ERRATUM À : DÉCOMPOSITION EN BLOCS DE LA CATÉGORIE DES REPRÉSENTATIONS ℓ-MODULAIRES LISSES DE LONGUEUR FINIE DE $\mathrm{GL}_m(D)$

par Bastien DREVON & Vincent SÉCHERRE

1. Introduction

Le lemme 4.5 de [1] est faux, comme le montre l'exemple de l'extension :

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{val}(\mathrm{Nrd}(x)) \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in N,$$

du caractère trivial de N par lui-même dès que n et premier à ℓ. Le lemme 4.6 et la proposition 4.8, qui s'appuient dessus, le sont aussi. (Par exemple, si $n = 1$ et $F = \mathbb{Q}_2$, le groupe-quotient H défini au paragraphe 4.4 est trivial ; pourtant, le caractère trivial de $N = F^{\times}$ n'est pas projectif, en raison de l'existence d'auto-extensions.) Par conséquent, la proposition 4.9 et les lemmes 4.12 et 4.13 sont sans objet. Ceci affecte la preuve de la proposition 4.1, et l'énoncé de la proposition 7.16 doit être reformulé.

Nous remercions P. Cui, T. Lanard, S. Stevens et J. Trias de nous avoir signalé cette erreur.

2. Correction de la preuve de la proposition 4.1

Nous commençons par corriger la preuve de la proposition 4.1. Pour ce faire, les résultats des paragraphes 4.1 à 4.3 étant corrects, nous reprenons l'argument de la section 4 à la fin du paragraphe 4.3. Rappelons qu'il y a :

- une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale π de G, obtenue par induction compacte à partir d'une représentation ξ de N triviale sur son pro-p-sous-groupe distingué N^1,
- un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractère χ de G tel que l'espace $\mathrm{Ext}^1_G(\pi,\pi\chi)$ soit non nul ; en particulier, les représentations π et $\pi\chi$ ont pour caractère central un même caractère ω,
- un élément u de G normalisant N tel que l'espace $\mathrm{Ext}^1_N(\xi,\xi^u\chi)$ soit non nul.

Posons $\zeta = \xi^u\chi$ pour alléger les notations. Quitte à tordre π par un caractère non ramifié convenable de G, on peut supposer que son caractère central est trivial en une uniformisante ϖ_F de F fixée. Il en va donc de même de ξ, ζ et $\pi\chi$ (qui ont toutes ω pour caractère central).

Nous allons prouver qu'il existe une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière de N dont la réduction mod ℓ contienne ξ et ζ. Il ne restera alors plus qu'à reprendre l'argument de la section 4 à partir du paragraphe 4.7.

Si ξ et ζ sont isomorphes, c'est-à-dire si $u \in N$ et χ est trivial, la proposition 4.1 est prouvée. On peut donc supposer dans tout ce qui suit que ξ et ζ ne sont pas isomorphes.

On note W le $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-espace vectoriel sous-jacent à ξ, qui est aussi celui sous-jacent à ξ^u et ζ. Soit μ une extension non scindée de ξ par ζ. On peut la représenter sous la forme matricielle :

$$\mu(x) = \begin{pmatrix} \zeta(x) & \alpha(x) \\ & \xi(x) \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(W \oplus W), \quad x \in N, \tag{2.1}$$

où α est une application de N dans $\mathrm{End}(W)$. Le fait que μ soit un morphisme de groupes de N dans $\mathrm{GL}(W \oplus W)$ entraîne la relation :

$$\alpha(xy) = \zeta(x)\alpha(y) + \alpha(x)\xi(y), \quad x, y \in N. \tag{2.2}$$

Les représentations ξ et ζ étant triviales sur N^1, il suit de (2.2) que α induit, par restriction, un morphisme de N^1 dans $\mathrm{End}(W)$, c'est-à-dire d'un pro-p-groupe dans un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-espace vectoriel : α est donc nulle sur N^1. On en déduit que $\alpha(xy) = \alpha(x)$ pour $x \in N$, $y \in N^1$.

Prenons maintenant y dans $F^\times$, le centre de N. En comparant $\alpha(xy)$ et $\alpha(yx)$, et en utilisant le fait que ξ et ζ ont le même caractère central ω, on trouve :

$$\zeta(x)\alpha(y) = \alpha(y)\xi(x), \quad x \in N, \quad y \in F^\times,$$

c'est-à-dire que $\alpha(y) \in \mathrm{Hom}_N(\xi,\zeta)$ pour tout $y \in F^\times$. Les représentations ξ et ζ n'étant pas isomorphes, on en déduit que α est nulle sur $F^\times$.

Par conséquent, l'extension μ est triviale sur le sous-groupe $M = \langle N^1, \varpi_F \rangle$ et définit donc une extension non scindée de ξ par ζ dans la catégorie des représentations du groupe fini $\mathsf{H} = N/M$.

Notons respectivement $\overline{\xi}$ et $\overline{\zeta}$ les représentations ξ et ζ vues comme représentations de H. Raisonnant comme au lemme 4.12, la représentation $\overline{\zeta}$ est isomorphe à un sous-quotient irréductible de l'enveloppe projective de $\overline{\xi}$ dans la catégorie des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations de H. Raisonnant comme au lemme 4.13, on en déduit qu'il existe une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible de H dont la réduction mod ℓ contienne $\overline{\xi}$ et $\overline{\zeta}$. Par inflation de H à N, on obtient une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière de N dont la réduction mod ℓ contienne ξ et ζ, comme voulu.

3. Reformulation de la proposition 7.16

Nous reformulons maintenant l'énoncé de la proposition 7.16. Nous allons prouver le résultat suivant. Rappelons qu'on a fixé une uniformisante ϖ_F de F.

Proposition 3.1. — *Soit π une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation supercuspidale de G dont le caractère central soit trivial en ϖ_F.*

(1) *La représentation π admet une enveloppe projective Π dans la catégorie des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations de G admettant un caractère central trivial en ϖ_F.*
(2) *Les sous-quotients irréductibles de Π sont tous de la forme $\pi\nu^j$ avec $j \in \mathbb{Z}$ et, si ℓ ne divise pas $q(\pi) - 1$, on peut supposer que $j = 0$.*

Par l'équivalence de catégories établie à la section 7, il suffit de prouver la proposition dans le cas où π est le caractère trivial de $D^\times$, ce que nous supposons. (En effet, l'équivalence de catégories du lemme 7.12 envoie π sur un module sur lequel l'élément central u^s agit trivialement.)

On a donc $G = D^\times$; on note G' le quotient (compact) de G par le sous-groupe central $\langle \varpi_F \rangle$ engendré par ϖ_F et π' son caractère trivial. Rappelons qu'on a $q(\pi) = q^n$ dans ce cas.

Le quotient H de G' par le sous-groupe ouvert $U_D^{(\ell)}$ (le plus grand sous-groupe distingué du groupe U_D des unités de $D^\times$ dont l'indice soit une puissance de ℓ) est fini. Soit P l'enveloppe projective du caractère trivial de H dans la catégorie des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations de H. Elle définit par inflation une représentation de G' notée Π ; le sous-groupe $U_D^{(\ell)}$ étant de pro-ordre premier à ℓ, on vérifie, par exemple comme au lemme 4.6, que c'est une enveloppe projective de π' dans la catégorie des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations de G'.

Si τ est un sous-quotient irréductible de Π, il doit être trivial sur $U_D^{(\ell)}$; on peut donc le considérer comme une représentation irréductible de H. Raisonnant comme au lemme 4.13, il existe une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible de H dont la réduction mod ℓ contienne le caractère trivial et τ. Une telle $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation peut être vue comme une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière de G, notée δ. La réduction mod ℓ de δ contenant π, il suit de la proposition 3.6 qu'elle est égale à la somme directe $\pi \oplus \pi\nu \oplus \cdots \oplus \pi\nu^{a-1}$ pour un entier $a \geqslant 1$.

Supposons enfin que ℓ ne divise pas $q^n - 1$. On conclut la preuve de la proposition 3.1 en appliquant le corollaire 3.19.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Drevon et V. Sécherre, *Décomposition en blocs de la catégorie des représentations ℓ-modulaires lisses de longueur finie de* $\mathrm{GL}_m(D)$, Ann. Inst. Fourier **73** (2023), 2411-2468. `https://aif.centre-mersenne.org/articles/10.5802/aif.3572/`

Bastien DREVON
Lycée Edgar Quinet, 63 rue des Martyrs, 75009 Paris
bastien.drevon@ac-paris.fr

Vincent SÉCHERRE
Laboratoire de Mathématiques de Versailles, UVSQ, CNRS, Université Paris-Saclay, 78035 Versailles, France
vincent.secherre@uvsq.fr