Classification des représentations modulaires de $\mathrm{GL}_n(q)$ en caractéristique non naturelle

Alberto Mínguez and Vincent Sécherre

Abstract. Let k be a finite field with $q = p^m$ elements, $m \geqslant 1$, let R be an algebraically closed field of characteristic $\ell \neq p$ and let $n \geqslant 1$. We review the classification of the irreducible R-representations of $\mathrm{GL}_n(k)$ due to R. Dipper and G. James, by adopting an axiomatic formulation.

1. Introduction

Soit k un corps fini de caractéristique p et de cardinal q. Pour $n \geqslant 1$, on note $\mathrm{GL}_n(q)$ le groupe fini formé des matrices inversibles de taille $n \times n$ à coefficients dans k. Cet article porte sur le problème de la classification des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(q)$ à coefficients dans un corps algébriquement clos R de caractéristique différente de p.

Lorsque R est de caractéristique nulle, la situation est bien connue et la classification des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(q)$ peut être exprimée de différentes façons ([**1, 20**]). En particulier, elle peut être exprimée en termes de fonctions de partition (définition 2.12) et l'on obtient alors une classification en fonction des représentations irréductibles cuspidales de $\mathrm{GL}_f(q)$ pour tous les $f \leqslant n$, s'appuyant sur la notion de support cuspidal (définition 2.3). Ici, une fonction de partition est une fonction Λ à support fini, associant à toute représentation irréductible cuspidale σ de $\mathrm{GL}_f(q)$, avec $f = f(\sigma) \geqslant 1$, une partition $\Lambda(\sigma)$ d'un entier $n(\sigma) \geqslant 0$. Une telle fonction de partition correspond à une représentation irréductible de $\mathrm{GL}_n(q)$ si et seulement si :

$$\sum n(\sigma) f(\sigma) = n,$$

la somme portant sur toutes les représentations irréductibles cuspidales σ possibles. On renvoie le lecteur, par exemple, à [**15**, §4].

Lorsque R est de caractéristique ℓ non nulle différente de p, la classification des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(q)$ a été effectuée dans les années 90 par Dipper et James ([**2, 12, 7**]). Dans cette situation, on voit apparaître une différence entre les notions de représentation cuspidale et supercuspidale (paragraphe 2.3), et par conséquent entre celles de support cuspidal et supercuspidal (définition 2.6). Dans le langage des fonctions de partition, on obtient ainsi deux formulations possibles :

(1) une classification en termes de fonctions de partition *régulières* s'appuyant sur le support cuspidal (voir [**7**] dans le langage des pieds spéciaux) ;
(2) une classification en termes de fonctions de partition *supercuspidales* s'appuyant sur le support supercuspidal (voir [**12**] ou [**7**] dans le langage des têtes).

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 20G40, 20C33, 20C20.

Signalons que ces classifications ne sont pas directement formulées dans le langage des supports cuspidal et supercuspidal ; un travail de traduction a été fait dans [**17**].

Un objet très important dans les travaux de R. Dipper et G. James est l'algèbre de Hecke. Si σ est une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_f(q)$, alors, pour $n \geqslant 1$, l'algèbre $\mathcal{H}(\sigma, n)$ des endomorphismes de la représentation :

$$\sigma^{\times n} = \sigma \times \cdots \times \sigma$$

où σ apparaît n fois (et où $\times$ désigne l'induction parabolique ; voir le paragraphe 2.1) est isomorphe à l'algèbre de Hecke de type A et de paramètre q^f. Pour faire le lien avec les représentations du groupe $\mathrm{GL}_{nf}(q)$, et pour pallier le défaut de projectivité des représentations modulaires (plus précisément, la représentation $\sigma^{\times n}$ n'est pas un objet projectif dès que ℓ divise $q^f - 1$), Dipper a introduit la notion de représentation presque projective ([**3**]) et a prouvé que le foncteur :

$$\pi \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_{nf}(q)}(\sigma^{\times n}, \pi) \tag{1.1}$$

induit une bijection entre les classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de support cuspidal $n \cdot \sigma$ et les classes d'isomorphisme de modules à droite simples sur $\mathcal{H}(\sigma, n)$.

Dans cet article, nous proposons une formulation axiomatique de la classification des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(q)$, ne reposant que sur quelques propriétés fondamentales des représentations cuspidales (voir les théorèmes 2.4 et 2.9). Nous supposons qu'à toute représentation irréductible cuspidale σ et tout entier $n \geqslant 1$ correspondent deux représentations irréductibles $\langle \sigma, n \rangle$ et $\mathrm{sp}(\sigma, n)$ de $\mathrm{GL}_{nf(\sigma)}(q)$ satisfaisant à quatre conditions **a1** à **a4** (voir paragraphe 3.1). A partir des théorèmes 2.4 et 2.9 uniquement, nous prouvons que ces données permettent de définir une application surjective :

$$\Lambda \mapsto \langle \Lambda \rangle$$

de l'ensemble des fonctions de partition sur l'ensemble des représentations irréductibles, induisant deux classifications, l'une par les fonctions de partition régulières et l'autre par les fonctions de partition supercuspidales (voir le théorème 3.2). Les classifications de Dipper et James entrent dans ce cadre et correspondent aux choix :

$$\langle \sigma, n \rangle = z(\sigma, n), \quad \mathrm{sp}(\sigma, n) = \mathrm{st}(\sigma, n),$$

où $z(\sigma, n)$ correspond via (1.1) au caractère trivial de $\mathcal{H}(\sigma, n)$, tandis que $\mathrm{st}(\sigma, n)$ désigne l'unique sous-quotient irréductible non dégénéré de $\sigma^{\times n}$ au sens de la théorie de Gelfand-Graev (voir par exemple [**19**, D.2]).

Notons $l(\sigma, n)$ la représentation irréductible correspondant via (1.1) au caractère signe de $\mathcal{H}(\sigma, n)$. Faisant maintenant le choix $\langle \sigma, n \rangle = l(\sigma, n)$, on peut naturellement se demander s'il y a un choix pour $\mathrm{sp}(\sigma, n)$ qui satisfassent aux conditions **a1** à **a4**, permettant d'obtenir une classification duale de celle de Dipper et James. Nous montrons dans la section 6 qu'un tel choix n'existe pas en général.

Qu'il soit bien clair que nous ne proposons pas une nouvelle preuve des classifications de Dipper et de James. Nous en proposons une formulation axiomatique s'appuyant sur les travaux de [**12**] et [**7**] pourvu que l'on sache exhiber des représentations satisfaisant aux conditions **a1** à **a4**.

Terminons cette introduction en décrivant brièvement le travail effectué dans chaque section. Dans la section 2, nous introduisons les foncteurs d'induction et de restriction paraboliques, puis les représentations cuspidales et supercuspidales. Utilisant les travaux de Dipper et de James, nous classons les premières en fonction des secondes : les théorèmes 2.4 et 2.9 sont utilisés dans cet article comme une boîte noire sur laquelle s'appuient tous nos résultats. Dans la section 3, nous introduisons deux fonctions $(\sigma, n) \mapsto \langle \sigma, n \rangle$ et $\mathfrak{n} \mapsto \mathrm{sp}(\mathfrak{n})$. Nous montrons que si deux telles fonctions existent et satisfont à quatre conditions, notées **a1**, ..., **a4**, alors on a un théorème de classification des R-représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(q)$ (théorème 3.2). Dans la section 4, on définit les représentations $z(\sigma, n)$ et $l(\sigma, n)$ qui satisfont à la condition **a2**. Dans la section 5, on montre comment inscrire les classifications de Dipper et de James dans le cadre du théorème 3.2. Dans la section 6, on montre par deux exemples qu'il n'est pas possible, en général, d'obtenir une classification duale en choisissant $\langle\sigma, n\rangle = l(\sigma, n)$.

Notations et conventions

1. On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers relatifs et $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes.

2. Pour un ensemble X, on note $\mathbf{Z}(\mathrm{X})$ le groupe abélien libre de base X constitué des applications de X dans $\mathbf{Z}$ à support fini et $\mathbf{N}(\mathrm{X})$ le sous-ensemble de $\mathbf{Z}(\mathrm{X})$ constitué des applications à valeurs dans $\mathbf{N}$. Si $f, g \in \mathbf{Z}(\mathrm{X})$, on note $f \leqslant g$ si $g - f \in \mathbf{N}(\mathrm{X})$, ce qui définit une relation d'ordre partiel sur $\mathbf{Z}(\mathrm{X})$.

3. Une *composition* d'un entier $n \geqslant 0$ est une famille finie d'entiers $\geqslant 0$ de somme n. Une *partition* de n est une composition décroissante de n. Pour un entier $e \geqslant 2$, une partition est dite *e-régulière* si chacun des n_i apparaît avec une multiplicité strictement inférieure à e.

4. Soient $\lambda = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$ et $\mu = (m_1, m_2, \ldots, m_s)$ des partitions de n, m respectivement. La partition formée des entiers $n_1, n_2, \ldots, n_r, m_1, m_2, \ldots, m_s$ rangés dans l'ordre décroissant est une partition de $n + m$ que l'on note $\lambda + \mu$. On définit par récurrence la somme $\lambda + \cdots + \lambda$ d'un nombre $a \geqslant 0$ de copies de λ, que l'on note $a \cdot \lambda$. Si $m = n$, on écrit $\mu \trianglelefteqslant \lambda$ si :

$$\sum_{i=1}^{k} m_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} n_i$$

pour tout $k \geqslant 1$. Ceci définit une relation d'ordre sur l'ensemble des partitions de n. Pour cette relation, la plus grande partition de n est (n), tandis que la plus petite est $(1, \ldots, 1)$.

5. Dans tout cet article, p est un nombre premier et R un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p. On fixe une puissance q de p et un corps fini k à q éléments.

6. Une R-*représentation* d'un groupe G est la donnée d'un R-espace vectoriel V et d'un morphisme de G dans GL(V). Un R-*caractère* de G est un morphisme de groupes de G dans $\mathrm{R}^\times$. Si aucune confusion n'est à craindre, on écrira *caractère* et *représentation* plutôt que R-caractère et R-représentation.

7. Pour tout $n \geqslant 1$, on note $\mathrm{GL}_n(q)$ le groupe des matrices de taille $n \times n$ inversibles à coefficients dans le corps k. Il est commode de noter $\mathrm{GL}_0(q)$ le groupe trivial. On note $\mathrm{Irr} = \mathrm{Irr}(\mathrm{R})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(q)$ pour tous les $n \geqslant 0$, et $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathrm{R})$ le $\mathbf{Z}$-module libre de base Irr.

8. Si σ est une représentation de $\mathrm{GL}_n(q)$, $n \geqslant 1$, on note $e(\sigma)$ le plus petit entier $k \geqslant 2$ tel que :

$$1 + q^n + \cdots + q^{n(k-1)} = 0$$

dans R. (Si R est de caractéristique nulle, on convient que $e(\sigma) = +\infty$.)

2. Le groupe GL_n sur un corps fini

Dans cette section on introduit les foncteurs d'induction et restriction paraboliques. On définit les représentations cuspidales et supercuspidales, puis on énonce la classification des premières en fonction des secondes. On en déduit l'unicité des supports cuspidal et supercuspidal pour les représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(q)$, $n \geqslant 1$.

2.1. Foncteurs d'induction et restriction paraboliques. On fixe un entier $n \geqslant 0$. Si $\alpha = (n_1, \dots, n_r)$ est une composition de n, on note M_α le sous-groupe de Levi standard de $\mathrm{GL}_n(q)$ formé des matrices diagonales par blocs de tailles $n_1, \dots, n_r$ respectivement, que l'on identifie naturellement au produit $\mathrm{GL}_{n_1}(q) \times \dots \times \mathrm{GL}_{n_r}(q)$. On note P_α le sous-groupe parabolique de $\mathrm{GL}_n(q)$ de facteur de Levi M_α formé des matrices triangulaires supérieures par blocs de tailles $n_1, \dots, n_r$ respectivement.

Notons $\boldsymbol{r}_\alpha$ le foncteur de restriction parabolique de $\mathrm{GL}_n(q)$ à M_α le long de P_α, c'est-à-dire le foncteur des invariants par le radical unipotent de P_α. Notons aussi $\boldsymbol{i}_\alpha$ le foncteur d'induction parabolique de M_α à $\mathrm{GL}_n(q)$ le long de P_α, défini comme l'adjoint à gauche de $\boldsymbol{r}_\alpha$. La caractéristique de R étant différente de p, ce sont des foncteurs exacts, et $\boldsymbol{i}_\alpha$ est aussi adjoint à droite de $\boldsymbol{r}_\alpha$. Si, pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, on a une représentation π_i de $\mathrm{GL}_{n_i}(q)$, on pose :

$$\pi_1 \times \dots \times \pi_r = \boldsymbol{i}_\alpha(\pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_r). \tag{2.1}$$

Si π est une représentation de longueur finie de $\mathrm{GL}_n(q)$ pour un $n \geqslant 0$, on note $[\pi]$ son image dans $\mathcal{R}$ et $\deg(\pi) = n$ son degré. L'application degré et la formule (2.1) font de $\mathcal{R}$ une $\mathbf{Z}$-algèbre associative graduée.

D'après [**10**], l'induction parabolique ne dépend pas du sous-groupe parabolique choisi quand le sous-groupe de Levi est fixé. Ceci implique que la $\mathbf{Z}$-algèbre $\mathcal{R}$ est commutative.

Lemme 2.1. *Soit $\alpha = (n_1, \dots, n_r)$ une composition de n, et soit π_i une représentation irréductible de $\mathrm{GL}_{n_i}(q)$ pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$. Supposons que :*

$$\pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_r \textit{ apparaît avec multiplicité } 1 \textit{ dans } [\boldsymbol{r}_\alpha(\pi_1 \times \dots \times \pi_r)]. \tag{2.2}$$

Alors $\pi_1 \times \dots \times \pi_r$ est irréductible.

Preuve. Si σ est une sous-représentation irréductible de $\pi = \pi_1 \times \dots \times \pi_r$, alors par réciprocité de Frobenius on a :

$$[\pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_r] \leqslant [\boldsymbol{r}_\alpha(\sigma)]. \tag{2.3}$$

Par hypothèse, et comme $\boldsymbol{r}_\alpha$ est exact, on déduit que π a une unique sous-représentation irréductible (et elle apparaît avec multiplicité 1 dans l'induite par (2.3)). De même, π a un unique quotient irréductible, qui satisfait aussi à (2.3). On conclut que π est irréductible. □

2.2. Décomposition de Mackey. Soient deux compositions $\alpha = (n_1, \dots, n_r)$ et $\beta = (m_1, \dots, m_s)$ d'un entier $n \geqslant 1$. Soit $\mathscr{M}^{\alpha,\beta}$ l'ensemble des matrices $\mathrm{B} = (b_{i,j})$ composées d'entiers positifs tels que :

$$\sum_{j=1}^{s} b_{i,j} = n_i, \quad i \in \{1, \dots, r\}, \quad \sum_{i=1}^{r} b_{i,j} = m_j, \quad j \in \{1, \dots, s\}.$$

Fixons $\mathrm{B} \in \mathscr{M}^{\alpha,\beta}$ et notons $\alpha_i = (b_{i,1}, \dots, b_{i,s})$ et $\beta_j = (b_{1,j}, \dots, b_{r,j})$, qui sont des compositions de n_i et de m_j respectivement. Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, soit π_i une représentation irréductible de $\mathrm{GL}_{m_i}(q)$. La semisimplification de $\boldsymbol{r}_{\alpha_i}(\pi_i)$ s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{r_i} \sigma_{i,1}^{(k)} \otimes \cdots \otimes \sigma_{i,s}^{(k)}, \quad \sigma_{i,j}^{(k)} \text{ irréductible de degré } b_{i,j}, \quad r_i \geqslant 1.$$

Pour tout $j \in \{1, \ldots, s\}$ et toute famille d'entiers $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ tels que $1 \leqslant k_i \leqslant r_i$, on définit une représentation :

$$\sigma_j^{(\boldsymbol{k})} = \sigma_{1,j}^{(k_1)} \times \cdots \times \sigma_{r,j}^{(k_r)}$$

de degré n_j. Alors on a :

$$[\boldsymbol{r}_\beta(\pi_1 \times \cdots \times \pi_r)] = \sum_{\mathrm{B}} \sum_{\boldsymbol{k}} \sigma_1^{(\boldsymbol{k})} \otimes \cdots \otimes \sigma_s^{(\boldsymbol{k})} \tag{2.4}$$

(voir [**5**, 1.4]).

2.3. Unicité du support cuspidal. Une représentation irréductible de degré $n \geqslant 1$ est *cuspidale* si elle n'apparaît comme sous-représentation d'aucune induite de la forme (2.1) avec $r \geqslant 2$, et elle est dite *supercuspidale* si elle n'apparaît comme sous-quotient d'aucune induite de la forme (2.1) avec $\pi_1, \ldots, \pi_r$ irréductibles et $r \geqslant 2$.

On note $\mathcal{C}$ le sous-ensemble de Irr formé des classes de représentations irréductibles cuspidales, et $\mathcal{S}$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ formé des classes de représentations supercuspidales.

Théorème 2.2. *Pour toute représentation irréductible $\pi \in \mathrm{Irr}$, il y a des représentations cuspidales $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in \mathcal{C}$ telles que π soit isomorphe à une sous-représentation de $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_r$, et la somme $\sigma_1 + \cdots + \sigma_r \in \mathbf{N}(\mathcal{C})$ est unique.*

Preuve. Prouvons d'abord l'existence par récurrence sur le degré de π. Si π est de degré 1, alors π est cuspidale. Supposons donc que $\deg(\pi) = n \geqslant 2$. Si π est une représentation cuspidale, le résultat est immédiat. Sinon, il y a des représentations irréductibles $\pi_1, \ldots, \pi_s$, $s \geqslant 2$, telles que π soit une sous-représentation de $\pi_1 \times \cdots \times \pi_s$. Par hypothèse de récurrence, le résultat est vrai pour $\pi_1, \ldots, \pi_s$. On en déduit le résultat pour π par transitivité du foncteur d'induction.

Prouvons maintenant l'unicité. Soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ et $\rho_1, \ldots, \rho_s$ des représentations cuspidales irréductibles telles que π soit isomorphe à une sous-représentation de $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_r$ et $\rho_1 \times \cdots \times \rho_s$. Par adjonction, $\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_r$ est un quotient de $\boldsymbol{r}_\alpha(\pi)$; c'est donc, par exactitude du foncteur $\boldsymbol{r}_\alpha$, un sous-quotient de $\boldsymbol{r}_\alpha(\rho_1 \times \cdots \times \rho_s)$. On déduit le résultat de la décomposition de Mackey de cette induite. □

Définition 2.3. La somme $\sigma_1 + \cdots + \sigma_r \in \mathbf{N}(\mathcal{C})$, notée $\mathrm{cusp}(\pi)$, s'appelle le *support cuspidal* de π.

2.4. Classification des représentations cuspidales en fonction des supercuspidales. On renvoie à [**17**, III.1] et [**14**, §3.2] pour la notion de représentation non dégénérée de $\mathrm{GL}_n(q)$. Soit $\mathfrak{n} = \sigma_1 + \cdots + \sigma_r \in \mathbf{N}(\mathcal{C})$ un support cuspidal. On note :

$$\mathrm{st}(\mathfrak{n}) \tag{2.5}$$

l'unique sous-quotient irréductible non dégénéré de $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_r$, dans laquelle il est de multiplicité 1. Pour tous $\sigma \in \mathcal{C}$ et $u \geqslant 0$, posons $\mathrm{st}_u(\sigma) = \mathrm{st}(e(\sigma)\ell^u \cdot \sigma)$, où $e(\sigma)$ est défini au paragraphe 8 du chapitre des notations. Le résultat suivant donne une classification de $\mathcal{C}$ en fonction de $\mathcal{S}$.

Théorème 2.4 ([**17**, III.2.5]). *Soit $\mathfrak{n} = \sigma_1 + \cdots + \sigma_r \in \mathrm{N}(\mathcal{S})$.*

(1) *La représentation* $\mathrm{st}(\mathfrak{n})$ *est cuspidale si et seulement si ou bien* $r = 1$*, ou bien il existe une représentation supercuspidale* $\sigma \in \mathcal{S}$ *et un entier* $u \geqslant 0$ *tels que* $\sigma_1 = \cdots = \sigma_r = \sigma$ *et* $r = e(\sigma)\ell^u$*.*

(2) *L'application :*

$$(\sigma, u) \mapsto \mathrm{st}_u(\sigma)$$

définit une bijection entre $\mathcal{S}\times\mathbf{N}$ *et l'ensemble des classes de représentations irréductibles cuspidales non supercuspidales.*

Étant donnée $\sigma \in \mathcal{C}$, remarquons que $\mathrm{st}_v(\mathrm{st}_u(\sigma)) = \mathrm{st}_{u+v+1}(\sigma)$ pour $u, v \geqslant 0$.

2.5. Unicité du support supercuspidal. Le but de ce paragraphe est de prouver le théorème suivant (voir [**9**, Theorem 4.2] pour une autre preuve).

Théorème 2.5. *Soient* $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ *et* $\rho_1, \ldots, \rho_m$ *des représentations irréductibles supercuspidales. Alors* $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n$ *et* $\rho_1 \times \cdots \times \rho_m$ *ont un sous-quotient irréductible en commun si et seulement si* $m = n$ *et :*

$$[\sigma_1] + \cdots + [\sigma_n] = [\rho_1] + \cdots + [\rho_m]. \tag{2.6}$$

Preuve. Si (2.6) est vérifié, alors $n = m$ et, $\mathcal{R}$ étant une algèbre commutative d'après le paragraphe 2.1, les représentations $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n$ et $\rho_1 \times \cdots \times \rho_m$ ont les mêmes sous-quotients irréductibles. Pour prouver la réciproque, fixons un sous-quotient irréductible π commun à ces deux induites. Si π est supercuspidale, alors $n = m = 1$ et le résultat est immédiat.

Supposons que π est cuspidale mais pas supercuspidale. D'un côté, comme π est non dégénérée, elle est égale à $\mathrm{st}(\sigma_1 + \cdots + \sigma_n)$. D'après le théorème 2.4, on a donc $\sigma_1 = \cdots = \sigma_n$ et $n = e(\sigma)\ell^u$ pour un certain $u \geqslant 0$. En outre, σ_1 et u sont uniquement déterminés par π.

On traite maintenant le cas général. Soit α une composition de $d = \deg(\pi)$ telle que $\boldsymbol{r}_\alpha(\pi)$ soit cuspidale, et écrivons $\mathrm{cusp}(\pi) = [\tau_1] + \cdots + [\tau_r]$. Par exactitude du foncteur $\boldsymbol{r}_\alpha$, la représentation $\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_r$ est un sous-quotient à la fois de $\boldsymbol{r}_\alpha(\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n)$ et de $\boldsymbol{r}_\alpha(\rho_1 \times \cdots \times \rho_m)$. Grâce à la décomposition de Mackey (2.4), et le résultat étant vrai pour $\tau_1, \ldots, \tau_r$, on déduit alors (2.6). □

Définition 2.6. L'unique somme $\sigma_1 + \cdots + \sigma_n \in \mathbf{N}(\mathcal{S})$ telle que π soit un sous-quotient de $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n$ est notée $\mathrm{scusp}(\pi)$ et s'appelle le *support supercuspidal* de π.

Le corollaire suivant est une conséquence de la définition d'une représentation non dégénérée et du théorème 2.5.

Corollaire 2.7. *Deux représentations non dégénérées sont isomorphes si et seulement si elles ont le même support supercuspidal.*

On dispose aussi de la proposition suivante.

Proposition 2.8. *Soient* $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in \mathcal{S}$ *des représentations supercuspidales non isomorphes deux à deux, et soient* $n_1, \ldots, n_r \geqslant 1$ *des entiers. Pour chaque entier* $i \in \{1, \ldots, r\}$*, on note* Y_i *l'ensemble des classes de représentations de support supercuspidal* $n_i \cdot \sigma_i$*, et* Y_0 *l'ensemble des classes de représentations de support supercuspidal* $n_1 \cdot \sigma_1 + \cdots + n_r \cdot \sigma_r$*. Alors l'application :*

$$(\pi_1, \ldots, \pi_r) \mapsto \pi_1 \times \cdots \times \pi_r \tag{2.7}$$

est une bijection de $\mathrm{Y}_1 \times \cdots \times \mathrm{Y}_r$ *vers* Y_0*.*

Preuve. Pour chaque entier $i \in \{1, \ldots, r\}$, soit une représentation irréductible $\pi_i \in \mathrm{Y}_i$. Posons $\alpha = (n_1 \deg(\sigma_1), \ldots, n_r \deg(\sigma_r))$ et $\pi = \pi_1 \times \cdots \times \pi_r$. Calculons $\boldsymbol{r}_\alpha(\pi)$ grâce à la décomposition de Mackey. Par hypothèse, $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r$ est le seul sous-quotient irréductible de $\boldsymbol{r}_\alpha(\pi)$ de la forme $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_r$ avec $\rho_i \in \mathrm{Y}_i$. On déduit :

(1) $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r$ apparaît avec multiplicité 1 dans $\boldsymbol{r}_\alpha(\pi)$. Alors, d'après le lemme 2.1, π est irréductible donc l'application (2.7) est bien définie.

(2) Si pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$ on a $\tau_i \in \mathrm{Y}_i$, alors :

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Hom}(\tau_1 \times \cdots \times \tau_r, \pi)) &= \dim(\mathrm{Hom}(\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_r, \boldsymbol{r}_\alpha(\pi))) \\ &\leqslant \dim(\mathrm{Hom}(\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_r, \pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r)) \end{aligned}$$

qui est nul sauf si $\tau_i = \pi_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$. Ainsi l'application (2.7) est injective.

Prouvons la surjectivité. Soit $\pi \in \mathrm{Y}_0$, qui est donc un sous-quotient de l'induite $\sigma_1^{\times n_1} \times \cdots \times \sigma_r^{\times n_r}$ par définition. Comme elle est de longueur finie, il existe, pour tout entier $i \in \{1, \ldots, r\}$, un sous-quotient irréductible π_i de $\sigma_i^{\times n_i}$ telle que π soit un sous-quotient irréductible de $\pi_1 \times \cdots \times \pi_r$. Le résultat découle alors du fait que $\pi_1 \times \cdots \times \pi_r$, d'après ce qu'on vient de montrer, est irréductible. □

On verra dans la section 4 (proposition 4.3) une version "cuspidale" de la proposition 2.8.

2.6. Réduction modulo ℓ. Soit ℓ un nombre premier différent de p. On note $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ une clôture algébrique du corps $\mathbf{Q}_\ell$ des nombres ℓ-adiques et $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ son corps résiduel. Notons :

$$\mathbf{r}_\ell : \mathcal{R}(\overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to \mathcal{R}(\overline{\mathbf{F}}_\ell)$$

le morphisme de réduction mod ℓ (voir par exemple [**16**, §15.2] pour une définition). On montrera au corollaire 5.10 que c'est un homomorphisme surjectif de $\mathbf{Z}$-algèbres.

On appellera *relèvement* d'une $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-représentation irréductible π de $\mathrm{GL}_n(q)$ une $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentation $\tilde{\pi}$ de $\mathrm{GL}_n(q)$ telle que $[\pi] = \mathbf{r}_\ell(\tilde{\pi})$. Si un tel relèvement existe, on dit que π se relève.

Fixons une clôture algébrique $\overline{k}$ de k. D'après Green [**8**], on a une correspondance surjective :

$$x \mapsto \mathbf{g}(x) \tag{2.8}$$

associant à tout élément $x \in \overline{k}^\times$ de degré n sur k une $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale de degré n ; l'ensemble des antécédents de $\mathbf{g}(x)$ par (2.8) est l'orbite de x sous $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$.

Étant donné $x \in \overline{k}^\times$, il existe un unique $y \in \overline{k}^\times$ d'ordre premier à ℓ, appelé la partie ℓ-régulière de x, tel que xy^{-1} soit d'ordre une puissance de ℓ.

Théorème 2.9 ([**2**, Theorem 3.5] et [**7, 12**]). *Soit un entier $n \geqslant 1$.*

(1) *Pour tout $x \in \overline{k}^\times$ de degré n sur k, la $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-représentation $\mathbf{r}_\ell(\mathbf{g}(x))$ est irréductible et cuspidale, et ne dépend que de la partie ℓ-régulière y de x.*

(2) *On a une correspondance surjective :*

$$y \mapsto \mathbf{j}(y) = \mathbf{r}_\ell(\mathbf{g}(x)) \tag{2.9}$$

entre l'ensemble des $y \in \overline{k}^\times$ qui sont des parties ℓ-régulières d'éléments $x \in \overline{k}^\times$ de degré n sur k et l'ensemble des classes de $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-représentations irréductibles cuspidales de $\mathrm{GL}_n(k)$; l'ensemble des antécédents de $\mathbf{j}(y)$ est l'orbite de y sous $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$.

(3) *La $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-représentation $\mathbf{j}(y)$ est supercuspidale si et seulement si y est de degré n sur k.*

Remarque 2.10. On déduit de (1) et (2) que toute $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-représentation cuspidale se relève.

2.7. Fonctions de partition. Une *fonction de partition* est une application Λ définie sur $\mathcal{C}$ associant à toute représentation cuspidale $\sigma \in \mathcal{C}$ une partition $\Lambda(\sigma)$ d'un entier $n(\sigma) \geqslant 0$. On note $\mathscr{L}(\mathcal{C})$ l'ensemble des fonctions de partitions. Étant donnée $\Lambda \in \mathscr{L}(\mathcal{C})$, on pose :

$$\begin{aligned} \mathrm{supp}(\Lambda) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{C}} n(\sigma) \cdot \sigma, \\ \deg(\Lambda) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{C}} n(\sigma) \cdot \deg(\sigma), \end{aligned}$$

respectivement éléments de $\mathbf{N}(\mathcal{C})$ et $\mathbf{N}$ et appelés le *support* et le *degré* de Λ.

Remarque 2.11. Étant donné $\mathfrak{n} \in \mathbf{N}(\mathcal{C})$, on lui associe la fonction de partition, que par abus de notation on notera toujours $\mathfrak{n}$, qui à toute représentation cuspidale $\sigma \in \mathcal{C}$ associe la partition $(1, \dots, 1)$ de la multiplicité $n(\sigma)$ de σ dans $\mathfrak{n}$.

Définition 2.12. Une fonction de partition $\Lambda \in \mathscr{L}(\mathcal{C})$ est dite *supercuspidale* si son support est dans $\mathbf{N}(\mathcal{S})$, et elle est dite *régulière* si, pour tout $\sigma \in \mathcal{C}$, la partition $\Lambda(\sigma)$ est $e(\sigma)$-régulière (au sens du paragraphe 3 du chapitre des notations).

On note $\mathscr{L}(\mathcal{C})^{\mathrm{sc}}$ l'ensemble des fonctions de partition supercuspidales et $\mathscr{L}(\mathcal{C})^{\mathrm{reg}}$ l'ensemble des fonctions de partition régulières.

Remarque 2.13. Le théorème 2.9 permet d'identifier les fonctions de partition supercuspidales (resp. régulières) aux *indices* qui, dans le langage de R. Dipper et G. James, sont appelés des *têtes* (resp. des *pieds spéciaux*). Voir [**7**, §2].

Définition 2.14. Fixons un entier $e \geqslant 2$.

(1) Soit $n \geqslant 0$ un entier. On a une unique décomposition :

$$n = n_{-1} + en_0 + e\ell n_1 + e\ell^2 n_2 + \dots \tag{2.10}$$

où les n_i sont des entiers tels que $0 \leqslant n_{-1} < e$ et $0 \leqslant n_i < \ell$ pour tout $i \geqslant 0$.

(2) Soit λ une partition de n. On a une unique décomposition :

$$\lambda = \lambda_{-1} + e \cdot \lambda_0 + e\ell \cdot \lambda_1 + e\ell^2 \cdot \lambda_2 + \dots \tag{2.11}$$

où λ_{-1} est une partition e-régulière et où $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ sont des partitions ℓ-régulières.

Les décompositions (2.10) et (2.11) sont appelées *développements* (e, ℓ)*-adiques* de n et λ.

Pour tout $\Lambda \in \mathscr{L}(\mathcal{C})$, on note Λ_{sc} la fonction de partition supercuspidale définie par :

$$\Lambda_{\mathrm{sc}}(\sigma) = \Lambda(\sigma) + \sum_{i \geqslant 0} e(\sigma)\ell^i \cdot \Lambda(\mathrm{st}_i(\sigma))$$

et on note Λ_{reg} l'unique fonction de partition régulière telle que, pour tout $\sigma \in \mathcal{C}$, le développement $(e(\sigma), \ell)$-adique de $\Lambda(\sigma)$ soit :

$$\Lambda(\sigma) = \Lambda_{\mathrm{reg}}(\sigma) + e(\sigma) \cdot \Lambda_{\mathrm{reg}}(\mathrm{st}_0(\sigma)) + e(\sigma)\ell \cdot \Lambda_{\mathrm{reg}}(\mathrm{st}_1(\sigma)) + e(\sigma)\ell^2 \cdot \Lambda_{\mathrm{reg}}(\mathrm{st}_2(\sigma)) + \dots$$

Remarque 2.15. Soit $\mathfrak{n} \in \mathbf{N}(\mathcal{C})$ un support cuspidal. Alors $\mathfrak{n}_{\mathrm{sc}}$ est le support supercuspidal de toute représentation qui a support cuspidal $\mathfrak{n}$.

Le lemme suivant est classique (voir [**7**, Theorem 2.13] par exemple).

Lemme 2.16. *Les applications* $\Lambda \mapsto \Lambda_{\mathrm{sc}}$ *et* $\Lambda \mapsto \Lambda_{\mathrm{reg}}$ *induisent des bijections réciproques l'une de l'autre entre* $\mathscr{L}(\mathcal{C})^{\mathrm{sc}}$ *et* $\mathscr{L}(\mathcal{C})^{\mathrm{reg}}$.

On en déduit le résultat suivant.

PROPOSITION 2.17. *Soit $n \geqslant 1$. Les ensembles finis suivants :*

(1) *l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(q)$;*
(2) *l'ensemble des fonctions de partitions supercuspidales de degré n ;*
(3) *l'ensemble des fonctions de partitions régulières de degré n ;*

ont le même cardinal.

PREUVE. La bijection entre 2 et 3 est explicitée dans le lemme 2.16. Pour la comparaison entre 1 et 2, voir [**17**, III.2.3]. □

Si $\lambda = (n_1, n_2, \dots)$ est une partition, on note $l(\lambda) = r$ sa *longueur*, c'est-à-dire son nombre de termes non nuls, et on pose :

$$\lambda^- = (n_1 - 1, \dots, n_r - 1),$$

dont la longueur est le plus grand entier $i \in \{1, \dots, r\}$ tel que $n_i \geqslant 2$. Etant donnée une fonction de partition Λ, on note Λ^- la fonction de partition $\sigma \mapsto \Lambda(\sigma)^-$, et on pose :

$$\Lambda^{(1)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{C}} l(\Lambda(\sigma)) \cdot \sigma \in \mathbf{N}(\mathcal{C})$$

qu'on peut voir comme un support cuspidal ou une fonction de partition (remarque 2.11).

REMARQUE 2.18. On a $\Lambda^{(1)} = \Lambda$ si et seulement si $\Lambda^- = 0$.

On définit $\Lambda^{(k)}$ pour tout $k \geqslant 1$ par récurrence, en posant :

$$\Lambda^{(k+1)} : \sigma \mapsto \Lambda(\sigma)^{(k+1)} = (\Lambda(\sigma)^-)^{(k)},$$

qu'on peut voir comme un support cuspidal ou une fonction de partition.

REMARQUE 2.19. (1) Étant donné que $(\Lambda(\sigma)^-)_{\mathrm{sc}} = (\Lambda(\sigma)_{\mathrm{sc}})^-$ pour toute représentation $\sigma \in \mathcal{C}$, on a l'égalité $(\Lambda^{(k)})_{\mathrm{sc}} = (\Lambda_{\mathrm{sc}})^{(k)}$ pour tout $k \geqslant 1$.
(2) L'application $\Lambda \mapsto (\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, \dots)$ est injective.

On introduit maintenant une relation $\vdash$ sur $\mathscr{L}(\mathcal{C})$. Que le lecteur prenne garde au fait que ce n'est pas une relation d'ordre.

DÉFINITION 2.20. (1) Soient des entiers $m \leqslant n$. Étant donné une partition $\lambda = (n_1, n_2, \dots, n_r)$ de n et une partition μ de m, on écrit $\lambda \vdash \mu$ si μ est la partition associée à une composition de la forme $(m_1, m_2, \dots, m_s)$, où pour tout $1 \leqslant i \leqslant s$ on a $m_i \in \{n_i, n_i - 1\}$ et pour tout $s < i \leqslant r$ on a $n_i = 1$. On écrit alors $\delta(\lambda, \mu)$ la partition $(1, \dots, 1)$ de $n - m$.
(2) Soient des fonctions de partition $\Lambda, \Sigma \in \mathscr{L}(\mathcal{C})$. On écrit $\Lambda \vdash \Sigma$ si on a $\Lambda(\sigma) \vdash \Sigma(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \mathcal{C}$. On note alors $\delta(\Lambda, \Sigma) \in \mathscr{L}(\mathcal{C})$ la fonction de partition définie par $\delta(\Lambda, \Sigma)(\sigma) = \delta(\Lambda(\sigma), \Sigma(\sigma))$ pour tout $\sigma \in \mathcal{C}$.

REMARQUE 2.21. Pour tout $\Lambda \in \mathscr{L}(\mathcal{C})$, on a $\Lambda \vdash \Lambda^-$ et $\delta(\Lambda, \Lambda^-) = \Lambda^{(1)}$.

3. Classification axiomatique

Nous donnons ici le principe de la classification de Irr sous une forme axiomatique qui nous servira plus loin pour établir une classification duale de la classification de Dipper-James.

3.1. Axiomes. Dans cette section on va supposer qu'on a deux applications :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}\times\mathbf{N} & \to & \mathrm{Irr} \\ (\sigma,n) & \mapsto & \langle\sigma,n\rangle \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} \mathbf{N}(\mathcal{C}) & \to & \mathrm{Irr} \\ \mathfrak{n} & \mapsto & \mathrm{sp}(\mathfrak{n}) \end{array} \tag{3.1}$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

(a1) On a $\mathrm{sp}\,(\mathrm{cusp}(\langle\sigma,n\rangle)) = \langle\sigma,n\rangle$ si et seulement si $n=1$.

(a2) Étant donnés des entiers $n_1,\dots,n_r \geqslant 1$ de somme n, on a :

$$\boldsymbol{r}_{(fn_1,\dots,fn_r)}(\langle\sigma,n\rangle) = \langle\sigma,n_1\rangle\otimes\dots\otimes\langle\sigma,n_r\rangle.$$

où $f=\deg(\sigma)$.

(a3) Si $\pi_1,\dots,\pi_r$ sont des représentations irréductibles telles que $\mathrm{sp}(\mathfrak{n})$ apparaisse comme sous-quotient de l'induite $\pi=\pi_1\times\dots\times\pi_r$, alors il existe $\mathfrak{n}_1,\dots,\mathfrak{n}_r\in\mathrm{N}(\mathcal{C})$ tels que $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}_1+\dots+\mathfrak{n}_r$ et $\pi_i=\mathrm{sp}(\mathfrak{n}_i)$ pour tout $i\in\{1,\dots,r\}$, et la multiplicité de $\mathrm{sp}(\mathfrak{n})$ dans π vaut 1.

(a4) Pour $\mathfrak{n},\mathfrak{m}\in\mathbf{N}(\mathcal{C})$, les représentations $\mathrm{sp}(\mathfrak{n})$ et $\mathrm{sp}(\mathfrak{m})$ sont isomorphes si et seulement si on a $\mathfrak{n}_{\mathrm{sc}}=\mathfrak{m}_{\mathrm{sc}}$.

Le reste de l'article sera consacré à trouver deux telles fonctions et à montrer qu'elles satisfont aux conditions **(a1)** à **(a4)**.

Définition 3.1. (1) Une représentation dans Irr sera dite *spéciale* si elle est de la forme $\mathrm{sp}(\mathfrak{n})$ pour un certain $\mathfrak{n}\in\mathbf{N}(\mathcal{C})$.
(2) Soit $\alpha=(n_1,\dots,n_r)$ une composition d'un entier n. Une représentation irréductible du sous-groupe de Levi M_α de $\mathrm{GL}_n(q)$ sera dite *spéciale* si elle est de la forme $\pi_1\otimes\dots\otimes\pi_r$, où π_i est une représentation irréductible spéciale de $\mathrm{GL}_{n_i}(q)$ pour $1\leqslant i\leqslant r$.

3.2. Classification. Supposons qu'on dispose d'applications (3.1) satisfaisant aux conditions **(a1)** à **(a4)**. Soit Λ une fonction de partition. On pose :

$$\mu_\Lambda = \big(\deg(\Lambda^{(1)}),\deg(\Lambda^{(2)}),\dots\big)$$

$$\mathrm{sp}_\Lambda = \mathrm{sp}(\Lambda^{(1)})\otimes\mathrm{sp}(\Lambda^{(2)})\otimes\dots \tag{3.2}$$

$$\Pi(\Lambda) = [\bigtimes_{\sigma\in\mathcal{C}}\bigtimes_{i\geqslant1}\langle\sigma,\Lambda(\sigma)(i)\rangle] \tag{3.3}$$

où $\Lambda(\sigma)(i)$ est le i-ème terme de la partition $\Lambda(\sigma)$ pour $\sigma\in\mathcal{C}$ et $i\geqslant1$. Remarquons que l'élément $\Pi(\Lambda)\in\mathcal{R}$ est bien défini grâce à la commutativité de $\mathcal{R}$ (le produit ne dépend pas de la relation d'ordre choisie sur $\mathcal{C}$ pour le calculer).

Théorème 3.2. *Supposons qu'on dispose de* (3.1) *satisfaisant aux conditions* **(a1)** *à* **(a4)**.

(1) *Pour toute fonction de partition Λ, il existe une unique représentation irréductible $\langle\Lambda\rangle$, sous-quotient de $\Pi(\Lambda)$ telle que :*

$$[\mathrm{sp}_\Lambda]\leqslant[\boldsymbol{r}_{\mu_\Lambda}(\langle\Lambda\rangle)].$$

Elle apparaît dans $\Pi(\Lambda)$ avec multiplicité 1.

(2) *L'application $\Lambda\mapsto\langle\Lambda\rangle$ est une surjection de $\mathscr{L}(\mathcal{C})$ dans* Irr.

(3) *Étant données $\Lambda,\Sigma\in\mathscr{L}(\mathcal{C})$, on a $\langle\Lambda\rangle=\langle\Sigma\rangle$ si et seulement si $\Lambda_{\mathrm{sc}}=\Sigma_{\mathrm{sc}}$ (ou, de façon équivalente, si et seulement si $\Lambda_{\mathrm{reg}}=\Sigma_{\mathrm{reg}}$).*

(4) *Pour toute fonction de partition $\Lambda\in\mathscr{L}(\mathcal{C})$, on a $\mathrm{scusp}(\langle\Lambda\rangle)=\mathrm{supp}(\Lambda_{\mathrm{sc}})$ et $\mathrm{cusp}(\langle\Lambda\rangle)=\mathrm{supp}(\Lambda_{\mathrm{reg}})$.*

Le reste de cette section sera consacré à la preuve de ce théorème.

3.3. Preuve de (1). La première partie du théorème découle de la deuxième partie du lemme suivant.

LEMME 3.3. (1) μ_Λ *est la plus grande partition de l'entier* $\deg(\Lambda)$ *telle que* $[\boldsymbol{r}_{\mu_\Lambda}(\Pi(\Lambda))]$ *contient un sous-quotient spécial.*

(2) *La représentation* sp_Λ *apparaît avec multiplicité* 1 *dans* $[\boldsymbol{r}_{\mu_\Lambda}(\Pi(\Lambda))]$.

Montrons d'abord la partie (1) du théorème 3.2. Puisque le foncteur de restriction est exact, d'après le lemme 3.3(2), il existe un unique sous-quotient irréductible $\langle\Lambda\rangle$ de $\Pi(\Lambda)$ tel que sp_Λ apparaisse dans $\boldsymbol{r}_{\mu_\Lambda}(\langle\Lambda\rangle)$. Pour la même raison, elle apparaît avec multiplicité 1 dans $\Pi(\Lambda)$.

PREUVE. Prouvons le lemme par récurrence sur le degré n de Λ. Si $n = 1$, le résultat est immédiat puisqu'alors $\Pi(\Lambda)$ est irréductible et cuspidale.

Supposons maintenant que $n \geqslant 2$ et posons $\alpha = (\deg(\Lambda^{(1)}), \deg(\Lambda) - \deg(\Lambda^{(1)})$. Par décomposition de Mackey et d'après **(a2)**, la représentation $\boldsymbol{r}_\alpha(\Pi(\Lambda))$ est constituée de sous-quotients de la forme :

$$\Pi(\Lambda_1) \otimes \Pi(\Lambda_2)$$

avec Λ_1, Λ_2 des fonctions de partitions telles que pour tout $\sigma \in \mathcal{C}$ et tout $i \in \mathbf{N}$ on a :

$$\Lambda_1(\sigma)(i) + \Lambda_2(\sigma)(i) = \Lambda(\sigma)(i). \tag{3.4}$$

D'après les conditions **(a1)** et **(a3)**, $\Pi(\Lambda_1)$ contient une représentation de la forme $\mathrm{sp}(\Lambda^{(1)})$ si et seulement si $\Lambda_1 = \Lambda^{(1)}$ et donc $\Lambda_2 = \Lambda^-$. Dans ce cas, par la condition **(a3)**, $\mathrm{sp}(\Lambda^{(1)})$ apparaît avec multiplicité 1 dans $\Pi(\Lambda_1)$. On remarque que :

$$\begin{aligned} \mu_{\Lambda^-} &= \big(\deg(\Lambda^{(2)}), \deg(\Lambda^{(3)}), \dots\big), \\ \mathrm{sp}_{\Lambda^-} &= \mathrm{sp}(\Lambda^{(2)}) \otimes \mathrm{sp}(\Lambda^{(3)}) \otimes \dots \end{aligned}$$

On déduit (2) par transitivité des foncteurs de restriction.

Montrons maintenant (1). La relation d'ordre $\trianglelefteq$ sur les partitions n'étant pas totale, il n'est pas évident *a priori* que μ_Λ soit l'unique plus grande partition telle que $\boldsymbol{r}_{\mu_\Lambda}(\Pi(\Lambda))$ contienne une représentation spéciale.

Soit maintenant $\alpha = (n_1, n_2)$ un composition de $\deg(\Lambda)$. D'après la décomposition de Mackey et la condition **(a2)**, $\boldsymbol{r}_\alpha(\Pi(\Lambda))$ est ou bien nulle ou bien composé de représentations de la forme :

$$\Pi(\Lambda_1) \otimes \Pi(\Lambda_2)$$

avec Λ_1, Λ_2 des fonctions de partitions telles que pour tout $\sigma \in \mathcal{C}$ et tout $i \in \mathbf{N}$ on a (3.4). Par **(a1)** et **(a3)**, l'induite $\Pi(\Lambda_1)$ contient une représentation spéciale si et seulement si Λ_1 peut-être identifié à un élément de $\mathbf{N}(\mathcal{C})$, c'est-à-dire, si $\Lambda_2 \vdash \Lambda$ et $\Lambda_1 = \delta(\Lambda, \Lambda_2)$ (voir définition 2.20).

LEMME 3.4 ([**14**, Lemme 9.18]). *Soient* $\Lambda, \Sigma \in \mathscr{L}(\mathcal{C})$ *tels que* $\Lambda \vdash \Sigma$. *Alors* μ_Λ *est plus grande que la partition associé à la composition* $(\deg(\delta(\Lambda, \Sigma)), \mu_\Sigma)$.

La proposition découle du lemme combinatoire précédent. ☐

REMARQUE 3.5. On n'a pas utilisé **(a4)** pour montrer la partie (1) du théorème 3.2.

REMARQUE 3.6. μ_Λ est la plus grande partition de $\deg(\Lambda)$ telle que $[\boldsymbol{r}_{\mu_\Lambda}(\langle\Lambda\rangle)]$ contient une représentation spéciale. Ainsi, l'application $\langle\Lambda\rangle \mapsto \mathrm{sp}_\Lambda$ est bien définie. Pour tout sous-quotient irréductible de $\Pi(\Lambda)$ de la forme $\langle\Sigma\rangle$ avec $\Sigma \neq \Lambda$, on a la relation $\mu_\Sigma \lhd \mu_\Lambda$.

3.4. Preuve de (2). On va montrer que la restriction de l'application $\Lambda \mapsto \langle\Lambda\rangle$ à $\mathscr{L}(\mathcal{C})^{\mathrm{sc}}$ est bijective. D'après la proposition 2.17, il suffit pour cela de montrer la proposition suivante.

Proposition 3.7. *La restriction de l'application* $\Lambda \mapsto \langle\Lambda\rangle$ *à* $\mathscr{L}(\mathcal{C})^{\mathrm{sc}}$ *est injective.*

Preuve. Soient $\Lambda, \Sigma \in \mathscr{L}(\mathcal{C})^{\mathrm{sc}}$ et supposons que $\langle\Lambda\rangle \simeq \langle\Sigma\rangle$. Alors, d'après la remarque 3.6, on a $\mathrm{sp}_\Lambda = \mathrm{sp}_\Sigma$.

Lemme 3.8. *Soient* $\Lambda, \Sigma \in \mathscr{L}(\mathcal{C})^{\mathrm{sc}}$ *tels que* $\mathrm{sp}_\Lambda = \mathrm{sp}_\Sigma$. *Alors* $\Lambda = \Sigma$.

Preuve. En effet, si $\mathrm{sp}_\Lambda = \mathrm{sp}_\Sigma$, alors $\mathrm{sp}(\Lambda^{(i)}) = \mathrm{sp}(\Sigma^{(i)})$ pour tout i. Cela entraîne, grâce à la condition **(a4)**, que $\Lambda^{(i)} = \Sigma^{(i)}$ pour tout entier $i \geqslant 1$. On déduit alors de la remarque 2.19(3) que $\Lambda = \Sigma$. □

On déduit la proposition du lemme précédent. □

3.5. Preuve de (3). La troisième partie du théorème découle de la proposition suivante.

Proposition 3.9. *Pour toute fonction de partition* Λ*, la représentation* $\langle\Lambda\rangle$ *est isomorphe à* $\langle\Lambda_{\mathrm{sc}}\rangle$.

En effet, étant données $\Lambda, \Sigma \in \mathscr{L}(\mathcal{C})$, la proposition 3.9 implique que $\langle\Lambda\rangle = \langle\Sigma\rangle$ si et seulement si $\langle\Lambda_{\mathrm{sc}}\rangle = \langle\Sigma_{\mathrm{sc}}\rangle$. D'après la proposition 3.7, cette condition est équivalente à l'égalité $\Lambda_{\mathrm{sc}} = \Sigma_{\mathrm{sc}}$. Finalament, d'après le lemme 2.16, on a $\Lambda_{\mathrm{sc}} = \Sigma_{\mathrm{sc}}$ si, et seulement si $\Lambda_{\mathrm{reg}} = \Sigma_{\mathrm{reg}}$.

Preuve. D'après la partie (2) du théorème 3.2, il y a une fonction de partition supercuspidale $\Sigma \in \mathscr{L}(\mathcal{C})^{\mathrm{sc}}$ telle que $\langle\Lambda\rangle$ soit isomorphe à $\langle\Sigma\rangle$. Par la remarque 3.6, on a $\mathrm{sp}_\Lambda = \mathrm{sp}_\Sigma$. Or, par la remarque 2.19 et **(a4)**, on a $\mathrm{sp}_\Lambda = \mathrm{sp}_{\Lambda_{\mathrm{sc}}}$. On déduit que $\mathrm{sp}_\Sigma = \mathrm{sp}_{\Lambda_{\mathrm{sc}}}$ et par le lemme 3.8 que $\Sigma = \Lambda_{\mathrm{sc}}$, ce qui montre la proposition. □

3.6. Preuve de (4). Remarquons que $\langle\Lambda\rangle$ est isomorphe à $\langle\Lambda_{\mathrm{sc}}\rangle$ d'après la proposition 3.9. Le support supercuspidal de $\langle\Lambda\rangle$ est donc égal à $\mathrm{supp}(\Lambda_{\mathrm{sc}})$. Montrons maintenant que le support cuspidal de $\langle\Lambda\rangle$ est égal à $\mathrm{supp}(\Lambda_{\mathrm{reg}})$. D'après la partie (3) du théorème 3.2, on peut supposer que $\Lambda \in \mathscr{L}(\mathcal{C})^{\mathrm{reg}}$.

On va montrer le lemme suivant par récurrence sur le cardinal du support de Λ. On désigne par $\mathscr{L}(\mathcal{C})^{\mathrm{reg}}_{(n)}$ l'ensemble des fonctions de partition regulières dont le support est de cardinal n.

Lemme 3.10. *L'application :*

$$\Lambda \mapsto \langle\Lambda\rangle$$

induit une bijection entre $\mathscr{L}(\mathcal{C})^{\mathrm{reg}}_{(n)}$ *et l'ensemble des classes de représentations irréductibles de support cuspidal dont la longueur est égale à* n*. Pour toute fonction de partition* $\Lambda \in \mathscr{L}(\mathcal{C})^{\mathrm{reg}}_{(n)}$*, on a* $\mathrm{cusp}(\langle\Lambda\rangle) = \mathrm{supp}(\Lambda)$.

Preuve. D'après la partie (3) du théorème 3.2, l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(\mathcal{C})^{\mathrm{reg}} & \to & \mathrm{Irr} \\ \Lambda & \mapsto & \langle\Lambda\rangle \end{array}$$

est une bijection. Si $n = 1$, le résultat est trivial. On suppose donc que $n \geqslant 2$.

Soient $\rho_1, \dots, \rho_r$ des représentations irréductibles cuspidales telles que $\langle\Lambda\rangle$ soit une sous-représentation de $\rho_1 \times \dots \times \rho_r$. De la décomposition de Mackey on déduit que $r \leqslant n$ et, si $r = n$, le support de Λ est égal à :

$$[\rho_1] + \dots + [\rho_n],$$

c'est-à-dire que $\mathrm{cusp}(\langle\Lambda\rangle) = \mathrm{supp}(\Lambda)$. Supposons donc que $r < n$. Par hypothèse de récurrence, il existe un fonction de partition regulière $\Lambda' \in \mathscr{L}(\mathcal{C})^{\mathrm{reg}}_{(r)}$ telle que $\langle\Lambda'\rangle = \langle\Lambda\rangle$, ce qui donne une contradiction. □

Ceci met fin à la preuve du théorème 3.2.

4. Les représentations $z(\sigma, n)$ et $l(\sigma, n)$

4.1. Représentations presque projectives. Dans la suite, nous aurons besoin de la notion de représentation presque projective introduite par Dipper [**3**] (la terminologie n'apparaît pas dans [**3**] mais est due à Vignéras [**18**]). Nous n'en rappellerons pas la définition (voir [**18**, I]), mais nous en donnerons les principales propriétés.

PROPOSITION 4.1. *Soit* τ *une représentation presque projective de* $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_n(q)$, $n \geqslant 1$, *et soit* E *son algèbre d'endomorphismes.*

(1) *Le foncteur :*
$$\pi \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\tau, \pi)$$
induit une bijection entre l'ensemble des classes de représentations irréductibles de G *qui sont des quotients de* τ *et l'ensemble des classes de* E*-modules à droite simples.*

(2) *Ce foncteur est exact sur la sous-catégorie des* R*-représentations de* G *formée des sous-quotients de sommes directes quelconques de copies de* τ.

PREUVE. Pour le premier point, on renvoie à [**3**] ou [**18**]. Pour le second point, on remarque que la représentation τ est quasi-projective d'après [**18**, A.4] et on applique [**18**, A.3]. □

Le résultat suivant fournit un exemple important de représentation presque projective.

PROPOSITION 4.2 ([**4**, §4]). *Soient* $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in \mathcal{C}$ *des représentations irréductibles cuspidales. La représentation induite* $\sigma = \sigma_1 \times \cdots \times \sigma_r$ *est presque projective.*

On en déduit le résultat suivant, que le lecteur comparera à la proposition 2.8.

PROPOSITION 4.3. *Soient* $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ *des représentations irréductibles cuspidales non isomorphes deux à deux, et soient* $n_1, \dots, n_r \geqslant 1$ *des entiers. Pour chaque entier* $i \in \{1, \dots, r\}$, *on note* Y_i *l'ensemble des classes de représentations de support cuspidal* $n_i \cdot \sigma_i$, *et on note* Y_0 *l'ensemble des classes de représentations de support cuspidal* $n_1 \cdot \sigma_1 + \cdots + n_r \cdot \sigma_r$. *Alors l'application :*
$$(\pi_1, \dots, \pi_r) \mapsto \pi_1 \times \cdots \times \pi_r$$
est une bijection de $\mathrm{Y}_1 \times \cdots \times \mathrm{Y}_r$ *vers* Y_0.

PREUVE. Pour $i \in \{1, \dots, r\}$, notons f_i le degré de σ_i. Notons α la composition $(n_1 f_1, \dots, n_r f_r)$ et posons $\sigma_\alpha = \sigma_1^{\times n_1} \otimes \cdots \otimes \sigma_r^{\times n_r}$. Notons n la somme des éléments de α et posons $\mathrm{M} = \mathrm{M}_\alpha$, $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_n(q)$. Notons $\sigma = \boldsymbol{i}_\alpha(\sigma_\alpha)$. Grâce à la formule de Mackey et au fait que les σ_i sont cuspidales, on a :
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(\sigma_\alpha, \boldsymbol{r}_\alpha(\boldsymbol{i}_\alpha(\sigma_\alpha))) = \mathrm{End}_{\mathrm{M}}(\sigma_\alpha).$$
Par conséquent, le morphisme fonctoriel d'algèbres :
$$\mathrm{End}_{\mathrm{M}}(\sigma_\alpha) \to \mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\sigma)$$
est un isomorphisme. Choisissons un $\pi_i \in \mathrm{Y}_i$ pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$ et notons π_α la représentation $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r$. Comme σ_α est presque projective (voir la proposition 4.2), l'espace :
$$\mathrm{V}_\alpha = \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(\sigma_\alpha, \pi_\alpha)$$

est un module à droite simple sur $\mathrm{End}_{\mathrm{M}}(\sigma_\alpha)$. Comme :

$$\mathrm{End}_{\mathrm{M}}(\sigma_\alpha) = \mathrm{End}_{\mathrm{GL}_{n_1 f_1}(q)}(\sigma_1^{\times n_1}) \otimes \cdots \otimes \mathrm{End}_{\mathrm{GL}_{n_r f_r}(q)}(\sigma_r^{\times n_r})$$

on peut écrire $\mathrm{V}_\alpha = \mathrm{V}_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{V}_r$ où chaque V_i est un module simple sur l'algèbre $\mathrm{End}_{\mathrm{GL}_{n_i f_i}(q)}(\sigma_i^{\times n_i})$. Posons $\pi = \boldsymbol{i}_\alpha(\pi_\alpha) = \pi_1 \times \cdots \times \pi_r$. Par réciprocité de Frobenius et la formule de Mackey, on a :

$$\mathrm{V} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\sigma, \pi) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(\sigma_\alpha, \boldsymbol{r}_\alpha(\pi)) = \mathrm{V}_\alpha \tag{4.1}$$

et l'isomorphisme est compatible à l'action de $\mathrm{End}_{\mathrm{M}}(\sigma_\alpha)$. Comme $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\sigma)$ est un module libre et de rang 1 sur $\mathrm{End}_{\mathrm{M}}(\sigma_\alpha)$, on en déduit que V est un module simple sur $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\sigma)$.

Si τ est une sous-représentation irréductible de π, alors elle appartient à Y_0. Ainsi $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\sigma, \tau)$ est un sous-module non nul du module simple V ; ils sont donc égaux. On en déduit que τ est égale à π, donc que π est irréductible.

L'injectivité provient du fait que l'on peut retrouver les π_i en utilisant l'isomorphisme (4.1) et le fait que, par presque-projectivité, l'application :

$$\pi_\alpha \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(\sigma_\alpha, \pi_\alpha)$$

est injective (et même bijective) entre quotients irréductibles de σ_α et modules simples sur $\mathrm{End}_{\mathrm{M}}(\sigma_\alpha)$.

Soit maintenant $\pi \in \mathrm{Y}_0$. Notons V le module $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\sigma, \pi)$, qui est non nul par hypothèse. Comme σ est presque projective d'après la proposition 4.2, c'est un module simple sur $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\sigma)$, donc sur $\mathrm{End}_{\mathrm{M}}(\sigma_\alpha)$. Il se décompose donc sous la forme $\mathrm{V}_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{V}_r$ en tant que module sur $\mathrm{End}_{\mathrm{M}}(\sigma_\alpha)$. Pour chaque i, notons π_i la représentation irréductible dans Y_i correspondant à V_i. D'après la première partie de la preuve, la représentation $\pi' = \pi_1 \times \cdots \times \pi_r$ est irréductible et le $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\sigma)$-module qui lui est associé est isomorphe à V. D'après la première partie de la proposition 4.1, les représentations π et π' sont donc isomorphes. □

4.2. Définition des représentations $z(\sigma, n)$ et $l(\sigma, n)$. Dans ce paragraphe, on fixe une représentation irréductible cuspidale σ de degré f et un entier $n \geqslant 1$. On va définir deux représentations $z(\sigma, n)$ et $l(\sigma, n)$ satisfaisant à la condition **(a2)**.

Notons $\mathcal{H}(\sigma, n)$ l'algèbre des endomorphismes de la représentation $\sigma^{\times n}$. D'après [**6**, §5], c'est une algèbre de Hecke de type A et de paramètre :

$$q(\sigma) = q^f = q^{\deg(\sigma)},$$

c'est-à-dire qu'elle est engendrée par des générateurs $\mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_{n-1}$ avec les relations :

$$(\mathrm{S}_i - q(\sigma))(\mathrm{S}_i + 1) = 0, \quad i \in \{1, \ldots n-1\}, \tag{4.2}$$

$$\mathrm{S}_i \mathrm{S}_j = \mathrm{S}_j \mathrm{S}_i, \quad |i - j| \geqslant 2, \tag{4.3}$$

$$\mathrm{S}_i \mathrm{S}_{i+1} \mathrm{S}_i = \mathrm{S}_{i+1} \mathrm{S}_i \mathrm{S}_{i+1}, \quad i \in \{1, \ldots n-2\}. \tag{4.4}$$

Cette algèbre a donc deux caractères, le caractère trivial défini par $\mathrm{S}_i \mapsto q(\sigma)$ et le caractère signe défini par $\mathrm{S}_i \mapsto -1$, pour tout $i \in \{1, \ldots n-1\}$.

La représentation $\sigma^{\times n}$ est presque projective (proposition 4.2), de sorte qu'on a une bijection :

$$\pi \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_{nf}(q)}(\sigma^{\times n}, \pi) \tag{4.5}$$

entre classes de représentations irréductibles de support cuspidal $n \cdot \sigma$ et classes de $\mathcal{H}(\sigma, n)$-modules à droite simples (proposition 4.1). On note ainsi :

$$z(\sigma, n) \quad \text{et} \quad l(\sigma, n)$$

les sous-quotients irréductibles de $\sigma^{\times n}$ dont les $\mathcal{H}(\sigma, n)$-modules associés sont respectivement le caractère trivial et le caractère signe de $\mathcal{H}(\sigma, n)$.

PROPOSITION 4.4. *Les représentations irréductibles $z(\sigma,n)$ et $l(\sigma,n)$ satisfont à* **(a2)**.

PREUVE. Montrons d'abord la proposition pour $z(\sigma,n)$. On note α la composition $(fn_1,\ldots,fn_r)$ et on note π la représentation $\boldsymbol{r}_\alpha(z(\sigma,n))$. Supposons d'abord que $n_1=n_2=\cdots=n_r=1$. Alors π est une sous-représentation de $\boldsymbol{r}_\alpha(\sigma^{\times n})$, qui est isomorphe à une somme directe de copies de $\sigma\otimes\cdots\otimes\sigma$. Mais l'espace :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}_\alpha}(\sigma\otimes\cdots\otimes\sigma,\pi)\simeq\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_{nf}(q)}(\sigma^{\times n},z(\sigma,n))$$

est de dimension 1. Ainsi π est isomorphe à $\sigma\otimes\cdots\otimes\sigma$, ce qui prouve **(a2)** dans ce cas.

On suppose maintenant que les n_i sont quelconques, de somme n, et on suppose que π n'est pas irréductible. Il existe donc des représentations irréductibles π_1 et π_2 de M_α et des homomorphismes non nuls $\pi_1\to\pi$ et $\pi\to\pi_2$ dont la composée est nulle. Par réciprocité, on a des homomorphismes non nuls $\boldsymbol{i}_\alpha(\pi_1)\to z(\sigma,n)$ et $z(\sigma,n)\to\boldsymbol{i}_\alpha(\pi_2)$. Comme le support cuspidal de $z(\sigma,n)$ est $n\cdot\sigma$, on déduit par transitivité de l'induction parabolique que π_1 et π_2 sont des quotients irréductibles de $\sigma^{\times n_1}\otimes\cdots\otimes\sigma^{\times n_r}$. Par conséquent, $\boldsymbol{r}_{(f,\ldots,f)}(\pi_i)$ est non nul pour $i=1,2$, ce qui, par exactitude du foncteur de Jacquet, contredit la première partie de la preuve.

On en déduit que π est irréductible, de sorte que, de façon analogue à (4.5), elle est entièrement déterminée par le $\mathcal{H}(\sigma,n_1)\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}(\sigma,n_r)$-module simple $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}_\alpha}(\sigma^{\times n_1}\otimes\cdots\otimes\sigma^{\times n_r},\pi)$.

Par réciprocité et par définition de $z(\sigma,n)$, celui-ci est la restriction du caractère trivial TRIV_n^σ de $\mathcal{H}(\sigma,n)$ à $\mathcal{H}(\sigma,n_1)\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}(\sigma,n_r)$. Cette restriction est égale à $\mathrm{TRIV}_{n_1}^\sigma\otimes\cdots\otimes\mathrm{TRIV}_{n_r}^\sigma$, ce qui prouve que π est isomorphe à $z(\sigma,n_1)\otimes\cdots\otimes z(\sigma,n_r)$.

Pour $l(\sigma,n)$ la preuve est la même : il suffit simplement de remplacer le caractère trivial par le caractère signe. □

5. Les classifications de James et Dipper-James

Dans cette section on montre que les théorèmes de classification de James [**12**] et Dipper-James [**7**] entrent dans le cadre du théorème 3.2 (avec les choix de représentations $\langle\sigma,n\rangle=z(\sigma,n)$ et $\mathrm{sp}(\mathfrak{n})=\mathrm{st}(\mathfrak{n})$).

5.1. La classification de Dipper-James.

PROPOSITION 5.1. *Les applications :*

$$(5.1)\qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}\times\mathbf{N} & \to & \mathrm{Irr}\\ (\sigma,n) & \mapsto & z(\sigma,n)\end{array}\quad \textit{et}\quad \begin{array}{ccc} \mathbf{N}(\mathcal{C}) & \to & \mathrm{Irr}\\ \mathfrak{n} & \mapsto & \mathrm{st}(\mathfrak{n})\end{array}$$

où $\mathrm{st}(\mathfrak{n})$ *est défini par* (2.5), *satisfont aux conditions* **(a1)** *à* **(a4)**.

PREUVE. Pour **(a1)**, voir par exemple [**12**, Theorem 6.9]. Les conditions **(a2)** et **(a4)** sont prouvées respectivement dans la propostion 4.4 et le corollaire 2.7. Enfin pour la condition **(a3)**, voir [**17**, III.1.11] et [**14**, Proposition 3.3]. □

Pour toute fonction de partition Λ, notons st_Λ et $\mathrm{I}(\Lambda)$ les représentations (3.2) et (3.3) avec les choix (5.1). Le théorème de classification ci-dessous est alors un cas particulier du théorème 3.2.

THÉORÈME 5.2. (1) *Soit Λ une fonction de partition. Il existe une unique représentation irréductible $z(\Lambda)$, sous-quotient de :*

$$\mathrm{I}(\Lambda)=\Big[\bigtimes_{\sigma\in\mathcal{C}}\bigtimes_{i\geqslant1}z(\sigma,\Lambda(\sigma)(i))\Big]$$

telle que $[\mathrm{st}_\Lambda]\leqslant[\boldsymbol{r}_{\mu_\Lambda}(z(\Lambda))]$. *La représentation $z(\Lambda)$ apparaît dans* $\mathrm{I}(\Lambda)$ *avec multiplicité* 1.

(2) *L'application* $\Lambda \mapsto z(\Lambda)$ *est une surjection de* $\mathscr{L}(\mathcal{C})$ *dans* Irr.
(3) *Étant données* $\Lambda, \Sigma \in \mathscr{L}(\mathcal{C})$*, on a* $z(\Lambda) = z(\Sigma)$ *si et seulement si* $\Lambda_{\mathrm{sc}} = \Sigma_{\mathrm{sc}}$ *(ou, de façon équivalente, si et seulement si* $\Lambda_{\mathrm{reg}} = \Sigma_{\mathrm{reg}}$*).*
(4) *Pour toute fonction de partition* $\Lambda \in \mathscr{L}(\mathcal{C})$*, on a* $\mathrm{scusp}(z(\Lambda)) = \mathrm{supp}(\Lambda_{\mathrm{sc}})$ *et* $\mathrm{cusp}(z(\Lambda)) = \mathrm{supp}(\Lambda_{\mathrm{reg}})$.

Cette classification de Irr coïncide avec celle de Dipper-James [**7**].

5.2. Classification de James. Soit σ une représentation cuspidale fixée. Considérons maintenant les fonctions de partition de support $n \cdot \sigma$, c'est-à-dire les fonctions qui associent à σ une partition λ de n et la partition triviale de 0 à toute représentation cuspidale non isomorphe à σ. Si Λ est une telle fonction de partition, on notera :

$$z(\Lambda) = z(\sigma, \lambda). \tag{5.2}$$

Dans ce cas particulier le théorème 5.2 s'écrit :

Théorème 5.3. *L'application* $\lambda \mapsto z(\sigma, \lambda)$ *est une bijection entre les partitions (resp. partitions* $e(\sigma)$*-régulières) de* n *et les classes de représentations irréductibles apparaissant comme sous-quotients de* $\sigma^{\times n}$ *(resp. sous-représentations).*

Remarque 5.4. On retrouve ainsi le théorème de classification de James. Rappelons qu'on a utilisé les résultats de James pour prouver les nôtres, donc cet article ne donne pas de nouvelle preuve de ses résultats.

Proposition 5.5. *Soit* λ *une partition de* n*. Alors on a :*

$$z(\sigma, \lambda) = z(\sigma, \lambda_{-1}) \times z(\mathrm{st}_0(\sigma), \lambda_0) \times z(\mathrm{st}_1(\sigma), \lambda_1) \times \dots$$

où $\lambda = \lambda_{-1} + e(\sigma) \cdot \lambda_0 + e(\sigma)\ell \cdot \lambda_1 + e(\sigma)\ell^2 \cdot \lambda_2 + \dots$ *est le développement* $(e(\sigma), \ell)$*-adique de* λ (2.11).

Preuve. D'après le théorème 3.2, il suffit de voir que la représentation :

$$z(\sigma, \lambda_{-1}) \times z(\mathrm{st}_0(\sigma), \lambda_0) \times z(\mathrm{st}_1(\sigma), \lambda_1) \times \dots$$

est irréductible. Notons pour simplifier $\mathrm{st}_{-1}(\sigma) = \sigma$. Par le théorème 5.3, pour tout $i \geqslant -1$, la représentation $z(\mathrm{st}_i(\sigma), \lambda_i)$ n'est pas un sous-quotient d'une induite de la forme $\tau_1 \times \dots \times \tau_t$ où l'un de τ_j a support cuspidal $r \cdot \mathrm{st}_k(\sigma)$ avec $r \geqslant 1$ et $k > i$. On déduit que la représentation $z(\sigma, \lambda_{-1}) \otimes z(\mathrm{st}_0(\sigma), \lambda_0) \otimes z(\mathrm{st}_1(\sigma), \lambda_1) \otimes \dots$ apparaît avec multiplicité 1 dans :

$$\boldsymbol{r}_{(\deg(z(\sigma,\lambda_{-1})), \deg(z(\mathrm{st}_0(\sigma),\lambda_0)), \dots)} \left(z(\sigma, \lambda_{-1}) \times z(\mathrm{st}_0(\sigma), \lambda_0) \times z(\mathrm{st}_1(\sigma), \lambda_1) \times \dots\right)$$

On conclut avec le lemme 2.1. □

5.3. Sur le morphisme de réduction modulo ℓ.

Définition 5.6. Soit $\sigma \in \mathcal{C}$. On note $\mathcal{R}_\sigma$ la sous-algèbre de $\mathcal{R}$ engendrée par les $z(\sigma, \lambda)$ où λ décrit l'ensemble de toutes les partitions.

Remarque 5.7. Si $\sigma \in \mathcal{S}$, alors $\mathcal{R}_\sigma$ est l'ensemble des combinaisons $\mathbf{Z}$-linéaires de représentations de support supercuspidal de la forme $n \cdot \sigma$ pour $n \geqslant 1$. L'induction parabolique induit un isomorphisme :

$$\bigotimes_{\sigma \in \mathcal{S}} \mathcal{R}_\sigma \to \mathcal{R}$$

de $\mathbf{Z}$-algèbres.

Lemme 5.8. *L'ensemble des :*

$$z(\sigma, n_1) \times \cdots \times z(\sigma, n_r)$$

lorsque $(n_1, \ldots, n_r)$ *décrit l'ensemble des partitions est une base de* $\mathcal{R}_\sigma$ *comme* **Z**-*module.*

Preuve. Pour $n \geqslant 0$, on désigne par $\mathcal{R}_\sigma^n$ le sous-module libre de $\mathcal{R}_\sigma$ engendré par les sous-quotients irréductibles de $\sigma^{\times n}$. On va montrer que l'ensemble des induites $i(\sigma, \lambda) = z(\sigma, n_1) \times \cdots \times z(\sigma, n_r)$, lorsque $\lambda = (n_1, \ldots, n_r)$ décrit l'ensemble des partitions de n, est une base de $\mathcal{R}_\sigma^n$.

Supposons qu'il y ait une partition μ de n telle que $z(\sigma, \mu)$ n'appartienne pas au sous-module $\mathcal{G}$ de $\mathcal{R}_\sigma^n$ engendré par les $i(\sigma, \lambda)$, λ partition de n, et supposons que μ soit maximale pour cette propriété relativement à l'ordre de dominance sur les partitions de n (voir notation 4).

D'après la remarque 3.6, on a une décomposition dans $\mathcal{R}_\sigma^n$:

$$i(\sigma, \mu) = z(\sigma, \mu) + \delta,$$

où δ est une combinaison **Z**-linéaire de $z(\sigma, \nu)$ avec $\mu \lhd \nu$. Comme $i(\sigma, \mu)$ et δ appartiennent à $\mathcal{G}$ par maximalité de μ, on obtient une contradiction.

Ainsi la famille des $i(\sigma, \lambda)$, lorsque λ décrit l'ensemble des partitions de n, est génératrice, et comme elle a le même cardinal qu'une base de $\mathcal{R}_\sigma^n$, c'en est une base. □

Lemme 5.9. *Soit* ℓ *un nombre premier différent de* p. *Soit* σ *une* $\overline{\mathbf{F}}_\ell$-*représentation cuspidale et notons* $\tilde{\sigma}$ *un relèvement à* $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ *(voir remarque 2.10). Soit* $n \geqslant 2$. *On a :*

(1) $\mathbf{r}_\ell(z(\tilde{\sigma}, n)) = z(\sigma, n)$.
(2) *Si* $n < e(\sigma)$ *alors* $\mathbf{r}_\ell(l(\tilde{\sigma}, n)) = l(\sigma, n)$.
(3) *On a* $\mathrm{st}(\sigma, n) = l(\sigma, n)$ *si et seulement si* $n < e(\sigma)$.

Preuve. Remarquons dans un premier temps que $\mathbf{r}_\ell(z(\tilde{\sigma}, n))$ ne contient pas de représentation cuspidale. En effet, le $\mathcal{H}(\tilde{\sigma}, n)$-module correspondant à $\mathrm{st}(\tilde{\sigma}, n)$ est le $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$-caractère signe. On déduit que $\mathrm{st}(\tilde{\sigma}, n) = l(\tilde{\sigma}, n)$ et donc $\mathrm{st}(\sigma, n) \leqslant \mathbf{r}_\ell(l(\tilde{\sigma}, n))$. Comme $z(\tilde{\sigma}, n) \neq l(\tilde{\sigma}, n)$ dès que $n \neq 1$, la réduction $\mathbf{r}_\ell(z(\tilde{\sigma}, n))$ ne contient pas de représentation cuspidale. De même, par le théorème 2.4, si $n < e(\sigma)$ alors $\mathbf{r}_\ell(l(\tilde{\sigma}, n))$ ne contient non plus de représentation cuspidale.

Par récurrence, on peut supposer que pour tout sous-groupe parabolique propre P_α, la réduction mod ℓ de $\boldsymbol{r}_\alpha(z(\tilde{\sigma}, n))$ (resp. de $\boldsymbol{r}_\alpha(l(\tilde{\sigma}, n))$ si $n < e(\sigma)$) est nulle ou irréductible. Si $\mathbf{r}_\ell(z(\tilde{\sigma}, n))$ (resp. $\mathbf{r}_\ell(l(\tilde{\sigma}, n))$ si $n < e(\sigma)$) n'est pas irréductible, comme elle ne contient pas de représentation cuspidale, il existe un sous-groupe parabolique propre P_α tel que $\mathbf{r}_\ell(\boldsymbol{r}_\alpha(z(\tilde{\sigma}, n)))$ (resp. $\mathbf{r}_\ell(\boldsymbol{r}_\alpha(l(\tilde{\sigma}, n)))$ si $n < e(\sigma)$) soit de longueur au plus 2 : contradiction.

Montrons maintenant (3). L'une des implications provient du fait que $\mathrm{st}(\sigma, n)$ correspond à un module simple de $\mathcal{H}$ si et seulement si la partition $(1, \ldots, 1)$ est $e(\sigma)$-régulière, c'est-à-dire si $n < e(\sigma)$. Inversement, supposons que $n < e(\sigma)$. Comme $\mathrm{st}(\tilde{\sigma}, n) = l(\tilde{\sigma}, n)$ et que, d'après (2), on a $\mathbf{r}_\ell(l(\tilde{\sigma}, n)) = l(\sigma, n)$, on déduit que $\mathrm{st}(\sigma, n) = l(\sigma, n)$. □

Corollaire 5.10. *Le morphisme de* Z-*algèbres*

$$\mathbf{r}_\ell : \mathcal{R}(\overline{\mathbf{Q}}_\ell) \to \mathcal{R}(\overline{\mathbf{F}}_\ell)$$

est surjectif

Preuve. C'est une conséquence de la remarque 5.7 et des lemmes 5.9(1) et 5.8. □

Proposition 5.11. *Soient* $\sigma \in \mathcal{C}$ *et un entier* $n \geqslant 1$.

(1) *On a* $\mathrm{st}(\sigma, n) = z(\sigma, (1, \dots, 1))$.
(2) *Si l'on écrit :*

$$n = n_{-1} + e(\sigma)n_0 + e(\sigma)\ell n_1 + e(\sigma)\ell^2 n_2 + \dots$$

le développement $(e(\sigma), \ell)$*-adique de* n *(voir* (2.10)*) alors on a :*

$$\mathrm{st}(\sigma, n) = l(\sigma, n_{-1}) \times l(\mathrm{st}_0(\sigma), n_0) \times l(\mathrm{st}_1(\sigma), n_1) \times l(\mathrm{st}_2(\sigma), n_2) \times \dots \tag{5.3}$$

Preuve. La première assertion suit de la définition de $z(\sigma, (1, \dots, 1))$. Le membre de droite de (5.3) est non dégénéré d'après le lemme 5.9(3). Il est irréductible d'après le corollaire 4.3 et est un sous-quotient de $\sigma^{\times n}$. Il est donc égal, par définition, à $\mathrm{st}(\sigma, n)$. □

6. Impossibilité d'une classification duale

On peut naturellement demander s'il y a d'autres choix, pour les applications $(\sigma, n) \mapsto \langle \sigma, n \rangle$ et sp, qui satisfassent aux conditions **(a1)** à **(a4)**. Nous allons montrer que, si l'on choisit :

$$\langle \sigma, n \rangle = l(\sigma, n), \quad \sigma \in \mathcal{C}, \quad n \geqslant 1, \tag{6.1}$$

alors il n'y a pas, en général, d'application sp qui convienne.

Soit $\sigma \in \mathcal{C}$ telle que $e(\sigma) = 3$. La représentation induite $\sigma \times \sigma \times \sigma$ est de longueur 7, et on a :

$$[\sigma \times \sigma \times \sigma] = \mathrm{st}_0(\sigma) + 3 \cdot z(\sigma, (2, 1)) + 3 \cdot z(\sigma, 3). \tag{6.2}$$

Pour que $\mathrm{sp}(3 \cdot \sigma)$ satisfasse à la condition **(a3)**, il faudrait qu'elle soit égale à la seule représentation irréductible apparaissant avec multiplicité 1 dans (6.2), c'est-à-dire $\mathrm{st}_0(\sigma)$. Mais celle-ci est aussi un sous-quotient de $l(\sigma, 2) \times \sigma$, ce qui implique que les conditions **(a1)** et **(a3)** ne peuvent pas être simultanément vérifiées.

Remarque 6.1. Aussi, dans le cas où $e(\sigma) = 2$, on a le problème suivant. Soit f le degré de σ. L'induite $\sigma \times \sigma$ est de longueur 3, et on a :

$$[\sigma \times \sigma] = \mathrm{st}_0(\sigma) + 2 \cdot z(\sigma, 2).$$

Pour que $\mathrm{sp}(2 \cdot \sigma)$ satisfasse à la condition **(a3)** il faudrait que $\mathrm{sp}(2 \cdot \sigma) = \mathrm{st}_0(\sigma)$. Mais la représentation $\sigma \otimes \mathrm{st}_0(\sigma)$ apparaît avec multiplicité 2 dans $\boldsymbol{r}_{(2f,f)}(l(\sigma, 2) \times \sigma)$. On ne peut donc pas utiliser ce foncteur de Jacquet pour différencier un sous-quotient irréducible de $l(\sigma, 2) \times \sigma$.

References

[1] P. Deligne & G. Lusztig – "Representations of reductive groups over finite fields", Annals of Math. **103** (1976), 103–161.

[2] R. Dipper – "On the decomposition numbers of the finite general linear groups. II", *Trans. Amer. Math. Soc.* **292** (1985), no. 1, p. 123–133.

[3] ———, "On quotients of Hom-functors and representations of finite general linear groups. I", *J. Algebra* **130** (1990), no. 1, p. 235–259.

[4] ———, "On quotients of Hom-functors and representations of finite general linear groups. II", *J. Algebra* **209** (1998), p. 199–269.

[5] R. Dipper & J. Du – "Harish-Chandra vertices", *J. Reine Angew. Math.* **437** (1993), p. 101–130.

[6] R. Dipper & P. Fleischmann – "Modular Harish-Chandra theory. I", *Math. Z.* **211** (1992), no. 1, p. 49–71.

[7] R. Dipper & G. James – "Identification of the irreducible modular representations of $\mathrm{GL}_n(q)$", *J. Algebra* **104** (1986), no. 2, p. 266–288.

[8] J. A. Green – "The characters of the finite general linear groups", *J. Algebra* **184** (1996), no. 3, p. 839–851.

[9] G. Hiss – "Supercuspidal representations of finite reductive groups", *Trans. Amer. Math. Soc.* **80** (1955), p. 402–447.

[10] ———, "On Harish-Chandra induction and restriction for modules of Levi subgroups", *J. Algebra* **165** (1994), no. 1, p. 172–183.
[11] G. James – *Representations of general linear groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 94, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
[12] G. James – "The irreducible representations of the finite general linear groups", *Proc. London Math. Soc. (3)* **52** (1986), no. 2, p. 236–268.
[13] A. Mínguez & V. Sécherre – "Représentations banales de $\mathrm{GL}(m, D)$", *Compos. Math.* **149** (2013), p. 679–704.
[14] ———, "Représentations lisses modulo ℓ de $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$", Duke Math. J. **163** (2014), p. 795–887.
[15] P. Schneider & E.-W. Zink – "K-types for the tempered components of a p-adic general linear group", *J. Reine Angew. Math.* **517** (1999), p. 161–208. With an appendix by P. Schneider and U. Stuhler.
[16] J.-P. Serre – *Linear representations of finite groups*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 42.
[17] M.-F. Vignéras – "Représentations l-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $l \neq p$", Progress in Mathematics, vol. 137, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.
[18] ———, "Induced R-representations of p-adic reductive groups", *Selecta Math. (N.S.)* **4** (1998), no. 4, p. 549–623. With an appendix by Alberto Arabia.
[19] ———, "Schur algebras of reductive p-adic p-adics groups I", *Duke. Math. J.* **116** (2003), no. 1, p. 35–75.
[20] A. Zelevinski – "Representations of Finite Classical Groups. A Hopf Algebra Approach", Lecture Notes in Mathematics, 869. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981.
[21] ———, "Induced representations of reductive $\mathfrak{p}$-adic groups. II. On irreducible representations of $\mathrm{GL}(n)$", *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **13** (1980), no. 2, p. 165–210.

Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 6, 4 place Jussieu, 75005, Paris, France. URL: http://www.math.jussieu.fr/~minguez/
E-mail address: minguez@math.jussieu.fr

Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, Laboratoire de Mathématiques de Versailles, 45 avenue des Etats-Unis, 78035 Versailles cedex, France
E-mail address: vincent.secherre@math.uvsq.fr