) \quad \chi^{q-1} = 1,$$

c'est-à-dire que  $b(\chi) = 1$ . Si  $\ell > 2$ ,  $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho})$  est la somme des deux  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractères de  $D^\times$  prolongeant  $\chi$ . Si  $\ell = 2$ , alors  $\chi$  se prolonge de façon unique en un  $\overline{\mathbb{F}}_2$ -caractère de  $D^\times$ , que l'on note encore  $\chi$ , et  $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho})$  est égale à  $\chi + \chi$ .

Si  $q = 8$  et  $\ell = 3$ , la condition (3.10) est vérifiée pour tout caractère  $\tilde{\chi}$ . Toute  $\overline{\mathbb{F}}_3$ -représentation cuspidale de niveau 0 de  $D^\times$  est de dimension 1.

### 3.6. Relèvement d'une représentation cuspidale

Soit  $\ell$  un nombre premier différent de  $p$ .

**Proposition 3.26.** — Soit  $\rho$  une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale de  $G$ . Il existe une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale entière  $\tilde{\rho}$  de  $G$  telle que  $[\rho]$  apparaisse dans  $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho})$ .

*Démonstration.* — Soit  $(J, \lambda)$  un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -type simple maximal de  $G$  contenu dans  $\rho$ . On note  $K$  le normalisateur de  $\lambda$  dans  $G$  et  $\Sigma$  le prolongement de  $\lambda$  à  $K$  tel que  $\rho$  soit isomorphe à l'induite compacte de  $\Sigma$  à  $G$ . D'après la proposition 2.39, il y a un  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -type simple maximal  $(J, \tilde{\lambda})$  relevant  $\lambda$ . On note  $\tilde{K}$  le normalisateur de  $\tilde{\lambda}$  dans  $G$ , et on fixe un prolongement  $\tilde{\Sigma}$  de  $\lambda$  à  $\tilde{K}$  dont la réduction modulo  $\ell$  coïncide avec la restriction de  $\Sigma$  à  $\tilde{K}$ . Alors l'induite compacte de  $\tilde{\Sigma}$  à  $G$  est irréductible cuspidale entière, et sa réduction modulo  $\ell$  contient  $\rho$  d'après le théorème 3.15.  $\square$

Dans la situation de la proposition 3.26, il n'y a pas toujours de  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale entière de  $G$  dont la réduction mod  $\ell$  soit exactement égale à  $[\rho]$  (voir l'exemple 3.31). Cependant, si  $\rho$  est supercuspidale, on a le résultat important suivant.

**Théorème 3.27.** — Soit  $\rho$  une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible supercuspidale de  $G$ . Supposons que  $\rho$  contient un type simple maximal de la forme  $(J, \kappa \otimes \sigma)$  avec  $\sigma$  supercuspidale. Il y a une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale entière  $\tilde{\rho}$  de  $G$  telle que  $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho}) = [\rho]$ .

**Remarque 3.28.** — On prouve dans [25] que l’hypothèse sur  $\sigma$  est superflue, c’est-à-dire que toute représentation irréductible supercuspidale contient un type simple maximal de la forme indiquée dans l’énoncé du théorème. On y prouve également la réciproque, à savoir que toute représentation irréductible cuspidale de  $G$  contenant un type simple maximal  $(J, \kappa \otimes \sigma)$  avec  $\sigma$  supercuspidale est elle-même supercuspidale.

*Démonstration.* — Soit  $(J, \lambda)$  un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -type simple maximal de  $G$  contenu dans  $\rho$ . Écrivons  $\lambda$  sous la forme  $\kappa \otimes \sigma$  et fixons un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractère  $\chi$  correspondant à  $\sigma$  par (2.25). D’après la proposition 2.39, il y a un  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -type simple maximal  $(J, \tilde{\lambda})$  relevant  $\lambda$ . Plus précisément, fixons un relèvement  $\tilde{\kappa}$  de  $\kappa$  et notons  $\tilde{\chi}$  l’unique  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -caractère d’ordre premier à  $\ell$  dont la réduction mod  $\ell$  soit  $\chi$ . Si l’on note  $\tilde{\sigma}$  la  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation cuspidale correspondant à  $\tilde{\chi}$  par (2.24) et si l’on pose  $\tilde{\lambda} = \tilde{\kappa} \otimes \tilde{\sigma}$ , alors  $\tilde{K} = K$  (avec les notations de la preuve de la proposition 3.26). Pour terminer, on suit la preuve de la proposition 3.26.  $\square$

**Remarque 3.29.** — Si  $\rho$  est une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale mais non supercuspidale de  $G$ , le lemme 3.19 montre que, si  $\tilde{\rho}$  est une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale entière de  $G$  satisfaisant à la condition de la proposition 3.26, le plus grand diviseur de  $a_\ell(\tilde{\rho})$  premier à  $\ell$  ne dépend pas de  $\tilde{\rho}$ , mais uniquement de la classe d’inertie de  $\rho$ .

**Remarque 3.30.** — Dans le cas banal, c’est-à-dire si  $o_\ell(q^d) > m$ , toute représentation irréductible cuspidale de  $G$  est supercuspidale, et le théorème 3.27 s’applique (voir [23]).

**Exemple 3.31.** — Donnons un exemple de  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale de  $G$  n’admettant aucun relèvement à  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ . Selon la remarque 3.29, il suffit de trouver un exemple où le plus grand diviseur de  $a_\ell(\tilde{\rho})$  premier à  $\ell$  est  $> 1$ . Fixons un corps de quaternions  $D$  sur  $F$ . Soit  $(J, \sigma)$  un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -type simple de niveau 0 de  $G = \mathrm{GL}_2(D)$ . On peut supposer que  $J = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_D)$  et considérer  $\sigma$  comme une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale de  $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{k}_D)$ . D’après le théorème 2.36, la représentation  $\sigma$  est paramétrée par un  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -caractère  $\chi$  de  $\mathfrak{k}^\times$  (où  $\mathfrak{k}$  est une extension quadratique fixée de  $\mathfrak{k}_D$ ) admettant un relèvement :

$$\tilde{\chi} : \mathfrak{k}^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$$

tel que  $\tilde{\chi}^{q^2} \neq \tilde{\chi}$ . On note  $\tilde{\sigma}$  la  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale de  $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{k}_D)$  paramétrée par  $\tilde{\chi}$ . C’est un relèvement de  $\sigma$ . On suppose que :

$$(3.11) \quad \chi^{q^2} = \chi,$$

c’est-à-dire que la représentation  $\sigma$  n’est pas supercuspidale. Soit  $\rho$  une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible de  $\mathrm{GL}_2(D)$  dont la restriction à  $J$  contient  $\sigma$ , et soit  $\tilde{\rho}$  une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible dont la restriction à  $J$  contient  $\tilde{\sigma}$ . Ce sont des représentations cuspidales de niveau 0. Si  $b(\rho) = 2$ , alors  $\rho$  se relève en  $\tilde{\rho}$  puisque l’entier  $b(\tilde{\rho})$  divise 2 et est un multiple de  $b(\rho) = 2$ . On suppose maintenant que  $b(\rho) = 1$ , de sorte qu’on a :

$$(3.12) \quad \chi^q = \chi.$$

Pour que  $\rho$  se relève en une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale de  $\mathrm{GL}_2(D)$ , il faut et suffit qu’on puisse choisir  $\tilde{\sigma}$  de sorte que son orbite sous l’action de  $\mathrm{Gal}(\mathfrak{k}_D/\mathfrak{k}_F)$  soit de cardinal 1. En d’autres termes, il faut et suffit que  $\chi$  admette un relèvement  $\tilde{\chi}$  tel que :

$$\tilde{\chi}^{q^2} = \tilde{\chi}^q \neq \tilde{\chi},$$

ce qui est impossible. En conclusion, une  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation  $\rho$  irréductible cuspidale non supercuspidale de niveau 0 de  $GL_2(\mathbb{D})$  a un relèvement à  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$  si et seulement si  $b(\rho) = 2$ .

Par exemple, si  $q = 4$  et  $\ell = 17$ , le groupe  $\mathfrak{k}^\times$  est le produit direct d'un groupe cyclique d'ordre 15 par un groupe d'ordre 17. Un  $\overline{\mathbb{F}}_{17}$ -caractère de  $\mathfrak{k}^\times$  est trivial sur le facteur d'ordre 17 et vérifie donc la condition (3.11), c'est-à-dire qu'aucune  $\overline{\mathbb{F}}_{17}$ -représentation irréductible cuspidale de  $GL_2(\mathfrak{k}_\mathbb{D})$  n'est supercuspidale. Par (3.12), on a  $b(\rho) = 1$  si et seulement si  $\chi^3 = 1$ . Si  $\tilde{\chi}$  est un  $\overline{\mathbb{Q}}_{17}$ -caractère de  $\mathfrak{k}^\times$  d'ordre 17, sa réduction modulo 17 est le caractère trivial, qui paramètre une  $\overline{\mathbb{F}}_{17}$ -représentation irréductible cuspidale non supercuspidale de niveau 0 de  $GL_2(\mathbb{D})$  n'admettant pas de relèvement à  $\overline{\mathbb{Q}}_{17}$ .

#### 4. Types et algèbres de Hecke

Soit  $m \geq 1$  un entier et soit  $G = GL_m(\mathbb{D})$ . Cette section est consacrée à l'étude des liens entre les représentations lisses de  $G$  et les modules sur certaines algèbres de Hecke affines. Soit  $(K, \tau)$  une paire formée d'un sous-groupe ouvert compact  $K \subseteq G$  et d'une représentation irréductible  $\tau$  de  $K$ .

Dans le cas où  $R$  est de caractéristique nulle, on lui associe la sous-catégorie pleine  $\mathcal{R}(K, \tau)$  de  $\mathcal{R}_R(G)$  formée des représentations engendrées par leur composante  $\tau$ -isotypique. Le foncteur  $\mathbf{M}_\tau$  défini au paragraphe 2.7 est exact, et il induit une bijection entre les classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de  $\mathcal{R}(K, \tau)$  et les classes d'isomorphisme de modules simples sur l'algèbre  $\mathcal{H}(G, \tau)$ . On a une notion bien définie de type, à savoir que  $(K, \tau)$  est un type dans  $G$  si et seulement si l'une des trois propriétés équivalentes suivantes est vérifiée (voir [11]) :

- (1)  $\mathcal{R}(K, \tau)$  est stable par sous-quotients dans  $\mathcal{R}_R(G)$  ;
- (2)  $\mathbf{M}_\tau$  induit une équivalence de  $\mathcal{R}(K, \tau)$  sur la catégorie des modules à droite sur  $\mathcal{H}(G, \tau)$  ;
- (3)  $\mathcal{R}(K, \tau)$  est la somme directe d'un nombre fini de blocs de Bernstein de  $\mathcal{R}_R(G)$ .

Dans le cas modulaire, la situation est plus compliquée. D'abord,  $\tau$  n'étant pas nécessairement projective dans la catégorie des représentations lisses de  $K$ , on perd une propriété importante : le foncteur  $\mathbf{M}_\tau$  n'est pas forcément exact, et il n'induit pas forcément une bijection entre classes de représentations irréductibles de  $\mathcal{R}(K, \tau)$  et classes de modules simples sur  $\mathcal{H}(G, \tau)$ .

Ensuite, on n'a plus de notion claire de ce que devrait être un type dans  $G$  : outre le fait que la décomposition en blocs indécomposables de  $\mathcal{R}_R(G)$  n'est pas connue<sup>(3)</sup>, les propriétés 1 et 2 ci-dessus ne sont en général pas équivalentes.

Ayant pour objectif la classification des représentations irréductibles de  $G$  (voir [25]), il nous est possible de nous contenter de la théorie des types semi-simples grâce à la propriété de quasi-projectivité introduite dans [37] (voir le paragraphe 4.1), sans chercher à développer une théorie générale des types modulaires. Cette notion de quasi-projectivité, ainsi que l'étude systématique effectuée par Arabia dans l'appendice à [37], sont au coeur de la présente section.

Au paragraphe 4.2, nous prouvons la quasi-projectivité des induites compactes des types semi-simples (proposition 4.8) et donnons des conditions pour qu'une induite parabolique soit irréductible. Un corollaire est le théorème 4.16, qui permet de ramener le problème de la classification de toutes les représentations irréductibles de  $G$  à celle des représentations irréductibles dont le support cuspidal est inertiuellement équivalent à  $[\rho] + \dots + [\rho] = n \cdot [\rho]$  où  $n \geq 1$  divise  $m$  et où  $\rho$  est une représentation irréductible cuspidale fixée de  $GL_{m/n}(\mathbb{D})$ .

<sup>(3)</sup>Des travaux de V. Sécherre et S. Stevens ([34]) traitent cette question.

Dans le paragraphe 4.3, on prouve une propriété de compatibilité du foncteur  $\mathbf{M}_\lambda$  à l'induction, lorsque  $(\mathbf{J}, \lambda)$  est un type semi-simple. Comme expliqué dans la remarque 4.20, cette propriété, contrairement à ce qui se passe dans le cas complexe, n'est pas une conséquence formelle de la propriété de compatibilité aux foncteurs de Jacquet (2.18) caractéristique des paires couvrantes.

La méthode du changement de groupe présentée dans le paragraphe 4.4 permet de ramener la classification des représentations irréductibles de  $G$  dont le support cuspidal est inertiuellement équivalent à  $n \cdot [\rho]$  (voir plus haut) à celle des représentations irréductibles de  $\mathrm{GL}_n(F')$  — pour une extension finie  $F'/F$  convenablement choisie — admettant des vecteurs non nuls invariants par le sous-groupe d'Iwahori. Ceci permet de se ramener, pour certaines questions, au cas où  $D$  est égale à  $F$ ,  $n$  est égal à  $m$  et  $\rho$  est le caractère trivial de  $F^\times$ .

Dans le paragraphe 4.5 enfin, on associe à toute représentation irréductible cuspidale  $\rho$  de  $G$  un caractère non ramifié  $\nu_\rho$  de  $G$  dont l'introduction est justifiée par la proposition 4.40.

Cette section est inspirée de [37], même si en définitive nos preuves sont en général différentes. Certains résultats, comme les propositions 4.5, 4.8, 4.13 et 4.14, généralisent à un groupe non déployé des résultats de [37] pour  $\mathrm{GL}_n(F)$ . En revanche, la proposition 4.19 est nouvelle, même dans le cas déployé.

#### 4.1. Représentations quasi-projectives

Soit  $Q$  une représentation lisse de  $G$ . La définition suivante est due à Arabia [37, A.3].

**Définition 4.1.** — La représentation  $Q$  est dite *quasi-projective* si, pour toute représentation  $V$  de  $G$  et tout homomorphisme surjectif  $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(Q, V)$ , l'homomorphisme de  $\mathrm{End}_G(Q)$  dans  $\mathrm{Hom}_G(Q, V)$  défini par  $\alpha \mapsto \varphi \circ \alpha$  est surjectif.

On dit qu'une représentation de  $G$  est sans  $Q$ -torsion si elle n'admet pas de sous-représentation non nulle  $W$  telle que  $\mathrm{Hom}_G(Q, W)$  soit nul. Rappelons que  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_R(G)$  est la catégorie des représentations (lisses) de  $G$  sur des  $R$ -espaces vectoriels. On a le théorème important suivant.

**Théorème 4.2** ([37]). — *On suppose que  $Q$  est quasi-projective et de type fini.*

(1) *Le foncteur  $V \mapsto \mathrm{Hom}_G(Q, V)$  définit une équivalence entre la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{R}$  formée des représentations sans  $Q$ -torsion qui sont quotients d'une somme directe de copies de  $Q$ , et la catégorie des  $\mathrm{End}_G(Q)$ -modules à droite.*

(2) *Cette équivalence induit une bijection entre les classes de représentations irréductibles  $V$  de  $G$  telles que  $\mathrm{Hom}_G(Q, V) \neq \{0\}$  et les classes de  $\mathrm{End}_G(Q)$ -modules irréductibles.*

*Démonstration.* — Le point 1 est donné par [37, A.3, théorème 4(2)] (voir aussi A.2) et le point 2 est donné par [37, A.5, théorème 10(2)].  $\square$

Soit  $\tau$  une représentation irréductible d'un sous-groupe ouvert compact  $K$  de  $G$ . On reprend les notations du paragraphe 2.7 et on pose :

$$Q = \mathrm{ind}_K^G(\tau).$$

Comme  $\tau$  est irréductible,  $Q$  est de type fini. Elle n'est pas toujours projective dans  $\mathcal{R}$ , c'est-à-dire que le foncteur  $\mathbf{M}_\tau$  n'est pas toujours exact sur  $\mathcal{R}$ . Cependant, si elle est quasi-projective, on va voir que ce foncteur est exact sur une sous-catégorie pleine suffisamment grande.

**Définition 4.3.** — On note  $\mathcal{E}(K, \tau)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{R}$  dont les objets sont les sous-quotients de représentations engendrées par leur composante  $\tau$ -isotypique.

Cette sous-catégorie est stable par sous-quotients dans  $\mathcal{R}$ . Son intérêt réside dans le résultat suivant. On note  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(G, \tau)$  l'algèbre des endomorphismes de  $\mathbb{Q}$ .

**Proposition 4.4** ([37]). — *On suppose que  $\mathbb{Q} = \text{ind}_K^G(\tau)$  est quasi-projective (et de type fini).*

- (1) *La restriction du foncteur  $\mathbf{M}_\tau$  à  $\mathcal{E}(K, \tau)$  est un foncteur exact.*
- (2) *Pour tout  $\mathcal{H}$ -module à droite  $\mathfrak{m}$ , l'homomorphisme canonique de  $\mathcal{H}$ -modules :*

$$\mathfrak{m} \rightarrow \mathbf{M}_\tau(\mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{H}} \text{ind}_K^G(\tau))$$

*est un isomorphisme.*

*Démonstration.* — Comme  $\mathbb{Q}$  est quasi-projective, le foncteur  $\mathbf{M}_\tau$  est exact sur la sous-catégorie pleine  $\mathcal{D}_\mathbb{Q}$  de  $\mathcal{R}$  définie dans [37, A.3]. D'après *ibid.*, proposition 3, la catégorie  $\mathcal{E}(K, \tau)$  est une sous-catégorie de  $\mathcal{D}_\mathbb{Q}$ , ce qui prouve 1. Le point 2 est démontré dans la preuve de *ibid.*, théorème 4(2).  $\square$

Soit  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$  de facteur de Levi  $M$  et de radical unipotent  $N$ , et soit  $\tau_M$  une représentation irréductible d'un sous-groupe ouvert compact  $K_M$  de  $M$ . On suppose que  $(K, \tau)$  est une paire couvrante de  $(K_M, \tau_M)$  (voir le paragraphe 2.7).

**Proposition 4.5.** — *Soit  $\pi$  une représentation admissible de  $M$  engendrée par sa composante  $\tau_M$ -isotypique. On suppose que  $\mathbb{Q}$  est quasi-projective. Il existe un homomorphisme surjectif :*

$$\mathbf{M}_{\tau_M}(\pi) \otimes_{\mathcal{H}_{K_M}} \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{M}_\tau(i_{P^-}^G(\pi))$$

*de  $\mathcal{H}$ -modules à droite.*

**Remarque 4.6.** — La condition d'admissibilité sur  $\pi$  vient du fait que notre preuve utilise la proposition 2.21, qui nécessite la propriété de seconde adjonction.

*Démonstration.* — On note  $\mathbb{Q}$  l'induite compacte de  $\lambda$  à  $G$  et  $\mathbb{Q}_M$  celle de  $\lambda_M$  à  $M$ . Partons de l'application canonique :

$$(4.1) \quad \mathbf{M}_{\tau_M}(\pi) \otimes_{\mathcal{H}_{K_M}} \mathbb{Q}_M \rightarrow \pi$$

qui est surjective car  $\pi$  est engendrée par sa composante  $\tau_M$ -isotypique. En appliquant le foncteur  $i_{P^-}^G$  à (4.1), on obtient une application surjective :

$$(4.2) \quad i_{P^-}^G(\mathbf{M}_{\tau_M}(\pi) \otimes_{\mathcal{H}_{K_M}} \mathbb{Q}_M) \rightarrow i_{P^-}^G(\pi).$$

D'après la proposition 2.21, le membre de gauche est isomorphe à  $\mathbf{M}_{\tau_M}(\pi) \otimes_{\mathcal{H}_{K_M}} \mathbb{Q}$ . En particulier, les deux membres de (4.2) sont engendrés par leur composante  $\tau$ -isotypique. Par la proposition 4.4, en appliquant le foncteur  $\mathbf{M}_\tau$ , on obtient une application surjective :

$$\mathbf{M}_\tau(\mathbf{M}_{\tau_M}(\pi) \otimes_{\mathcal{H}_{K_M}} \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbf{M}_\tau(i_{P^-}^G(\pi))$$

et le membre de gauche est isomorphe à  $\mathbf{M}_{\tau_M}(\pi) \otimes_{\mathcal{H}_{K_M}} \mathcal{H}$  d'après la proposition 4.4(2).  $\square$

**Proposition 4.7.** — *Soit  $\sigma$  une représentation de longueur finie de  $M$  engendrée par sa composante  $\tau_M$ -isotypique. On suppose que  $\mathbb{Q}$  est quasi-projective.*

(1) *Le foncteur  $\mathbf{M}_\tau$  induit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de quotients irréductibles de  $\mathbb{Q}$  apparaissant comme sous-quotient de  $i_P^G(\sigma)$  et l'ensemble des classes d'isomorphisme de  $\mathcal{H}$ -modules à droite simples apparaissant comme sous-quotient de  $\mathbf{M}_\tau(i_P^G(\sigma))$ .*

(2) *Si  $\pi$  est un quotient irréductible de  $\mathbb{Q}$  apparaissant comme sous-quotient de  $i_P^G(\sigma)$ , alors sa multiplicité dans  $i_P^G(\sigma)$  est égale à la multiplicité de  $\mathbf{M}_\tau(\pi)$  dans  $\mathbf{M}_\tau(i_P^G(\sigma))$ .*

*Démonstration.* — La représentation  $i_{\mathbb{P}}^G(\sigma)$  est de longueur finie et est engendrée par sa composante  $\tau$ -isotypique d'après la proposition 2.23. On fixe une suite de composition :

$$0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_n = i_{\mathbb{P}}^G(\sigma)$$

dans  $\mathcal{R}$  dont les quotients sont irréductibles. Comme  $\mathcal{E}(K, \tau)$  est stable par sous-quotients dans  $\mathcal{R}$ , elle contient tous les termes  $V_0, \dots, V_n$  de cette suite de composition. Pour  $i \in \{0, \dots, n\}$ , notons  $\mathfrak{m}_i$  le module  $\mathbf{M}_{\tau}(V_i)$ . Comme  $Q$  est quasi-projective,  $\mathfrak{m}_{i+1}/\mathfrak{m}_i$  est isomorphe à  $\mathbf{M}_{\tau}(V_{i+1}/V_i)$  qui, compte tenu du théorème 4.2(2), est soit nul, soit un module simple sur  $\mathcal{H}$ .  $\square$

## 4.2. Application aux types semi-simples

Le cas qui nous intéresse particulièrement est celui d'un type semi-simple (voir le paragraphe 2.9).

**Proposition 4.8.** — *Soit  $(\mathbf{J}, \lambda)$  un type semi-simple de  $G$ . Alors l'induite compacte  $\text{ind}_{\mathbf{J}}^G(\lambda)$  est quasi-projective et de type fini.*

*Démonstration.* — Nous allons montrer que la restriction de  $\text{ind}_{\mathbf{J}}^G(\lambda)$  à  $\mathbf{J}$ , notée  $V$ , se décompose sous la forme  $X \oplus W$ , où  $X$  est une somme directe de copies de  $\lambda$  et où aucun sous-quotient irréductible de  $W$  n'est isomorphe à  $\lambda$ . Le résultat sera alors une conséquence du lemme 3.1 et du paragraphe 2 de [38]. Voir aussi [20, Proposition 3.15].

Soit  $\eta$  la représentation de  $\mathbf{J}^1 \subseteq \mathbf{J}$  définie au paragraphe 2.10. Comme  $\mathbf{J}^1$  est un pro- $p$ -groupe et comme  $\mathbf{J}$  normalise la classe d'isomorphisme de  $\eta$ , la représentation de  $\mathbf{J}$  sur la composante  $\eta$ -isotypique de  $\text{ind}_{\mathbf{J}}^G(\lambda)$  est un facteur direct de  $V$ . La décomposition  $V = X \oplus Y$  cherchée se déduit donc de la proposition 2.34.  $\square$

**Remarque 4.9.** — Supposons que  $R$  est de caractéristique  $\ell > 0$  et soit  $(\mathbf{J}, \lambda)$  un type simple de  $G$ , pour lequel on reprend les notations des paragraphes 2.5 et 2.6. Si  $q(\lambda)$  n'est pas congru à 1 mod  $\ell$ , alors d'après [36, III.2.9] la représentation  $\sigma$  est projective comme représentation de  $\mathbf{J}/\mathbf{J}^1$ . Par inflation, elle est également projective comme représentation de  $\mathbf{J}$ . Enfin, le foncteur  $\text{ind}_{\mathbf{J}}^G$  préservant la projectivité,  $\text{ind}_{\mathbf{J}}^G(\lambda)$  est projective dans la catégorie des représentations lisses de  $G$ .

**Définition 4.10.** — Deux paires cuspidales  $(M, \varrho)$  et  $(M', \varrho')$  de  $G$  sont *inertiuellement équivalentes* s'il y a un caractère non ramifié  $\chi$  de  $M$  tel que la paire  $(M', \varrho')$  soit conjuguée à  $(M, \varrho\chi)$  sous  $G$ .

Si  $(M, \varrho)$  est une paire cuspidale de  $G$ , on note  $[M, \varrho]_G$  sa classe d'inertie (c'est-à-dire sa classe d'équivalence inertielle).

Si  $\Omega$  est la classe d'inertie d'une paire cuspidale de  $G$ , on note :

$$(4.3) \quad \text{Irr}_R(\Omega)^* = \text{cusp}^{-1}(\Omega)$$

l'ensemble des classes de représentations irréductibles de  $G$  dont le support cuspidal appartient à  $\Omega$ .

Fixons un sous-groupe de Levi standard  $M$  de  $G$ , égal à  $M_{\alpha}$  pour une famille  $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$  d'entiers strictement positifs de somme  $m$ . Pour chaque  $i \in \{1, \dots, r\}$ , soit  $(\mathbf{J}_i, \lambda_i)$  un type semi-simple de  $G_{m_i}$ . Posons :

$$\mathbf{J}_M = \mathbf{J}_1 \times \cdots \times \mathbf{J}_r, \quad \lambda_M = \lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_r.$$

Soit  $(\mathbf{J}, \lambda)$  un type semi-simple de  $G$  qui soit une paire couvrante de  $(\mathbf{J}_M, \lambda_M)$ .



**Proposition 4.11.** — *Supposons que  $(\mathbf{J}_M, \boldsymbol{\lambda}_M)$  est un type simple maximal de  $M$  et soit  $\varrho$  une représentation irréductible cuspidale de  $M$  contenant  $\boldsymbol{\lambda}_M$ . Alors :*

$$\pi \in \text{Irr}([M, \varrho]_G)^* \Leftrightarrow \text{cusp}(\pi) \in [M, \varrho]_G \Leftrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{J}}(\boldsymbol{\lambda}, \pi) \neq \{0\}.$$

*Démonstration.* — Pour tout caractère non ramifié  $\chi$  de  $M$ , la représentation  $\varrho\chi$  est un quotient irréductible de  $\text{ind}_{\mathbf{J}_M}^M(\boldsymbol{\lambda}_M)$ . En induisant à  $G$  le long de n'importe quel sous-groupe parabolique  $P$  de sous-groupe de Levi  $M$ , et compte tenu de (2.19), on en déduit que tout quotient irréductible de  $i_P^G(\varrho\chi)$  est un quotient irréductible de  $\text{ind}_{\mathbf{J}}^G(\boldsymbol{\lambda})$ . Ainsi toute représentation irréductible de  $G$  dont le support cuspidal est dans  $[M, \varrho]_G$  contient  $\boldsymbol{\lambda}$ .

Inversement, soit  $\pi$  une représentation irréductible de  $G$  contenant  $\boldsymbol{\lambda}$ . Par (2.18) son module de Jacquet  $r_P^G(\pi)$  contient  $\boldsymbol{\lambda}_M$ , c'est-à-dire qu'il y a un morphisme non trivial de  $\text{ind}_{\mathbf{J}_M}^M(\boldsymbol{\lambda}_M)$  dans  $r_P^G(\pi)$ . Il y a donc un sous-quotient de  $r_P^G(\pi)$  de la forme  $\varrho\chi$ , où  $\chi$  est un caractère non ramifié de  $M$ . Soient  $(L, \sigma)$  un représentant du support cuspidal de  $\pi$  et  $Q$  un sous-groupe parabolique de  $G$  de facteur de Levi  $L$  tels que  $\pi$  se plonge dans  $i_Q^G(\sigma)$ . Alors  $r_P^G(i_Q^G(\sigma))$  a un sous-quotient isomorphe à  $\varrho\chi$ . D'après le lemme géométrique (voir [24, §2.6]), les paires  $(M, \varrho)$  et  $(L, \sigma)$  sont inertiuellement équivalentes, c'est-à-dire que  $\text{cusp}(\pi)$  appartient à  $[M, \varrho]_G$ .  $\square$

**Remarque 4.12.** — Nous ne connaissons pas d'analogue modulaire de [11, Theorem 8.3] pour des paires qui ne sont pas des types semi-simples. Plus précisément, soient  $(K, \tau)$  et  $(K_M, \tau_M)$  comme au paragraphe 2.7, et supposons que la première est une paire couvrante de la seconde. Supposons qu'il y a une classe inertielle  $\Omega_M$  de  $M$  telle que les représentations irréductibles de  $M$  contenant  $\tau_M$  sont celles dont le support cuspidal appartient à  $\Omega_M$ . On demande si :

$$\text{Hom}_K(\tau, \pi) \neq \{0\} \Leftrightarrow \text{cusp}(\pi) \in \Omega.$$

Même en supposant que les induites compactes de  $\tau$  à  $G$  et de  $\tau_M$  de  $M$  sont quasi-projectives, la preuve de [11, Theorem 8.3] ne s'adapte pas telle quelle. Un sous-quotient irréductible d'une induite parabolique d'une représentation cuspidale irréductible peut avoir un support cuspidal différent de la classe de conjugaison de la paire cuspidale induisante. Le module de Jacquet d'une représentation irréductible peut avoir un sous-quotient irréductible contenant  $\tau_M$  sans avoir un quotient irréductible contenant  $\tau_M$ .

**Proposition 4.13.** — *Soit  $\sigma$  une représentation irréductible de  $M$  contenant  $\boldsymbol{\lambda}_M$ . Alors  $i_P^G(\sigma)$  est irréductible si et seulement si :*

$$(4.4) \quad \mathbf{M}_{\boldsymbol{\lambda}}(i_P^G(\sigma))$$

*est un  $\mathcal{H}$ -module irréductible.*

*Démonstration.* — L'une des implications est donnée par le théorème 4.2 joint à la proposition 2.23. Pour l'autre, soit  $\pi$  une sous-représentation irréductible de  $i_P^G(\sigma)$ . Fixons une paire cuspidale  $(L, \varrho)$  dont la classe de  $M$ -conjugaison est égale à  $\text{cusp}(\sigma)$ . Sa classe de  $G$ -conjugaison est donc égale à  $\text{cusp}(\pi)$ . Fixons un type simple maximal  $(\mathbf{J}_L, \boldsymbol{\lambda}_L)$  de  $L$  contenu dans  $\varrho$  et dont la paire  $(\mathbf{J}_M, \boldsymbol{\lambda}_M)$  (et par conséquent  $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ ) est une paire couvrante. D'après la proposition 4.11, le  $\mathcal{H}$ -module  $\mathbf{M}_{\boldsymbol{\lambda}}(\pi)$  n'est pas nul ; il est donc égal à (4.4). Puisque  $i_P^G(\sigma)$  est engendrée par sa composante  $\boldsymbol{\lambda}$ -isotypique d'après la proposition 2.23, elle est égale à  $\pi$ , ce qui prouve qu'elle est irréductible.  $\square$

**Proposition 4.14.** — Soit  $\sigma$  une représentation irréductible de  $M$  contenant  $\lambda_M$ . Supposons que :

$$(4.5) \quad \mathbf{M}_{\lambda_M}(\sigma) \otimes_{\mathcal{H}_M} \mathcal{H}$$

est un  $\mathcal{H}$ -module irréductible. Alors  $\mathbf{M}_{\lambda}(\mathbf{i}_P^G(\sigma))$  est irréductible et isomorphe à  $\mathbf{M}_{\lambda_M}(\sigma) \otimes_{\mathcal{H}_M} \mathcal{H}$ , et la représentation  $\mathbf{i}_P^G(\sigma)$  est irréductible.

*Démonstration.* — D’après la proposition 2.23, le module  $\mathbf{M}_{\lambda}(\mathbf{i}_{P^-}^G(\sigma))$  est non nul. Il est donc irréductible d’après la proposition 4.5 et l’hypothèse sur (4.5). Par la proposition 4.13, l’induite  $\mathbf{i}_{P^-}^G(\sigma)$  est irréductible. D’après [14, Lemme 4.13] (voir aussi [25, Proposition 2.2]), elle est donc isomorphe à  $\mathbf{i}_P^G(\sigma)$ .  $\square$

**Corollaire 4.15.** — On suppose que  $\mathcal{H}$  est libre de rang 1 sur  $\mathcal{H}_M$ . Alors  $\mathbf{i}_P^G(\sigma)$  est irréductible, et le  $\mathcal{H}$ -module  $\mathbf{M}_{\lambda}(\mathbf{i}_P^G(\sigma))$  est irréductible et isomorphe à  $\mathbf{M}_{\lambda_M}(\sigma) \otimes_{\mathcal{H}_M} \mathcal{H}$ .

*Démonstration.* — L’induite compacte de  $\lambda_M$  à  $M$  étant quasi-projective,  $\mathbf{M}_{\lambda_M}(\sigma)$  est irréductible d’après le théorème 4.2. Puisque  $\mathcal{H}$  est libre de rang 1 sur  $\mathcal{H}_M$ , l’hypothèse de la proposition 4.14 est vérifiée. On en déduit le résultat voulu.  $\square$

On termine ce paragraphe en donnant une application importante du corollaire 4.15. Si  $\rho$  est une représentation irréductible cuspidale de  $G$ , on note :

$$(4.6) \quad \Omega_{\rho} = \{[\rho\chi] \mid \chi : G \rightarrow \mathbf{R}^{\times} \text{ non ramifié}\}$$

sa classe d’équivalence inertielle.

**Théorème 4.16.** — Soit  $r \geq 1$  un entier et soient  $\rho_1, \dots, \rho_r$  des représentations irréductibles cuspidales deux à deux non inertiuellement équivalentes. Pour chaque  $i \in \{1, \dots, r\}$ , on fixe un support cuspidal  $\mathfrak{s}_i$  formé de représentations inertiuellement équivalentes à  $\rho_i$ .

(1) Pour chaque entier  $i$ , soit  $\pi_i$  une représentation irréductible de support cuspidal  $\mathfrak{s}_i$ . Alors l’induite  $\pi_1 \times \dots \times \pi_r$  est irréductible.

(2) Soit  $\pi$  une représentation irréductible de support cuspidal  $\mathfrak{s}_1 + \dots + \mathfrak{s}_r$ . Il existe des représentations  $\pi_1, \dots, \pi_r$ , uniques à isomorphisme près, telles que  $\pi_i$  soit de support cuspidal  $\mathfrak{s}_i$  pour chaque  $i$  et telles que  $\pi_1 \times \dots \times \pi_r$  soit isomorphe à  $\pi$ .

**Remarque 4.17.** — Pour  $\mathfrak{s}$  un support cuspidal, notons :

$$(4.7) \quad \text{Irr}(\mathfrak{s})^* = \text{cusp}^{-1}(\mathfrak{s})$$

l’ensemble des classes de représentations irréductibles de support cuspidal égal à  $\mathfrak{s}$ . Si l’on pose  $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 + \dots + \mathfrak{s}_r$ , l’application :

$$(\pi_1, \dots, \pi_r) \mapsto \pi_1 \times \dots \times \pi_r$$

induit une bijection de  $\text{Irr}(\mathfrak{s}_1)^* \times \dots \times \text{Irr}(\mathfrak{s}_r)^*$  dans  $\text{Irr}(\mathfrak{s})^*$ .

*Démonstration.* — Pour chaque  $i$ , soit  $(J_i, \lambda_i)$  un type simple maximal contenu dans  $\rho_i$ , soit  $n_i$  le nombre de termes dans  $\mathfrak{s}_i$  et soit  $m_i$  le degré de  $\rho_i$ . On fixe un type semi-simple  $(J_i, \lambda_i)$  de  $G_{m_i n_i}$  qui est une paire couvrante de  $(J_i \times \dots \times J_i, \lambda_i \otimes \dots \otimes \lambda_i)$ . On pose :

$$\begin{aligned} M &= G_{m_1 n_1} \times \dots \times G_{m_r n_r}, \\ \mathbf{J}_M &= \mathbf{J}_1 \times \dots \times \mathbf{J}_r, \\ \lambda_M &= \lambda_1 \otimes \dots \otimes \lambda_r. \end{aligned}$$

Soit  $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$  un type semi-simple qui est une paire couvrante de  $(\mathbf{J}_M, \boldsymbol{\lambda}_M)$ . L'algèbre  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(G, \boldsymbol{\lambda})$  est libre de rang 1 comme module sur  $\mathcal{H}_M = \mathcal{H}(M, \boldsymbol{\lambda}_M)$ . D'après la proposition 4.8, la représentation  $\text{ind}_{\mathbf{J}}^G(\boldsymbol{\lambda})$  est quasi-projective de type fini. On est donc dans les conditions d'application du corollaire 4.15, dont on déduit que l'induite  $\pi_1 \times \cdots \times \pi_r$  est irréductible.

Pour le point 2, on remarque que (2.18) fournit un isomorphisme de  $\mathcal{H}_M$ -modules :

$$\mathbf{M}_{\boldsymbol{\lambda}}(\pi) \simeq \mathbf{M}_{\boldsymbol{\lambda}_M}(r_P^G(\pi))$$

où  $P$  est un sous-groupe parabolique de  $G$  de facteur de Levi  $M$ . Puisque  $\mathcal{H}$  est libre de rang 1 sur  $\mathcal{H}_M$ , la restriction de  $\mathbf{M}_{\boldsymbol{\lambda}}(\pi)$  à  $\mathcal{H}_M$  est irréductible. C'est donc un module  $\mathfrak{m}$  de la forme  $\mathfrak{m}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{m}_r$ , où  $\mathfrak{m}_i$  est un  $\mathcal{H}(G_{m_i n_i}, \boldsymbol{\lambda}_i)$ -module irréductible. Puisque l'induite compacte de  $\boldsymbol{\lambda}_i$  à  $G_{m_i n_i}$  est quasi-projective de type fini, il existe d'après le théorème 4.2 une représentation irréductible  $\pi_i$  de  $G_{m_i n_i}$  telle que  $\mathbf{M}_{\boldsymbol{\lambda}_i}(\pi_i)$  soit isomorphe à  $\mathfrak{m}_i$ . En particulier, le support cuspidal de  $\pi_i$  est formé de représentations inertiuellement équivalentes à  $\rho_i$ . Posons :

$$\pi' = \pi_1 \times \cdots \times \pi_r$$

qui est irréductible d'après le point 1 ci-dessus. D'après le théorème 4.2 à nouveau, il suffit de prouver que  $\mathbf{M}_{\boldsymbol{\lambda}}(\pi)$  et  $\mathbf{M}_{\boldsymbol{\lambda}}(\pi')$  sont des  $\mathcal{H}$ -modules isomorphes pour en déduire que  $\pi$  et  $\pi'$  sont des représentations isomorphes. D'après le corollaire 4.15, on a :

$$\mathbf{M}_{\boldsymbol{\lambda}}(\pi') \simeq \mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{H}_M} \mathcal{H}.$$

La restriction de  $\mathbf{M}_{\boldsymbol{\lambda}}(\pi)$  à  $\mathcal{H}_M$  est isomorphe à  $\mathfrak{m}$ , ce dont on déduit par adjonction que  $\mathbf{M}_{\boldsymbol{\lambda}}(\pi)$  est isomorphe à  $\mathfrak{m} \otimes_{\mathcal{H}_M} \mathcal{H}$ , ce qui donne le résultat voulu.  $\square$

### 4.3. Compatibilité du foncteur des $\boldsymbol{\lambda}$ -invariants à l'induction parabolique

Soit  $m \geq 1$ , soit  $\rho$  une représentation irréductible cuspidale de  $G_m$ , soit  $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$  un type simple maximal contenu dans  $\rho$  et soit  $[\Lambda, n_{\Lambda}, 0, \beta]$  une strate simple de  $A_m$  par rapport à laquelle  $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$  est défini.

Soit un entier  $n \geq 1$  et posons  $G = G_{mn}$ . Fixons une strate simple  $[\Lambda^\dagger, n_{\Lambda^\dagger}, 0, \beta]$  de  $A = A_{mn}$  satisfaisant aux conditions du paragraphe 2.8 permettant de construire un type semi-simple :

$$(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$$

de  $G$  qui est une paire couvrante du type simple maximal  $(\mathbf{J} \times \cdots \times \mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{\lambda})$  de  $G_m^n$ . On note  $\mathcal{H}$  l'algèbre de Hecke de ce type semi-simple (dont la structure est donnée par la remarque 2.25 et ne dépend pas du choix de la suite de réseaux  $\Lambda^\dagger$ ) et on note  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\boldsymbol{\lambda}}$  le foncteur qu'il définit de  $\mathcal{R}(G)$  dans la catégorie des  $\mathcal{H}$ -modules à droite.

Soit une famille  $\alpha = (n_1, \dots, n_r)$  d'entiers strictement positifs de somme notée  $n$ . Notons  $M$  le sous-groupe de Levi standard  $M_{(mn_1, \dots, mn_r)}$  de  $G$ . L'intersection  $\mathbf{J} \cap M$  sera notée  $\mathbf{J}_\alpha$  et la restriction de  $\boldsymbol{\lambda}$  à  $\mathbf{J} \cap M$  sera notée  $\boldsymbol{\lambda}_\alpha$ . Notons  $\mathcal{H}_\alpha$  l'algèbre de Hecke de  $(\mathbf{J}_\alpha, \boldsymbol{\lambda}_\alpha)$  et  $\mathbf{M}_\alpha$  le foncteur qui lui correspond de  $\mathcal{R}(M)$  dans la catégorie des  $\mathcal{H}_\alpha$ -modules à droite. Soit enfin :

$$(4.8) \quad j_\alpha : \mathcal{H}_\alpha \rightarrow \mathcal{H}$$

le morphisme (2.17) correspondant à  $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$  considéré comme une paire couvrante de  $(\mathbf{J}_\alpha, \boldsymbol{\lambda}_\alpha)$ .

Rappelons qu'on a défini un entier  $f(\rho) \geq 1$  au paragraphe 3.4. On introduit la notation :

$$(4.9) \quad q(\rho) = q^{f(\rho)}.$$

L'entier  $q(\rho)$  est égal au  $q(\lambda)$  du paragraphe 2.6. Considérons l'algèbre de Hecke affine  $\mathcal{H}(n, q(\rho))$  qui y est définie. Il est plus commode d'utiliser ici une présentation de cette  $\mathbb{R}$ -algèbre différente

de celle du paragraphe 2.6. Elle est engendrée par les éléments  $S_1, \dots, S_{n-1}, X_1, \dots, X_n$  et leurs inverses  $(X_1)^{-1}, \dots, (X_n)^{-1}$ , vérifiant les relations (2.8), (2.9), (2.10) et les relations :

$$(4.10) \quad X_i X_j = X_j X_i, \quad i, j \in \{1, \dots, n\},$$

$$(4.11) \quad X_j S_i = S_i X_j, \quad i \notin \{j, j-1\},$$

$$(4.12) \quad S_i X_i S_i = q(\rho) X_{i+1}, \quad i \in \{1, \dots, n-1\},$$

$$(4.13) \quad X_j (X_j)^{-1} = (X_j)^{-1} X_j = 1, \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

Soit  $\mathcal{H}(\alpha, q(\rho))$  la sous-algèbre engendrée par  $X_1, \dots, X_n$  et leurs inverses  $(X_1)^{-1}, \dots, (X_n)^{-1}$  et les  $S_i$  pour  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  décrivant les entiers qui ne sont pas de la forme  $n_1 + \dots + n_k$  pour  $k \in \{1, \dots, r\}$ . Notons  $t_\alpha$  l'homomorphisme d'inclusion de  $\mathcal{H}(\alpha, q(\rho))$  dans  $\mathcal{H}(n, q(\rho))$ .

Soit  $\Sigma$  le type simple maximal étendu prolongeant  $\lambda$  au sous-groupe  $K$  tel que la représentation  $\rho$  soit isomorphe à l'induite compacte de  $\Sigma$  à  $G_m$  (proposition 3.1). Il détermine un isomorphisme de  $\mathbb{R}$ -algèbres :

$$(4.14) \quad \Psi : \mathbb{R}[X, X^{-1}] = \mathcal{H}(1, q(\rho)) \rightarrow \mathcal{H}(G_m, \lambda)$$

(l'image de  $X$  étant la fonction de support  $K$  prenant la valeur  $\Sigma(x)$  en tout  $x \in K$ ). On montre le résultat suivant en raisonnant comme dans [31, §2.10].

**Proposition 4.18.** — (1) *Il y a un unique isomorphisme de  $\mathbb{R}$ -algèbres  $\Psi_{\rho, n}$  de  $\mathcal{H}(n, q(\rho))$  dans  $\mathcal{H}$  tel que :*

$$(4.15) \quad \Psi_{\rho, n} \circ t_{(1, \dots, 1)} = j_{(1, \dots, 1)} \circ (\Psi \otimes \dots \otimes \Psi).$$

(2) *Si l'on pose  $\Psi_{\rho, \alpha} = \Psi_{\rho, n_1} \otimes \dots \otimes \Psi_{\rho, n_r}$ , alors on a  $\Psi_{\rho, n} \circ t_\alpha = j_\alpha \circ \Psi_{\rho, \alpha}$ .*

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant.

**Proposition 4.19.** — *Soit  $\sigma$  une représentation admissible de  $M$  engendrée par sa composante  $\lambda_\alpha$ -isotypique. On a un isomorphisme de  $\mathcal{H}$ -modules à droite :*

$$(4.16) \quad \mathbf{M}(\mathbf{i}_{(mn_1, \dots, mn_r)}(\sigma)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{H}_\alpha}(\mathcal{H}, \mathbf{M}_\alpha(\sigma)).$$

**Remarque 4.20.** — Dans le cas où  $\mathbb{R}$  est le corps des nombres complexes, le résultat est connu pour une représentation lisse  $\sigma$  pas nécessairement admissible. Il s'agit d'un cas particulier de [11, Corollary 8.4] obtenu à partir de (2.18) par adjonction, en utilisant le fait que  $\mathbf{M}$  induit une équivalence de catégories entre la sous-catégorie de  $\mathcal{R}(G)$  formée des représentations engendrées par leur composante  $\lambda$ -isotypique et la catégorie des  $\mathcal{H}$ -modules à droite (ainsi qu'un résultat analogue pour  $\mathbf{M}_\alpha$ ). Quand  $\mathbb{R}$  est de caractéristique non nulle, ces foncteurs n'induisent pas en général des équivalences de catégories et il faut trouver une autre approche.

**Remarque 4.21.** — L'hypothèse d'admissibilité vient du fait que notre preuve utilise la proposition 4.5 et l'inégalité (4.18).

*Démonstration.* — Posons  $\mathbf{i} = \mathbf{i}_{(mn_1, \dots, mn_r)}$  et définissons des foncteurs :

$$\mathbf{F} : \sigma \mapsto \mathbf{M}(\mathbf{i}(\sigma)), \quad \mathbf{G} : \sigma \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{H}_\alpha}(\mathcal{H}, \mathbf{M}_\alpha(\sigma))$$

de  $\mathcal{R}(M)$  dans la catégorie des  $\mathcal{H}$ -modules à droite. Notons respectivement  $Q$  et  $Q_\alpha$  les induites compactes de  $\lambda$  à  $G$  et de  $\lambda_\alpha$  à  $M$ . Notons aussi  $Q_N$  le module de Jacquet  $\mathbf{r}_{(mn_1, \dots, mn_r)}(Q)$ , où  $N$

est le radical unipotent du sous-groupe parabolique standard  $P = P_{(mn_1, \dots, mn_r)}$ . Par adjonction, on a un isomorphisme fonctoriel de R-espaces vectoriels :

$$(4.17) \quad \mathbf{F}(\sigma) \simeq \text{Hom}_M(Q_N, \sigma).$$

La représentation  $Q$  est naturellement un  $\mathcal{H}$ -module à gauche, ainsi que le quotient  $Q_N$  puisque l'action de  $G$  commute à celle de  $\mathcal{H}$ . On en déduit une structure de  $\mathcal{H}$ -modules à droite sur le membre de droite de (4.17) faisant de cet isomorphisme de R-espaces vectoriels un isomorphisme de  $\mathcal{H}$ -modules à droite. En appliquant (2.18) à  $Q$ , on obtient le résultat suivant.

**Fait 4.22.** — *L'isomorphisme (2.18) appliqué à la représentation  $Q$  induit un isomorphisme de  $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_\alpha)$ -bimodules de  $\mathcal{H}$  vers  $\mathbf{M}_\alpha(Q_N)$ .*

Grâce à (4.17) et au fait 4.22, on obtient un homomorphisme de  $\mathcal{H}$ -modules :

$$\omega_\sigma : \mathbf{F}(\sigma) \simeq \text{Hom}_M(Q_N, \sigma) \xrightarrow{\varepsilon_\sigma} \text{Hom}_{\mathcal{H}_\alpha}(\mathbf{M}_\alpha(Q_N), \mathbf{M}_\alpha(\sigma)) \simeq \mathbf{G}(\sigma)$$

qui est fonctoriel en  $\sigma$ , où  $\varepsilon_\sigma$  désigne l'homomorphisme fonctoriel de R-espaces vectoriels obtenu en appliquant le foncteur  $\mathbf{M}_\alpha$ .

Supposons maintenant que  $\sigma$  est engendrée par sa composante  $\lambda_\alpha$ -isotypique, c'est-à-dire qu'il y a un homomorphisme surjectif :

$$f : Q_\alpha^S \rightarrow \sigma$$

d'une somme directe arbitraire de copies de  $Q_\alpha$  vers  $\sigma$ , où  $S$  désigne un ensemble quelconque qui indexe la somme directe. Ceci donne le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F}(Q_\alpha)^S & \xrightarrow{\mathbf{F}(f)} & \mathbf{F}(\sigma) \\ \omega_{Q_\alpha^S} \downarrow & & \downarrow \omega_\sigma \\ \mathbf{G}(Q_\alpha)^S & \xrightarrow{\mathbf{G}(f)} & \mathbf{G}(\sigma) \end{array}$$

où les deux flèches horizontales  $\mathbf{F}(f)$  et  $\mathbf{G}(f)$  sont surjectives car les deux foncteurs  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{G}$  sont exacts sur la catégorie  $\mathcal{E}(\mathbf{J}_\alpha, \lambda_\alpha)$ , d'après les propositions 4.4 et 2.23.

**Lemme 4.23.** — *Si  $\omega_{Q_\alpha}$  est surjectif, alors  $\omega_\sigma$  est un isomorphisme pour toute représentation  $\sigma$  admissible et engendrée par sa composante  $\lambda_\alpha$ -isotypique.*

*Démonstration.* — Si  $\omega_{Q_\alpha}$  est surjectif, alors  $\omega_{Q_\alpha^S}$  est surjectif, donc  $\omega_\sigma$  l'est aussi. On en déduit l'inégalité :

$$(4.18) \quad \dim \mathbf{F}(\sigma) \geq \dim \mathbf{G}(\sigma).$$

On a aussi l'inégalité  $\dim \mathbf{F}(\sigma) \leq \dim \mathbf{G}(\sigma)$  d'après la proposition 4.5. On en déduit que  $\omega_\sigma$  est bijectif pour  $\sigma$  admissible et engendrée par sa composante  $\lambda_\alpha$ -isotypique.  $\square$

**Lemme 4.24.** — *L'homomorphisme  $\omega_{Q_\alpha}$  est surjectif.*

*Démonstration.* — D'après (2.19) les représentations  $i(Q_\alpha)$  et  $Q$  sont isomorphes. On en déduit que  $\mathbf{F}(Q_\alpha)$  est libre de rang 1 sur  $\mathcal{H}$ . Plus précisément, identifions celui-ci à  $\text{Hom}_M(Q_N, Q_\alpha)$  et notons  $e$  l'élément de  $\text{Hom}_M(Q_N, Q_\alpha)$  défini par :

$$f \bmod Q(N) \mapsto \left( x \mapsto \int_N f(ux) \, du \right)$$

pour tous  $f \in \mathcal{Q}$  et  $x \in M$ , où  $\mathcal{Q}(\mathcal{N})$  désigne le sous-espace de  $\mathcal{Q}$  engendré par les vecteurs de la forme  $u \cdot f - f$ , avec  $f \in \mathcal{Q}$  et  $u \in \mathcal{N}$ . Alors  $h \mapsto e * h$  (où  $*$  désigne l'action de  $\mathcal{H}$  à droite sur  $\text{Hom}_M(\mathcal{Q}_N, \mathcal{Q}_\alpha)$ ) est un isomorphisme de  $\mathcal{H}$ -modules de  $\mathcal{H}$  vers  $\text{Hom}_M(\mathcal{Q}_N, \mathcal{Q}_\alpha)$ .

Nous allons vérifier que l'image de  $e$  dans  $\mathbf{G}(\mathcal{Q}_\alpha)$  est un générateur de ce  $\mathcal{H}$ -module. Identifions les  $\mathcal{H}$ -modules  $\mathbf{G}(\mathcal{Q}_\alpha)$  et  $\text{Hom}_{\mathcal{H}_\alpha}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_\alpha)$ . Compte tenu de l'isomorphisme (2.19) et du fait 4.22, l'image de  $e$  dans  $\mathbf{G}(\mathcal{Q}_\alpha)$  est l'application notée  $e'$  qui à  $T \in \mathcal{H}$  associe la fonction :

$$(4.19) \quad x \mapsto \int_{\mathcal{N}} T(ux) \, du$$

de  $M$  dans l'espace des  $\mathbb{R}$ -endomorphismes de  $\lambda_\alpha$ .

Soit  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\lambda$  le groupe défini au paragraphe 2.6, soit  $\mathcal{W}_0$  le sous-groupe de  $\mathcal{W}$  constitué des matrices de permutation dans  $\mathcal{W}$  et soit  $\mathcal{W}_\alpha = \mathcal{W}_0 \cap M$ . Rappelons que  $P = MN$ .

**Lemme 4.25.** — *Soit  $w \in \mathcal{W}_0$ . Alors  $\mathbf{J}w\mathbf{J} \cap P \neq \emptyset$  si et seulement si  $w \in \mathcal{W}_\alpha$ .*

*Démonstration.* — Rappelons que  $\mathbf{J}_\alpha = \mathbf{J} \cap M$ . Si  $w \in \mathcal{W}_\alpha$ , alors :

$$\mathbf{J}w\mathbf{J} \cap P \supseteq \mathbf{J}_\alpha w \mathbf{J}_\alpha \cap M \neq \emptyset.$$

Inversement, supposons que  $\mathbf{J}w\mathbf{J} \cap P$  est non vide. On peut supposer que le sous-groupe parahorique  $U(\Lambda^\dagger)$  est standard. Ainsi  $\mathbf{J}$  est inclus dans  $U(\Lambda^\dagger)$  ; on a donc  $U(\Lambda^\dagger)wU(\Lambda^\dagger) \cap P \neq \emptyset$ . Notons  $\mathfrak{A}$  l'ordre héréditaire standard de  $A_{mn}$  formé des matrices à coefficients entiers dont la réduction mod  $\mathfrak{p}_D$  est triangulaire supérieure par blocs de taille  $m$ , et posons  $U = U(\mathfrak{A})$ .

Le groupe  $U$  contient  $U(\Lambda^\dagger)$ , donc  $UwU \cap P \neq \emptyset$ . Soient  $\mathcal{W}_1$  le sous-groupe des permutations de  $\text{GL}_{mn}(\mathcal{O}_D)$  et  $X_1$  un système de représentants des doubles classes de  $\mathcal{W}_1$  modulo  $\mathcal{W}_1 \cap U$  tel que  $X_1 \cap M$  soit un système de représentants des doubles classes de  $\mathcal{W}_1 \cap M$  modulo  $\mathcal{W}_1 \cap U \cap M$ . Alors on a :

$$\coprod_{x \in X_1} UxU \cap P = \text{GL}_{mn}(\mathcal{O}_D) \cap P = \coprod_{x \in X_1 \cap M} UxU \cap P.$$

On en déduit que  $w$  appartient à  $X_1 \cap M$ , donc que  $w \in \mathcal{W}_0 \cap M = \mathcal{W}_\alpha$ .  $\square$

Grâce à la proposition 4.18, identifions  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}_\alpha$  avec  $\mathcal{H}(n, q(\rho))$  et  $\mathcal{H}(\alpha, q(\rho))$  respectivement, de façon que le morphisme injectif (4.8) corresponde au morphisme d'inclusion. Pour tout  $w \in \mathcal{W}$ , notons  $S_w$  l'élément de  $\mathcal{H}$  défini par (2.13).

Pour  $w \in \mathcal{W}_0$ , la classe  $w\mathcal{W}_\alpha$  possède un unique élément de longueur minimale. Ces éléments de  $\mathcal{W}_0$  de longueur minimale forment un système de représentants de  $\mathcal{W}_0$  modulo  $\mathcal{W}_\alpha$  noté  $\mathcal{D}_\alpha$ .

**Fait 4.26.** —  *$\mathcal{H}$  est un  $\mathcal{H}_\alpha$ -module à droite libre de base  $(S_w)_{w \in \mathcal{D}_\alpha}$  et un  $\mathcal{H}_\alpha$ -module à gauche libre de base  $(S_{w^{-1}})_{w \in \mathcal{D}_\alpha}$ .*

Pour tout  $w \in \mathcal{D}_\alpha$ , notons  $Y_w$  l'élément de  $\mathbf{G}(\mathcal{Q}_\alpha)$  défini par :

$$Y_w(S_{w'}) = \begin{cases} S_1 & \text{si } w' = w, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour  $w' \in \mathcal{D}_\alpha$ . D'après le fait 4.26, le  $\mathcal{H}_\alpha$ -module à gauche  $\mathbf{G}(\mathcal{Q}_\alpha)$  est libre de base  $\{Y_w, w \in \mathcal{D}_\alpha\}$ . Remarquons grâce au lemme 4.25 que l'application  $e'$  décrite plus haut (c'est-à-dire l'image de  $e$

dans  $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\alpha)$  est égale à  $Y_1$ . Nous allons montrer que  $Y_1$  engendre  $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\alpha)$  en tant que  $\mathcal{H}$ -module à droite<sup>(4)</sup>.

**Lemme 4.27.** — *L'application  $T \mapsto Y_1 T$  de  $\mathcal{H}$  vers  $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\alpha)$  est un homomorphisme injectif de  $\mathcal{H}$ -modules à droite.*

*Démonstration.* — Soit  $T \in \mathcal{H}$  non nul, que l'on écrit (grâce au fait 4.26) :

$$T = \sum_{w \in \mathcal{D}_\alpha} h(w) S_{w^{-1}}, \quad h(w) \in \mathcal{H}_\alpha.$$

Pour  $w \in \mathcal{W}_0$ , notons  $l(w)$  la longueur de  $w$  (relativement aux  $\{s_1, \dots, s_{n-1}\}$  du paragraphe 2.6) et posons :

$$l = l(T) = \min \{l(w) \mid w \in \mathcal{D}_\alpha \text{ et } h(w) \neq 0\}.$$

Prouvons par récurrence sur  $l$  que  $Y_1$  est non nul sur l'idéal  $T\mathcal{H}$ . Si  $l = 0$ , alors  $Y_1(T) = h_1 \neq 0$ . Supposons maintenant que  $l \geq 1$ . Fixons un  $w \in \mathcal{D}_\alpha$  tel que  $l(w) = l$  et un  $s \in \mathcal{W}_0$  de longueur 1 tel que  $l(sw) < l$ . Pour  $w' \in \mathcal{D}_\alpha$ , écrivons  $sw' = w'(s)z$  avec  $w'(s) \in \mathcal{D}_\alpha$  et  $z \in \mathcal{W}_\alpha$ . Alors :

$$TS_s = \sum_{w' \in \mathcal{D}_\alpha} h(w') S_{w'^{-1}} S_s$$

contient le terme non nul  $h(w) S_{(sw)^{-1}} = h(w) S_{z^{-1}} S_{w(s)^{-1}}$  avec  $l(w(s)) < l$ . Supposons qu'il existe un  $w' \in \mathcal{D}_\alpha$  tel que  $S_{w'^{-1}} S_s$  ait une composante non nulle dans  $\mathcal{H}_\alpha S_{w(s)^{-1}}$ . Si  $l(sw') > l(w')$ , alors :

$$S_{w'^{-1}} S_s = S_{(sw')^{-1}} \in \mathcal{H}_\alpha S_{w'(s)^{-1}}.$$

On en déduit que  $w'(s) = w(s)$ , ce qui implique que  $w' = w$ . Si  $l(sw') < l(w')$ , alors :

$$S_{w'^{-1}} S_s = S_{(sw')^{-1}} S_s^2 = (q(\rho) - 1) \cdot S_{w'^{-1}} + q(\rho) \cdot S_{(sw')^{-1}}.$$

On a  $l(w') \geq l > l(w(s))$  donc ici encore  $w'(s) = w(s)$ , ce qui implique que  $w' = w$ .

Ainsi la composante de  $TS_s$  dans  $\mathcal{H}_\alpha S_{w(s)^{-1}}$  est égale à  $h(w) S_{(sw)^{-1}}$ , qui est non nulle. On en déduit que  $l(TS_s) < l$  puis, par hypothèse de récurrence, que  $Y_1$  n'est pas nulle sur  $TS_s \mathcal{H}$ . En particulier,  $Y_1$  n'est pas nulle sur  $T\mathcal{H}$ .  $\square$

**Lemme 4.28.** — *Pour tout  $w \in \mathcal{D}_\alpha$ , il existe un  $T_w \in \mathcal{H}$  tel que  $Y_w = Y_1 T_w$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\mathcal{H}^0$  la sous-algèbre de  $\mathcal{H}$  engendrée par les  $S_w$  pour  $w \in \mathcal{W}_0$ , et soit  $\mathcal{H}_\alpha^0$  l'intersection de  $\mathcal{H}_\alpha$  avec  $\mathcal{H}^0$ . La restriction à  $\mathcal{H}^0$  de  $T \mapsto Y_1 T$  induit un morphisme injectif de  $\mathcal{H}^0$ -modules à droite de  $\mathcal{H}^0$  dans  $\text{Hom}_{\mathcal{H}_\alpha^0}(\mathcal{H}^0, \mathcal{H}_\alpha^0)$ . Les deux membres ayant la même dimension sur  $\mathbb{R}$ , égale à l'ordre de  $\mathcal{W}_0$ , cet homomorphisme est bijectif. Pour tout  $w \in \mathcal{D}_\alpha$ , il y a donc un  $T_w \in \mathcal{H}^0$  tel que  $Y_w$  et  $Y_1 T_w$  coïncident sur  $\mathcal{H}^0$ . Comme  $\mathcal{H}^0$  engendre  $\mathcal{H}$  comme  $\mathcal{H}_\alpha$ -module à droite, on a  $Y_w = Y_1 T_w$ .  $\square$

**Lemme 4.29.** — *Soit  $\delta$  l'élément de plus grande longueur dans  $\mathcal{D}_\alpha$ . Notons  ${}_\delta \mathcal{H}$  le  $\mathcal{H}$ -module à droite  $\mathcal{H}$  muni de la structure de  $\mathcal{H}_\alpha$ -module à gauche définie par :*

$$S_z \cdot T = S_{\delta^{-1}z\delta} T$$

*pour  $T \in \mathcal{H}$  et  $z \in \mathcal{W}_\alpha$ . L'application  $T \mapsto Y_\delta T$  est un morphisme de  $(\mathcal{H}_\alpha, \mathcal{H})$ -bimodules de  ${}_\delta \mathcal{H}$  dans  $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\alpha)$ .*

<sup>(4)</sup>Nous nous inspirons d'arguments non publiés qui nous ont été communiqués par Vanessa Miemietz, que nous remercions.

*Démonstration.* — D'abord, la structure de  $\mathcal{H}_\alpha$ -module à gauche sur  ${}_\delta\mathcal{H}$  est bien définie car  $\delta$  normalise  $\mathcal{D}_\alpha$ . Ensuite, l'application  $T \mapsto Y_\delta T$  est un morphisme de  $\mathcal{H}$ -modules à droite. Pour prouver que c'est un morphisme de bimodules, il suffit de vérifier que  $Y_\delta(S_z S_w) = S_z \cdot Y_\delta(S_w)$  pour tous  $z \in \mathcal{W}_\alpha$  et  $w \in \mathcal{D}_\alpha$ . Si  $w = \delta$ , alors  $\delta$  est de longueur minimale dans  $\delta\mathcal{D}_\alpha = \mathcal{D}_\alpha\delta$ , donc on a :

$$Y_\delta(S_z S_\delta) = Y_\delta(S_z \delta) = Y_\delta(S_\delta S_{\delta^{-1}z\delta}) = S_z \cdot Y_\delta(S_\delta).$$

Si  $w \neq \delta$ , il suffit de prouver que la composante de  $S_z S_w$  dans  $S_\delta \mathcal{H}_\alpha$  est nulle. Cette composante s'écrit sous la forme  $S_\delta h$  avec  $h \in \mathcal{H}_\alpha$ . Ainsi :

$$S_w = (S_z)^{-1} S_\delta h \in S_\delta \mathcal{H}_\alpha$$

car  $\mathcal{H}_\alpha S_\delta = S_\delta \mathcal{H}_\alpha$ . □

**Lemme 4.30.** — *L'application  $T \mapsto Y_\delta T$  de  $\mathcal{H}$  vers  $\mathbf{G}(\mathcal{Q}_\alpha)$  est bijective.*

*Démonstration.* — On prouve l'injectivité de cette application par un argument analogue à celui de la preuve du lemme 4.27.

Pour la surjectivité, on prouve, par un argument analogue à celui de la preuve du lemme 4.28, que pour tout  $w \in \mathcal{D}_\alpha$ , il existe un  $U_w \in \mathcal{H}$  tel que  $Y_w = Y_\delta U_w$ . L'image de  $T \mapsto Y_\delta T$  contenant les  $Y_w$  pour  $w \in \mathcal{D}_\alpha$ , qui forment une base de  $\mathbf{G}(\mathcal{Q}_\alpha)$  comme  $\mathcal{H}_\alpha$ -module à gauche, on déduit du lemme 4.29 que cette application est surjective. □

Comme  $Y_\delta = Y_1 T_\delta$  (voir le lemme 4.28), la surjectivité de l'application  $T \mapsto Y_\delta T$  implique celle de  $T \mapsto Y_1 T$ . Avec le lemme 4.27, ceci prouve que  $T \mapsto Y_1 T$  est non seulement surjectif mais bijectif. Ceci met fin à la preuve du lemme 4.24. □

La proposition 4.19 se déduit maintenant des lemmes 4.23 et 4.24. □

**Corollaire 4.31.** — *Soit  $\sigma$  une sous-représentation d'une représentation admissible de  $\mathbf{M}$  engendrée par sa composante  $\lambda_\alpha$ -isotypique. On a un isomorphisme :*

$$(4.20) \quad \mathbf{M}(\mathbf{i}_{(mn_1, \dots, mn_r)}(\sigma)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{H}_\alpha}(\mathcal{H}, \mathbf{M}_\alpha(\sigma))$$

de  $\mathcal{H}$ -modules à droite.

*Démonstration.* — Par hypothèse, il y a des représentations  $\pi_1, \pi_2$  admissibles engendrées par leurs composantes  $\lambda_\alpha$ -isotypiques telles qu'on ait une suite exacte :

$$0 \rightarrow \sigma \xrightarrow{i} \pi_1 \xrightarrow{f} \pi_2 \rightarrow 0$$

dans la catégorie  $\mathcal{E}(\mathbf{J}_\alpha, \lambda_\alpha)$ . Ceci donne le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{F}(\sigma) & \xrightarrow{\mathbf{F}(i)} & \mathbf{F}(\pi_1) & \xrightarrow{\mathbf{F}(f)} & \mathbf{F}(\pi_2) \\ \omega_\sigma \downarrow & & \downarrow \omega_{\pi_1} & & \downarrow \omega_{\pi_2} \\ \mathbf{G}(\sigma) & \xrightarrow{\mathbf{G}(i)} & \mathbf{G}(\pi_1) & \xrightarrow{\mathbf{G}(f)} & \mathbf{G}(\pi_2) \end{array}$$

où  $\mathbf{F}(i)$  et  $\mathbf{G}(i)$  sont injectives et  $\mathbf{F}(f)$  et  $\mathbf{G}(f)$  surjectives car les foncteurs  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{G}$  sont exacts sur  $\mathcal{E}(\mathbf{J}_\alpha, \lambda_\alpha)$ . Comme  $\omega_{\pi_1}$  et  $\omega_{\pi_2}$  sont des isomorphismes d'après la proposition 4.19, le lemme du serpent implique que  $\omega_\sigma$  est un isomorphisme. □



#### 4.4. Changement de groupe

Reprenons les notations du paragraphe 4.3. D'après la proposition 4.11, pour toute représentation irréductible  $\pi$  de  $G$ , on a  $\mathbf{M}(\pi) \neq 0$  si et seulement si :

$$(4.21) \quad \mathrm{cusp}(\pi) = [\rho\chi_1] + \cdots + [\rho\chi_n], \quad \chi_i : G_m \rightarrow \mathbb{R}^\times \text{ non ramifié, } i \in \{1, \dots, n\},$$

c'est-à-dire si  $\mathrm{cusp}(\pi)$  appartient à la classe d'inertie  $\Omega_{\rho,n}$  de  $[\rho] + \cdots + [\rho] = n \cdot [\rho]$ . Selon la proposition 4.8 et le théorème 4.2, et grâce à l'isomorphisme  $\Psi_{\rho,n}$  de la proposition 4.18 permettant d'identifier  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}(n, q(\rho))$ , le foncteur  $\mathbf{M}$  induit une bijection :

$$\xi_{\rho,n} : \mathrm{Irr}(\Omega_{\rho,n})^* \rightarrow \mathrm{Irr}(\mathcal{H}(n, q(\rho)))$$

entre l'ensemble  $\mathrm{Irr}(\Omega_{\rho,n})^*$  des représentations irréductibles de  $G$  de support cuspidal de la forme (4.21) et l'ensemble des classes de  $\mathcal{H}(n, q(\rho))$ -modules à droite irréductibles.

Pour  $n = 1$  en particulier, et si l'on identifie  $\mathrm{Irr}(\mathcal{H}(1, q(\rho)))$  et  $\mathbb{R}^\times$ , on a le lemme suivant, que l'on prouve comme dans [31, §4.2].

**Lemme 4.32.** — *Pour tout caractère non ramifié  $\chi$  de  $G_m$ , on a :*

$$\xi_{\rho,1}(\rho\chi) = \chi(\varpi_\lambda)^{-1}$$

où  $\varpi_\lambda$  est l'élément de  $G_m$  défini par (2.7).

**Proposition 4.33.** — *Soit  $\sigma$  une représentation irréductible de  $M$  contenant  $\lambda_\alpha$ , et soit  $\pi$  une représentation irréductible de  $G$  contenant  $\lambda$ . La multiplicité de  $\pi$  dans le socle (respectivement, le cosocle) de  $\mathbf{i}_{(mn_1, \dots, mn_r)}(\sigma)$  est égale à la multiplicité de  $\mathbf{M}(\pi)$  dans le socle (respectivement, le cosocle) de  $\mathbf{M}(\mathbf{i}_{(mn_1, \dots, mn_r)}(\sigma))$ .*

*Démonstration.* — D'abord, si  $\pi$  est isomorphe à une sous-représentation (respectivement, à un quotient) de  $\mathbf{i}(\sigma) = \mathbf{i}_{(mn_1, \dots, mn_r)}(\sigma)$ , alors  $\mathbf{M}(\pi)$  est isomorphe à un sous-module (respectivement, à un quotient) de  $\mathbf{M}(\mathbf{i}(\sigma))$  parce que le foncteur  $\mathbf{M}$  est exact sur  $\mathcal{E}(\mathbf{J}, \lambda)$ . Ensuite, un tel  $\pi$  sous-représentation ou quotient de  $\mathbf{i}(\sigma)$  appartient à  $\mathrm{Irr}(\Omega_{\rho,n})^*$ , donc  $\mathbf{M}(\pi)$  est un module irréductible. Ainsi  $\mathbf{M}(\mathbf{i}(\sigma))$  est sans  $\mathbb{Q}$ -torsion, et le point 1 du théorème 4.2 conduit au résultat voulu.  $\square$

Fixons maintenant une extension finie  $F'$  de  $F$  dont le corps résiduel est de cardinal  $q(\rho)$ . On pose  $G' = \mathrm{GL}_n(F')$ . Plus généralement, on ajoutera un  $'$  pour désigner les objets correspondant au cas où  $\rho$  est le caractère trivial de  $F'^\times$ . Notons  $I'$  le sous-groupe d'Iwahori standard de  $G'$  et  $\mathbf{M}'$  le foncteur  $V \mapsto V^{I'}$  de  $\mathcal{R}(G')$  dans la catégorie des modules à droite sur  $\mathcal{H}(G', I')$ . De façon analogue à ce qui précède, on obtient une bijection :

$$\xi_{1_{F'^\times}, n} : \mathrm{Irr}(\Omega_{1_{F'^\times}, n})^* \rightarrow \mathrm{Irr}(\mathcal{H}(n, q(\rho)))$$

entre l'ensemble des classes de représentations irréductibles ayant des vecteurs non nuls invariants par  $I'$  et celui des classes de  $\mathcal{H}(n, q(\rho))$ -modules à droite irréductibles (voir l'exemple 2.18).

La composée :

$$(4.22) \quad \Phi_{\rho,n} = \xi_{1_{F'^\times}, n}^{-1} \circ \xi_{\rho,n} : \mathrm{Irr}(\Omega_{\rho,n})^* \rightarrow \mathrm{Irr}(\Omega_{1_{F'^\times}, n})^*$$

est bijective. Étudions sa compatibilité au support cuspidal. On obtient le lemme suivant par l'utilisation conjointe des propositions 4.19 et 4.33. On note  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(n, q(\rho))$  et  $\mathcal{H}_\alpha = \mathcal{H}(\alpha, q(\rho))$  pour simplifier.

**Lemme 4.34.** — Soient  $\chi_1, \dots, \chi_n$  des caractères non ramifiés de  $G_m$ . Alors  $\xi_{\rho,n}$  induit une bijection entre l'ensemble des classes de représentations irréductibles de support cuspidal égal à  $[\rho\chi_1] + \dots + [\rho\chi_n]$  et l'ensemble des classes de modules irréductibles isomorphes à un sous-module de :

$$(4.23) \quad \text{Hom}_{\mathcal{H}_{(1,\dots,1)}}(\mathcal{H}, \xi_1(\rho\chi_1) \otimes \dots \otimes \xi_1(\rho\chi_n)).$$

**Remarque 4.35.** — On a un résultat analogue en remplaçant sous-représentation et sous-module par représentation quotient et module quotient.

**Proposition 4.36.** — Soit  $\pi$  une représentation irréductible dans  $\text{Irr}(\Omega_{\rho,n})^*$ , dont on écrit le support cuspidal sous la forme (4.21). Alors  $\text{cusp}(\Phi_{\rho,n}(\pi)) = \Phi_{\rho,1}(\rho\chi_1) + \dots + \Phi_{\rho,1}(\rho\chi_n)$ .

*Démonstration.* — On peut supposer que  $\pi$  est une sous-représentation de l'induite parabolique  $\rho\chi_1 \times \dots \times \rho\chi_n$ . D'après le lemme 4.34,  $\xi_{\rho,n}(\pi)$  est un sous-module irréductible de (4.23). Si  $\chi$  est un caractère non ramifié de  $F^\times$ , on note  $\chi'$  le caractère non ramifié de  $F'^\times$  prenant en une uniformisante de  $F'$  la même valeur que  $\chi$  en une uniformisante de  $F$ . Ceci définit une bijection  $\chi \mapsto \chi'$  entre caractères non ramifiés de  $G$  et caractères non ramifiés de  $G'$ . Le lemme suivant, qui décrit la compatibilité de  $\Phi_{\rho,n}$  à la torsion non ramifiée, découle du lemme 4.32.

**Lemme 4.37.** — Pour toute représentation irréductible  $\pi$  et tout caractère non ramifié  $\chi$  de  $G$ , on a  $\Phi_{\rho,n}(\pi\chi) = \Phi_{\rho,n}(\pi)\chi'$ .

Notons  $\pi'$  la représentation  $\Phi_{\rho,n}(\pi)$ . Compte tenu du lemme 4.37 et de (4.15), on déduit de ce qui précède que  $\xi_{1_{F'^\times},n}(\pi')$  est un sous-module irréductible de :

$$\text{Hom}_{\mathcal{H}_{(1,\dots,1)}}(\mathcal{H}, \xi_{1_{F'^\times},1}(\chi'_1) \otimes \dots \otimes \xi_{1_{F'^\times},1}(\chi'_n)).$$

D'après le lemme 4.34, on en déduit que  $\pi'$  est une sous-représentation de  $\chi'_1 \times \dots \times \chi'_n$ , ce qui termine la démonstration de la proposition 4.36.  $\square$

**Proposition 4.38.** — Supposons que  $\alpha = (n_1, n_2)$  et soit  $\pi_i \in \text{Irr}(\Omega_{\rho,n_i})^*$  pour  $i = 1, 2$ . Alors :

- (1)  $\pi_1 \times \pi_2$  est irréductible si et seulement si  $\Phi_{\rho,n_1}(\pi_1) \times \Phi_{\rho,n_2}(\pi_2)$  est irréductible.
- (2) Si c'est le cas, alors on a l'égalité :

$$\Phi_{\rho,n}(\pi_1 \times \pi_2) = \Phi_{\rho,n_1}(\pi_1) \times \Phi_{\rho,n_2}(\pi_2).$$

*Démonstration.* — Pour  $i = 1, 2$ , on note  $\pi'_i$  la représentation  $\Phi_{\rho,n_i}(\pi_i)$ . Si l'induite  $\pi_1 \times \pi_2$  est irréductible, alors elle appartient à  $\text{Irr}(\Omega_{\rho,n})^*$  et, par la proposition 4.19, on a des isomorphismes de  $\mathcal{H}$ -modules irréductibles :

$$(4.24) \quad \xi_{\rho,n}(\pi_1 \times \pi_2) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{H}_{(n_1,n_2)}}(\mathcal{H}, \xi_{\rho,n_1}(\pi_1) \otimes \xi_{\rho,n_2}(\pi_2)),$$

$$(4.25) \quad \xi_{1_{F'^\times},n}(\pi'_1 \times \pi'_2) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{H}_{(n_1,n_2)}}(\mathcal{H}, \xi_{1_{F'^\times},n_1}(\pi'_1) \otimes \xi_{1_{F'^\times},n_2}(\pi'_2)).$$

D'après la proposition 4.18, le membre de droite de (4.25) correspond à celui de (4.24). On déduit de la proposition 4.13 que  $\pi'_1 \times \pi'_2$  est irréductible, puis qu'on a une égalité entre  $\xi_{\rho,n}(\pi_1 \times \pi_2)$  et  $\xi_{1_{F'^\times},n}(\pi'_1 \times \pi'_2)$ .  $\square$

**Corollaire 4.39.** — Reprenons les hypothèses de la proposition 4.38. Supposons que tous les sous-quotients irréductibles de  $\pi_1 \times \pi_2$  sont dans  $\text{Irr}(\Omega_{\rho,n})^*$ , et que tous les sous-quotients irréductibles de  $\Phi_{\rho,n_1}(\pi_1) \times \Phi_{\rho,n_2}(\pi_2)$  sont dans  $\text{Irr}(\Omega_{1_{F'^\times},n})^*$ . Alors :

- (1) Les représentations  $\pi_1 \times \pi_2$  et  $\Phi_{\rho,n_1}(\pi_1) \times \Phi_{\rho,n_2}(\pi_2)$  ont la même longueur.

(2)  $\pi_1 \times \pi_2$  est indécomposable si et seulement si  $\Phi_{\rho, n_1}(\pi_1) \times \Phi_{\rho, n_2}(\pi_2)$  l'est.

*Démonstration.* — On fixe une suite de composition :

$$0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_r = \pi_1 \times \pi_2$$

où les  $V_i$  sont des sous-représentations de  $\pi_1 \times \pi_2$  telles que, pour  $i \in \{0, \dots, r-1\}$ , le quotient  $V_{i+1}/V_i$  soit irréductible. Par hypothèse, ces sous-quotients sont dans  $\mathrm{Irr}(\Omega_{\rho, n})^*$ . On déduit de la proposition 4.7 que la longueur de  $\mathbf{M}(\pi_1 \times \pi_2)$  est égale à la longueur de  $\pi_1 \times \pi_2$ . De façon analogue, la longueur de :

$$(4.26) \quad \mathbf{M}'(\Phi_{\rho, n_1}(\pi_1) \times \Phi_{\rho, n_2}(\pi_2))$$

est égale à celle de  $\Phi_{\rho, n_1}(\pi_1) \times \Phi_{\rho, n_2}(\pi_2)$ . Le résultat se déduit du fait que  $\mathbf{M}(\pi_1 \times \pi_2)$  et (4.26) sont isomorphes (voir la proposition 4.18) donc ont la même longueur. Pour l'indécomposabilité, on procède de façon analogue en utilisant le point 1 du théorème 4.2.  $\square$

#### 4.5. Le caractère $\nu_\rho$ associé à une représentation cuspidale

Soit  $m \geq 1$  un entier, et soit  $\rho$  une représentation irréductible cuspidale de  $G = G_m$ . Au paragraphe 3.4, on a associé à  $\rho$  des invariants numériques  $n(\rho), s(\rho), f(\rho) \geq 1$ . Soit  $\nu$  le caractère non ramifié de  $G$  défini au paragraphe 3.5. On pose :

$$\nu_\rho = \nu^{s(\rho)},$$

qui ne dépend que de la classe d'inertie de  $\rho$ , et on pose :

$$\mathbb{Z}_\rho = \{[\rho \nu_\rho^i] \mid i \in \mathbb{Z}\}.$$

On note :

$$(4.27) \quad o(\rho)$$

l'ordre de  $q(\rho)$  dans  $\mathbb{R}$  (égal à  $+\infty$  si  $\mathbb{R}$  est de caractéristique nulle). Les quantités  $q(\rho)$  et  $o(\rho)$  ne dépendent que de la classe d'inertie de  $\rho$ . On prouve le résultat important suivant, qui justifie l'introduction de  $\nu_\rho$ .

**Proposition 4.40.** — *Soit  $\rho'$  une représentation irréductible cuspidale de  $G_{m'}$ ,  $m' \geq 1$ . Alors l'induite  $\rho \times \rho'$  est réductible si et seulement si  $\rho'$  est isomorphe à  $\rho \nu_\rho$  ou  $\rho \nu_\rho^{-1}$ .*

**Remarque 4.41.** — Dans le cas complexe, le résultat est donné par [31, Theorem 4.6] dont la preuve consiste à se ramener au groupe  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ ,  $n \geq 1$  pour lequel le résultat est dû à Bernstein-Zelevinski. Dans le cas modulaire, nous pourrions suivre la même méthode de réduction au cas déployé et appliquer [36, III.1.15], qui est prouvé comme dans le cas complexe grâce à la théorie des dérivées. Nous préférons utiliser une méthode plus directe qui ne s'appuie pas sur la théorie des dérivées.

*Démonstration.* — D'après le théorème 4.16, il suffit de traiter le cas où  $\rho$  et  $\rho'$  sont inertielle-ment équivalentes, c'est-à-dire que  $\rho$  et  $\rho'$  contiennent un même type simple maximal  $(\mathbf{J}, \lambda)$ . On forme la paire :

$$(\mathbf{J}_M, \lambda_M) = (\mathbf{J} \times \mathbf{J}, \lambda \otimes \lambda)$$

avec  $M = G \times G$  puis un type semi-simple  $(\mathbf{J}, \lambda)$  comme au paragraphe 4.3 avec  $n = 2$ . Écrivons  $\rho'$  sous la forme  $\rho\chi$  avec  $\chi$  un caractère non ramifié de  $G$ .

D'après la proposition 4.13, la représentation induite  $\rho \times \rho\chi$  est réductible si et seulement si le  $\mathcal{H}$ -module  $\mathbf{M}_\lambda(\rho \times \rho\chi)$  est réductible. D'après la proposition 4.19 et le lemme 4.32, ce  $\mathcal{H}$ -module

est induit à partir du caractère  $1 \otimes \chi(\varpi_\lambda)^{-1}$  de  $\mathcal{H}_M$ . Il est de dimension 2 sur  $R$ . Il est donc réductible si et seulement s'il contient un caractère, ce qui, compte tenu de la description de  $\mathcal{H}$  par générateurs et relations au paragraphe 4.4, est le cas si et seulement si  $\chi(\varpi_\lambda)$  est égal à  $q(\rho)$  ou  $q(\rho)^{-1}$ . Un calcul simple montre que la valuation de la norme réduite de  $\varpi_\lambda \in G$  est égale à  $f(\rho)s(\rho)^{-1}$ , ce dont on déduit l'égalité :

$$(4.28) \quad \nu_\rho(\varpi_\lambda)^{-1} = q(\rho).$$

Le résultat se déduit du fait que, pour qu'un caractère non ramifié  $\xi$  de  $G$  vérifie  $\rho\xi \simeq \rho$ , il faut et il suffit que  $\xi(\varpi_\lambda) = 1$ .  $\square$

**Corollaire 4.42.** — *On utilise les notations du paragraphe 4.4. Soient  $a, b \in \mathbb{Z}$  tels que  $a \leq b$ . Alors  $\xi_n$  induit une bijection entre sous-représentations irréductibles de  $\rho\nu_\rho^a \times \rho\nu_\rho^{a+1} \times \cdots \times \rho\nu_\rho^b$  et sous-modules irréductibles du module induit :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_{(1, \dots, 1)}}(\mathcal{H}, q(\rho)^a \otimes q(\rho)^{a+1} \otimes \cdots \otimes q(\rho)^b).$$

**Remarque 4.43.** — On a un résultat analogue en remplaçant sous-représentation et sous-module par représentation quotient et module quotient.

*Démonstration.* — On utilise les lemmes 4.34 et 4.32 et la formule (4.28).  $\square$

**Remarque 4.44.** — D'après la remarque 4.9, si  $o(\rho) > 1$ , l'induite  $\mathrm{ind}_J^G(\lambda)$  est projective pour tout type simple maximal  $(J, \lambda)$  contenu dans  $\rho$ .

On termine cette section sur la relation importante suivante, qui est nécessaire à la classification des représentations irréductibles cuspidales en fonction des supercuspidales dans [25].

**Lemme 4.45.** — *On a  $o(\rho) = \mathrm{card} \mathbb{Z}_\rho$ .*

*Démonstration.* — On suppose que  $R$  est de caractéristique  $\ell$  non nulle et on note  $e$  l'ordre de  $q$  dans  $\mathbb{F}_\ell^\times$ . Si  $a, b$  sont des entiers  $\geq 1$ , on note  $(a, b)$  leur plus grand diviseur commun. Pour alléger les notations, on pose  $n = n(\rho)$ ,  $s = s(\rho)$  et  $f = f(\rho)$ .

**Lemme 4.46.** — *On a  $(e, n(e, s)) = (e, ns)$ .*

*Démonstration.* — Soit  $u \geq 1$  un entier divisant  $e$  et  $ns$ . Écrivons  $u_1 = (u, n)$  et  $u_2 = u/(u, n)$ . On a donc  $u = u_1 u_2$  avec  $u_1$  divisant  $n$  et  $u_2$  divisant  $s$ . Comme  $u$  divise  $e$ , l'entier  $u_2$  divise  $(e, s)$ , donc  $u$  divise  $n(e, s)$ , ce qui prouve le résultat attendu.  $\square$

Pour calculer le cardinal de  $\mathbb{Z}_\rho$ , on fait opérer sur la classe inertielle  $\Omega_\rho$  le groupe cyclique engendré par  $\nu_\rho$ . Ce groupe cyclique est d'ordre  $e/(e, s)$ . On obtient donc :

$$\mathrm{card} \mathbb{Z}_\rho = \frac{e/(e, s)}{(n, e/(e, s))} = \frac{e}{(e, n(e, s))} = \frac{e}{(e, ns)},$$

la dernière égalité provenant du lemme 4.46. Par définition, l'entier  $o(\rho)$  est égal à  $e/(e, f)$ . Le résultat provient alors de la formule (3.6) et du fait que  $e$  est premier à  $\ell$ .  $\square$

## 5. Le foncteur $\mathbf{K}$

Dans cette section, nous introduisons un outil technique important permettant de lier la théorie des représentations de  $G = G_m$ ,  $m \geq 1$  à celle d'un groupe linéaire général sur un corps fini de caractéristique  $p$ .

Soit  $[\Lambda, n, 0, \beta]$  une strate simple de  $A = A_m$ , et soit  $\kappa$  une  $\beta$ -extension d'un caractère simple  $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$ . Elle définit un foncteur exact :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_\kappa : \pi \mapsto \text{Hom}_{J^1}(\kappa, \pi)$$

de  $\mathcal{R}_R(G)$  dans la catégorie des représentations de  $J/J^1$ . Dans le cas où le sous-groupe parahorique  $U(\Lambda) \cap B^\times$  est maximal, le quotient  $J/J^1$  peut être identifié (non canoniquement) au groupe  $\overline{G} = GL_{m'}(\mathfrak{k}_{D'})$  moyennant le choix d'un isomorphisme  $\Phi$  comme en (2.3). Ce foncteur permet de ramener à  $G$  certaines propriétés connues des représentations de  $\overline{G}$ . Cette section est consacrée à l'étude des propriétés de ce foncteur, qui est utilisé dans [25].

Ce foncteur a déjà été utilisé dans [36] pour étudier les représentations de Steinberg généralisées de  $GL_n(F)$  (voir par exemple le lemme 5.13 de [36]), et de façon plus systématique dans [27] pour définir une stratification de la catégorie des représentations complexes de  $GL_n(F)$  affinant la décomposition de Bernstein.

Au paragraphe 5.2, nous établissons des conditions d'annulation importantes du foncteur  $\mathbf{K}$ , énoncées en termes d'endo-classes. Dans les paragraphes 5.3 et 5.4, nous prouvons la compatibilité de  $\mathbf{K}$  à l'induction et à la restriction paraboliques.

Pour le groupe  $GL_n(F)$ , la compatibilité de  $\mathbf{K}$  à l'induction parabolique est prouvée dans [27] dans le cas complexe (voir *ibid.*, Proposition 5.7) mais la preuve qui y est donnée ne s'applique pas au cas modulaire (car elle repose sur certaines équivalences de catégories provenant des types simples). Dans le cas modulaire, elle est prouvée dans [36] dans un cas particulier (voir *ibid.*, Lemme 5.12).

A notre connaissance, la compatibilité de  $\mathbf{K}$  à la restriction parabolique pour  $GL_n(F)$  n'était connue ni dans le cas complexe, ni dans le cas modulaire.

### 5.1. Définition

Dans toute cette section, nous fixons une strate simple  $[\Lambda_{\max}, n_{\max}, 0, \beta]$  de  $A$  telle que l'intersection  $U(\Lambda_{\max}) \cap B^\times$  soit un sous-groupe compact maximal de  $B^\times$ , et un caractère simple :

$$(5.1) \quad \theta_{\max} \in \mathcal{C}(\Lambda_{\max}, 0, \beta).$$

Un tel caractère simple de  $G$  est dit *maximal*.

**Remarque 5.1.** — Un caractère simple est maximal si et seulement si son induite compacte à  $G$  possède un quotient irréductible cuspidal. En effet, si  $\theta_{\max}$  est un caractère simple maximal de  $G$ , l'induite compacte à  $G$  d'un type simple contenant  $\theta_{\max}$  possède un quotient irréductible cuspidal d'après la proposition 3.1. Inversement, si  $\theta$  est un caractère simple apparaissant dans une représentation irréductible cuspidale  $\rho$ , les preuves des théorèmes 3.4 et 3.7 montrent que  $\theta$  est maximal et que  $\rho$  contient un type simple maximal de la forme  $\kappa \otimes \sigma$  avec  $\kappa$  une  $\beta$ -extension de  $\theta$ .

Ce caractère simple maximal étant fixé, on fixe comme dans le paragraphe 2.5 un isomorphisme de  $E$ -algèbres  $\Phi : B \rightarrow \mathcal{M}_{m'}(D')$  envoyant  $U(\Lambda_{\max}) \cap B^\times$  sur le sous-groupe compact maximal

standard  $\mathrm{GL}_{m'}(\mathcal{O}_{D'})$ . Fixons aussi une  $\beta$ -extension  $\kappa_{\max}$  de  $\theta_{\max}$  et posons :

$$\mathbf{J}_{\max} = \mathbf{J}(\beta, \Lambda_{\max}), \quad \mathbf{J}_{\max}^1 = \mathbf{J}^1(\beta, \Lambda_{\max}), \quad \overline{\mathbf{G}} = \mathbf{J}_{\max}/\mathbf{J}_{\max}^1.$$

Le groupe  $\overline{\mathbf{G}}$  est canoniquement isomorphe à  $(\mathrm{U}(\Lambda_{\max}) \cap \mathrm{B}^\times)/(\mathrm{U}^1(\Lambda_{\max}) \cap \mathrm{B}^\times)$  et sera identifié au groupe  $\mathrm{GL}_{m'}(\mathfrak{k}_{D'})$  grâce à  $\Phi$ . Étant donnée une représentation lisse  $(\pi, \mathbf{V})$  de  $\mathbf{G}$ , on pose :

$$\mathbf{V}(\kappa_{\max}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}_{\max}^1}(\kappa_{\max}, \mathbf{V})$$

que l'on munit de l'action de  $\mathbf{J}_{\max}$  définie, pour  $x \in \mathbf{J}_{\max}$  et  $f \in \mathbf{V}(\kappa_{\max})$ , par la formule :

$$x \cdot f = \pi(x) \circ f \circ \kappa_{\max}(x)^{-1}.$$

Pour cette action,  $\mathbf{J}_{\max}^1$  opère trivialement, de sorte que cette formule définit une représentation de  $\overline{\mathbf{G}}$  sur  $\mathbf{V}(\kappa_{\max})$ , que l'on note  $\pi(\kappa_{\max})$ . On définit ainsi un foncteur :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\kappa_{\max}, \Phi} : \pi \mapsto \pi(\kappa_{\max})$$

de  $\mathcal{R}(\mathbf{G})$  dans la catégorie  $\mathcal{R}(\overline{\mathbf{G}})$  des  $\mathbf{R}$ -représentations de  $\overline{\mathbf{G}}$ . Comme  $\mathbf{J}_{\max}^1$  est un pro- $p$ -groupe, c'est un foncteur exact, et comme toute représentation lisse irréductible de  $\mathbf{G}$  est admissible, il préserve le fait d'être de longueur finie.

**Remarque 5.2.** — Le foncteur  $\mathbf{K}$  dépend des choix de  $\kappa_{\max}$  et de  $\Phi$ . D'abord, choisissons une autre  $\beta$ -extension :

$$\kappa'_{\max} = \kappa_{\max} \otimes (\chi \circ \mathbf{N}_{\mathbf{B}/\mathbf{E}})$$

où  $\chi$  est un caractère de  $\mathcal{O}_{\mathbf{E}}^\times$  trivial sur  $1 + \mathfrak{p}_{\mathbf{E}}$  comme dans (2.2). Si  $\pi$  est une représentation de  $\mathbf{G}$ , les représentations  $\pi(\kappa_{\max})$  et  $\pi(\kappa'_{\max})$  sont tordues l'une de l'autre par le caractère  $\chi \circ \mathfrak{n} \circ \det$  où  $\mathfrak{n}$  est la norme de  $\mathfrak{k}_{D'}$  sur  $\mathfrak{k}_{\mathbf{E}}$ . Si l'on fixe un autre isomorphisme  $\Phi' : \mathbf{B} \rightarrow \mathcal{M}_{m'}(D')$  envoyant  $\mathrm{U}(\Lambda_{\max}) \cap \mathrm{B}^\times$  sur  $\mathrm{GL}_{m'}(\mathcal{O}_{D'})$ , le théorème de Skolem-Noether entraîne qu'il est conjugué à  $\Phi$  sous le normalisateur de  $\mathrm{GL}_{m'}(\mathcal{O}_{D'})$ . Ceci induit sur  $\pi(\kappa_{\max})$  un automorphisme de conjugaison par un élément du produit semi-direct  $\Gamma \rtimes \overline{\mathbf{G}}$  avec  $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathfrak{k}_{D'}/\mathfrak{k}_{\mathbf{E}})$ .

## 5.2. Conditions d'annulation

On étudie maintenant des conditions d'annulation du foncteur  $\mathbf{K}$ . On commence par le cas simple suivant.

**Lemme 5.3.** — *Soit  $\rho$  une représentation irréductible cuspidale de  $\mathbf{G}$ .*

(1) *Si  $\rho$  ne contient pas  $\theta_{\max}$ , alors  $\mathbf{K}(\rho) = 0$ .*

(2) *Si non, il existe une représentation irréductible cuspidale  $\sigma$  de  $\overline{\mathbf{G}}$  telle que  $\rho$  contienne le type simple maximal  $\kappa_{\max} \otimes \sigma$ , et on a un isomorphisme de représentations de  $\overline{\mathbf{G}}$  :*

$$(5.2) \quad \mathbf{K}(\rho) \simeq \sigma \oplus \sigma^\phi \oplus \dots \oplus \sigma^{\phi^{b(\rho)-1}},$$

où  $b(\rho) \geq 1$  est l'invariant associé à  $\rho$  au paragraphe 3.4 et  $\phi$  un générateur du groupe de Galois de  $\mathfrak{k}_{D'}$  sur  $\mathfrak{k}_{\mathbf{E}}$ .

**Remarque 5.4.** — Dans le cas où  $D = \mathbf{F}$ , on a toujours  $b(\rho) = 1$  et  $\mathbf{K}(\rho) = \sigma$  dans le cas 2.

*Démonstration.* — D'après la remarque 5.1, toute représentation irréductible cuspidale  $\rho$  de  $\mathbf{G}$  contenant  $\theta_{\max}$  contient un type simple maximal  $\lambda$  de la forme  $\kappa_{\max} \otimes \sigma$  où  $\sigma$  est une représentation irréductible cuspidale de  $\overline{\mathbf{G}}$ . On fixe un type simple maximal étendu  $\Sigma$  prolongeant  $\lambda$  tel que  $\rho$  soit isomorphe à l'induite compacte de  $\Sigma$  à  $\mathbf{G}$ . La formule (5.2) est alors une conséquence du lemme 3.2.  $\square$

**Corollaire 5.5.** — Soient  $\rho$  et  $\rho'$  des représentations irréductibles cuspidales de  $G$  contenant  $\theta_{\max}$ . Alors  $\mathbf{K}(\rho)$  et  $\mathbf{K}(\rho')$  sont des représentations de  $\overline{G}$  isomorphes si et seulement si  $\rho$  et  $\rho'$  sont inertiellement équivalentes.

*Démonstration.* — Étant donné un facteur irréductible  $\sigma$  de  $\mathbf{K}(\rho)$ , la représentation  $\rho$  contient le type simple maximal  $\lambda = \kappa_{\max} \otimes \sigma$ . De façon analogue, la représentation  $\rho'$  contient le type simple maximal  $\lambda' = \kappa_{\max} \otimes \sigma'$  où  $\sigma'$  est un facteur irréductible de  $\mathbf{K}(\rho')$ .

Si  $\mathbf{K}(\rho)$  et  $\mathbf{K}(\rho')$  sont isomorphes, on peut choisir  $\sigma' = \sigma$ , ce qui implique que  $\rho$  et  $\rho'$  contiennent toutes deux  $\lambda$ , donc qu'elles sont inertiellement équivalentes.

Inversement, si  $\rho$  et  $\rho'$  sont inertiellement équivalentes, elles contiennent toutes les deux  $\lambda$  et le résultat s'ensuit.  $\square$

La question de savoir si un caractère simple apparaît ou non dans une représentation irréductible est liée à la notion d'endo-classe [5]. Notons :

$$\Theta_{\max}$$

l'endo-classe associée à  $\theta_{\max}$ . Si  $\rho$  est une représentation irréductible cuspidale, elle contient un type simple maximal  $(J, \lambda)$ . L'endo-classe du caractère simple contenu dans  $\lambda$  ne dépend pas du choix de  $(J, \lambda)$  d'après le théorème 3.11 : on l'appelle l'endo-classe de  $\rho$ .

**Proposition 5.6.** — Soient  $\rho_1, \dots, \rho_n$  des représentations irréductibles cuspidales. Supposons que l'induite  $\rho_1 \times \dots \times \rho_n$  admette un sous-quotient irréductible contenant  $\theta_{\max}$ . Alors  $\rho_1, \dots, \rho_n$  sont toutes d'endo-classe  $\Theta_{\max}$ .

*Démonstration.* — Supposons d'abord que  $R$  est de caractéristique nulle. Soit  $\pi$  un sous-quotient irréductible de  $\rho_1 \times \dots \times \rho_n$  contenant  $\theta_{\max}$ . Fixons une strate simple  $[\Lambda, n_\Lambda, 0, \beta]$  de  $A$  telle que :

- (1)  $U(\Lambda) \subseteq U(\Lambda_{\max})$  ;
- (2)  $\pi$  contient le transfert  $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$  de  $\theta_{\max}$  ;

et telle que le sous-groupe parahorique  $U(\Lambda)$  soit minimal pour ces propriétés. D'après le corollaire 2.8, il existe une représentation irréductible  $\xi$  de  $J = J(\beta, \Lambda)$  triviale sur  $J^1 = J^1(\beta, \Lambda)$  telle que  $\pi$  contient  $\kappa \otimes \xi$  où  $\kappa$  est une  $\beta$ -extension de  $\theta$ . Grâce à la proposition 2.11 et à la minimalité de  $U(\Lambda)$ , la représentation  $\xi$  vue comme une représentation de  $J/J^1$  (identifié à un groupe réductif fini) est cuspidale. Ainsi  $\pi$  contient un type semi-simple homogène  $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$  contenant  $\theta$ . Selon le théorème principal de [33] (voir aussi *ibid.*, proposition 8.1), ce type semi-simple est un type pour le bloc de Bernstein correspondant à la classe d'équivalence inertielle de  $\rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_n$ , et les représentations cuspidales  $\rho_1, \dots, \rho_n$  sont toutes d'endo-classe  $\Theta_{\max}$ .

Supposons maintenant que  $R$  est de caractéristique non nulle  $\ell$ . Quitte à tordre  $\rho_1, \dots, \rho_n$  par des caractères non ramifiés convenables, on peut supposer qu'elles sont toutes définies sur  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$  (voir [36, II.4]). On peut donc supposer que  $R = \overline{\mathbb{F}}_\ell$ .

Pour chaque  $i \in \{1, \dots, n\}$ , fixons une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale  $\tilde{\rho}_i$  telle que  $\rho_i$  apparaisse dans  $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\rho}_i)$  comme dans la proposition 3.26. Par hypothèse,  $\theta_{\max}$  apparaît comme un sous-quotient de la restriction de  $\rho_1 \times \dots \times \rho_n$  à  $H_{\max}^1$ . Il existe donc un sous-quotient irréductible  $\tilde{\delta}$  de la restriction de  $\tilde{\rho}_1 \times \dots \times \tilde{\rho}_n$  à  $H_{\max}^1$  dont la réduction mod  $\ell$  contient  $\theta_{\max}$ .

**Lemme 5.7.** — Soit  $\pi$  une représentation irréductible d'un  $p$ -groupe fini  $H$  telle que  $\mathbf{r}_\ell(\pi)$  possède des vecteurs  $H$ -invariants non nuls. Alors  $\pi$  est le caractère trivial de  $H$ .

*Démonstration.* — Raisonnons par récurrence sur le cardinal de  $H$ . Si  $H$  est d'ordre  $p$ , il est cyclique et  $\pi$  est un caractère. Les valeurs prises par  $\pi$  sont des racines  $p$ -ièmes de l'unité, et ce sont aussi des racines de l'unité d'ordre une puissance de  $\ell$  puisque  $\mathbf{r}_\ell(\pi)$  est trivial. On en déduit que  $\pi$  est trivial.

Supposons maintenant que  $H$  est d'ordre strictement supérieur à  $p$  et notons  $V$  l'espace de  $\pi$ . Comme  $H$  est résoluble, il possède un sous-groupe distingué  $H'$  d'indice  $p$ . La restriction de  $V$  à  $H'$  admet un facteur irréductible  $W$  dont la réduction mod  $\ell$  possède des vecteurs  $H$ -invariants non nuls. Par hypothèse de récurrence,  $W$  est de dimension 1 et  $H'$  agit dessus trivialement. Il existe donc un  $H'$ -homomorphisme non trivial du caractère trivial de  $H'$  vers la restriction de  $V$  à  $H'$ . Par réciprocity de Frobenius, il existe un  $H$ -homomorphisme non trivial :

$$\mathrm{ind}_{H'}^H(1) \rightarrow V.$$

Puisque  $V$  est irréductible, cet homomorphisme est surjectif, donc  $V$  est un facteur direct de  $\mathrm{ind}_{H'}^H(1)$ , ce dont on déduit que  $V$  est une représentation irréductible de  $H$  triviale sur  $H'$ . Puisque  $H/H'$  est cyclique,  $V$  est de dimension 1. On termine comme dans le cas où  $H$  est d'ordre  $p$ .  $\square$

Notons  $\tilde{\theta}_{\max}$  le relèvement de  $\theta_{\max}$ . En appliquant le lemme 5.7 à  $\tilde{\delta}\tilde{\theta}_{\max}^{-1}$ , on voit que  $\tilde{\delta}$  est égal à  $\tilde{\theta}_{\max}$ . Il existe donc un sous-quotient irréductible  $\tilde{\pi}$  de  $\tilde{\rho}_1 \times \cdots \times \tilde{\rho}_n$  contenant  $\tilde{\theta}_{\max}$ . D'après le cas de caractéristique nulle traité plus haut, les représentations cuspidales  $\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_n$  sont toutes d'endo-classe  $\Theta_{\max}$ . En réduisant mod  $\ell$ , on obtient le résultat voulu.  $\square$

**Proposition 5.8.** — *Soient  $\rho_1, \dots, \rho_n$  des représentations irréductibles cuspidales d'endo-classe  $\Theta_{\max}$  dont la somme des degrés vaut  $m$ . Soit  $\pi$  un sous-quotient irréductible de  $\rho_1 \times \cdots \times \rho_n$ . Écrivons :*

$$\mathrm{cusp}(\pi) = [\tau_1] + \cdots + [\tau_r]$$

*le support cuspidal de  $\pi$ . Alors  $\tau_1, \dots, \tau_r$  sont toutes d'endo-classe  $\Theta_{\max}$  et  $\mathbf{K}(\pi)$  est non nulle.*

*Démonstration.* — Pour tout  $k \in \{1, \dots, r\}$ , soit  $m_k$  le degré de  $\tau_k$  et posons  $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$ . Quitte à renuméroter  $\tau_1, \dots, \tau_r$ , le module de Jacquet  $\mathbf{r}_\alpha(\rho_1 \times \cdots \times \rho_n)$  a pour sous-quotient la représentation  $\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_r$ . Soit  $k \in \{1, \dots, r\}$ . D'après le lemme géométrique [24, 2.6], il y a des entiers  $i_1, \dots, i_s \in \{1, \dots, n\}$  tels que  $\tau_k$  est un sous-quotient de l'induite parabolique  $\rho_{i_1} \times \cdots \times \rho_{i_s}$ . On déduit de la proposition 5.6 que l'endo-classe de  $\tau_k$  est égale à  $\Theta_{\max}$ . Ceci prouve la première partie de la proposition.

Il nous reste à prouver que  $\pi$  contient le caractère simple  $\theta_{\max}$ . Soit  $(J_M, \lambda_M)$  un type simple maximal du sous-groupe de Levi standard  $M = M_\alpha$  contenu dans  $\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_r$ . D'après la proposition 4.11, la représentation  $\pi$  contient un type semi-simple  $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$  qui est une paire couvrante de  $(J_M, \lambda_M)$ , et qui est homogène car  $\tau_1, \dots, \tau_r$  ont la même endo-classe  $\Theta_{\max}$ . Ce type semi-simple homogène est construit à partir d'une strate simple  $[\Lambda, n_\Lambda, 0, \beta]$ , et  $\boldsymbol{\lambda}$  contient le caractère simple  $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$  transfert de  $\theta_{\max}$ . D'après la proposition 2.11, la représentation  $\pi$  contient le transfert  $\theta' \in \mathcal{C}(\Lambda', 0, \beta)$  pour toute strate simple  $[\Lambda', n_{\Lambda'}, 0, \beta]$  telle que  $U(\Lambda) \subseteq U(\Lambda')$ . Si l'on choisit  $\Lambda'$  de sorte que le sous-groupe parahorique  $U(\Lambda') \cap B^\times$  est maximal,  $\Lambda'$  est (à dilatation et translation près) conjuguée à  $\Lambda_{\max}$  sous  $G$  et on en déduit que  $\pi$  contient le caractère simple  $\theta_{\max}$ .  $\square$

### 5.3. Compatibilité à l'induction parabolique

Soit  $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$  une famille d'entiers  $\geq 1$  de somme  $m$ , ce qui définit une décomposition :

$$(5.3) \quad D^m = D^{m_1} \oplus \cdots \oplus D^{m_r}$$



en  $D$ -espaces vectoriels à droite. On a fixé au paragraphe 5.1 une strate simple  $[\Lambda_{\max}, n_{\max}, 0, \beta]$  de  $A$ . Supposons que  $E = F(\beta)$  stabilise la décomposition (5.3), c'est-à-dire que  $E$  est contenu dans la sous-algèbre diagonale  $A_{m_1} \times \cdots \times A_{m_r} \subseteq A$ , et que  $\Lambda_{\max}$  soit conforme à (5.3) au sens de [32, Définition 1.13]. On pose  $M = M_\alpha$ ,  $N = N_\alpha$  et  $P = P_\alpha$ .

Pour chaque  $i \in \{1, \dots, r\}$ , on pose  $\Lambda_{\max, i} = \Lambda_{\max} \cap D^{m_i}$ . C'est une suite de réseaux de  $D^{m_i}$  qui définit une strate simple  $[\Lambda_{\max, i}, n_{\max, i}, 0, \beta]$  de  $A_{m_i}$ , et le transfert  $\theta_{\max, i} \in \mathcal{C}(\Lambda_{\max, i}, 0, \beta)$  de  $\theta_{\max}$  est un caractère simple maximal. Notons aussi  $B_i$  le centralisateur de  $E$  dans  $A_{m_i}$ .

Le produit  $B_1 \times \cdots \times B_r$  s'identifie à une sous- $E$ -algèbre de  $B$ . La restriction de  $\Phi$  à  $B_i$  définit un isomorphisme de  $E$ -algèbres  $\Phi_i$  de  $B_i$  dans  $\mathcal{M}_{m'_i}(D')$  où  $m'_i$  est l'entier associé à  $m_i$  par (2.4). Fixons une strate simple  $[\Lambda, n_\Lambda, 0, \beta]$  telle que :

- (1) pour chaque  $i \in \{1, \dots, r\}$ , la suite  $\Lambda \cap D^{m_i}$  est dans la classe affine de  $\Lambda_{\max, i}$  ;
- (2)  $U(\Lambda) \subseteq U(\Lambda_{\max})$  et  $U(\Lambda) \cap B^\times$  est le sous-groupe parahorique standard de  $B^\times$  correspondant à la famille  $(m'_1, \dots, m'_r)$ .

Soit  $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$  le transfert de  $\theta_{\max}$  et notons  $\kappa$  le transfert de  $\kappa_{\max}$  en une  $\beta$ -extension de  $\theta$ . La représentation de  $J(\beta, \Lambda) \cap M$  sur l'espace des vecteurs  $J(\beta, \Lambda) \cap N$ -invariants de  $\kappa$ , notée  $\kappa_{\max, \alpha}$ , est de la forme :

$$\kappa_{\max, \alpha} = \kappa_{\max, 1} \otimes \cdots \otimes \kappa_{\max, r}$$

où  $\kappa_{\max, i}$  est une  $\beta$ -extension de  $\theta_{\max, i}$ , pour chaque  $i$ . On obtient un foncteur  $\mathbf{K}_i = \mathbf{K}_{\kappa_{\max, i}, \Phi_i}$  de  $\mathcal{R}(G_{m_i})$  dans  $\mathcal{R}(\overline{G}_i)$ , où  $\overline{G}_i = J_{\max, i} / J_{\max, i}^1$  est identifié à  $GL_{m'_i}(\mathbb{k}_{D'})$ . On pose aussi :

$$\begin{aligned} J_{\max, \alpha} &= J_{\max, 1} \times \cdots \times J_{\max, r}, \\ J_{\max, \alpha}^1 &= J_{\max, 1}^1 \times \cdots \times J_{\max, r}^1, \\ \overline{M} &= J_{\max, \alpha} / J_{\max, \alpha}^1, \end{aligned}$$

ce dernier étant identifié au sous-groupe de Levi standard  $\overline{G}_1 \times \cdots \times \overline{G}_r$  de  $\overline{G}$ . On définit un foncteur :

$$\mathbf{K}_\alpha : \pi \mapsto \text{Hom}_{J_{\max, \alpha}^1}(\kappa_{\max, \alpha}, \pi)$$

de  $\mathcal{R}(M)$  dans  $\mathcal{R}(\overline{M})$ . On a le résultat suivant.

**Proposition 5.9.** — *Pour  $i \in \{1, \dots, r\}$ , soit  $\pi_i$  une représentation irréductible de  $G_{m_i}$ . Il y a un isomorphisme de représentations de  $\overline{G}$  :*

$$\mathbf{K}(\pi_1 \times \cdots \times \pi_r) \simeq \mathbf{K}_1(\pi_1) \times \cdots \times \mathbf{K}_r(\pi_r).$$

*Démonstration.* — Le résultat est vrai dans le cas où  $R$  est de caractéristique nulle : la preuve de Schneider et Zink [27, Proposition 5.7] est encore valable. On peut donc supposer que  $R$  est de caractéristique  $\ell$  non nulle. Posons  $\pi = \pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r$ . Par la suite,  $i_\alpha$  désignera aussi bien l'induction parabolique de  $M$  à  $G$  le long de  $P$  que l'induction parabolique de  $\overline{M}$  à  $\overline{G}$  le long de  $\overline{P} = (U(\Lambda) \cap B^\times) J_{\max}^1 / J_{\max}^1$ .

**Lemme 5.10.** — *Pour toute représentation  $V$  de  $M$ , il existe un homomorphisme injectif :*

$$(5.4) \quad \kappa_{\max} \otimes i_\alpha(\mathbf{K}_\alpha(V)) \rightarrow i_\alpha(V)$$

de représentations de  $J_{\max}$ .

*Démonstration.* — On reprend la première partie de la preuve de [36, III.5.12]. □

En appliquant le foncteur exact  $\mathbf{K}$ , on déduit du lemme 5.10, pour toute représentation  $V$  de  $M$ , un homomorphisme injectif :

$$(5.5) \quad \mathbf{i}_\alpha(\mathbf{K}_\alpha(V)) \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{i}_\alpha(V))$$

de représentations de  $\overline{G}$ . Dans le cas où  $V = \pi$ , l'homomorphisme injectif (5.5) s'écrit :

$$(5.6) \quad \mathbf{K}_1(\pi_1) \times \cdots \times \mathbf{K}_r(\pi_r) \rightarrow \mathbf{K}(\pi_1 \times \cdots \times \pi_r)$$

et on va prouver que c'est un isomorphisme.

**Lemme 5.11.** — *Soit  $\tilde{\kappa}_{\max}$  une  $\beta$ -extension relevant  $\kappa_{\max}$ , et soit  $\tilde{\mathbf{K}}$  le foncteur associé. Pour toute  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation entière  $\tilde{\pi}$  de longueur finie de  $G$ , on a  $\mathbf{r}_\ell([\tilde{\mathbf{K}}(\tilde{\pi})]) = [\mathbf{K}(\mathbf{r}_\ell(\tilde{\pi}))]$ .*

*Démonstration.* — Il suffit de le prouver dans le cas où  $\tilde{\pi}$  est irréductible. Soient  $\mathfrak{k}_{\max}$  une structure entière de  $\kappa_{\max}$  et  $\mathfrak{l}$  une structure entière de  $\tilde{\pi}$ . Alors  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{J}_{\max}^1}(\mathfrak{k}_{\max}, \mathfrak{l})$  est une structure entière de  $\mathbf{K}(\tilde{\pi})$ .  $\square$

**Lemme 5.12.** — *Si  $\pi$  est cuspidale, alors (5.6) est un isomorphisme.*

*Démonstration.* — Quitte à tordre  $\pi$  par un caractère non ramifié de  $M$ , on peut supposer que son caractère central est à valeurs dans  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ , donc que  $\pi$  est définie sur  $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ . Il suffit donc de prouver le résultat dans le cas où  $\mathbf{R} = \overline{\mathbb{F}}_\ell$ , ce que l'on suppose désormais.

D'après la proposition 3.26, il y a une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible cuspidale entière  $\tilde{\pi}$  de  $M$  telle que  $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\pi}) \geq [\pi]$ . Comme le résultat est valable en caractéristique 0, on a un isomorphisme :

$$(5.7) \quad \mathbf{i}_\alpha(\tilde{\mathbf{K}}_\alpha(\tilde{\pi})) \rightarrow \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{i}_\alpha(\tilde{\pi}))$$

de  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations de  $\overline{G}$ . La représentation  $\tilde{\pi}$  est de la forme  $\tilde{\pi}_1 \otimes \cdots \otimes \tilde{\pi}_r$ . Pour chaque  $i$ , la représentation  $\tilde{\pi}_i$  est irréductible cuspidale entière, et d'après le théorème 3.15 il existe un entier  $a_i \geq 1$  tel que  $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\pi}_i)$  soit égale à la somme des  $\pi_i \nu^k$  pour  $k \in \{0, \dots, a_i - 1\}$ . Compte tenu du lemme 5.11 et du fait que  $\mathbf{r}_\ell$  commute à l'induction parabolique, la réduction mod  $\ell$  du membre de gauche de (5.7) donne l'égalité :

$$(5.8) \quad \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{K}_1(\pi_1 \nu^{k_1}) \times \cdots \times \mathbf{K}_r(\pi_r \nu^{k_r}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{K}(\pi_1 \nu^{k_1} \times \cdots \times \pi_r \nu^{k_r})$$

dans le groupe de Grothendieck  $\mathcal{G}(G, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ , où  $\mathbf{k}$  décrit les familles d'entiers  $(k_1, \dots, k_r)$  tels que  $k_i \in \{0, \dots, a_i - 1\}$ . Comme on a un morphisme injectif (5.6) entre représentations de dimension finie de  $\overline{G}$  non seulement pour  $\pi$  mais plus généralement pour  $\pi$  tordue par n'importe quel caractère de  $G$ , et compte tenu de (5.8), on déduit que (5.6) est un isomorphisme de représentations de  $\overline{G}$ .  $\square$

Supposons maintenant que  $\pi$  est irréductible mais pas cuspidale, et prouvons que (5.6) est un isomorphisme par récurrence sur la dimension de  $M$ .

Il y a un sous-groupe de Levi standard  $M_\gamma \subsetneq M$  et une représentation irréductible cuspidale  $\rho$  de  $M_\gamma$  dont l'induite à  $M$ , notée  $\pi'$ , admet une sous-représentation isomorphe à  $\pi$ . Au moyen du lemme 5.10, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{i}_\alpha(\mathbf{K}_\alpha(\pi)) & \longrightarrow & \mathbf{K}(\mathbf{i}_\alpha(\pi)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{i}_\alpha(\mathbf{K}_\alpha(\pi')) & \longrightarrow & \mathbf{K}(\mathbf{i}_\alpha(\pi')) \end{array}$$

dans lequel toutes les flèches sont injectives.

Supposons d'abord que  $M$  est de dimension minimale pour la propriété que  $E^\times \subseteq M$ . Dans ce cas, pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $B_i$  est une algèbre à division sur  $E$  et toute représentation irréductible contenant  $\theta_{\max, i}$  est cuspidale. Puisque  $\pi$  a été supposée non cuspidale, il y a un  $k$  tel que  $\pi_k$  ne contient pas  $\theta_{\max, k}$ , c'est-à-dire que le membre de gauche de (5.6) est nul. Il suffit donc de prouver que le membre de droite l'est également. Si tel n'était pas le cas, la proposition 5.6 impliquerait que chaque facteur de  $\varrho$  est d'endo-classe  $\Theta_{\max}$ , et la proposition 5.8 contredirait l'hypothèse sur  $\pi_k$ .

Revenons au diagramme ci-dessus. Par hypothèse de récurrence,  $M_\gamma$  étant de dimension moindre que celle de  $M$ , la représentation  $\mathbf{K}_\alpha(\pi') = \mathbf{K}_\alpha(\mathbf{i}_\gamma^\alpha(\varrho))$  (où  $\mathbf{i}_\gamma^\alpha$  désigne l'induction parabolique de  $M_\gamma$  à  $M$ ) est isomorphe à  $\mathbf{i}_\gamma^\alpha(\mathbf{K}_\gamma(\varrho))$ . On peut donc remplacer la ligne du bas par :

$$\mathbf{i}_\gamma(\mathbf{K}_\gamma(\varrho)) \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{i}_\gamma(\varrho)).$$

Comme  $\varrho$  est cuspidale, ce morphisme est bijectif d'après le lemme 5.12. Écrivons :

$$[\pi'] = [\pi] + [\pi'']$$

dans le groupe de Grothendieck  $\mathcal{G}(M, R)$ , où  $\pi''$  est le quotient de  $\pi'$  par  $\pi$ . Tous les foncteurs qui interviennent étant exacts, on a :

$$0 = [\mathbf{K}(\mathbf{i}_\gamma(\varrho))] - [\mathbf{i}_\gamma(\mathbf{K}_\gamma(\varrho))] = ([\mathbf{K}(\mathbf{i}_\alpha(\pi))] - [\mathbf{i}_\alpha(\mathbf{K}_\alpha(\pi))]) + ([\mathbf{K}(\mathbf{i}_\alpha(\pi''))] - [\mathbf{i}_\alpha(\mathbf{K}_\alpha(\pi''))])$$

dans le groupe de Grothendieck  $\mathcal{G}(G, R)$ . D'après (5.5) appliqué à  $\pi$  puis à  $\pi''$ , chaque terme de la somme ci-dessus est une représentation, c'est-à-dire une somme à coefficients positifs ou nuls de représentations irréductibles. La somme totale étant nulle, chacun de ces termes l'est aussi. On a donc  $[\mathbf{K}(\mathbf{i}_\alpha(\pi))] - [\mathbf{i}_\alpha(\mathbf{K}_\alpha(\pi))] = 0$ , ce dont on déduit que (5.6) est un isomorphisme.  $\square$

**Remarque 5.13.** — On a en fait prouvé que, pour toute représentation  $\pi$  de longueur finie de  $M$ , l'homomorphisme injectif (5.5) est un isomorphisme de représentations de  $\overline{G}$ .

**Corollaire 5.14.** — Pour  $i \in \{1, \dots, r\}$ , soit  $\rho_i$  une représentation irréductible cuspidale de  $G_{m_i}$  contenant  $\theta_{\max, i}$  et soit  $(J_{\max, i}, \kappa_{\max, i} \otimes \sigma_i)$  un type simple maximal contenu dans  $\rho_i$ . Alors :

$$(5.9) \quad \mathbf{K}(\rho_1 \times \dots \times \rho_r) \simeq \bigoplus_{i_1} \dots \bigoplus_{i_r} \sigma_1^{\phi^{i_1}} \times \dots \times \sigma_r^{\phi^{i_r}},$$

où  $\phi$  est un générateur de  $\text{Gal}(\mathbb{k}_{D'}/\mathbb{k}_E)$  et où chaque  $i_j$  décrit  $\{0, \dots, b(\rho_j) - 1\}$ .

#### 5.4. Compatibilité à la restriction parabolique

Reprenons les notations du paragraphe 5.3 et posons  $\overline{N} = (U_1(\Lambda) \cap B^\times)J_{\max}^1/J_{\max}^1$ , qui est le radical unipotent de  $\overline{P}$ . On a une décomposition de Levi  $\overline{P} = \overline{M}\overline{N}$ . Toute représentation de  $J = J(\beta, \Lambda)$  triviale sur  $J^1 = J^1(\beta, \Lambda)$  peut être vue comme une représentation de  $\overline{M}$ .

**Proposition 5.15.** — Soit  $\pi$  une représentation de  $G$ .

(1) On a un isomorphisme canonique de représentations de  $\overline{M}$  :

$$(5.10) \quad \mathbf{K}(\pi)^{\overline{N}} \simeq \text{Hom}_{J^1}(\kappa, \pi).$$

(2) Pour toute représentation irréductible  $\xi$  de  $J$  triviale sur  $J^1$ , on a un homomorphisme injectif de  $R$ -algèbres :

$$(5.11) \quad \text{End}_{\overline{G}}(\mathbf{i}_\alpha(\xi)) \simeq \mathcal{H}(J_{\max}, \kappa_{\max}|_{(U(\Lambda) \cap B^\times)J_{\max}^1} \otimes \xi) \hookrightarrow \mathcal{H}(G, \kappa \otimes \xi)$$

et un isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbf{M}}}(\xi, \mathbf{K}(\pi)^{\overline{\mathbf{N}}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}}(\kappa \otimes \xi, \pi)$$

de  $\mathrm{End}_{\overline{\mathbf{G}}}(\mathbf{i}_\alpha(\xi))$ -modules.

*Démonstration.* — On prouve l’assertion 1 comme dans [27, §5] grâce aux propriétés de transfert entre  $\beta$ -extensions, et on obtient l’homomorphisme injectif (5.11) en reprenant les arguments de [30, §4.2]. Ensuite, l’isomorphisme (5.10) induit un isomorphisme de R-espaces vectoriels :

$$(5.12) \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}}(\kappa \otimes \xi, \pi) \simeq \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbf{M}}}(\xi, \mathbf{K}(\pi)^{\overline{\mathbf{N}}}).$$

L’homomorphisme injectif (5.11) induit une structure de  $\mathrm{End}_{\overline{\mathbf{G}}}(\mathbf{i}_\alpha(\xi))$ -module sur le membre de gauche, et par réciprocity de Frobenius :

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbf{M}}}(\xi, \mathbf{K}(\pi)^{\overline{\mathbf{N}}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbf{G}}}(\mathbf{i}_\alpha(\xi), \mathbf{K}(\pi))$$

on a une structure de  $\mathrm{End}_{\overline{\mathbf{G}}}(\mathbf{i}_\alpha(\xi))$ -module sur le membre de droite, faisant de (5.12) un isomorphisme de  $\mathrm{End}_{\overline{\mathbf{G}}}(\mathbf{i}_\alpha(\xi))$ -modules.  $\square$

Soit  $\kappa$  la représentation de  $\mathbf{J} = \mathrm{H}^1(\beta, \Lambda)(\mathbf{J} \cap \mathbf{P})$  définie au paragraphe 2.8 dont l’induite à  $\mathbf{J}$  est isomorphe à  $\kappa$ . Pour toute représentation lisse  $\pi$  de  $\mathbf{G}$ , on a des isomorphismes :

$$\mathbf{K}(\pi)^{\overline{\mathbf{N}}} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}^1}(\kappa, \pi) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}^1}(\kappa, \pi)$$

de représentations de  $\overline{\mathbf{M}}$ , le premier provenant de (5.10). D’autre part, on a l’égalité :

$$\mathbf{K}_\alpha(\mathbf{r}_\alpha(\pi)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}_{\max, \alpha}^1}(\kappa_{\max, \alpha}, \mathbf{r}_\alpha(\pi))$$

par définition de  $\mathbf{K}_\alpha$ . Comme la restriction de  $\kappa$  à  $\mathbf{J} \cap \mathbf{M} = \mathbf{J}_{\max, \alpha}$  est égale à  $\kappa_{\max, \alpha}$ , l’homomorphisme surjectif canonique de  $\pi$  vers son module de Jacquet  $\mathbf{r}_\alpha(\pi)$  induit un morphisme :

$$\mathbf{K}(\pi)^{\overline{\mathbf{N}}} \rightarrow \mathbf{K}_\alpha(\mathbf{r}_\alpha(\pi))$$

de représentations de  $\overline{\mathbf{M}}$ .

**Proposition 5.16.** — *Soit  $\pi$  une représentation de  $\mathbf{G}$ . L’application naturelle :*

$$\mathbf{K}(\pi)^{\overline{\mathbf{N}}} \rightarrow \mathbf{K}_\alpha(\mathbf{r}_\alpha(\pi))$$

*est un isomorphisme de représentations de  $\overline{\mathbf{M}}$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\eta$  la restriction de  $\kappa$  à  $\mathbf{J}^1$  comme au paragraphe 2.10, et soit  $\eta_{\max, \alpha}$  la restriction de  $\kappa_{\max, \alpha}$  au sous-groupe  $\mathbf{J}_{\max, \alpha}^1$ . D’après la proposition 2.27, la paire  $(\mathbf{J}^1, \eta)$  est une paire couvrante de  $(\mathbf{J}_{\max, \alpha}^1, \eta_{\max, \alpha})$ . On déduit le résultat voulu de (2.18).  $\square$

**Remarque 5.17.** — Soit  $[\mathfrak{A}_{\max}, n_{\max}, 0, \beta]$  une strate simple de  $A$ , où  $\mathfrak{A}_{\max}$  est l’unique ordre héréditaire standard de  $A$  tel que  $\mathfrak{A}_{\max} \cap B$  soit un ordre héréditaire maximal de  $B$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , plongeons  $E$  diagonalement dans  $A_{mn} \simeq \mathcal{M}_n(A)$ . Il y a un unique ordre héréditaire standard  $\mathfrak{A}_{\max}^n$  de  $A_{mn}$  dont l’intersection avec le centralisateur de  $E$  soit un ordre maximal.

Comme au début de cette section, on fixe un caractère simple maximal  $\theta_{\max}$  et une  $\beta$ -extension  $\kappa_{\max}$ . Notons  $\theta_{\max}^n \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}_{\max}^n, 0, \beta)$  le transfert de ce caractère simple et  $\kappa_{\max}^n$  la  $\beta$ -extension compatible à  $\kappa_{\max}$  au sens où, si l’on choisit  $\alpha = (m, \dots, m)$ , on a (avec les notations du paragraphe 5.3)  $\kappa_{\max, \alpha}^n = \kappa_{\max} \otimes \dots \otimes \kappa_{\max}$ . Il correspond à cette  $\beta$ -extension un foncteur :

$$\mathbf{K}_n : \mathcal{R}(G_{mn}) \rightarrow \mathcal{R}(\mathrm{GL}_{m'n}(\mathfrak{k}_{D'})).$$

Soient  $n_1, \dots, n_r \geq 1$  des entiers tels que  $n_1 + \dots + n_r = n$  et, pour chaque  $i \in \{1, \dots, r\}$ , soit  $\pi_i$  une représentation irréductible de  $G_{mn_i}$ . Alors on a un isomorphisme canonique :

$$\mathbf{K}_n(\pi_1 \times \dots \times \pi_r) \simeq \mathbf{K}_{n_1}(\pi_1) \times \dots \times \mathbf{K}_{n_r}(\pi_r).$$

Si l'on pose  $\alpha = (n_1, \dots, n_r)$ , on a un foncteur :

$$\mathbf{K}_\alpha : \mathcal{R}(M_{(mn_1, \dots, mn_r)}) \rightarrow \mathcal{R}(\mathrm{GL}_{m'n_1}(\mathfrak{k}_{\mathbb{D}'}) \times \dots \times \mathrm{GL}_{m'n_r}(\mathfrak{k}_{\mathbb{D}'}))$$

correspondant à la représentation  $\kappa_{\max}^{n_1} \otimes \dots \otimes \kappa_{\max}^{n_r}$  du groupe  $\mathrm{J}(\beta, \mathfrak{A}_{\max}^{n_1}) \times \dots \times \mathrm{J}(\beta, \mathfrak{A}_{\max}^{n_r})$ . Notons  $\bar{N}$  le sous-groupe unipotent standard de  $\mathrm{GL}_{m'n}(\mathfrak{k}_{\mathbb{D}'})$  associé à  $(m'n_1, \dots, m'n_r)$ . Si  $\pi$  est une représentation de  $G_{mn}$ , on a un isomorphisme canonique :

$$\mathbf{K}_n(\pi)^{\bar{N}} \simeq \mathbf{K}_\alpha(\mathbf{r}_{(mn_1, \dots, mn_r)}(\pi))$$

de représentations de  $\mathrm{GL}_{m'n_1}(\mathfrak{k}_{\mathbb{D}'}) \times \dots \times \mathrm{GL}_{m'n_r}(\mathfrak{k}_{\mathbb{D}'})$ .

## Appendice A

### Une majoration d'entrelacement

(par Vincent Sécherre et Shaun Stevens)

Soit  $A$  une  $F$ -algèbre centrale simple et soit  $V$  un  $A$ -module simple. On note  $D$  la  $F$ -algèbre opposée à  $\mathrm{End}_A(V)$  et on identifie  $A$  et  $\mathrm{End}_D(V)$ . On pose  $G = A^\times$ .

Si  $\psi$  est un caractère d'un sous-groupe  $H$  de  $G$ , on notera  $I_G(\psi)$  son ensemble d'entrelacement dans  $G$ , c'est-à-dire l'ensemble des  $g \in G$  tels que  $\psi(gxg^{-1}) = \psi(x)$  pour tout  $x \in H \cap g^{-1}Hg$ .

#### A.1.

Dans ce paragraphe, nous supposons être dans la situation de [4, §2.2]. Soit  $[\Lambda, m, m-1, b]$  une strate fondamentale dans  $A$ . Supposons qu'on a une décomposition de  $D$ -espaces vectoriels  $V = V^1 \oplus V^2$  préservée par  $b$ . On pose  $A^{ij} = \mathrm{Hom}_D(V^j, V^i)$  pour  $i, j \in \{1, 2\}$  et :

$$A = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{pmatrix}.$$

On note aussi  $A^i = A^{ii}$ ,  $\mathcal{M} = A^1 \oplus A^2$  et  $M = \mathcal{M}^\times$ . Pour  $k \in \mathbb{Z}$ , on pose :

$$\mathfrak{a}_k(\Lambda) = \{a \in A \mid a(\Lambda_l) \subseteq \Lambda_{l+k} \text{ pour tout } l \in \mathbb{Z}\}.$$

Écrivons  $b = b_1 + b_2$  avec  $b_i \in A^i$ ,  $i = 1, 2$  et supposons que les strates  $[\Lambda^i, m, m-1, b_i]$  ont des polynômes caractéristiques premiers entre eux. Pour  $0 \leq t < m$ , posons :

$$\mathfrak{h}_{m,t} = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_m & \mathfrak{a}_{t+1} \\ \mathfrak{a}_m & \mathfrak{a}_m \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{j}_{m,t} = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_1 \\ \mathfrak{a}_{m-t} & \mathfrak{a}_1 \end{pmatrix}$$

et définissons des sous-groupes ouverts et compacts de  $G$  par  $H_{m,t} = 1 + \mathfrak{h}_{m,t}$  et  $J_{m,t} = 1 + \mathfrak{j}_{m,t}$ . Comme le commutateur de  $H_{m,t}$  est inclus dans  $U_{m+1}(\Lambda)$ , la formule :

$$\psi_b : 1 + x \mapsto \psi_F \circ \mathrm{tr}_{A/F}(bx)$$

(voir (3.3)) définit un caractère de  $H_{m,t}$ . D'après [4, 2.3.3-2.3.8], on a le résultat suivant<sup>(5)</sup>.

<sup>(5)</sup> Contrairement à [4], nous ne supposons pas que  $\Lambda$  est stricte, ce qui ne change rien à l'argument, ni que  $b_1$  est  $\Lambda^1$ -inversible, ce que nous pourrions supposer quitte à échanger les rôles de  $b_1$  et de  $b_2$ .

**Lemme A.1.** — Soit  $b'_i \in b_i + \mathfrak{a}_{1-m}$  pour  $i = 1, 2$ , soit  $c \in \mathfrak{a}_{1-m}^{21}$  et soit  $r \in \mathbb{Z}$ .

- (1) Pour  $r \geq 0$ , l'application  $x \mapsto b'_1 x - x b'_2 + x c x$  induit un isomorphisme  $\mathfrak{a}_r^{12} \rightarrow \mathfrak{a}_{r-m}^{12}$ .
- (2) L'application  $x \mapsto b'_1 x - x b'_2$  induit un isomorphisme  $\mathfrak{a}_r^{12} \rightarrow \mathfrak{a}_{r-m}^{12}$ .
- (3) L'application  $x \mapsto x b'_1 - b'_2 x$  induit un isomorphisme  $\mathfrak{a}_r^{21} \rightarrow \mathfrak{a}_{r-m}^{21}$ .

Étant donnée une partie  $X$  de  $A$ , on note  $X^*$  l'ensemble des  $a \in A$  tels que  $\psi_F \circ \text{tr}_{A/F}(ax) = 1$  pour tout  $x \in X$ .

**Corollaire A.2.** — Soit  $x \in b + \mathfrak{h}_{m,t}^*$ . Alors il y a un  $j \in J_{t,l}$  tel que  $j x j^{-1} \in b + (\mathfrak{h}_{t,l}^* \cap \mathcal{M})$ .

*Démonstration.* — Nous suivons la preuve de [12, 3.7 Lemma 3]. Écrivons :

$$x = \begin{pmatrix} b'_1 & a \\ c & b'_2 \end{pmatrix}$$

où  $a \in \mathfrak{a}_{1-t}^{12}$  et  $c \in \mathfrak{a}_{-l}^{21} \subseteq \mathfrak{a}_{1-t}^{21}$ . D'après le lemme A.1(1), il y a  $v \in \mathfrak{a}_1^{12}$  tel que  $b'_1 v - v b'_2 + v c v = a$ , et ainsi  $(1+v)x(1+v)^{-1}$  est triangulaire supérieure. Comme  $1+v \in J_{t,l}$ , on se ramène ainsi au cas où  $a = 0$ .

Supposons donc que  $a$  est nul, et soit  $w \in \mathfrak{a}_{t-l}^{21}$  tel que  $w b'_1 - b'_2 w = c$  (voir le lemme A.1(3)). Alors  $(1+w)^{-1}x(1+w) \in \mathcal{M}$  et  $1+w \in J_{t,l}$ , comme demandé.  $\square$

**Proposition A.3.** — On a  $I_G(\psi_b | \mathbf{H}_{m,t}) \subseteq J_{m,t} \text{MJ}_{m,t}$ .

*Démonstration.* — Soit  $g \in I_G(\psi_b | \mathbf{H}_{m,t})$ . Il existe  $x, y \in \mathfrak{h}_{m,t}^*$  tels que :

$$g^{-1}(b+x)g = b+y.$$

D'après le corollaire A.2, on peut remplacer  $g$  par  $j_1 g j_2$  avec  $j_1, j_2 \in J_{m,t}$  et supposer que  $x, y$  sont dans  $\mathfrak{h}_{m,t}^* \cap \mathcal{M}$ . Le reste de la preuve se termine comme dans [4, 12] en écrivant  $g$  par blocs et en remarquant que les points 2 et 3 du lemme A.1 impliquent que les blocs non diagonaux de  $g$  sont nuls, de sorte que  $g \in M$ .  $\square$

## A.2.

Dans ce paragraphe, nous supposons être dans la situation de [32, §4]. Nous avons donc une strate simple  $[\Lambda, n, m, \beta]$  de  $A$ , une décomposition  $V = V^1 \oplus V^2$  en  $E \otimes D$ -modules à droite et un élément  $c \in \mathfrak{a}_{-m}(\Lambda)$  stabilisant cette décomposition. Posons :

$$N = 1 + A^{12}, \quad N^- = 1 + A^{21}, \quad M = (A^1)^\times \times (A^2)^\times, \quad P = MN, \quad P^- = MN^-.$$

Pour tout  $\mathcal{O}_F$ -réseau  $\mathfrak{r}$  de  $A$  et tout  $i, j \in \{1, 2\}$ , nous écrivons  $\mathfrak{r}^{ij} = \mathfrak{r} \cap A^{ij}$ .

Pour tout  $k \geq 1$ , posons  $H^k = H^k(\beta, \Lambda)$  et  $J^k = J^k(\beta, \Lambda)$ , et notons  $\mathfrak{h}_k$  et  $\mathfrak{j}_k$  les  $\mathcal{O}_F$ -réseaux de  $A$  définis par  $H^k = 1 + \mathfrak{h}_k$  et  $J^k = 1 + \mathfrak{j}_k$ . Posons  $q = -k_0(\beta, \Lambda)$ ,  $r = [q/2] + 1$  et  $s = [q/2]$ .

Pour tout  $x \in A$ , posons  $a_\beta(x) = \beta x - x \beta$ . Pour  $k \in \mathbb{Z}$ , posons :

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_k &= \mathfrak{a}_k(\Lambda) \cap B, \\ \mathfrak{n}_k &= \mathfrak{n}_k(\beta, \Lambda), \\ \mathfrak{m}_k &= \mathfrak{a}_k(\Lambda) \cap \mathfrak{n}_{k-q} + \mathfrak{j}_s. \end{aligned}$$

et posons  $\Omega^k = 1 + \mathfrak{m}_k$  pour  $k \geq 1$ . C'est un pro- $p$ -sous-groupe ouvert de  $U_1(\Lambda)$  normalisant  $H^l$  pour tout  $l \geq r$  (et aussi  $H^{q-k+1}$  si  $k \leq q$ ) et qui est normalisé par  $U_1(\Lambda) \cap B^\times$ .

Fixons un caractère simple  $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, m-1, \beta)$ . Posons :

$$\begin{aligned}\Omega &= (U_1(\Lambda) \cap B^\times) \Omega^{q-m+1}, \\ K &= (H^m \cap P^-) \cdot (\Omega \cap N),\end{aligned}$$

et notons  $\xi$  le caractère de  $K$  trivial sur  $K \cap N$  et  $K \cap N^-$  et coïncidant avec  $\theta\psi_c$  sur  $K \cap M$ .

### A.3.

Dans ce paragraphe, nous supposons que  $m \geq r$ . Pour tout  $r \leq t \leq m$ , posons :

$$K_t = (H^m \cap P^-) \cdot (H^t \cap N)$$

et notons  $\xi_t$  la restriction de  $\xi$  à  $K_t$ . Posons  $\Xi_t = (\Xi_t \cap N^-) \cdot (\Xi_t \cap M) \cdot (\Omega \cap N)$  avec :

$$\begin{aligned}\Xi_t \cap M &= (U_1(\Lambda) \cap B^\times) \Omega^{q-m} \cap M, \\ \Xi_t \cap N^- &= (U_{m-t+1}(\Lambda) \cap B^\times) \Omega^{q-t+1} \cap N^-.\end{aligned}$$

**Lemme A.4.** — *L'ensemble  $\Xi_t$  est un sous-groupe de  $U_1(\Lambda)$ .*

*Démonstration.* — D'abord, le groupe  $\Xi_t \cap M$  normalise  $\Xi_t \cap N$  et  $\Xi_t \cap N^-$  car  $U_1(\Lambda) \cap B^\times$  et  $\Omega^k$  normalisent  $\Omega^l$  pour tous  $k, l \geq 1$ .

On vérifie ensuite que  $(\Xi_t \cap N) \cdot (\Xi_t \cap N^-)$  est inclus dans  $\Xi_t$ . Étant donné que :

$$\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v(1+uv)^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+uv & 0 \\ 0 & (1+vu)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (1+uv)^{-1}u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour tout  $u \in \mathfrak{a}_1^{12}$  et tout  $v \in \mathfrak{a}_1^{21}$ , il suffit de prouver que :

$$\begin{aligned}(\mathfrak{b}_1^{12} + \mathfrak{m}_{q-m+1}^{12})(\mathfrak{b}_{m-t+1}^{21} + \mathfrak{m}_{q-t+1}^{21}) &\subseteq \mathfrak{b}_1^1 + \mathfrak{m}_{q-m}^1, \\ (\mathfrak{b}_{m-t+1}^{21} + \mathfrak{m}_{q-t+1}^{21})(\mathfrak{b}_1^{12} + \mathfrak{m}_{q-m+1}^{12}) &\subseteq \mathfrak{b}_1^2 + \mathfrak{m}_{q-m}^2,\end{aligned}$$

ce qui est une conséquence du fait que  $\mathfrak{m}_k \mathfrak{m}_l \subseteq \mathfrak{m}_{k+l}$  et  $\mathfrak{b}_k \mathfrak{m}_l \subseteq \mathfrak{m}_{k+l}$  pour tous  $k, l \geq 0$ .  $\square$

Pour  $t = m$ , on a  $K_m = H^m$  et (voir la preuve de [32, Théorème 4.3]) l'entrelacement dans  $G$  de  $\xi_m = \theta\psi_c$  est inclus dans  $\Xi_m(M \cap B^\times) \Xi_m$ .

**Proposition A.5.** — *On a  $I_G(\xi_t) \subseteq \Xi_t(M \cap B^\times) \Xi_t$ .*

On va prouver cette proposition par récurrence sur  $t$ . Posons :

$${}^-K_t = (H^m \cap N^-) \cdot (H^{m+1} \cap M) \cdot (H^t \cap N)$$

(qui est un sous-groupe de  $K_t$  car  $H^k$  normalise  $H^l$  et  $\mathfrak{h}^k \mathfrak{h}^l \subseteq \mathfrak{h}^{k+l}$  pour tous  $k, l \geq 1$ ) et notons  ${}^- \xi_t$  la restriction de  $\xi_t$  à  ${}^-K_t$ .

**Lemme A.6.** — *Le groupe  $\Xi_t \cap P$  normalise  ${}^- \xi_t$ .*

*Démonstration.* — D'abord le groupe  $(U_1(\Lambda) \cap B^\times) \Omega^{q-m} \cap M$  normalise  ${}^-K_t$  car il normalise  $H^k$  pour tout  $k \geq r$ . Ainsi il normalise  ${}^- \xi_t$  si et seulement s'il normalise la restriction à  $H^{m+1} \cap M$  de ce caractère, ce qui découle de [32, Théorème 2.23].

Passons à  $\Xi_t \cap N = \Omega \cap N$ . Comme ce groupe normalise  ${}^-K_t$ , on a :

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x^{-1}uy - u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H^t \cap N \subseteq \text{Ker}({}^- \xi_t)$$

pour tout  $u \in \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{m}_{q-m+1}^{12}$ , donc il normalise aussi la restriction de  ${}^{-}\xi_t$  à  ${}^{-}\mathbf{K}_t \cap \mathbf{P}$ . Écrivons :

$$\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h(1+uh)^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+uh & 0 \\ 0 & (1+hu)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -(1+uh)^{-1}uhu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour tout  $u \in \mathfrak{b}_1^{12} + \mathfrak{m}_{q-m+1}^{12}$  et tout  $h \in \mathfrak{h}_m^{21}$ . Comme  $\Omega$  normalise  $\mathbf{H}^m$ , chacun des trois facteurs du membre de droite est dans  $\mathbf{H}^m$ . En outre le facteur du milieu est dans  $\mathbf{H}^{m+1} \cap \mathbf{M}$ , ce qui suit du fait qu'il est à la fois dans  $\mathbf{H}^m \cap \mathbf{M}$  et dans  $1 + (\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{m}_{q-m+1})\mathfrak{h}_m \subseteq \mathbf{U}_{m+1}(\Lambda)$ . Ainsi  $\Omega \cap \mathbf{N}$  normalise  ${}^{-}\mathbf{K}_t$ , et il normalise  ${}^{-}\xi_t$  si et seulement si  ${}^{-}\xi_t$  est trivial sur les éléments de la forme :

$$(A.1) \quad \begin{pmatrix} 1+uh & 0 \\ 0 & (1+hu)^{-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{H}^{m+1} \cap \mathbf{M}$$

avec  $u \in \mathfrak{b}_1^{12} + \mathfrak{m}_{q-m+1}^{12}$  et  $h \in \mathfrak{h}_m^{21}$ . Si l'on applique le même raisonnement à  $\theta$  plutôt qu'à  ${}^{-}\xi_t$ , on en déduit que  $\theta$  est trivial sur les éléments de la forme (A.1) puisqu'il est normalisé par  $\Omega \cap \mathbf{N}$ . Comme  $\theta$  et  ${}^{-}\xi_t$  coïncident sur  $\mathbf{H}^{m+1} \cap \mathbf{M}$ , on en déduit que  ${}^{-}\xi_t$  est normalisé par  $\Omega \cap \mathbf{N}$ .  $\square$

Supposons maintenant que  $\mathbf{I}_G(\xi_t) \subseteq \Xi_t(\mathbf{M} \cap \mathbf{B}^\times)\Xi_t$  pour un  $r < t \leq m$ , et soit  $g \in \mathbf{I}_G(\xi_{t-1})$ . On a *a fortiori*  $g \in \mathbf{I}_G(\xi_t)$ , de sorte que :

$$g = (1+x)b(1+y)^{-1}$$

avec  $b \in \mathbf{M} \cap \mathbf{B}^\times$  et  $1+x, 1+y \in \Xi_t$ . Comme  $\Xi_t \cap \mathbf{P} = \Xi_{t-1} \cap \mathbf{P}$  normalise  ${}^{-}\xi_{t-1}$  d'après le lemme A.6, on peut supposer que  $1+x, 1+y \in \Xi_t \cap \mathbf{N}^-$ .

**Lemme A.7.** — *Pour tout  $1+z \in \Xi_t \cap \mathbf{N}^-$ , on a  ${}^{-}\xi_{t-1}^{1+z} = {}^{-}\xi_{t-1}\psi_{a_\beta(z)}$ .*

*Démonstration.* — D'après la preuve du lemme [32, Lemme 4.7], on a  $\xi_{t-1}^{1+z} = \xi_{t-1}\psi_{a_\beta(z)}$  pour tout  $1+z \in \Xi_t \cap \mathbf{N}^-$ . Il suffit donc de prouver que  $\Xi_t \cap \mathbf{N}^-$  normalise  ${}^{-}\mathbf{K}_{t-1}$ . Remarquons que :

$${}^{-}\mathbf{K}_{t-1} = \mathbf{H}^{m+1}(\mathbf{H}^m \cap \mathbf{N}^-)(\mathbf{H}^{t-1} \cap \mathbf{N})$$

et que  $\Xi_t \cap \mathbf{N}^-$  normalise  $\mathbf{H}^{m+1}$  et  $\mathbf{H}^m \cap \mathbf{N}^-$  (voir [32, Proposition 2.30]). Il reste donc à étudier l'action de  $\Xi_t \cap \mathbf{N}^-$  sur  $\mathbf{H}^{t-1} \cap \mathbf{N}$ . On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -uhu(1-hu)^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-hu & 0 \\ 0 & (1-uh)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (1-hu)^{-1}h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour tout  $u \in \mathfrak{b}_{m-t+1}^{21} + \mathfrak{m}_{q-t+1}^{21}$  et tout  $h \in \mathfrak{h}_{t-1}^{12}$ .

Comme  $\Xi_t \cap \mathbf{N}^-$  normalise  $\mathbf{H}^{t-1}$ , le facteur de droite du membre de droite est dans  $\mathbf{H}^{t-1} \cap \mathbf{N}$ . Ensuite le facteur du milieu est dans  $\mathbf{H}^{t-1} \cap \mathbf{M} \cap \mathbf{U}_{m+1}(\Lambda) \subseteq \mathbf{H}^{m+1} \cap \mathbf{M}$ .

D'après [32, Lemme 2.30], le groupe  $\Xi_t \cap \mathbf{N}^-$  normalise  $\mathbf{H}^{t-1}$ , donc le facteur de gauche appartient à  $\mathbf{H}^{t-1} \cap \mathbf{N}^-$ . Comme  $1-hu \in \mathbf{H}^{m+1} \subseteq \mathbf{H}^{t-1}$ , on a  $uhu \in \mathfrak{h}_{t-1}^{21}$ . Mais on a aussi  $u \in \mathfrak{a}_{m-t+1}$  et  $h \in \mathfrak{a}_{t-1}$ , de sorte que  $uhu \in \mathfrak{h}_{t-1}^{21} \cap \mathfrak{a}_m \subseteq \mathfrak{h}_m^{21}$ . Ainsi le facteur de gauche est dans  $\mathbf{H}^m$ .  $\square$

Écrivons maintenant que  $g \in \mathbf{I}_G({}^{-}\xi_{t-1})$ . Ainsi  $b$  entrelace  ${}^{-}\xi_{t-1}^{1+x}$  avec  ${}^{-}\xi_{t-1}^{1+y}$ , donc :

$$b^{-1}a_\beta(x)b \equiv a_\beta(y) \pmod{b^{-1}({}^{-}\mathfrak{k}_{t-1}^*)b + ({}^{-}\mathfrak{k}_{t-1}^*)}$$

où  ${}^{-}\mathfrak{k}_{t-1}$  est le  $\mathcal{O}_F$ -réseau défini par  ${}^{-}\mathbf{K}_{t-1} = 1 + {}^{-}\mathfrak{k}_{t-1}$ .

**Lemme A.8.** — *On a  $(b^{-1}({}^{-}\mathfrak{k}_{t-1}^*)b + ({}^{-}\mathfrak{k}_{t-1}^*)) \cap \mathbf{A}^{21} = (b^{-1}\mathfrak{h}_{t-1}^*b + \mathfrak{h}_{t-1}^*) \cap \mathbf{A}^{21}$ .*



*Démonstration.* — Soit  $\mathfrak{r}$  un  $\mathcal{O}_F$ -réseau de  $A$  se décomposant en blocs  $\mathfrak{r}^{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$ . Alors :

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}^* \cap A^{21} &= \{a \in A^{21} \mid \psi_A(ax) = 1 \text{ pour tout } x \in \mathfrak{r}\} \\ &= \{a \in A^{21} \mid \psi_{A^2}(ax) = 1 \text{ pour tout } x \in \mathfrak{r}^{12}\}. \end{aligned}$$

Ensuite, comme  $b \in M$ , on a :

$$(b^{-1}\mathfrak{r}^*b + \mathfrak{r}^*) \cap A^{21} = b_2^{-1}(\mathfrak{r}^* \cap A^{21})b_1 + (\mathfrak{r}^* \cap A^{21})$$

avec  $b = b_1 + b_2$  et  $b_1 \in (A^1)^\times$  et  $b_2 \in (A^2)^\times$ . Pour  $\mathfrak{r} = {}^{-}\mathfrak{k}_{t-1}$ , on a  $\mathfrak{r}^{12} = \mathfrak{h}_{t-1}^{12}$  donc on obtient le résultat attendu.  $\square$

D'après [32, Proposition 2.27], il y a  $x', y' \in \mathfrak{m}_{q-t+2}^{21}$  tels que  $a_\beta(b^{-1}xb - y) = a_\beta(b^{-1}x'b - y')$ . Ainsi :

$$(b^{-1}xb - y) - (b^{-1}x'b - y') \in (b^{-1}\mathfrak{m}_{q-t+1}b + \mathfrak{m}_{q-t+1}) \cap B \cap A^{21}.$$

et le membre de droite est égal à  $(b^{-1}\mathfrak{b}_{q-t+1}b + \mathfrak{b}_{q-t+1}) \cap A^{21}$  d'après [32, Proposition 2.27]. Il y a donc  $x'', y'' \in \mathfrak{b}_{m-t+1}^{21} + \mathfrak{m}_{q-t+2}^{21}$  tels qu'on ait  $b^{-1}xb - y = b^{-1}x''b - y''$ , ce qui donne l'égalité  $g = (1 + x'')b(1 + y'')^{-1}$ .

Comme  $1 + x'', 1 + y'' \in (\mathbf{U}_{m-t+1}(\Lambda) \cap B^\times)\Omega^{q-t+2} \cap N^-$ , on peut écrire  $g = (1 + u)\gamma(1 + v)^{-1}$  avec  $1 + u, 1 + v \in \Omega^{q-t+2} \cap N^-$  et  $\gamma \in (\mathbf{U}_{m-t+1}(\Lambda) \cap B^\times)b(\mathbf{U}_{m-t+1}(\Lambda) \cap B^\times)$ .

L'élément  $\gamma$  entrelace  $\xi_{t-1}^{1+u}$  et  $\xi_{t-1}^{1+v}$ , donc aussi leurs restrictions au groupe :

$$K_{t-1} \cap B^\times = 1 + \begin{pmatrix} \mathfrak{b}_m & \mathfrak{b}_{t-1} \\ \mathfrak{b}_m & \mathfrak{b}_m \end{pmatrix}.$$

Comme  $\xi_{t-1}^{1+z} = \xi_{t-1}\psi_{a_\beta(z)}$  pour tout  $1 + z \in \Xi_t \cap N^-$ , comme  $\psi_{a_\beta(u)}$  et  $\psi_{a_\beta(v)}$  sont triviaux sur  $K_{t-1} \cap B^\times$ , et comme  $\gamma$  entrelace la restriction de  $\theta$  à  $K_{t-1} \cap B^\times$ , il entrelace aussi la restriction de  $\psi_c$  à  $K_{t-1} \cap B^\times$ . En appliquant la proposition A.3, on trouve que  $g \in \Xi_{t-1}(M \cap B^\times)\Xi_{t-1}$ .

#### A.4.

On suppose toujours que  $m \geq r$ , mais on pose cette fois-ci :

$$Q_t = (H^m \cap P^-) \cdot (\Omega^t \cap N)$$

pour tout  $q - m + 1 \leq t \leq s$ , et on note  $\zeta_t$  la restriction de  $\xi$  à  $Q_t$ .

Posons  $\Gamma_t = (\Gamma_t \cap N^-) \cdot (\Xi_m \cap P)$  avec :

$$\Gamma_t \cap N^- = (\mathbf{U}_{m-t+1}(\Lambda) \cap B^\times)H^{q-t+1} \cap N^-.$$

En appliquant le même calcul que dans le paragraphe précédent, mais en échangeant les rôles de  $\mathfrak{h}$  et de  $\mathfrak{m}$ , on prouve que  $I_G(\zeta_t) \subseteq \Gamma_t(M \cap B^\times)\Gamma_t$ . Pour cela, on a besoin de la variante suivante de [32, Proposition 2.27], que l'on prouve de la même façon à partir de [12, Lemma 6.3.2].

**Proposition A.9.** — *Soit  $s$  une corestriction modérée sur  $A$  relative à  $E/F$ . Pour tout entier  $0 \leq m \leq q - 1$ , la suite :*

$$0 \rightarrow \mathfrak{b}_{m+1} \rightarrow \mathfrak{h}^{m+1} \xrightarrow{a_\beta} (\mathfrak{m}_{q-m})^* \xrightarrow{s} \mathfrak{b}_{m+1-q} \rightarrow 0$$

est exacte. Si on désigne cette suite par  $0 \rightarrow \mathfrak{l}_1 \rightarrow \mathfrak{l}_2 \rightarrow \mathfrak{l}_3 \rightarrow \mathfrak{l}_4 \rightarrow 0$ , alors la suite :

$$0 \rightarrow h^{-1}\mathfrak{l}_1^{ij}h + \mathfrak{l}_1^{ij} \rightarrow h^{-1}\mathfrak{l}_2^{ij}h + \mathfrak{l}_2^{ij} \rightarrow h^{-1}\mathfrak{l}_3^{ij}h + \mathfrak{l}_3^{ij} \rightarrow h^{-1}\mathfrak{l}_4^{ij}h + \mathfrak{l}_4^{ij} \rightarrow 0$$

est exacte pour tout  $h \in B^\times \cap M$  et tous  $i, j \in \{1, 2\}$ .

Il ne nous reste qu'à prouver le résultat suivant. Posons  $\Xi = K((\mathbf{U}_1(\Lambda) \cap B^\times)\Omega^{q-m} \cap M)$ .

**Proposition A.10.** — On a  $I_G(\xi) \subseteq \Xi(M \cap B^\times)\Xi$ .

*Démonstration.* — Soit  $g \in I_G(\xi)$ . En restreignant à :

$${}^{-}\mathbf{Q}_{q-m+1} = (H^m \cap N^-) \cdot (H^{m+1} \cap M) \cdot (\Omega^t \cap N)$$

on peut écrire  $g = (1 + u)\gamma(1 + v)^{-1}$  avec  $\gamma \in (U_{2m-q}(\Lambda) \cap B^\times)(M \cap B^\times)(U_{2m-q}(\Lambda) \cap B^\times)$  et  $1 + u, 1 + v \in H^m \cap N^-$ . L'élément  $\gamma$  entrelace  $\xi^{1+u}$  et  $\xi^{1+v}$ , donc aussi leurs restrictions à :

$$K \cap B^\times = 1 + \begin{pmatrix} \mathfrak{b}_m & \mathfrak{b}_1 \\ \mathfrak{b}_m & \mathfrak{b}_m \end{pmatrix}.$$

On en déduit qu'il entrelace aussi la restriction de  $\psi_c$  à  $K \cap B^\times$ . En appliquant la proposition A.3, on trouve que  $g \in \Xi(M \cap B^\times)\Xi$ .  $\square$

### A.5.

Dans ce paragraphe, on suppose que  $m \in \{1, \dots, q-1\}$ .

**Corollaire A.11.** — On a  $I_G(\xi) \subseteq \text{KMK}$ .

*Démonstration.* — Si  $m \geq r$ , c'est une conséquence de la proposition A.10.

Si  $m < r$ , remarquons que  $\Omega^{q-m} = \Omega^{q-m+1} = J^s$  et  $\Omega = J^1$  et  $K = H^m(J^1 \cap N)$ . Soit  $g \in I_G(\xi)$ . En restreignant  $\xi$  de  $K$  à  $K' = H^r(J^1 \cap N)$  et en appliquant le corollaire avec  $m = r$ , on obtient  $g \in K'MK'$ . Comme  $K' \subseteq K$ , on en déduit le résultat voulu.  $\square$

### A.6.

Soit maintenant  $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$  un type semi-simple de  $G$ , comme au paragraphe 2.9 dont nous reprenons les notations, et soit  $\boldsymbol{\eta}$  la représentation de  $\mathbf{J}^1$  définie au paragraphe 2.10.

Le résultat suivant est nouveau, même dans le cas complexe et même dans le cas de  $\text{GL}_n(\mathbb{F})$ .

**Lemme A.12.** — On a  $I_G(\boldsymbol{\eta}) \subseteq \mathbf{J}^1 \mathbf{L} \mathbf{J}^1$ .

*Démonstration.* — La preuve se fait par récurrence sur  $l$ , le cas  $l = 1$  correspondant à un type semi-simple homogène et étant déjà traité au paragraphe 2.8. Nous supposons donc que  $l \geq 2$ .

Pour  $t \in \{0, \dots, n\}$ , notons  $\Theta_i^{(t)}$  le ps-caractère déterminé par la restriction de  $\theta_i$  à  $H^{t+1}(\beta_i, \Lambda^i)$ . Pour  $t \in \{1, \dots, n\}$ , on définit une relation d'équivalence  $\sim_t$  sur  $\{1, \dots, r\}$  par :

$$i \sim_t j \Leftrightarrow \Theta_i^{(t-1)} \approx \Theta_j^{(t-1)}$$

où  $\approx$  désigne la relation d'endo-équivalence entre ps-caractères.

Notons  $t$  le plus petit entier  $\geq 1$  tel que  $\Theta_1^{(t)}, \dots, \Theta_r^{(t)}$  sont tous endo-équivalents et soit  $I$  une classe d'équivalence pour la relation  $\sim_t$ . Posons :

$$Y^1 = \bigoplus_{i \in I} V^i, \quad Y^2 = \bigoplus_{i \notin I} V^i.$$

Remarquons que  $Y^1 \neq V$ , par minimalité de  $t$ . Soit  $M^*$  le stabilisateur dans  $G$  de la décomposition  $V = Y^1 \oplus Y^2$  et soit  $P^*$  le sous-groupe parabolique stabilisateur de  $Y^1$ , de radical unipotent  $N^*$ . Nous allons prouver que :

$$(A.2) \quad I_G(\boldsymbol{\eta}) \subseteq \mathbf{J}^1 M^* \mathbf{J}^1.$$

Le résultat se déduira alors de l'hypothèse de récurrence, puisque  $\boldsymbol{\lambda}|_{\mathbf{J} \cap M^*} = \boldsymbol{\lambda}^{(1)} \otimes \boldsymbol{\lambda}^{(2)}$ , où  $\boldsymbol{\lambda}^{(1)}$  et  $\boldsymbol{\lambda}^{(2)}$  sont des types semi-simples avec strictement moins de  $l$  endo-classes.

Prouvons maintenant la relation (A.2). Soit  $([\Lambda, n, 0, \gamma], \vartheta, t)$  une approximation commune de  $(\theta_1, \dots, \theta_r)$ . Posons :

$$\Omega = (U^1(\Lambda) \cap B_\gamma)(1 + \mathfrak{m}_{q^{-t+1}}(\gamma, \Lambda)), \quad K = H^t(\gamma, \Lambda)(\Omega \cap N^*),$$

où  $B_\gamma$  est le centralisateur de  $\gamma$  dans  $A$ . Posons  $c = \gamma - \beta$  et  $c_i = e_i c e_i$ , où  $e_i$  est la projection sur  $Y^i$  de noyau  $Y^{3-i}$  pour  $i \in \{1, 2\}$ . Soit  $\xi$  le caractère de  $K$  coïncidant avec  $\theta\psi_c$  sur  $H^t(\gamma, \Lambda)$  et qui est trivial sur  $K \cap N^*$ . Nous sommes donc dans la situation du paragraphe A.2.

Par construction, on a  $\mathbf{J} = (H^t(\gamma, \Lambda) \cap N^{*-}) \cdot (\mathbf{J} \cap M^*) \cdot (\Omega \cap N^*)$  et la restriction de  $\lambda$  à  $K$  est un multiple de  $\xi$ . En particulier, c'est aussi vrai pour  $\eta$  (car  $K \subseteq \mathbf{J}^1$ ) et :

$$I_G(\eta) \subseteq I_G(\xi) \subseteq KM^*K$$

d'après le corollaire A.11. Comme  $K \subseteq \mathbf{J}^1$ , on a prouvé (A.2) et le résultat s'ensuit.  $\square$

### Références

- [1] C. BLONDEL – “Critère d’injectivité pour l’application de Jacquet”, *C. R. Acad. Sci. Paris* **325** (1997), no. 1, p. 1149–1152.
- [2] ———, “Quelques propriétés des paires couvrantes”, *Math. Ann.* **331** (2005), no. 2, p. 243–257.
- [3] P. BROUSSOUS – “Extension du formalisme de Bushnell et Kutzko au cas d’une algèbre à division”, *Proc. London Math. Soc. (3)* **77** (1998), no. 2, p. 292–326.
- [4] ———, “Minimal strata for  $GL(m, D)$ ”, *J. Reine Angew. Math.* **514** (1999), p. 199–236.
- [5] P. BROUSSOUS, V. SÉCHERRE & S. STEVENS – “Smooth representations of  $GL(m, D)$ , V: endo-classes”, *Documenta Math.* **17** (2012), p. 23–77.
- [6] C. J. BUSHNELL & A. FRÖHLICH – *Gauss sums and p-adic division algebras*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 987, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [7] C. J. BUSHNELL & G. HENNIART – “Local tame lifting for  $GL(N)$ . I: Simple characters”, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (1996), no. 83, p. 105–233.
- [8] ———, “Local tame lifting for  $GL(n)$  IV: Simple characters and base change”, *Proc. London Math. Soc. (3)* **87** (2003), no. 2, p. 337–362.
- [9] ———, “Intertwining of simple characters in  $GL(n)$ ”, prépublication [arXiv:1107.1981](https://arxiv.org/abs/1107.1981).
- [10] C. J. BUSHNELL & P. C. KUTZKO – *The admissible dual of  $GL(N)$  via compact open subgroups*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
- [11] ———, “Smooth representations of reductive  $p$ -adic groups: structure theory via types”, *Proc. London Math. Soc. (3)* **77** (1998), no. 3, p. 582–634.
- [12] ———, “Semisimple types in  $GL_n$ ”, *Compositio Math.* **119** (1999), no. 1, p. 53–97.
- [13] J.-F. DAT – “Types et inductions pour les représentations modulaires des groupes  $p$ -adiques”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **32** (1999), no. 1, p. 1–38. With an appendix by Marie-France Vignéras.
- [14] ———, “Finitude pour les représentations lisses de groupes  $p$ -adiques”, *J. Inst. Math. Jussieu* **8** (2009), no. 2, p. 261–333.
- [15] ———, “Théorie de Lubin-Tate non abélienne  $\ell$ -entière”, *Duke Math. J.* **161** (2012), no. 6, p. 951–1010.
- [16] R. DIPPER – “On quotients of Hom-functors and representations of finite general linear groups. I”, *J. Algebra* **130** (1990), no. 1, p. 235–259.
- [17] R. DIPPER & G. JAMES – “Identification of the irreducible modular representations of  $GL_n(q)$ ”, *J. Algebra* **104** (1986), no. 2, p. 266–288.
- [18] M. GRABITZ, A. J. SILBERGER & E.-W. ZINK – “Level zero types and Hecke algebras for local central simple algebras”, *J. Number Theory* **91** (2001), no. 1, p. 92–125.

- [19] J. A. GREEN – “The characters of the finite general linear groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **80** (1955), p. 402–447.
  - [20] G. HENNIART & V. SÉCHERRE – “Types et contragrédientes”. À paraître dans *Canad. J. Math.*
  - [21] R. HOWE & A. MOY – “Minimal  $K$ -types for  $GL_n$  over a  $p$ -adic field”, *Astérisque* (1989), no. 171-172, p. 257–273.
  - [22] G. JAMES – “The irreducible representations of the finite general linear groups”, *Proc. London Math. Soc.* (3) **52** (1986), no. 2, p. 236–268.
  - [23] A. MÍNGUEZ & V. SÉCHERRE – “Représentations banales de  $GL_m(D)$ ”, *Compos. Math.* **149** (2013), p. 679–704.
  - [24] ———, “Unramified  $\ell$ -modular representations of  $GL_n(F)$  and its inner forms”, *Int. Math. Res. Notices* (2013).
  - [25] ———, “Représentations lisses modulo  $\ell$  de  $GL_m(D)$ ”, à paraître dans *Duke. Math. J.*
  - [26] A. ROCHE – “Parabolic induction and the Bernstein decomposition”, *Compos. Math.* **134** (2002), p. 113–133.
  - [27] P. SCHNEIDER & E.-W. ZINK – “ $K$ -types for the tempered components of a  $p$ -adic general linear group”, *J. Reine Angew. Math.* **517** (1999), p. 161–208.
  - [28] V. SÉCHERRE – “Représentations lisses de  $GL(m, D)$ , I : caractères simples”, *Bull. Soc. math. France* **132** (2004), no. 3, p. 327–396.
  - [29] ———, “Représentations lisses de  $GL(m, D)$ , II :  $\beta$ -extensions”, *Compositio Math.* **141** (2005), p. 1531–1550.
  - [30] ———, “Représentations lisses de  $GL(m, D)$ , III : types simples”, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **38** (2005), p. 951–977.
  - [31] ———, “Proof of the Tadić conjecture (U0) on the unitary dual of  $GL_m(D)$ ”, *J. Reine Angew. Math.* **626** (2009), p. 187–203.
  - [32] V. SÉCHERRE & S. STEVENS – “Représentations lisses de  $GL(m, D)$ , IV : représentations supercuspidales”, *J. Inst. Math. Jussieu* **7** (2008), no. 3, p. 527–574.
  - [33] ———, “Smooth representations of  $GL(m, D)$ , VI: semisimple types”, *Int. Math. Res. Not.* (2011).
  - [34] ———, “Blocks of the category of  $\ell$ -modular smooth representations of  $GL(m, D)$ ”, prépublication disponible à l’adresse <http://lmv.math.cnrs.fr/annuaire/vincent-secherre/>.
  - [35] J.-P. SERRE – *Linear representations of finite groups*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 42.
  - [36] M.-F. VIGNÉRAS – *Représentations  $l$ -modulaires d’un groupe réductif  $p$ -adique avec  $l \neq p$* , Progress in Mathematics, vol. 137, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.
  - [37] ———, “Induced  $R$ -representations of  $p$ -adic reductive groups”, *Selecta Math.* (N.S.) **4** (1998), no. 4, p. 549–623. With an appendix by Alberto Arabia.
  - [38] ———, “Irreducible modular representations of a reductive  $p$ -adic group and simple modules for Hecke algebras”, in *European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)*, Progr. Math., vol. 201, Birkhäuser, Basel, 2001, p. 117–133.
  - [39] ———, “Modular representations of  $p$ -adic groups and of affine Hecke algebras”, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)* (Beijing), Higher Ed. Press, 2002, p. 667–677.
  - [40] ———, “On highest Whittaker models and integral structures, in *Contributions to Automorphic forms, Geometry and Number theory: Shalika fest 2002*, John Hopkins Univ. Press, 2004, p. 773–801.
-

ALBERTO MÍNGUEZ, Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 6, 4 place Jussieu, 75005, Paris, France. URL: <http://www.math.jussieu.fr/~minguez/> • *E-mail* : `minguez@math.jussieu.fr`

VINCENT SÉCHERRE, Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, Laboratoire de Mathématiques de Versailles, 45 avenue des Etats-Unis, 78035 Versailles cedex, France  
*E-mail* : `vincent.secherre@math.uvsq.fr`