ANALYSE

Table des matières

Chapitre 1

Suites numériques

1.1 Raisonnement par récurrence

Proposition 1.1.1 *Soient n un entier naturel et $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant de n. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Si les deux énoncés suivants sont vérifiés, à savoir :*

(i) $\mathcal{P}(n_0)$ *est vraie,*
(ii) *Pour chaque entier $k \geqslant n_0$, si $\mathcal{P}(k)$ est vraie alors $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie,*

alors la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.
Ce raisonnement s'appelle **raisonnement par récurrence***.*

Exemple 1.1.2

Démontrons par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ S_n := \sum_{p=0}^{n}(3p+1) \ = \ \frac{3n^2+5n+2}{2}.}$$

Posons la propriété suivante : $\mathcal{P}(n)$: $S_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(3k+1) \ = \ \frac{3n^2+5n+2}{2}$.

(i) $S_0 := 3 \times 0 + 1 = 1$ et $\dfrac{3 \times 0^2 + 5 + 2}{2} = 1$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

(ii) Soit k un entier naturel tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Calculons $S_{k+1} := \displaystyle\sum_{p=0}^{k+1}(3p+1)$.

$S_{k+1} = S_k + (3(k+1)+1)$. Or d'après l'hypothèse sur $\mathcal{P}(k)$, on a : $S_k \ = \ \dfrac{3k^2+5k+2}{2}$, donc

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{3k^2+5k+2+2\left((3(k+1)+1)\right)}{2} \\ &= \frac{3(k^2+2k+1)+5(k+1)+2}{2} \\ &= \frac{3(k+1)^2+5(k+1)+2}{2}. \end{aligned}$$

Donc la propriété $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion (i) et (ii) sont vraies, donc on peut conclure que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

1.2 Généralités sur les suites

Définition 1.2.1 *On appelle suite réelle une famille de réels indexée par des entiers naturels, c'est à dire une application de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$. *La suite* $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array} \right.$ *est notée* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou* (u_n) *et le réel* $u(n)$ *est noté* u_n *et est appelé terme d'indice* n.

Remarque 1.2.2 *Dans la pratique, une suite peut être définie de* $\mathbb{N}^*$ *dans* $\mathbb{R}$. *On note alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. *Plus généralement on peut considérer* $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ *avec* $n_0 \in \mathbb{N}$. *Dans ce cours, pour simplifier les énoncés, on ne considère que des suites définies sur* $\mathbb{N}$.

Différentes façons de définir une suite
• *Explicitement* : si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que $\mathbb{N} \subset D_f$ alors la restriction de f à $\mathbb{N}$ est une suite $u = f|\mathbb{N}$. Elle est définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$

• *Par récurrence simple* : si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie sur une partie D telle que $f(D) \subset D$ et si $x \in D$ est fixé. On définit une suite u par

$$\begin{cases} u_0 & = & x \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$$

La condition $f(D) \subset D$ signifie que $\forall x \in D, f(x) \in D$. On dit que D est stable par f. Cette condition est indispensable pour définir u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. La donnée de u_0 est aussi indispensable pour commencer la suite.

• *Par récurrence d'ordre* k : On se donne les k premiers termes et puis chaque terme de la suite est fonction des k termes qui le précédent.

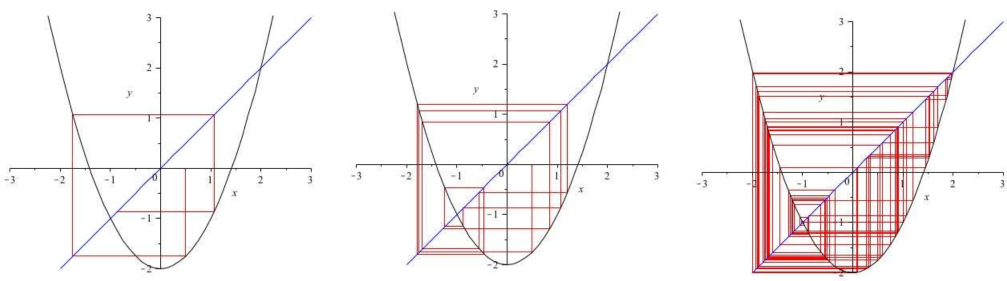
Méthode pour représenter $u_{n+1} = f(u_n)$. Traitons l'exemple de

$$\begin{cases} u_0 & = & 1/2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} & = & u_n^2 - 2 \end{cases}$$

donc $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \mapsto x^2 - 2$

1. Placer u_0 sur l'axe des abscisses
2. Aller sur la courbe et lire u_1 : en effet u_1 est l'image de u_0 par f
3. Aller sur la droite d'équation $y = x$ pour transformer u_1 qui est une ordonnée (y) en une abscisse (x)
4. recommencer en prenant u_1 comme point de départ et non plus u_0

Voici ce qu'on obtient avec Maple en représentant 4 puis 30 puis 120 termes



Définition 1.2.3 *La suite (u_n) est dite :*

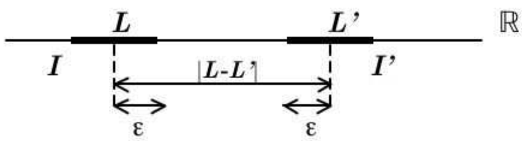
1) **constante** *si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.
2) **croissante** *si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
3) **décroissante** *si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
4) **strictement croissante** *si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.
5) **strictement décroissante** *si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.
6) **monotone** *si elle est croissante ou décroissante.*
7) **strictement monotone** *si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*
8) **majorée** *si* $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.
9) **minorée** *si* $\exists m \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$.
10) **bornée** *si elle est majorée et minorée.*
11) **stationnaire** *si elle est constante à partir d'un certain rang ie :* $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N$, $u_{n+1} = u_n$.

1.3 Limite d'une suite

Définition 1.3.1 (suite convergente) *On dit qu'une suite de réels (u_n) converge vers le réel L lorsque tous ses termes sont aussi proches que l'on veut de L pourvu que l'on prenne ces termes à partir d'un rang assez grand. Autrement dit si :*

Théorème 1.3.2 *Si (u_n) converge vers un réel L et vers un réel L' alors $L = L'$. On note alors $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou aussi $L = \lim(u_n)$ ou encore $L = \lim u$.*

Preuve : par l'absurde. supposons que $L \neq L'$. L'idée et d'exihber deux intervalles I et I' centrés respectivement en L et L' et assez petits pour que $I \cap I' = \varnothing$, puis appliquer la définition à I et I'.



Il existe alors un entier N_1 tel que pour $n \geqslant N_1, u_n \in I$. Mais aussi il existe un entier N_2 tel que pour $n \geqslant N_2, u_n \in I'$. Au bilan pour n assez grand u_n est à la fois dans I et dans I', ce qui est impossible. ∎

Définition 1.3.3 (suite divergente) *S'il n'existe aucun réel L vers lequel converge la suite (u_n), on dit que la suite diverge. (Il y a donc deux cas soit (u_n) n'a pas de limite soit (u_n) tend vers $\pm\infty$).*

Définition 1.3.4 (Limites infinies) *Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si u_n est aussi grand que l'on veut à partir d'un certain rang, c'est à dire :*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists\, N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_0,\ \ u_n > A.$$

On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists\, N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_0,\ \ u_n < A$$

Théorème 1.3.5 *Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.*

PREUVE : Prenons par exemple $\epsilon = 1$ dans la définition d'une suite convergente : pour n assez grand (disons $n > N$) tous les u_n sont dans $[L-1, L+1]$. Il ne reste qu'un nombre fini de termes : $u_0, u_1, \cdots, u_N$ sui sont évidemment bornés eux aussi. Pour la réciproque considérer la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$. ∎

1.4 Opérations sur les limites

FI : veut dire Forme Indéterminée

Limite d'une somme

$\lim u$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(u+v)$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Limite d'un produit

$\lim u$	L	$L>0$	$L>0$	$L<0$	$L<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim v$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim(u \times v)$	LL'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Limite d'un quotient si le dénominateur a une limite non nulle

$\lim u$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim v$	$L' \neq 0$	$\pm\infty$	$L'>0$	$L'<0$	$L'>0$	$L'<0$	$\pm\infty$
$\lim(u/v)$	L/L'	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Limite d'un quotient si le dénominateur a une limite nulle : on doit étudier le signe du dénominateur

$\lim u$	$L>0$ ou $+\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	0
$\lim v$	0 en restant >0	0 en restant <0	0 en restant >0	0 en restant <0	0
$\lim(u/v)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

1.5 Théorèmes de convergence

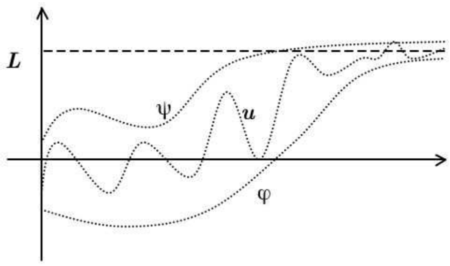
Théorème 1.5.1 (Passage à la imite dans une inégalité) *Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes respectivement vers L et L' et si $u_n < v_n$ pour tout n à partir d'un certain rang. Alors $L \leqslant L'$ (et pas du tout $L < L'$).*

PREUVE : Par l'absurde. Supposer que $L > L'$ et séparer ces deux réels par deux intervalles disjoints. Conclure comme pour la preuve de l'unicité de la limite. ∎

Remarque 1.5.2

La suite $(1/n)_{n>0}$ vérifie $u_n > 0$ pour tout $n > 0$ pourtant sa limite est nulle. On voit bien que les inégalités strictes ne restent pas strictes après passage à la limite.

Théorème 1.5.3 (Théorème des gendarmes) *Soit $(\varphi_n), (u_n), (\psi_n)$ trois suites réelles telles que pour n assez grand (à partir d'un certain rang) on a $\varphi_n \leqslant u_n \leqslant \psi_n$ et que (φ_n) et (ψ_n) ont même limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$ où $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, alors (u_n) possède la même limite L.*



Remarque 1.5.4

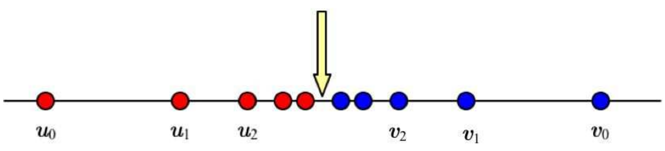
Les suites φ et ψ sont les « gendarmes » du théorème. Elle emmènent de force la suite u vers la limite L. Dans le cas de limites infinies, seul un gendarme est utile : Si $\varphi_n \leqslant u_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim \varphi_n = +\infty$ alors nécessairement $\lim u_n = +\infty$; pas besoin de ψ. A l'inverse si $u_n \leqslant \psi_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim \psi_n = -\infty$ alors nécessairement $\lim u_n = -\infty$; pas besoin de φ.

Preuve : Seul le cas de limite finie L est intéressant. La méthode est toujours la même. Soit $\epsilon >$ fixé. A partir d'un certain rang N_1, φ_n reste dans $I =]L-\epsilon, L+\epsilon[$. A partir d'un certain autre rang N_2, ψ_n reste aussi dans I. A partir d'un certain rang N_3, u_n est compris entre φ_n et ψ_n. Posons $N_0 = \max(N_1, N_2, N_3)$. Alors pour tout $n \geqslant N_0$, on a $u_n \in I$. ∎

Théorème 1.5.5 (Convergence des suites monotones) *Toute suite croissante majorée est convergente et toute suite décroissante minorée est convergente.*

Définition 1.5.6 (Suites adjacentes) *On dit que deux suites réelles sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et leur différence tend vers 0.*

Lemme 1.5.7 *Soit (u, v) un couple de suites adjacentes avec u croissante. Alors pour tout n on a $u_0 \leqslant u_1 \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant \ldots \leqslant v_1 \leqslant v_0$*



Preuve : Il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$. raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe n_0 tel que $u_{n_0} > v_{n_0}$. Montrer alors que pour tout $n \geqslant n_0$ on a $u_n - v_n > u_{n_0} - v_{n_0}$. Aboutir à une contradiction en passant à la limite. ∎

Théorème 1.5.8 *Deux suites adjacentes convergent et admettent la même limite.*

PREUVE : Soit (u, v) un couple de suites adjacentes avec u croissante. Utiliser le lemme pour montrer que (u_n) est majorée (par v_0 par exemple) et que (v_n) est minorée (par u_0). Utiliser le théorème de convergence monotone pour en conclure qu'elle convergent vers L et L'. Utiliser enfin le fait que $u_n - v_n$ tend vers 0 pour voir que $L = L'$. ∎

1.6 Suites arithmétiques

Définition 1.6.1 *On appelle suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ toute suite (u_n) telle que*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r.}$$

Proposition 1.6.2 *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$, alors on a*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr.}$$

PREUVE : Soit (x_n) une suite arithmétique de raison r. Soit $\mathcal{P}_n : x_n = x_0 + nr$. $\mathcal{P}_0$ est vraie. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un entier naturel n, alors $u_{n+1} = u_n + r = u_0 + nr + r = u_0 + (n+1)r$ donc $\mathcal{P}_{n+1}$. Le raisonnement par récurrence nous permet de dire que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ∎

Sens de variation
- Si $r > 0$ la suite arithmétique de raison r est strictement croissante
- Si $r < 0$ la suite arithmétique de raison r est strictement décroissante
- Si $r = 0$ la suite arithmétique de raison r est constante

Série arithmétique : si u est une suite arithmétique on peut considérer sa série associée *i.e.* la suite (S_n) définie par $S_n = u_0 + u_1 + \ldots, +u_n$. On a les formules suivantes :

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\,\frac{u_0 + u_n}{2}}$$

En particulier on a

$$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

En effet, l'astuce classique consiste à sommer une seconde fois « à l'envers » :

$$\begin{cases} S_n & = & u_0 + \ldots, +u_n \\ S_n & = & u_n + \ldots, +u_0 \end{cases}$$

donc en additionnant ces deux lignes on obtient $2S = (n+1)(u_0 + u_n)$ d'où la formule.

1.7 Suites géométriques

Définition 1.7.1 *On appelle* **suite géométrique** *de raison $q \in \mathbb{R}^\star$ toute suite (v_n) telle que :*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = q.v_n.}$$

Proposition 1.7.2 *Soit (v_n)* **une suite géométrique de raison** *$q \in \mathbb{R}$, alors o a , on a :*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\, v_n = v_0 q^n.}$$

PREUVE : Soit (v_n) une suite géométrique de raison q. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $v_n = v_0 q^n$. $\mathcal{P}_0$ est vraie. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un entier naturel n, alors $v_{n+1} = qu_n = qv_0q^n = v_0q^{n+1}$ donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Le raisonnement par récurrence nous permet de dire que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ∎

Série géométrique si v est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ on peut considérer sa série associée *i.e.* la suite (S_n) définie par $S_n = v_0 + v_1 + \ldots, +v_n$. On a les formules suivantes :

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

En particulier on a

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

En effet, $S_n = v_0 + v_1 + \ldots, +v_n = v_0 S'_n$ avec $S'_n = 1 + q + q^2 \ldots + q^n$. On a ensuite $qS'_n = q + q^2 + q^n + q^{n+1} = (S'_n - 1) + q^{n+1}$. Donc

$$qS'_n - S'_n = -1 + q^{n+1}$$

D'où $(q-1)S'_n = q^{n+1} - 1$ ce qui donne le résultat après division par $q - 1 \neq 0$

Lemme 1.7.3 (Inégalité de Bernoulli) *Soit $x \in]-1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors*

$$\boxed{(1+x)^n \geqslant 1 + nx}$$

PREUVE : Par récurrence : Pour $n = 1$ on a $(1+x)^1 = 1 + x = 1 + 1 \times x$. Supposons que pour un entier n on a $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$, on aura $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geqslant (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geqslant 1 + (n+1)x$. ∎

Théorème 1.7.4 (Limite d'une suite géométrique) *Soit (v_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}^\star$, alors on a :*
1) *Si $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.*
2)*Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.*
3) *Si $q \leqslant -1$, (v_n) n'a pas de limite.*
4) *Si $q = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v_0$. (La suite (v_n) est constante.)*

PREUVE : Pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n$. Il suffit donc de calculer la limite de (q^n). Pour le 1) on prend $x = q - 1$ dans l'inégalité de Bernoulli. Pour le 2) on applique le 1) avec $\dfrac{1}{|q|} > 1$ si $q \neq 0$. Pour le 3) car $q^n = (-1)^n|q|^n$ n'a pas de limite et pour le 4) la suite est constante égale à v_0. ∎

Définition 1.7.5 (suite arithmético-géométrique) *On appelle suite arithmético-géométrique toute suite* $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *définie par une relation de récurrence de la forme :* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$ *où* a, b *sont deux éléments de* $\mathbb{R}$. *(Remarquer que pour* $a = 1$ *on retrouve les suite arithmétiques et pour* $b = 0$ *les suites géométriques.)*

Théorème 1.7.6 (structure des suites arithmético-géométrique) *Soit* (u_n) *une suite définie par récurrence par* $u_{n+1} = au_n + b$. *On suppose* $a \neq 1$. *Alors l'équation* $ax + b = x$ *possède une unique solution* x_0 *et la suite définie par* $v_n = u_n - x_0$ *est géométrique de raison* a.

Preuve : Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n, en utilisant le fait que $u_n = v_n - x_0$. ∎

Corollaire 1.7.7 *Soit* (u_n) *une suite définie par récurrence par* $u_{n+1} = au_n + b$. *On suppose* $a \neq 1$. *Alors* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda a^n - \frac{b}{1-a}$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$. *En particulier* (u_n) *converge si et seulement si* $|a| < 1$ *et dans ce cas sa limite est* $-\frac{b}{1-a}$.

Chapitre 2

Limites et continuité

2.1 Relation d'ordre et opérations dans $\mathbb{R}$

Proposition 2.1.1 (compatibilité de $\leqslant$ avec $+$ et $\times$) *La relation d'ordre $\leqslant$ est compatible avec la loi $+$ dans $\mathbb{R}$ et est compatible avec la loi $\times$ dans $\mathbb{R}_+$:*

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \leqslant y \Longrightarrow x + z \leqslant y + z$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}_+ \quad x \leqslant y \Longrightarrow xz \leqslant yz$$

PREUVE : Si $x \leqslant y$ on a $(y + z) - (x + z) = y - x \in \mathbb{R}_+$ et $yz - xz = (y - x)z \in \mathbb{R}_+$ car $\mathbb{R}_+$ est stable par la loi $\times$ (c'est à dire le produit de deux réels de $\mathbb{R}_+$ est un réel de $\mathbb{R}_+$). ∎

Proposition 2.1.2 *On peut ajouter membre à membre deux inégalités dans $\mathbb{R}$ et on peut multiplier membre à membre deux inégalités dans $\mathbb{R}_+$:*

$$\forall x, y, x', y' \in \mathbb{R} \quad [x \leqslant y \quad \text{et} \quad x' \leqslant y'] \Longrightarrow x + x' \leqslant y + y'$$

$$\forall x, y, x', y' \in \mathbb{R}_+ \quad [x \leqslant y \quad \text{et} \quad x' \leqslant y'] \Longrightarrow xx' \leqslant yy'$$

PREUVE : On a $(y + y') - (x + x') = (y - x) + (y' - x')$ et on conclut par stabilité de $\mathbb{R}_+$ par la loi $+$. On a de même $yy' - xx' = y(y' - x') + yx' - xx' = y(y' - x') + (y - x)x'$ et on conclut par stabilité de $\mathbb{R}_+$ par la loi $+$ et par la loi $\times$. ∎

Définition 2.1.3 (droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$) *On appelle droite numérique achevée et on note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ où $-\infty$ et $+\infty$ sont deux éléments, distincts, non réels. On définit une relation d'ordre total sur $\overline{\mathbb{R}}$ qui prolonge celle de $\mathbb{R}$ en posant $-\infty \leqslant x$ et $x \leqslant +\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

2.2 Valeur absolue et distance

Définition 2.2.1 (Valeur absolue d'un réel) *Si $x \in \mathbb{R}$ on définit sa valeur absolue notée $|x|$ par les deux façons équivalentes suivantes :*

$$|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

On montre facilement à l'aide de la définition que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |xy| = |x|\,|y|$$

Le nombre $|x - y|$ s'interprète comme la distance entre les points $M(x)$ et $M(y)$ d'abscisses respectives x et y sur la droite réelle. On a la

Proposition 2.2.2 (Inégalités triangulaires (ou de Minkowski))

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad ||x| - |y|| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|$$

Preuve : Puisque $|x| = \max(x, -x)$ et $|y| = \max(y, -y)$ on a

$$\begin{cases} x & \leqslant & |x| \\ y & \leqslant & |y| \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -x & \leqslant & |x| \\ -y & \leqslant & |y| \end{cases}$$

en ajoutant membre à membre on a $x + y \leqslant |x| + |y|$ et $-(x + y) \leqslant |x| + |y|$, ce qui prouve que $\max(x+y, -(x+y)) \leqslant |x|+|y|$ *i.e.* $|x+y| \leqslant |x|+|y|$. En remplaçant dans cette dernière inégalité y par $-y$ on obtient l'inégalité $|x - y| \leqslant |x| + |y|$. Enfin, dans l'inégalité $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ qu'on vient de montrer, en posant $a = x + y$ et $b = -y$, on aura $|x| \leqslant |x + y| + [y]$ *i.e.* $|x| - |y| \leqslant |x + y|$ puis en posant $a = x + y$ et $b = -x$ on obtient $|y] \leqslant |x + y| + |x|$ *i.e.* $-(|x| - |y|) \leqslant |x + y|$. Il s'ensuit que $||x| - |y|| = \max(-(|x| - |y|), |x| - |y|) \leqslant |x + y|$. En remplaçant y par $(-y)$ dans cette dernière inégalité on trouve $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$. ∎

Proposition 2.2.3 *Pour tous réels a et b on a :*

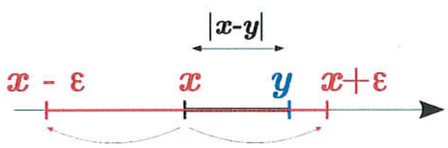
$$\min(a, b) = \frac{a + b}{2} - \frac{|b - a|}{2} \quad \text{et} \quad \max(a, b) = \frac{a + b}{2} + \frac{|b - a|}{2}$$

Preuve : il suffit de voir $\frac{a + b}{2}$ comme le milieu de l'intervalle $[\min(a, b), \max(a, b)]$ et $\frac{|b - a|}{2}$ comme la distance qui sépare ce milieu aux extrémités. ∎

Proposition 2.2.4 (Valeur absolue et distance)

Pour tous réels x, y, $|x - y|$ est la distance entre x et y sur la droite réelle et pour tout $\epsilon > 0$ on a les équivalences :

$$\boxed{|x - y| < \epsilon \iff y \in]x - \epsilon, x + \epsilon[\iff x - \epsilon < y < x + \epsilon}$$



2.3 Définitions des limites

La notation « $\lim\limits_{x\longrightarrow a}(f(x) = L$ » recouvre en fait 9 définitions selon que a ou L sont dans $\mathbb{R}$ ou infinis. Il est donc commode de considérer $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$. Ainsi on pourra écrire $(a, L) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ au lieu de distinguer 3 cas à chaque fois.

a/L	$-\infty$	réel	$+\infty$
$-\infty$			
réel			
$+\infty$			

Définition 2.3.1 *Soit I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et soient $a, L \in \overline{\mathbb{R}}$ On dit que f admet la limite L en a lorsque $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de L à condition que x soit assez proche de a (en restant dans I). Remarquons f n'a pas besoin d'être définie en a. On définit de même la limite à droite en a en considérant les x proches de a avec $x > a$ et la limite à gauche en a en considérant les x proches de a avec $x < a$.*

Théorème 2.3.2 (Unicité de la limite) *Si f a pour limite L et L' en a alors $L = L'$. Ainsi si f admet une limite en a, celle-ci est unique, on l'appelle la limite de f en a et on la note* $\lim\limits_a f$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

Preuve : Supposer que $L \neq L'$ et les séparer par deux voisinages sans point commun. ∎

Théorème 2.3.3 (Limites et fonctions bornées) *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.*
1) *Si f admet une limite finie en a alors elle est bornée au voisinage de a.*
2) *Si $\lim\limits_a(f) = 0$ et que g est bornée au voisinage de a, alors $\lim\limits_a(fg) = 0$*

2.4 Opérations sur les limites

La difficulté réside dans le cas des formes indéterminées notées ici FI qu'il faut lever par une astuce algébrique (simplification, factorisation, espèce conjugué, etc ...)

Limite d'une somme

$\lim\limits_a f$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_a g$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_a(f+g)$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Limite d'un produit

$\lim\limits_a f$	L	$L>0$	$L>0$	$L<0$	$L<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_a g$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_a(fg)$	LL'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Limite d'un quotient si le dénominateur a une limite non nulle

$\lim\limits_a f$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_a g$	$L'\neq 0$	$\pm\infty$	$L'>0$	$L'<0$	$L'>0$	$L'<0$	$\pm\infty$
$\lim\limits_a(f/g)$	L/L'	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Limite d'un quotient si le dénominateur a une limite nulle :
on doit étudier le signe du dénominateur

$\lim_a f$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim_a g$	0 en restant > 0	0 en restant < 0	0 en restant > 0	0 en restant < 0	0
$\lim_a(f/g)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

2.5 limites et ordre

Théorème 2.5.1 (Passage à la limite dans une inégalité) *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ telle que $f(x) < g(x)$ pour tout x au voisinage de a. On suppose que f et g admettent des limites en a. Alors*

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad \boxed{\leqslant} \quad \lim_{x\to a} g(x)$$

Théorème 2.5.2 (théorème des gendarmes) *Soient f, g, h trois fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que*

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

pour tout x au voisinage de a et qu'en plus g et h admettent une limite commune $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors f admet en a une limite et $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

2.6 Continuité

Définition 2.6.1 *Soit I un intervalle, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et $a \in I$ (donc f est définie en a). On dit que f est continue en a lorsque*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

autrement dit quand :
Lorsque f est continue en tout point $a \in I$ on dit que f est continue sur I.

Théorème 2.6.2 (Fonctions usuelles) *Sont continues sur leur ensemble de définition :*
la fonction valeur absolue, les fonctions polynômes et rationnelles, les fonctions ln *et exp, les fonctions puissances $x \longmapsto x^\alpha$ (dont racine carrée, racine cubique et inverse), les fonctions trigonométriques* $\cos, \sin, \tan$.

Il résulte des opérations sur les limites :

Théorème 2.6.3 *Si f et g sont des fonctions continues et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors sont continues*

$$f+g, \quad f\times g, \quad \lambda f, \quad f\circ g, \quad \frac{f}{g} \text{ si } g \text{ ne s'annule pas}$$

Corollaire 2.6.4 *Si f est continue alors $|f|$ est aussi continue. En conséquence si f et g sont continues alors $\min(f,g)$ et $\max(f,g)$ sont continues.*

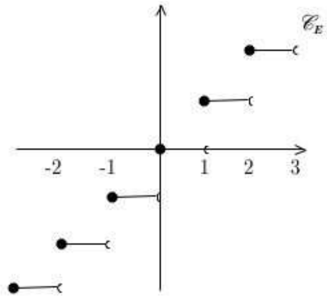
Théorème 2.6.5 (Prolongement par continuité) *Soient a et b deux réels avec $a < b$ et $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $\lim_{x\to b} f(x)$ existe et est finie égale à $L \in \mathbb{R}$. Alors il existe une seule fonction continue $\tilde{f}$ qui prolonge f sur $[a,b]$. On dit que $\tilde{f}$ est le prolongement par continuité de f en b. Cette fonction $\tilde{f}$ est définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad a \leqslant x < b \\ L & \text{si} \quad x = b \end{cases}$$

Exemple 2.6.6

1) la fonction $f : x \to \frac{\sin(x)}{x}$ est prolongé en 0 par $f(0 = 0$
2) la fonction $x \to x\ln(x)$ est prolongée en 0 par $f(0) = 0$

Exemples de fonctions non continues :
La fonction partie entière. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$. On dit que n est la partie entière (par défaut) de x et on le note $E(x)$. Pour montrer que E n'est pas continue en 1 par exemple, il suffit de constater que $E(0,99999) = 0$ et $E(1,000000001) = 1$ ou plus rigoureusement que $\lim\limits_{x\to 1^-} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} = 1$. ainsi E est définie en 1 avec $E(1) = 1$ mais n'a pas de limite en 1 : elle n'est pas continue en 1(on dit seulement qu'elle est continue à droite en 1 car $\lim\limits_{x\to 1^+} = E(1)$). Plus généralement, E n'est pas continue en n si $n \in \mathbb{Z}$. Sa représentation graphique en forme d'escalier le montre bien.



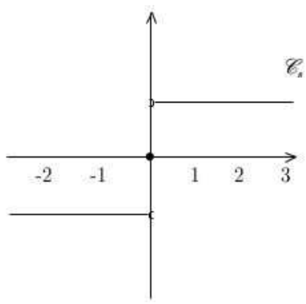
La fonction signe. Pour chaque réel x on pose

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

de sorte que sgn(x) rend compte du signe de x. Remarquons que pour $x \neq 0$ on a

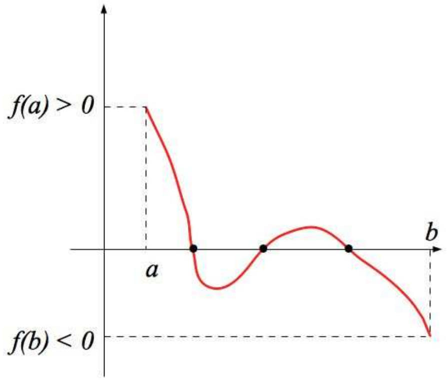
$$\text{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}$$

La fonction sgn n'est pas continue en 0.



2.7 Théorème des valeurs intermédiaires

Le célèbre théorème des valeurs intermédiaires peut s'énoncer de plusieurs façons. la plus concrète est celle illustrée par le dessin ci-dessous et qui a été utilisée par le mathématicien tchèque B. BOLZANO (1781-1848)



Théorème 2.7.1 (TVI version 1) *Soient a, b deux réels et f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(a)f(b) < 0$ i.e. que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. Alors f s'annule au moins une fois entre a et b i.e. l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a, b]$*

Remarque 2.7.2

Pour preuve que ce théorème n'a rien d'évident et qu'il repose sur une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ qui est celle de la « complétude ». En effet , considérons la fonction

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, x \longrightarrow x^2 - 2$$

Elle est continue sur $\mathbb{Q}$ et $f(0) = -2$ et $f(2) = 2$ sont de signes contraires. pourtant il n'existe aucun $c \in \mathbb{Q}$ tel que $f(c) = 0$ car sinon cela vaudrait dire que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Théorème 2.7.3 (TVI général) *Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a et b avec $a < b$. Alors f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ i.e. pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.*

Preuve : Soit k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ et posons $g(x) = f(x) - k$. La fonction g est bien sûr continue sur I. On a $g(a)$ et $g(b$ de signes contraires car k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Le TVI de Bolzano s'applique et g s'annule en un $c \in [a, b]$ *i.e.* $f(c) = k$. ■

Remarque 2.7.4 *Si en plus f est strictement monotone sur $[a, b]$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a, b]$, pour tout réel k choisi entre $f(a)$ et $f(b)$.*

Théorème 2.7.5 (théorème de bijection) *Soit f une fonction continue, strictement monotone sur un intervalle I alors f est une bijection de I sur $f(I)$ et*

1) *f étant strictement croissante sur I*
   - *si $I = [a, b]$ alors $f(I) = [f(a), f(b)]$*
   - *si $I =]a, b[$ alors $f(I) =]\lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f[$*
   - *si $I =]a, b]$ alors $f(I) =]\lim_{a^+} f, f(b)]$*
   - *si $I = [a, b[$ alors $f(I) = [f(a), \lim_{b^-} f[$*
2) *f étant strictement décroissante sur I*
   - *si $I = [a, b]$ alors $f(I) = [f(b), f(a)]$*
   - *si $I =]a, b[$ alors $f(I) =]\lim_{b^-} f, \lim_{a^+} f[$*
   - *si $I =]a, b]$ alors $f(I) =]f(b), \lim_{a^+} f]$*
   - *si $I = [a, b[$ alors $f(I) =]\lim_{b^-} f, f(a)]$*

où $a < b$ désignent deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

Chapitre 3

Dérivation

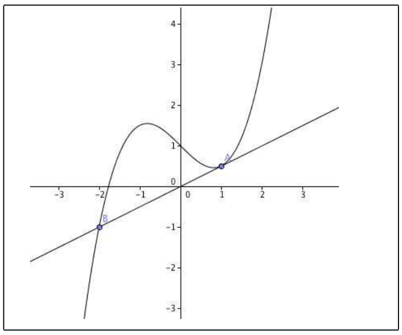
3.1 Dérivation en un point, fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si A et B sont deux pointsde sa courbe $\mathcal{C}_f$, la droite (AB) est appelée **une corde**.

Le coefficient directeur de cette droite est

$$\frac{y_B - y_1}{x_B - x_1} = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$$

c'est le **taux d'accroissement** de f entre x_A et x_B



L'idée du Calcul différentiel est de considérer un point fixe A (d'abscisse a) sur la courbe, et un point mobile M (d'abscisse x) lui aussi sur la courbe et de « faire tendre » M vers A (*i.e.* faire tendre x vers a).

Définition 3.1.1 *Soit f une fonction numérique définie sur un voisinage d'un réel a (i.e. au moins sur un intervalle ouvert contenant a). On dit que f est dérivable en a lorsque le taux d'accroissement de f entre a et x :*

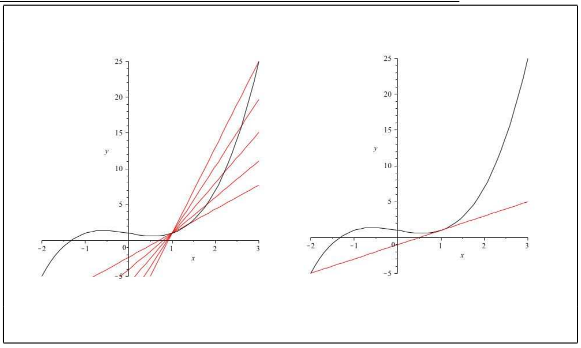
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite **finie** *quand x tend vers a (avec $x \neq a$). Cette limite, si elle existe est appelée nombre dérivée de f en a et est notée $f'(a)$:*

$$\boxed{f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

Interprétation graphique.

Le taux d'accroissement de f entre x et a est le coefficient directeur de la corde (AM). Si on fait tendre x vers a, on constate intuitivement que cette corde tend à devenir une tangente à la courbe au point d'abscisse a : si f est dérivable en a, le coefficient directeur de cette tangente sera la limite du taux d'accroissement *i.e.* le nombre $f'(a)$. Comme ce nombre est fini **la tangente ne pourra pas être verticale**



Définition 3.1.2 (fonction dérivée) *Si f est une fonction dérivable en tout point de l'intervalle I, on dit que f est dérivable sur I. L'application $a \longmapsto f'(a)$ est notée f' et est appelé la fonction dérivée ou la dérivée de f sur I.*

Il arrive que le taux d'accroissement n'a pas de limite en a mais admet seulement une limite à gauche ou à droite en a. On obtient alors la notion de dérivée à gauhe ou à droite.

Définition 3.1.3 *Si le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite à gauche (resp. à droite) en a, on dit que f est dérivable à gauche (resp. à droite) en a et on note*

$$f'_g(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad f'_d(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Exemple de fonctions non dérivables
1) la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ en 0 : tangente verticale
2) la fonction $x \longmapsto |x|$ en 0 : deux demi-tangentes différentes
3) La fonction $f : x \longmapsto x\sin(\frac{1}{x})$(complété par $f(0) = 0$) : pas de demi-tangentes.

Autre expression du taux d'accroissement. Parfois il est plus commode de poser $h = x - a$: c'est l'écart entre x et a. Le nombre h tend vers 0 quand x tend vers a. Le taux d'accroissement de f en a devient alors

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Le nombre dérivé de f en a est alors

$$\boxed{f'(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

3.2 Approximation affine

Puisque le coefficient directeur de la tangente $(\mathcal{T}_a)$ à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a est donné par le nombre dérivé $f'(a)$ alors une équation de cette tangente est de la forme $y = f'(a)x + p$. Or, comme le point $A(a, f(a)) \in (\mathcal{T}_a)$, on a $p = f(a) - af'(a)$ et par suite cette tangente a pour équation

$$\boxed{(\mathcal{T}_a) : y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

Le théorème qui suit dit en substance qu'une fonction est dérivable en a ssi la courbe de f « ressemble » à la tangente au point d'abscisse a, tout au moins au voisnage de a :

Théorème 3.2.1 (de l'approximation affine) *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Pour que f soit dérivable en $a \in I$ il faut et il suffit qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ et une fonction ϵ définie sur un voisinage U de a et de limite nulle en a tels que pour tout $x \in U \cap I$ on ait*

$$f(x) = f(a) + m(x-a) + (x-a)\epsilon(x)$$

Et dans ce cas on a $m = f'(a)$.

PREUVE : Supposons f dérivable en a et posons pour tout $x \in I$

$$\epsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) & \text{si} \quad x \neq a \\ 0 & \text{si} \quad x = a \end{cases}$$

quand x tend vers a la fonction ϵ tend vers 0 et on a bien $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\epsilon(x)$. Inversement, si $f(x) = f(a) + m(x-a) + (x-a)\epsilon(x)$ on a bien la limite du taux d'accroissement de f en a qui vaut m. ∎

Corollaire 3.2.2 *Si f est dérivable en a alors f est continue en a*

PREUVE : On écrit l'approximation affine de f en a et on fait tendre x vers a on aura $\lim_a(f) = f(a)$. ∎

Remarque 3.2.3 *La réciproque est bien sûr fausse comme le prouvent la fonction $x \longrightarrow |x|$ ou $x \longrightarrow \sqrt{x}$ qui sont continues en 0 mais non dérivables. Il est aussi à signaler que* K. WEIERSTRASS *a inventé à la fin du* XIX*e siècle une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et nulle part dérivable : bien sûr cette fonction ne peut pas être tracé.*

3.3 Fonctions dérivées des fonctions usuelles

D_f	$f(x)$	$f'(x)$	$D_{f'}$
$\mathbb{R}$	$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}_+^*$	$x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$(-1)x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\mathbb{R}_+$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\mathbb{R}$	$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$	$\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$\mathbb{R}^*$
$\mathbb{R}$	$\|x\|$	$\frac{x}{\|x\|}$	$\mathbb{R}^*$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}_+^*$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\mathbb{R}_+^*$	$\log_a(x)(a > 0, a \neq 1)$	$\frac{1}{\ln(a)x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$	$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$	$x \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$

3.4 Opérations sur les fonctions dérivées

Théorème 3.4.1

1) **Somme et produit** : si u et v sont deux fonctions dérivables en a et si λ est un réel quelconque alors les fonctions $u + \lambda v$ et $u \times v$ sont dérivables en a et on a : $(u + \lambda v)'(a) = u'(a) + \lambda v'(a)$ et $(u \times v)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$ autrement dit :

$$\boxed{(u + \lambda v)' = u' + \lambda v' \quad \text{et} \quad (u \times v)' = u'v + uv'}$$

2) **Inverse et quotient** : si u et v sont deux fonctions dérivables en a telles que $v(a) \neq 0$ alors les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables en a et on a : $\left(\frac{1}{v}\right)'(a) = -\frac{v'(a)}{v^2(a)}$ et $\left(\frac{u}{v}\right)'(a) = \frac{u'(a)v(a) - u(a)v'(a)}{v^2(a)}$ autrement dit

$$\boxed{\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

3) **Composée** : si $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable en $a \in I$ et si f est une fonction dérivable en $u(a)$. Alors la fonction $f \circ u$ définie par $(f \circ u)(x) = f(u(x))$ est dérivable en a et on a

$$\boxed{(f \circ u)'(a) = u'(a) \times f'(u(a)) \qquad i.e. \qquad (f \circ u)' = u' \times (f' \circ u)}$$

En appliquant ce théorème et en composant les fonctions usuelles par une fonction u dérivable on obtient en particulier :

$$\boxed{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}} \qquad \boxed{(\ln(u))' = \frac{u'}{u}} \qquad \boxed{(e^u)' = u'e^u}$$

et pour les fonctions trigonométriques :

$$\boxed{(\cos(u))' = -u' \times \sin(u)} \qquad \boxed{(\sin(u))' = u' \times \cos(u)}$$

$$\boxed{(\tan(u))' = u' \times (1 + \tan^2(u)) = \frac{u'}{\cos^2(u)}}$$

Dérivée d'une réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I : f est donc bijective de I sur l'intervalle $J = f(I)$. Si f est dérivable en $a \in I$ et que $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et :

$$\boxed{(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}}$$

3.5 Dérivée et sens de variation

Théorème 3.5.1 (de la dérivée nulle) *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I.*

Remarque 3.5.2

Le théorème est faux si I n'est pas un intervalle. La fonction $x \longrightarrow \frac{x}{|x|}$ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}^*$ mais n'est pas constante.

Théorème 3.5.3 (de monotonie) *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) *f est croissante sur I*
(2) *$f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$*
Enoncé analogue pour les fonctions décroissantes sur I : f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$.

Remarque 3.5.4

Le théorème est faux si I n'est pas un intervalle. La fonction $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ a une dérivée négative sur $\mathbb{R}^*$ mais n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

3.6 Plan d'étude de fonctions

1) $\boxed{\text{Recherche de l'ensemble de définition}}$ (s'il n'est pas donné) : pour quelles valeurs de x le nombre $f(x)$ a-t-il un sens ?

2) $\boxed{\text{Réduction de l'intervalle d'étude}}$, en complétant par des symétries :
   (a) Périodicité : $\forall x \in D, f(x+T) = f(x)$: on étudie sur $[0, T]$ ou sur $[-T/2, T/2]$
   (b) Parité : $\forall x \in D, f(-x) = \pm f(x)$: on étudie sur $D \cap \mathbb{R}_+$
   (c) Parité généralisée : $\forall x \in D, f(2a - x) = \pm f(x)$: on étudie sur $D \cap [a, +\infty[$

   Attention : On commence par vérifier que D se prête bien à cette étude : il n'a pas de sens de chercher si une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ est périodique ou si une fonction définie sur $[1, +\infty$ est paire.

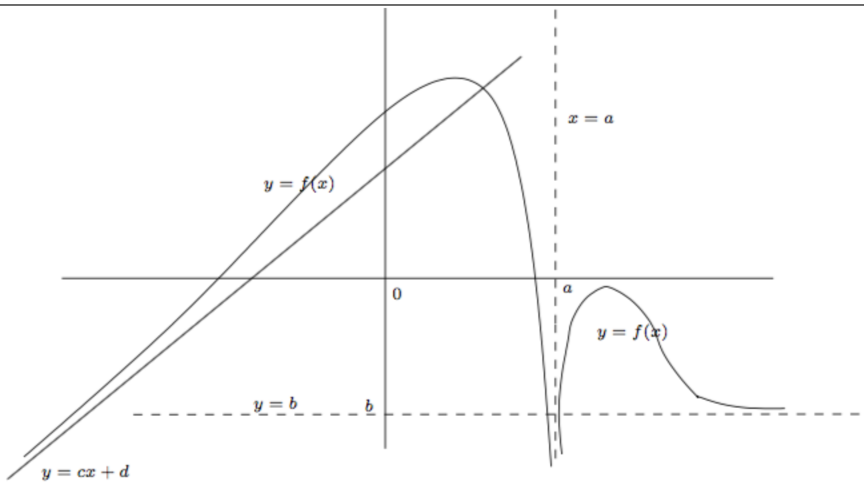
3) $\boxed{\text{Etude des limites aux bornes de l'ensemble de définition}}$: il faut le faire avant l'étude des variations

4) $\boxed{\text{Etude des variations}}$: dans la plupart des cas on étudie le signe de la dérivée :
   a) On justifie que f est dérivable sur un intervalle I (à préciser) et on écrite $\forall x \in I, f'(x) = \cdots$
   b) On factorise le plus possible l'expression de $f'(x)$ pour étudier son signe, grâce à un tableau de signe si besoin est.
   c) On cite le théorème de stricte monotonie : $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ sauf en un nombre finie de points, donc f est strictement croissante sur l'intervalle I
   d) On dresse le tableau résumant le signe de f', les variations de f ainsi que ses limites.

   Attention :
   - ce dernier théorème est faux si I n'est pas un intervalle.
   - Parfois il est inutile de dériver, comme pour $x \longrightarrow e^{\frac{-3}{x^2+3}}$ sur $\mathbb{R}_+$ par exemple.

5) $\boxed{\text{Etude des branches infinies :}}$ supposons $\lim\limits_{\omega} f = c$
   a) Si $\omega = \pm\infty$ et $c \in \mathbb{R}$, il y a une asymptote horizontale d'équation $y = c$.
   b) Si $\omega \in \mathbb{R}$ et $c = \pm\infty$, il y a une asymptote verticale d'équation $x = \omega$.
   c) Si $\omega = \pm\infty$ et $c = \pm\infty$, on recherche $a = \lim\limits_{x\to\omega} \dfrac{f(x)}{x}$:
      i) Si $a = \pm\infty$ on dit qu'il y a une branche parabolique de direction (Oy)
      ii) Si $a \in \mathbb{R}$ on cherche $b = \lim\limits_{x\to\omega} (f(x) - ax)$:
         1. Si $b = \pm\infty$ on dit qu'il y a une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = ax$
         2. Si $b \in \mathbb{R}$ il y a une asymptote d'équation $y = ax + b$

6) $\boxed{\text{Tracé de la courbe}}$ de f dans un repère du plan
   a) On marque les axes : x, y (ou autres $\cdots$), les unités graphiques
   b) On trace les asymptotes et on étudie les positions relatives
   c) On marque les tangentes horizontales ($f'a) = 0$) et verticales (f'$tendvers\infty$)
   d) On calcule les coordonnées des points d'intersection avec es axes et les éventuelles asymptotes


$x = a$
$y = f(x)$
0
a
$y = f(x)$
$y = b$
b
$y = cx + d$

Chapitre 4

Fonctions usuelles

4.1 La fonction valeur absolue

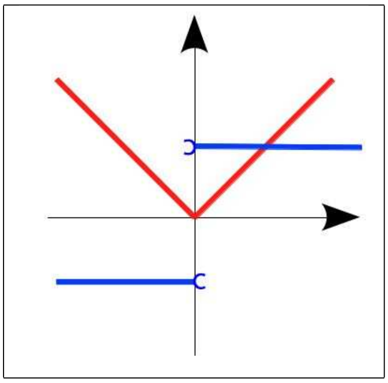
Définition 4.1.1 (Valeur absolue d'un réel) *Si $x \in \mathbb{R}$ on définit sa valeur absolue notée $|x|$ par les deux façons équivalentes suivantes :*

$$|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Propriétés analytiques

1) La fonction $x \longmapsto |x|$ est positive et paire,
2) strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$
3) continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ mais n'est pas dérivable en 0
4) sa dérivée vaut 1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et -1 sur $\mathbb{R}_-^*$
5) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a :
$|x| = |y| \iff y = \pm x\,;\ -|x| \leqslant x \leqslant |x| \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2} = |x|.$

$|xy| = |x||y| \quad \text{et si} \quad x \neq 0 \quad \text{alors} \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}.$



4.2 Fonctions polynômes

Définition 4.2.1 (Fonction polynôme) *On appelle fonction polynôme (ou polynomiale) réelle, toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

où $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$. Si tous les a_k sont nuls on dit que f est la fonction nulle et on note $f = 0$. Sinon, le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$ s'appelle le degré de f et on le note $\deg(f)$. Ainsi la fonction nulle n'a pas de degré. Néanmoins, on convient que $\deg(0) = -\infty$. Les fonctions de la forme $f(x) = a_n x^n$ sont appelées fonctions monômes.

Remarque 4.2.2 *Une fonction polynôme f est constante ssi $\deg(f) = 0$ ou $f = 0$. Elle est affine ssi $\deg(f) \leqslant 1$. La courbe de f est une parabole ssi $\deg(f) = 2$.*

Théorème 4.2.3 (Opérations et degré) *Soit f et g deux fonctions polynômes avec* $\deg(f) = n$ *et* $\deg(g) = p$. *Alors $f+g$ et $f \times g$ sont polynomiales et on a*

$$\deg(f+g) \leqslant \max(n,p) \quad \text{et} \quad \deg(f \times g) = n+p$$

Remarque 4.2.4 *Le degré de $f+g$ n'est pas forcément égal à* $\max(n,p)$, *comme le montre l'exemple suivant : $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x^2 + x + 1$. En revanche si f et g sont telles que $n \neq p$ alors* $\deg(f+g) = \max(n,p)$.

Théorème 4.2.5 (dérivée et primitive) *Soit $f : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ une fonction polynôme. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc continue) sur $\mathbb{R}$. La dérivée et les primitives F de f sur $\mathbb{R}$ sont données par : $f' = 0$ si f est constante et sinon*

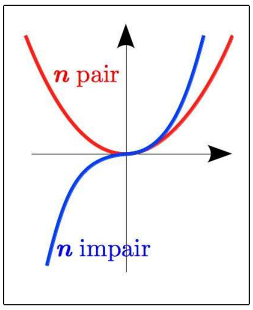
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) : \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \quad \text{et} \quad F(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \text{constante}}$$

Théorème 4.2.6 (Limites en $\pm\infty$)

Soit $f : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ une fonction polynôme.
On suppose que $a_n \neq 0$ de sorte que $\deg(f) = n$. Alors

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n}$$

On retient : les limites de f aux infinis sont celles de son monôme de plus haut degré



4.3 Fonctions rationnelles

Définition 4.3.1 (Fonction rationnelle) *On appelle fonction rationnelle (réelle, d'une variable réelle) toute fonction f définie par $f = \dfrac{P}{Q}$ où P et Q sont deux fonctions polynômes avec Q qui n'est pas la fonction nulle.*

Remarque 4.3.2

1) Les fonctions polynômes P et Q ne sont pas uniques : On a $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{R}{S} \iff PS = QR$
Néanmoins l'entier relatif $\deg(P) - \deg(Q)$ ne dépend pas du choix de P et Q (autrement dit il vaut aussi $\deg(R) - \deg(S)$) : on dit qu'il s'agit du degré de la fonction rationnelle f et on le note $\deg(f)$.
2) Si P et Q sont affines non proportionnels *i.e.* si $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\dfrac{d}{c}\}, \quad f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $ad \neq bc$, on dit que f est une *fonction homographique*. Son degré peut valoir $1, 0$ ou -1
3) *L'ensemble de définition* de $f = \frac{P}{Q}$ est : $D_f = \{x \in \mathbb{R} \quad ; \quad Q(x) \neq 0\}$
4) On démontre que toute fonction rationnelle f peut s'écrire sous la forme $f = \dfrac{P}{Q}$ avec P, Q des polynômes *sans facteurs communs*. Dans ce cas les racines de P sont appelées les *zéros* de f et les racines de Q sont appelées les *pôles* de f.

Théorème 4.3.3 (dérivées) *Soit* $f = \dfrac{P}{Q}$ *une fonction rationnelle. Alors* f *est dérivable (donc continue) sur son ensemble de définition et on a*

$$\boxed{f' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}}$$

ce qui prouve que f' *est rationnelle. De plus si* $\deg(f) = n$ *alors* $\deg(f') \leqslant n - 1$.

Remarque 4.3.4 *L'exemple de* $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ *montre que les primitives d'une fonction rationnelle ne sont pas toujours rationnelles.*

Théorème 4.3.5 (limites en $\pm\infty$) *Soit* $f = \dfrac{P}{Q}$ *une fonction rationnelle. On note* $a_n x^n$ *le monôme de plus haut degré de* P *et* $b_m x^m$ *celui de* Q*. Alors*

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}}$$

On retient : la limite de f *en* $\pm\infty$ *est égale à celle du quotient des monômes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur. En particulier* f *a une limite finie en* $\pm\infty$ *si* $\deg(f) \leqslant 0$.

4.4 La fonction exponentielle

1) La fonction exponentielle notée *exp* est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{exp' = exp \quad \text{et} \quad exp(0) = 1}$$

C'est la seule fonction dérivable à vérifier ces deux conditions (voir chapitre sur les équations différentielles).

2) Elle est strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$
3) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a $exp(x + y) = exp(x) \times exp(y)$
4) Le nombre $e = exp(1) \sim 2.718$ s'appelle la constante d'Euler-Neper
5) De plus on démontre que $e^x = \exp(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$, ce qui motive la notation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = exp(x)$$

6) Si une fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifie $g' = g$ alors $g(x) = \lambda e^x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (qui n'est autre que $g(0)$)
7) Limites :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0}$$

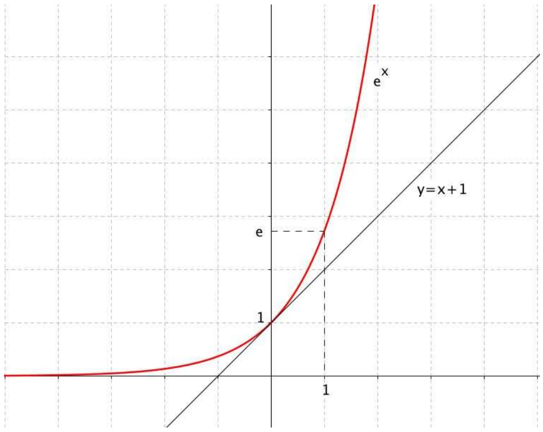
8) Théorème des croissances comparées : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty}$$

On dit que x^n est négligeable devant e^x quand x tend vers $+\infty$.

9) Dérivée de composé : pour toute fonction u dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, la fonction e^u est dérivable sur I et on a

$$\boxed{(e^u)' = u'e^u}$$



4.5 La fonction logarithme népérien

1) La fonction *exp* étant continue, strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est bijective. Sa réciproque est par définition $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, appelé logarithme népérien. Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad y = e^x \iff x = \ln(y)}$$

ou encore

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(e^x) = x, \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ e^{\ln(y)} = y}$$

En particulier on a $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.

2) ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[, ngativesur]0, 1[$ et positive sur $]1, +\infty[$

3) ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$

4) Pour tout $x > 0$ et pour tout $y > 0$ on a

$$\boxed{\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y))}$$

En conséquence on a :

$$\boxed{\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y), \quad \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y), \quad \forall n \in \mathbb{Z},\ \ln(x^n) = n\ln(x)}$$

5) Limites :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to0^+} x\ln(x) = 0}$$

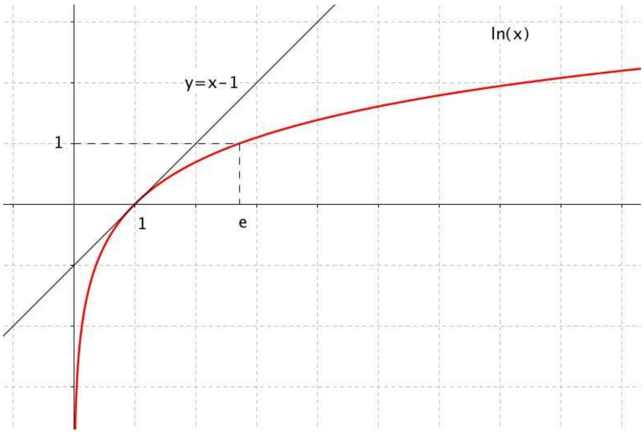
6) Théorème des croissances comparées : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0}$$

On dit que $\ln(x)$ est négligeable devant x^n quand x tend vers $+\infty$.

7) Dérivée de composé : pour toute fonction u dérivable et non nulle sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, la fonction $\ln(|u|)$ est dérivable sur I et on a

$$\boxed{(\ln(|u|)' = \frac{u'}{u}}$$



4.6 Exponentielle et logarithme de base a

Notation 4.6.1 *Pour tout réel $a > 0$ et tout réel x on pose la notation suivante*

$$\boxed{a^x = e^{x\ln(a)}}$$

La fonction $x \longmapsto a^x$ s'appelle l'exponentielle de base a et se note exp_a. On retrouve la fonction exp en prenant $a = e$.

En physique et en chimie il est courant d'utiliser l'exponentielle en base 10. On a bien entendu toutes les règles habituelles : pour tous $a, b > 0$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a :

$$\boxed{a^{x+y} = a^x \times a^y, \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad a^x b^x = (ab)^x, \quad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x}$$

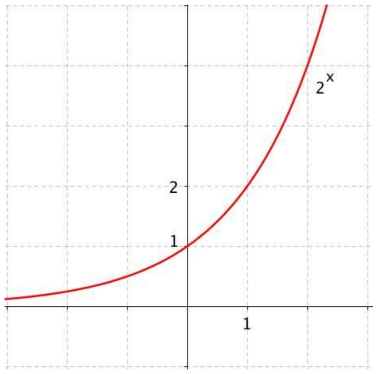
Théorème 4.6.2 (Propriétés de exp_a) *Soit a un réel > 0. La fonction exp_a est :*

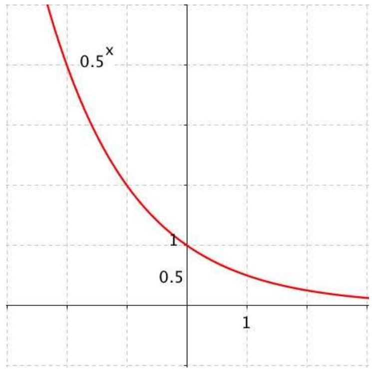
1) *constante égale à 1 si $a = 1$*
2) *strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 1$*
3) *strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $0 < a < 1$.*
4) *en conséquence, si $a \neq 1, exp_a$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Preuve : Si $a = 1$, alors pour tout réel x : $a^x = e^{x\ln(a)} = e^0 = 1$ si $a \neq 1$, on pose $f(x) = a^x = e^{x\ln(a)}$ et la règle de la dérivée d'une fonction composée donne

$$f'(x) = e^{x\ln(a)} \times \ln(a)$$

qui est du signe de $\ln(a)$ qui est strictement positif ssi $a > 1$. Ainsi si $a \neq 1, exp_a$ est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ et réalise donc une bijection sur son image :
• si $a > 1$ alors $\ln(a) > 0$ et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln(a)} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln(a)} = 0$
• si $0 < a < 1$ alors $\ln(a) < 0$ et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln(a)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln(a)} = +\infty$.
Au bilan l'image de exp_a est $\mathbb{R}_+^*$ dans tous les cas. ∎





Définition 4.6.3 *Soit a un réel > 0. On suppose que $a \neq 1$. On vient de montrer que $x \longmapsto a^x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$: elle admet une bijection réciproque. celle-ci s'appelle la fonction logarithme de base a et on la note $\log_a$. Ainsi par définition :*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \log_a(a^x) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ a^{\log_a(y)} = y}$$

En particulier $\log_a(1) = 0$ et $\log_a(a) = 1$. En prenant $a = e$ on a $\log_e = \ln$.

Théorème 4.6.4 (expression de $\log_a$) *Soit a un réel > 0 et différent de 1. Alors*

$$\boxed{\forall x > 0,\ \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}}$$

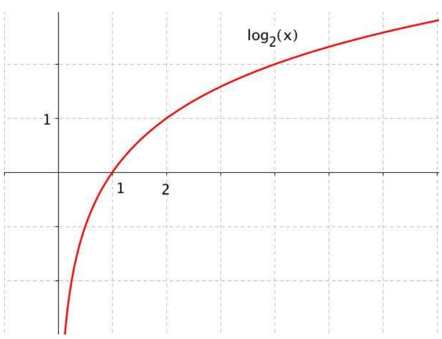
Preuve : Montrer que $\log_a(x) = y$ équivaut à montrer que $a^x = y$. Or

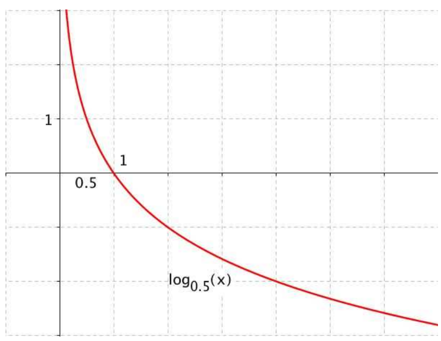
$$a^{\frac{\ln(x)}{\ln(a)}} = e^{\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\ln(a)} = e^{\ln(x)} = x$$

ce qui prouve le résultat souhaité. ∎

Corollaire 4.6.5 *Soit a un réel > 0 et différent de 1. Alors*

$$\forall x, y > 0,\ \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$





4.7 Les fonctions puissances

Définition 4.7.1 *Soit α un réel quelconque. pour tout réel $x > 0$ on pose, conformément à la notation précédente*

$$\boxed{x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}}$$

La fonction $x \longmapsto x^\alpha$ définie sur $]0, +\infty[$ est appelée fonction puissance. Elle généralise les fonctions monômes.

Théorème 4.7.2 (racines n-ièmes) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout réel $x > 0$ on a :*

$$\boxed{x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}}$$

où l'on a noté $\sqrt[n]{}$ la fonction réciproque de $x \longmapsto x^n$ restreinte à $]0, +\infty[$.

Preuve : Montrer que $y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à montrer que $y^n = x$. Or,

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(e^{\frac{1}{n}\ln(x)}\right)^n = e^{\ln(x)} = x$$

Ce qui prouve le théorème. ∎

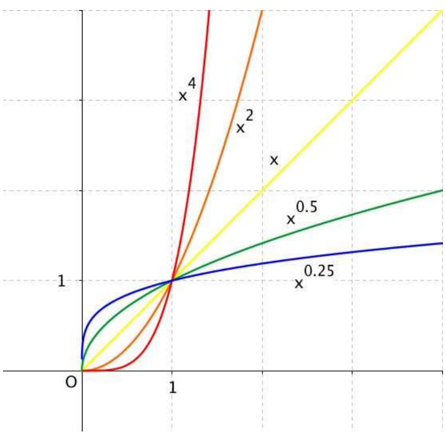
Remarque 4.7.3

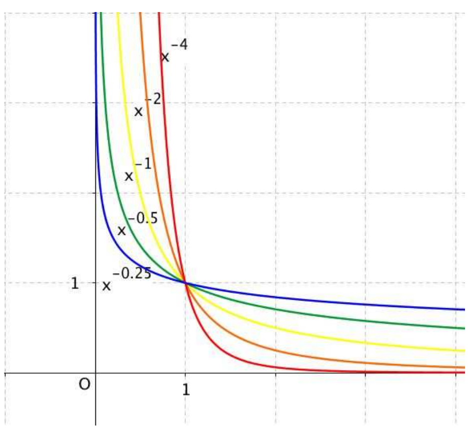
- En particulier pour $n = 1$, on a $\sqrt[1]{x} = x$ et pour $n = 2$, $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$
- Pour $n = 3$ Noter que la fonction $x \longmapsto x^{1/3}$ est définie sur $]0, +\infty[$ alors que la fonction $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ puisque la fonction cube est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel $x > 0$ et tous entiers $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ on a $x^{\frac{n}{p}} = \sqrt[p]{x^n}$

Théorème 4.7.4 (dérivée) *la fonction $f : x \longmapsto x^\alpha$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et*

$$\boxed{\forall x > 0,\ f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}}$$

Preuve : $\forall x > 0, f(x) = e^{\alpha \ln(x)}$ donc $f'(x) = e^{\alpha \ln(x)} \times \dfrac{\alpha}{x} = \alpha x^\alpha \times x^{-1} = \alpha x^{\alpha-1}$ ∎





4.8 Exemple de fonction $x \longmapsto u(x)^{v(x)}$

Soit à étudier la fonction

$$f : x \longmapsto x^x$$

On a $x^x = e^{x\ln(x)}$ qui n'a de sens que pour $x > 0$. D'autre part f est aussi dérivable sur $]0, +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables. et l'on a :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = e^{x\ln(x)} \times \left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) = e^{x\ln(x)}(\ln(x) + 1)$$

Ainsi

$$f'(x) > 0 \iff \ln(x) + 1 > 0 \iff x > e^{-1}$$

la fonction f admet donc un minimum local valant $f(1/e) = e^{\frac{1}{e}\ln(1/e)} = e^{-1/e}$. On sait que $x\ln(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 donc $f(x)$ tend ver $e^0 = 1$ quand x tend vers 0.

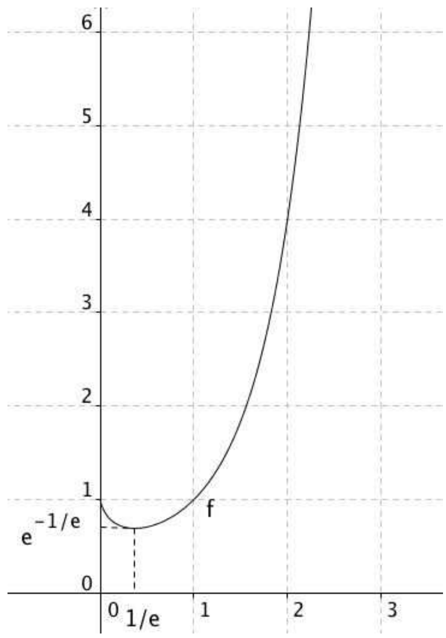
$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^x = 1}$$

La fonction f admet donc un prolongement par continuité en 0 qu'on note $\tilde{f}$:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ f(x) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Bilan :

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$e^{-1/e}$	$\nearrow$	$+\infty$



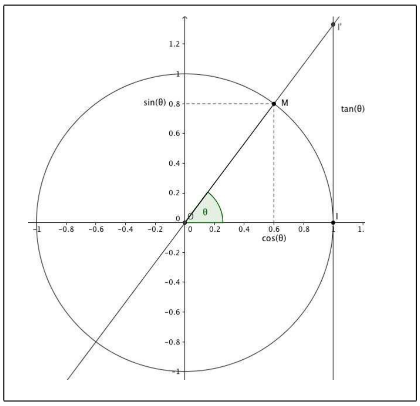
On remarquera une tangente remarquable au point $A(1; 1)$, puisque $f'(1) = 1$.

4.9 Fonctions trigonométriques

On munit le plan euclidien d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique *i.e.* la donnée du cercle de centre O et de rayon 1 muni du point origine $I(1, 0)$ et du sens de parcours opposé au sens des aiguilles d'une montre. Si M est un point de $\mathcal{C}$, on peut considérer l'angle orienté $\theta = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ que l'on identifiera avec l'une de ses mesures (définies à 2π près). On écrira $M(\theta)$.

Définition 4.9.1

On appelle cosinus et sinus de θ respectivement l'abscisse et l'ordonnée de $M(\theta)$. Ce sont donc des nombres compris entre -1 et 1, que l'on note $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$
On a donc
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$
Les fonctions cosinus et sinus jouissent d'une propriété remarquable : celle d'être 2π-périodiques : On a
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$$



Définition 4.9.2 *On appelle tangente la fonction définie par :*

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

pour tout θ *tel que* $\cos(\theta) \neq 0$. *ainsi* $\tan$ *est définie sur* $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

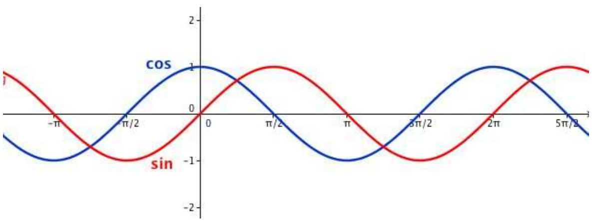
Propriétés des fonctions sinus, cosinus et tangente

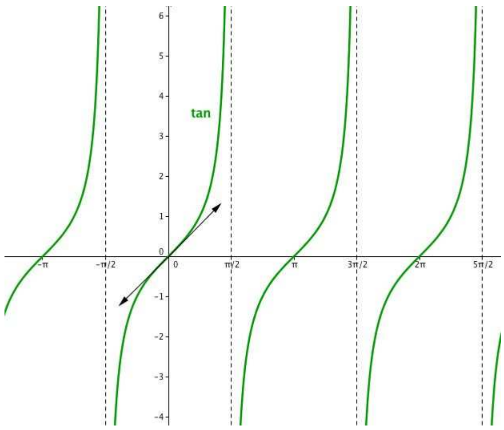
- La fonction cos est paire, les fonctions sin et tan sont impaires
- Les fonctions $\cos, \sin$ et $\tan$ sont dérivables sur leurs ensembles de définition respectifs et :

$$\boxed{\cos' = -\sin \quad ; \quad \sin' = \cos \quad \text{et} \quad \tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2}$$

- Les fonctions $\cos, \sin$ sont 2π-périodiques et la fonction tan est π-périodique. E effet, on a, pour tout $\theta \in D_{\tan}$,

$$\tan(\theta + \pi) = \frac{\sin(\theta + \pi)}{\cos(\theta + \pi)} = \frac{-\sin(\theta)}{-\cos(\theta)} = \tan(\theta)$$

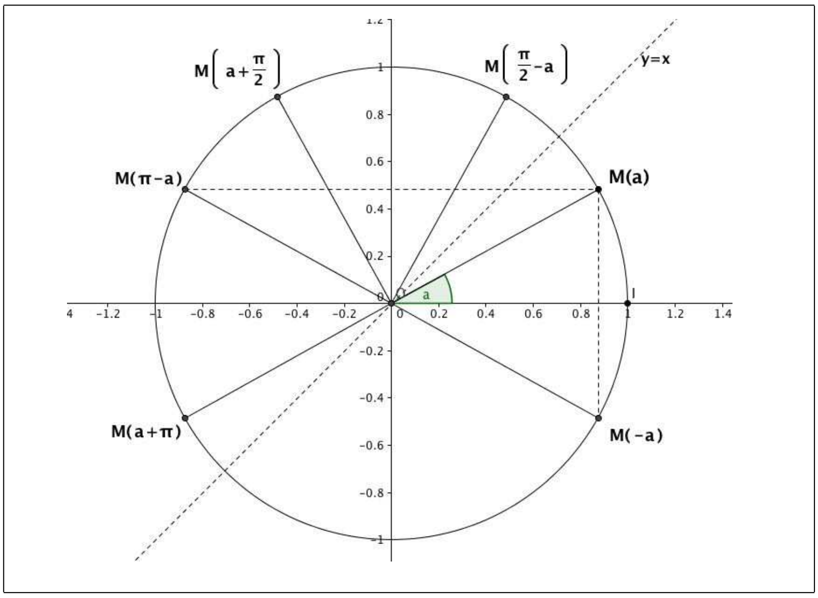




Valeurs remarquables

a	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(a)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(a)$	0	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	0
$\tan(a)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules de transformation



Angles opposés : symétrie par rapport à (Ox) : parité

$$\cos(-a) = \cos(a) \quad \sin(-a) = -\sin(a) \quad \tan(-a) = -\tan(a)$$

Symétrie par rapport à O

$$\cos(\pi + a) = -\cos(a) \quad \sin(\pi + a) = -\sin(a) \quad \tan(\pi + a) = \tan(a)$$

Symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - a) = \sin(a) \quad \sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos(a) \quad \tan(\frac{\pi}{2} - a) = cotan(a)$$

Symétrie par rapport à la droite d'équation (Oy)

$$\cos(\pi - a) = -\cos(a) \quad \sin(\pi - a) = \sin(a) \quad \tan(\pi - a) = -\tan(a)$$

Quart de tour direct

$$\cos(\frac{\pi}{2} + a) = -\sin(a) \quad \sin(\frac{\pi}{2} + a) = \cos(a) \quad \tan(\frac{\pi}{2} + a) = -cotan(a)$$

Formules d'addition : Pour tous réels a et b pour lesquels ces expressions ont un sens

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \qquad \sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

Formules de duplication : en faisant $a = b$ dans les formules d'addition on obtient

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$$

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) \qquad \tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

Le nombre $t = \tan(\theta/2)$ permet d'exprimer rationnellement $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$, $\tan(\theta)$.
Formules de l'arc moitié
Si $\theta \in]-\pi,\pi[$ on pose $t = \tan(\theta/2)$. Alors

$$\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad \sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \tan(\theta) = \frac{2t}{1-t^2}$$

Preuve : Il suffit de voir que $\dfrac{1+it}{|1+it|} = e^{i\theta/2}$ et que $(e^{i\theta/2})^2 = e^{i\theta}$ ∎

Formules de linéarisation. Pour tous réels a et b on a :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2} \quad \text{en particulier} \quad \cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2} \quad \text{en particulier} \quad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a-b)+\sin(a+b)}{2}$$

Formules de déphasage. Pour tous réels a, b et x on a :

$$a\cos(x) + b\sin(x) = r\cos(x-\theta) \text{ avec } r = |a+bi| \text{et } \theta = \arg(a+bi)$$

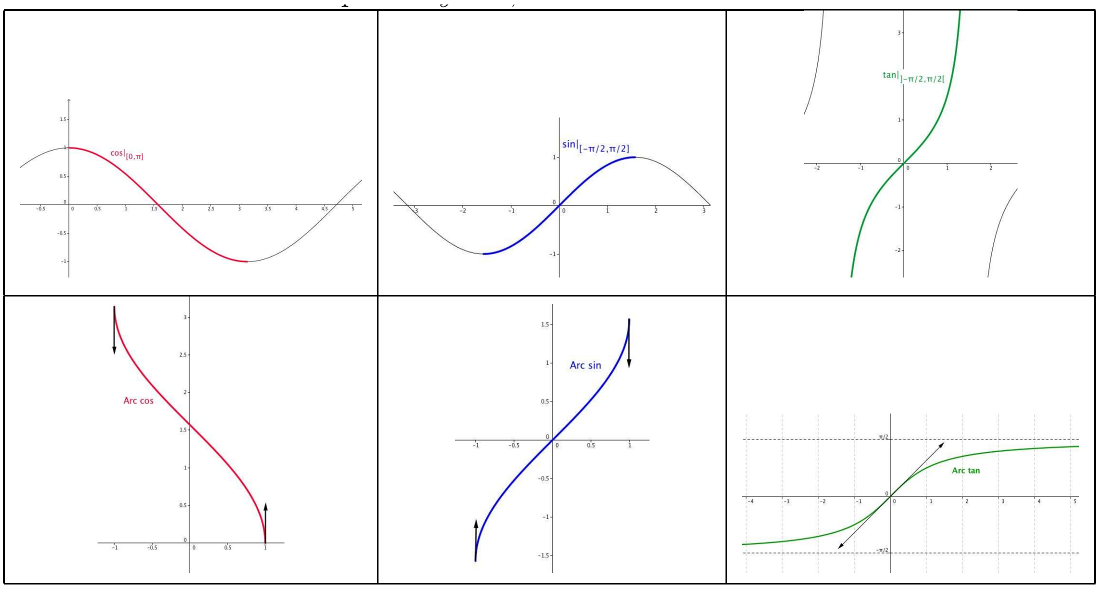
4.10 Les fonctions circulaires réciproques

Bien que cos, sin et tan ne soient pas bijectives, on peut les restreindre sur des intervalles de sorte qu'elles y soient strictement monotones :

Théorème 4.10.1
1) *La fonction* cos *restreinte à* $[0,\pi]$ *(fonction notée* $\cos|_{[0,\pi]}$*) est une bijection de* $[0,\pi]$ *sur* $[-1;1]$. *Sa réciproque se note* arccos.
2) *La fonction* sin *restreinte à* $[-\pi/2,\pi/2]$ *(fonction notée* $\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}$*) est une bijection de* $[-\pi/2,\pi/2]$ *sur* $[-1;1]$. *Sa réciproque se note* arcsin.
3) *La fonction* tan *restreinte à* $]-\pi/2,\pi/2[$ *(fonction notée* $\cos|_{]-\pi/2,\pi/2[}$*) est une bijection de* $]-\pi/2,\pi/2[$ *sur* $\mathbb{R}$. *Sa réciproque se note* arctan.

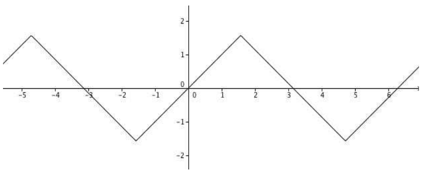
Preuve : Le théorème utilisé est le théorème de la bijection : si une fonction est continue et strictement monotone sur un intervalle I alors $f(I)$ est un intervalle et elle réalise une bijection de I sur $f(I)$. ∎

L'allure des courbes et les tangentes des fonctions réciproques se déduisent par symétrie autour de la droite d'équation $y = x$.



Remarque 4.10.2

Il est faux de croire que $\forall x \in \mathbb{R}, \arcsin(\sin(x)) = x$. En effet, sin n'est pas une bijection, c'est $\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}$ qui en est une. Ainsi ce qui est vrai c'est : $\forall x \in [-\pi/2, \pi/2], \arcsin(\sin(x)) = x$. Par exemple $\arcsin(\sin(\pi)) = \arcsin(0) = 0$ et non pas π ! Voici la représentation de $\arcsin \circ \sin$:

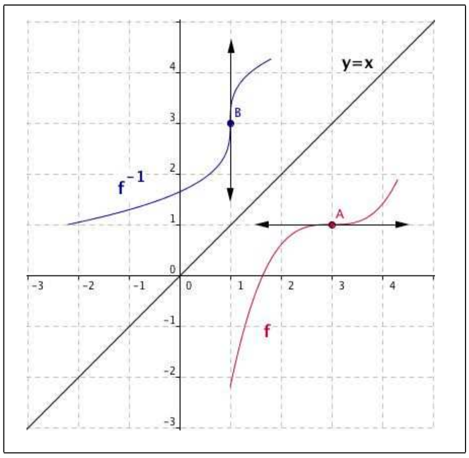


Dérivées de $\arccos, \arcsin, \arctan$

Considérons la fonction f, supposée être bijective et dérivable $f : I \longrightarrow J; \theta \mapsto x = f(\theta)$. Si $\theta \in I$ on pose $x = f(\theta)$. Alors si $f'(\theta) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $x = f(\theta)$.
On obtient la dérivée en dérivant la relation $f(f^{-1}(x) = x$. Ce qui donne $f'(f^{-1}(x)) \times f'(x) = 1$

soit : $$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

et on comprend pourquoi la condition $f'(\theta) \neq 0$ est nécessaire.



Théorème 4.10.3

1) *La fonction* arccos *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et* $\forall x \in]-1,1[,\ \arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2) *La fonction* arcsin *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et* $\forall x \in]-1,1[,\ \arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3) *La fonction* arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}[,\ \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

PREUVE : Pour arccos qui est définie sur $[-1;1]$, on cherche l'ensemble de dérivabilité : d'après le résultat ci-dessus on sait que arccos est dérivable en $x = \cos(\theta)$ si et seulement si $cos'(\theta) \neq 0$. Or, quand $\theta \in [0,\pi], \cos'(\theta) = 0 \iff \theta \in \{0,\pi\}$. Donc arccos est dérivable sauf en $x = \cos(0) = 1$ et en $x = \cos(\pi) = -1$ *i.e.* sur $]-1;1[$. On écrit alors $\forall x \in]-1;1[, \cos(\arccos(x)) = x$ donc en dérivant (licite d'après ce qu'on vient de dire) : $\cos'(arccos(x)) \times \arccos'(x) = 1$ soit encore $\arccos'(x) = \dfrac{1}{\sin(\arccos(x))}$. Reste à simplifier cette expression. On sait que $\sin^2(T) + \cos^2(T) = 1$, en appliquant cela à $T = \arccos(x)$ on trouve que $\sin(\arccos(x)) = \pm \pm \sqrt{1-x^2}$. Le signe + vient du fait que $\sin(T) > 0$ car $\arccos(x) \in [0,\pi]$. On fait de même pour arcsin et arctan (pour arctan c'est plus simple car $\tan' = 1 + \tan^2$). ∎

Exemple 4.10.4 (Applications)

1)

$$\boxed{\forall x \in [-1;1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}}$$

En effet, La fonction $\arccos + \arcsin$ a une dérivée nulle sur $]-1,1[$ d'après ce qui précède : elle est donc constante sur l'intervalle $]-1,1[$. En 0 elle vaut $\dfrac{\pi}{2}$. De plus en 1 et en -1 elle vaut encore cette valeur.

2)

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \arctan(x) + \arctan(1/x) = sgn(x)\frac{\pi}{2}}$$

où $sgn = x/|x|$ vaut 1 si $x > 0$ et -1 si $x < 0$.
On utilse la même méthode en se plaçant sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. On conclut par imparité.

Remarque. Il est indispensable que $f' = 0$ sur **un intervalle** pour en conclure que f est constante : la fonction $x \to sgn(x) = x/|x|$ a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}^*$ mais n'y est pas constante.

Chapitre 5

Intégrales

5.1 Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

Définition 5.1.1 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I quelconque. On appelle primitive de f sur I, toute fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I et vérifiant $F' = f$.*

Si une telle primitive F existe il est clair qu'elle n'est pas unique : $F + k$ en est une autre pour toute constante k. Réciproquement :

Proposition 5.1.2 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I quelconque. Si f admet une primitive F sur I. Alors toutes les autres primitives de f sur I sont de la forme $F + c$ où c est une constante réelle.*

PREUVE : Si G est la fonction définie sur I par $G(x) = F(x)+c$ alors $G'(x) = F'(x) = f(x)$ donc G est une primitive de f sur I. Inversement soit G une primitive quelconque de f sur I. Alors $(G-F)' = G'-F' = f-f = 0$ est la fonction nulle sur I. Et puisque I est un intervalle alors $G-F$ est constante sur I. Il existe donc une constante réelle c telle que pour tout $x \in I, (G - F)(x) = c$ donc $G(x) = F(x) + c$. ∎

Théorème 5.1.3 (admis) *Toute fonction réelle* **continue** *sur un* **intervalle** *I de $\mathbb{R}$ admet des primitives sur I.*

5.2 Lien primitives-intégrales

Définition 5.2.1 *Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si F est une primitive de f sur I et si a et b sont deux réels quelconques de I, on appelle intégrale de a à b de f et on note $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ le nombre réel égal à $F(b) - F(a)$ qu'on note aussi $[F(t)]_a^b$:*

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Remarque 5.2.2

1) D'après la proposition précédente le réel $\int_a^b f(t)dt$ ne dépend pas du choix de la primitive de f. En effet, $(F + c)(b) - (F + c)(a) = F(b) - F(a)$

2) la variable t dans l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est une variable muette. Elle peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(x)dx = \cdots$
3) Pour tous $a, b \in I$ on a

$$\boxed{\int_a^a f(t)dt = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt}$$

Proposition 5.2.3 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit $a \in I$ un élément fixé. Alors la fonction*

$$\boxed{G : I \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ x \longmapsto \int_a^x f(t)dt}$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Preuve : En effet, si F est une primitive quelconque de f sur Ialors $G(x) = F(x - F(a)$ vérifie $G'(x) = F'(x) = f(x)$ et $G(a) = F(a) - F(a) = 0$. Et toute autre primitive H de f qui s'annule en a est de la forme $H = G + c$ avec $0 = H(a) = G(a) + c = c$ donc $H = G$. ∎

Proposition 5.2.4 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$. Aors*
1) **Relation de Chasles** *: pour tout $c \in [a, b]$ on a*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

2) **Linéarité de l'intégrale** *: pour touts fonctions f et g continues sur $[a, b]$ pour tous réels λ et μ on a*

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$$

3) **Positivité de l'intégrale** *: si $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$ alors*

$$\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$$

Preuve : Soit F est une primitive de f et G une primitive de g sur $[a, b]$. On a
1) $(F(b) - F(c)) + (F(c) - F(b)) = F(b) - F(a)$
2) $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$.
3) $F' = f$ donc F est croissante sur $[a, b]$ et par suite $F(b) - F(a) \geqslant 0$. ∎

5.3 Techniques de calcul d'intégrales

Théorème 5.3.1 (Intégration par parties) *Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ i.e. (dérivables et leur dérivées sont continues) sur $[a, b]$. On a alors*

$$\boxed{\int_a^b u(t)v'(t)dt = [ut)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt}$$

Preuve : On a $(uv)' = u'v + uv'$ donc $\int_a^b (u'v + uv') = \int_a^b u'v + \int_a^b uv' = [uv]_a^b$. ∎

Applications classiques
1) $I_n = \in_a^b x^n e^{ax} dx$: une ipp donne une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}
2) $I_n = \in_a^b x^n \cos(ax) dx$: se ramène à ci-dessus avec la formule d'Euler.
3) $I(x) = \int_e^x \ln(t)dt$: écrire $\ln(t) \times 1$ et intégrer 1
4) $I(x) = \int_0^x \arctan(t)dt$: idem

Théorème 5.3.2 (changement de variable) *Si f est continue sur un intervalle I et u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle $[\alpha, \beta]$ dans I. Alors*

$$\int_\alpha^\beta f(u(t)).u'(t)dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx$$

Preuve : Soit $X_0 \in I$ quelconque et $F(X) = \in_{X_0}^X f(x)dx$. Dériver $F \circ u$ et intégrer le tout entre α et β : le X_0 doit disparaitre grâce à Chasles. ∎

Suggestion de présentation; On peut adopter la rédaction suivante :
- On pose $x = u(t)$. La fonction u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$ et $dx = u'(t)dt$
- Quand $t = \alpha$, $x = u(\alpha)$ et quand $t = \beta$, $x = u(\beta)$
- La fonction f est continue sur $[u(\alpha), u(\beta)]$ donc par le théorème de changement de variable, $\int_\alpha^\beta f(u(t)).u'(t)dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx$

Exemple 5.3.3 (classique) *Calculer $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$.*
- *On pose $x = \sin(t)$. La fonction* $\sin$ *est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ et $dx = \cos(t)dt$*
- *Quand $t = 0$, $x = \sin(0) = 0$ et quand $t = \pi/2$, $x = \sin(\pi/2) = 1$*
- *La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[0, 1]$ donc par le théorème de changement de variable,*

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2(t)}}_{=\sqrt{\cos^2(t)}} \times \cos(t)dt$$

Or, sur $[0, \pi/2]$, $\cos$ *est positive donc $\sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$ et $T = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)dt$. Cette dernière intégrale se calcule facilement car $\cos^2(t) = \dfrac{\cos(2t)+1}{2}$. On trouve $I = \pi/4$.*

Exemple 5.3.4 (classique) *Calculer $I = \int_0^1 \dfrac{dx}{5+x^2}dx$.*
On écrit $\dfrac{1}{5+x^2} = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{1+(x/\sqrt{5})^2}$ et on fait le changement de variable $t = x/\sqrt{5}$ qui donne $dx = \sqrt{5}dt$. D'où
- *On a $x = \sqrt{5}t$. La fonction $t \mapsto \sqrt{5}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1/\sqrt{5}]$ et $dx = \sqrt{5}dt$*
- *Quand $t = 0$, $x = \sin(0) = 0$ et quand $t = 1/\sqrt{5}$, $x = 1$*
- *La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{5+x^2}$ est continue sur $[0, 1]$ donc par le théorème de changement de variable,*

$$\int_0^1 \frac{1}{5+x^2}dx = \frac{1}{5}\int_0^{1/\sqrt{5}} \frac{1}{1+t^2}\sqrt{5}dt = [\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan(t)]_0^{1/\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{5}})$$

5.4 Primitives usuelles

La notation (vieillotte et peu rigoureuse) $\int f(x)dx$ désigne une primitive quelconque de f sur un intervalle. Par exemple, la notation $\int \frac{dx}{x} = \ln(|x|)$ signifie que

- les primitives de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont $x \mapsto \ln(x) + k$ (k constante) et
- les primitives de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_-^*$ sont $x \mapsto \ln(-x) + k'$ (k' constante).

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(|x|) \quad ; \qquad \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}; \quad (\alpha \neq 1)$$

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) \quad ; \qquad \int \sin(x)dx = = -\cos(x)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x) \quad ; \qquad \int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -cot(x)$$

$$\int \tan(x)dx = -\ln|\cos(x)| \quad ; \qquad \int cot(x)dx = \ln|\sin(x)|$$

$$\int e^{mx}dx = \frac{1}{m}e^{mx}, (m \in \mathbb{R}^*) \quad ; \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)}, (a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\})$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) \quad ; \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$$

Chapitre 6

Equations différentielles linéaires

6.1 Equations de 1^{er} à coefficients constants

Soit $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \mapsto e^{u(t)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est définie par $f'(t) = u'(t)e^{u(t)}$. En particulier, si u est définie par $u(t) = at$ où a est un réel fixé alors $f'(t) = af(t)$ *i.e.* $f' = af$, donc la fonction $f : t \mapsto e^{at}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$. Le théorème qui suit dit que la fonction $t \longmapsto e^{at}$ est essentiellement la seule fonction à vérifier cette propriété.

Théorème 6.1.1 (résolution de $y' = ay$) *Soit $a \in \mathbb{R}$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions de la forme $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $t \longmapsto ke^{at}$ où k est une constante quelconque. Ainsi la fonction $t \longmapsto e^{at}$ est la seule fonction solution $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$.*

Preuve : La fonction $f : t \longmapsto ke^{at}$ vérifie bien l'équation $y' = ay$. Inversement, soit y est une fonction telle que $y' = ay$. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = y(t)/e^{at}$. Cette fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = \frac{y'(t)e^{at} - y(t)ae^{at}}{(e^{at})^2} = \frac{e^{at}(y'(t) - ay(t))}{(e^{at})^2} = 0$$

donc g est constante sur $\mathbb{R}$ et il existe $k \in \mathbb{R}$ tel $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = k$ *i.e.* $y(t) = ke^{at}$. ∎

Théorème 6.1.2 (résolution de $y' + ay = b$) *Soit a, b deux réels avec $a \neq 0$. L'équation différentielle*

$$(E) \qquad y' + ay = b$$

admet pour solutions $y : t \mapsto ke^{-at} + \dfrac{b}{a}$ où k est une constante réelle quelconque.

Preuve : On cherche une solution particulière y_P de (E). Comme a et b sont constants, on peut trouver une solution constante (donc $y'_P = 0$) et par suite une solution particulière constante est nécessairement définie par $y_P(t) = b/a$. Ensuite on écrit

$$y' + ay = b \iff y' + ay = y'_P + ay_P \iff (y - y_P)' = -a(y - y_P)$$

et on est ramené au théorème précédent. On aura $y(t) - y_P(t) = ke^{-at}$ donc $y(t) = ke^{-at} + b/a$. ∎

Remarque 6.1.3 *La fonction $t \mapsto ke^{-at}$ est la solution générale de l'équation sans second membre (on dit aussi équation homogène associée à (E))*

$$(E_H) \quad y' + ay = 0$$

et la fonction $t \mapsto \frac{b}{a}$ est une solution particulière de l'équation complète (E). Les solutions complètes de (E) sont donc de la forme

$$\boxed{y = \text{ une solution particulière de } (E) + \text{solution générale de } (E_H)}$$

6.2 Équations générales de 1^{er} ordre

Définition 6.2.1 *On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation différentielle de la forme*

$$(E) \quad : \quad \forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

où
- I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide
- a et b sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

On appelle équation homogène ou aussi (équation sans second membre) associée à (E) l'équation différentielle

$$(E_H) \quad : \quad \forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = 0$$

Théorème 6.2.2 (résolution de (E_H)) *Si A est une primitive de a sur I, les solutions de (E_H) sont de la forme :*

$$y : t \mapsto ke^{-A(t)}$$

où k est une constante réelle quelconque.

Preuve : Vérifier que les fonctions proposées sont solutions de (E_H). Réciproquement, considérer $g(t) = y(t)/e^{-A(t)}$ et montrer que $g' = 0$ sur l'intervalle I. ∎

Proposition 6.2.3 (Variation de la constante) *Il existe au moins une solution particulière de (E) et celle-ci est de la forme*

$$y_P : t \mapsto k(t)e^{-A(t)}$$

où $k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I.

Preuve : Posons $y_P(t) = k(t)e^{-A(t)}$; On a alors $y'_P(t) = k'(t)e^{-A(t)} - y_P(t)a(t)$. D'où y_P est solution de $(E) \iff \forall t \in I,\ k'(t)e^{-A(t)} = b(t) \iff \forall t \in I, k'(t) = e^{A(t)}b(t)$ et on déduit $k(t)$ par intégration. ∎

Théorème 6.2.4 (Résolution de (E))) *Soit y_P une solution particulière de (E). Les autres solutions de E sont de la forme :*

$$y : t \mapsto y_P(t) + ke^{-A(t)}$$

où A est une primitive de a sur I et k est une constante réelle quelconque. On retiendra que

$$\boxed{y = \text{ une solution particulière de } (E) + \text{solution générale de } (E_H)}$$

Preuve *: la preuve est identique à celle du cas à coefficients constants.* ∎

Corollaire 6.2.5 (unicité sous condition initiale) *Soit t_0 et y_0 deux réels fixés. Il existe une unique solution de (E) vérifiant la condition (dite initiale) $f(t_0) = y_0$.*

PREUVE : On écrit $f(t) = ke^{-A(t)} + y_P(t)$ et on trouve la constante k en faisant $t = t_0$. ∎

Exemple 6.2.6

Résoudre sur $I =]0, +\infty[$ l'équation

$$(E) \quad : \quad t(1+t^2)y' - (t^2-1)y + 2t = 0$$

(On pourra être amené à utiliser l'égalité $\dfrac{t^2-1}{t(t^2+1)} = \dfrac{-1}{t} + \dfrac{2t}{t^2+1}$)

Une solution

• Pour tout $t \in I, t(1+t^2) \neq 0$ donc l'équation (E) est équivalente sur I à l'équation

$$(E') \quad : \quad y' - \frac{t^2-1}{t(1+t^2)}y = -\frac{2}{1+t^2}$$

• Solution générale de l'équation homogène (E'_H) associée à E'.

$$(E'_H) \quad : \quad y' - \frac{t^2-1}{t(1+t^2)}y = 0$$

Ici $a(t) = -\dfrac{t^2-1}{t(1+t^2)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{2t}{1+t^2}$ donc une primitive de a est la fonction A définie sur I par $A(t) = \ln t - \ln(1+t^2) = \ln\left(\dfrac{t}{1+t^2}\right)$ d'où , $-A(t) = \ln\left(\dfrac{1+t^2}{t}\right)$ et par suite $e^{-A(t)} = \dfrac{1+t^2}{t}$ et une solution générale de (E'_H) est donnée par la fonction y_H définie par

$$\boxed{\forall t \in I,\ y_H(t) = k\,\frac{1+t^2}{t}}$$

où k est une constante réelle arbitraire.

• Une solution particulière de (E') (variation de la constante)

Ici $b(t) = \dfrac{-2t}{1+t^2}$. Cherchons une solution particulière de (E') de la forme $y_P(t) = k(t) \times \dfrac{1+t^2}{t}$. D'où y_P est solution de $(E) \iff \forall t \in I,\ k'(t)e^{-A(t)} = b(t) \iff \forall t \in I, k'(t) = e^{A(t)}b(t) = \dfrac{t}{1+t^2} \times \dfrac{-2}{1+t^2} = \dfrac{-2t}{(1+t^2)^2}$. Et on peut prendre $k(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ et par suite une solution particulière de (E') est donnée par la fonction y_P définie par :

$$\boxed{\forall t \in I,\ y_P(t) = \frac{1}{t}}$$

• Solution générale de (E') : une solution générale de (E') et donc de (E) est une fonction y définie sur I par :

$$\boxed{\forall t \in I,\ y(t) = y_P(t) + y_H(t) = \frac{1}{t} + k\,\frac{1+t^2}{t}}$$

où k est une constante réelle arbitraire.

6.3 Equations linéaires du 2^{nd} ordre à coefficients constants

Définition 6.3.1 *On appelle équation différentielle linéaire du second ordre (En abrégé : EDL2) toute équation différentielle de la forme :*

$$(E) \quad : \quad \forall t \in I, ay''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t)$$

où I est un intervalle (d'intérieur non vide) de $\mathbb{R}$, a, b, c et f sont des fonctions **continues** *de I dans $\mathbb{R}$, avec a ne s'annulant pas.*

Dans tout ce qui suit on supposera que les fonctions a, b et c sont **constantes** et que la fonction f est la **fonction nulle**. Dans la pratique on prendra $I = R$. Ce qui donne une équation différentielles de second ordre homogène et à coefficients constants :

$$\boxed{(E) \quad : \quad y'' + ay' + cy = 0}$$

On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble de ses solutions. La recherche de solutions particulières amène à considérer une fonction simple : $y : t \longmapsto e^{rt}$ avec $r \in \mathbb{C}$. La fonction y est solution de (E) si et seulement si :

$$ay'' + by' + cy = 0 \iff \forall t \in I, ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

et en simplifiant par e^{rt} qui n'est jamais nul, on obtient : $(y : t \mapsto e^{rt}) \in \mathcal{S} \iff ar^2 + br + c = 0$.

Définition 6.3.2 (équation caractéristique associée à (E)) *On appelle équation caractéristique de (E) l'équation polynomiale du second degré $ar^2+br+c = 0$ où l'inconnue r est un élément de $\mathbb{C}$ (même si on résout (E) sur $\mathbb{R}$).*

Exemples 6.3.3 1) $I = \mathbb{R}, (E) : y''+y'-6y = 0$ *a pour pour équation caractéristique* $r^2+r-6 = 0$ *dont les solutions sont* $r_1 = 2$ *et* $r_2 = -6$. *Ainsi on trouve deux solutions particulières qui sont les fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par :* $y_1 : t \mapsto e^{2t}$ *et* $y_2 : t \mapsto e^{-6t}$.
2) $I = \mathbb{R}, (E) : y'' - 2y' + 5y = 0$ *a pour pour équation caractéristique* $r^2 - 2r + 5 = 0$ *dont les solutions sont* $r_1 = 1 + 2i$ *et* $r_2 = 1 - 2i$. *Ainsi on trouve deux solutions particulières :* $y_1 : t \mapsto e^{(1+2i)t} = e^t(\cos(2t) + i\sin(2t))$ *et* $y_2 : t \mapsto e^{(1-2i)t} = e^t(\cos(2t) - i\sin(2t))$. *Si on veut des solutions réelles, on remarque que* $g_1 = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ *et* $g_2 = \dfrac{y_1 - y_2}{2}$ *sont aussi solutions (car $\mathcal{S}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel) et :* $g_1 : t \mapsto e^t\cos(2t)$ *et* $g_2 : t \mapsto e^t\sin(2t)$.

Théorème 6.3.4 (résolution de (E)) *Soit $(E) : ay'' + by' + cy = 0$ une équation différentielle homogène du second ordre avec $a, b, c \in \mathbb{K}$ et $a \neq 0$. (valable pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.)*
- Si l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ a deux racines $r_1 \neq r_2$ distinctes dans $\mathbb{K}$, les solutions de (E) sont de la forme :

$$\boxed{y : t \mapsto \lambda e^{r_1t} + \mu e^{r_2t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{K}}$$

- Si l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ a une racine double r_0, les solutions de (E) sont de la forme

$$\boxed{y : t \mapsto \lambda e^{r_0t} + \mu te^{r_0t} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{K}}$$

valable uniquement pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
- Si l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ a deux racines complexes conjuguées $r \pm i\omega$, les solutions de (E) sont de la forme :

$$\boxed{y : t \mapsto ke^{rt}\cos(\omega t) + \ell e^{rt}\sin(\omega t) \text{ avec } k, \ell \in \mathbb{R}}$$

Preuve : L'équation $ax^2+bx+c=0$ a toujours deux racines complexes : qu'elles soient distinctes ou égales. Notons-les r_1 et r_2. Rappelons que la somme des racines est $r_1+r_2=-b/a$. D'une part on vérifie sans mal que toutes ces fonctions sont bien solutions. C'est la réciproque qui nous occupe. Soit donc y une solution quelconque de (E), on peut l'écrire astucieusement :

$$\forall t \in I, \quad y(t) = k(t)e^{r_1 t} \quad \text{avec} \quad k(t) = \frac{y(t)}{e^{r_1 t}}$$

et on remarque que la fonction $k : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est deux fois dérivable sur I car y l'est. On calcule y' et y'' (dérivée d'un produit) et on rassemble pour trouver :

$$ay'' + by' + cy = \left[ak'' + \underbrace{(2ar_1+b)}_{=a(r_1-r_2)}k' + \underbrace{(ar_1^2+br_1+c)}_{=0}k\right]e^{r_1 t} \iff K' = (r_2-r_1)K$$

où l'on a posé $K = k'$. On a donc $\forall t \in I, K(t) = \lambda e^{(r_2-r_1)}t$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
- Si $r_1 = r_2$ (racine double r_0). On a donc $K = k'$ constante, donc $k : t \mapsto ct+d$ avec $c, d \in \mathbb{K}$
- Si $r_1 \neq r_2$ on a : k est de la forme $t \mapsto ce^{r_2-r_1)t} + d$ avec $c, d \in \mathbb{K}$.

Dans les deux cas on trouve l'expression de $y(t)$ en multipliant $k(t)$ par $e^{r_1 t}$
Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $r \pm i\omega$, ce qui précède s'applique si on considère momentanément y comme à valeurs dans $\mathbb{C}$ (ce n'est pas pas faux car $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$). D'après ce qui précède, les solutions sont de la forme :

$$y : t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} = e^{rt}\left[\lambda e^{i\omega t} + \mu e^{-i\omega t}\right]$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. mais comme y est à valeurs dans $\mathbb{R}$, $y(t) = \Re e(y(t)$ pour tout $t \in I$, donc, en écrivant $\lambda = s+iu$ et $\mu = v+iw$ avec $s, u, v, w \in \mathbb{R}$, il vient

$$y : t \mapsto e^{rt}\left[s\cos(\omega t) - u\sin(\omega t) + v\cos(-\omega t) - w\sin(-\omega t)\right]$$

et finalement,

$$y : t \mapsto ke^{rt}\cos(\omega t) + \ell e^{rt}\sin(\omega t)$$

en posant $k = s+v$ et $\ell = w-u$ qui sont bien des réels. ∎

Chapitre 7

Développements limités

7.1 Formule de Taylor-Young

L'approximation affine dit qu'au voisinage de a, une fonction dérivable (en a) «ressemble» à une fonction affine. On a bien sûr très envie d'aller plus loin et de savoir si f «ressemble» localement à un polynôme de degré quelconque. On imagine que f devra être suffisamment dérivable au voisinage de a. On introduit d'abord la notation **« petit** o **»** de Landau.

Définition 7.1.1 *Soient f et g deux fonctions d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ et $a \in I$. On dira que f est négligeable devant g (ou que g est prépondérante devant f) au voisinage de a, quand il existe une fonction $\epsilon : I \to\ R$ et un voisinage U de a tels que :*

$$\forall x \in I \cap U, f(x) = \epsilon(x)g(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$$

On note alors $f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$ ou simplement $f = o_a(g)$.

En pratique, si g ne s'annule pas au voisinage de a, on retient : $f = o_a(g) \iff \lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

Remarques.

• Dire $f = o_a(1)$ c'est dire $\lim_{x \to a} f(x) = 0$. C'est encore équivalent à $f = o_a(\lambda)$ où $\lambda \neq 0$.

• Dire $f(x) = o_a(0)$ c'est dire que f est nulle sur tout un voisinage de a : cette situation ne se rencontre presque jamais !

• Une relation de la forme $f = o_a(g)$ s'appelle une relation de prépondérance.

• On notera $f = g + o_a(h)$ pour dire que $f - g = o_a(h)$.

Théorème 7.1.2 (formule de Taylor-Young) *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction n fois dérivable au voisinage de a. Alors*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x \to a}{o}((x-a)^n).$$

Ainsi f « ressemble » au voisinage de a, au polynôme $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

Preuve : Par récurrence complète sur $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n = 1$, que retrouve-t-on ? Pour l'hérédité, supposer, pour un certain $n > 0$, que la formule est vraie pour toute fonction (c'est là l'astuce) n fois dérivable au voisinage de a, et considérer alors une fonction f qui est $n+1$ fois dérivable au voisinage de a, de sorte que l'HR s'applique à f'. Ecrire la formule pour f' et remarquer alors

que : $f'(x) = T'_{n+1}(x) + \underset{x\to x}{o}((x-a)^n)$
De façon assez naturelle on est amené à poser une fonction de «reste» : $R(x) = f(x) - T_{n+1}(x)$ et à montrer en fait que $R(x) = \underset{x\to a}{o}((x-a)^{n+1})$ *i.e.* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \dfrac{R(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0$

Soit donc $\epsilon > 0$ quelconque. Ce qui précède dit que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \dfrac{R'(x)}{(x-a)^n} = 0$ donc pour x assez proche de a (avec $x \neq a$) on a :

$$\left|\frac{R'(x)}{(x-a)^n}\right| \leqslant \epsilon \iff |R'(x) \leqslant |x-a|^n\epsilon \leqslant \begin{cases} (x-a)^n \ si \ x > a \\ (a-x)^n \ si \ x < a \end{cases}$$

(inégalité vraie même pour $x = a$). Appliquer alors l'IAF généralisée (en distinguant les cas $x < a$ et $x > a$). On arrive facilement à $\left|\dfrac{R(x)}{(x-a)^{n+1}}\right| \leqslant \epsilon$ pour tout $x \neq a$ assez proche de a. ∎

Exemple. Avec $f(x) = e^x$ et $a = 0$, la formule de Taylor-Young dit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout x au voisinage de 0 on a :

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^2 + \underset{x\to x}{o}((x)^n)$$

7.2 Développement limité

Définition 7.2.1 (développement limité) *On dit qu'une fonction f admet un développement limité en a à l'ordre n quand il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :*

$$f(x) = P(x) + \underset{x\to a}{o}((x)^n)$$

Le polynôme P est alors appelé la partie régulière du développement limité

Si f est n fois dérivable sur un voisinage de a, la formule de Taylor-Young ne dit rien d'autre que f admet un développement limité à l?ordre n, de partie régulière :

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Exemple. Avec $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ et $a = 0$, la formule de Taylor-Young est inutile. En effet, on sait (suite géométrique) que pour $x \neq 1$ on a $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$ donc $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$. Mais comme $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ il vient

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)}$$

Remarque 7.2.2

1) On abrègera «développement limité en a à l'ordre n» par la notation $\mathrm{DL}_n(a)$.
2) Dire «f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$» c'est dire «$x \longrightarrow f(x+a)$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$».
3) $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ne veut pas dire que P est de degré n. Par exemple :

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sin(0) + \sin'(0)x + \sin^{(2)}(0)\frac{x^2}{2!} + \sin^{(3)}(0)\frac{x^3}{3!} + \sin^{(4)}(0)\frac{x^4}{4!} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\end{aligned}$$

donc sin admet un $\mathrm{DL}_4(0)$, pourtant $x-\dfrac{x^3}{6}$ est de degré 3.
3) f est continue en a ssi f admet un $\mathrm{DL}_0(a)$.
4) f est dérivable en$a$ ssi f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ (théorème de l'approximation affine).

Théorème 7.2.3 (unicité du DL)
Si f admet un $DL_n(a)$, sa partie régulière $P\in\mathbb{R}_n[X]$ est unique.

PREUVE : Montrer d'abord que si $P\in\mathbb{R}_n[X]$ est tel que $P(x)=\underset{x\to 0}{o}(x^n)$ alors $P=0$. Appliquer ceci pour démontrer le théorème. ∎

En considérant la fonction $x\longrightarrow f(-x)$ on a :

Corollaire 7.2.4 (parité) *Si f est une fonction paire (resp. impaire) et admet un $DL_n(0)$ alors sa partie régulière est un polynôme pair (resp. impair).*

Remarque 7.2.5 *On étudie souvent des développements limités en 0. En effet, il est facile de toujours s'y ramener : si on cherche le $DL_n(a)$ de f on cherchera le $DL_n(0)$ de la fonction $x\longrightarrow f(x+a)$. Par exemple trouvons le $DL_2(\pi)$ de $f:x\to e^x$. On pose $g(x)=f(x+\pi)=e^\pi e^x$ et on cherche son $DL_2(0)$. Il vient $e^\pi e^x=e^\pi\Big(1+x+\dfrac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\Big)$ donc*

$$f(x)=g(x-\pi)=e^\pi+e^\pi(x-\pi)+\frac{e^\pi}{2}(x-\pi)^2+\underset{x\to 0}{o}((x-\pi)^2).$$

7.3 Opérations sur les développements limités

Théorème 7.3.1 (Opérations sur les DL)

(1) **Somme** Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Si f et g admettent un $\mathrm{DL}_n(a)$ de parties régulières respectives P et Q, alors $f+\lambda.g$ aussi et sa partie régulière est $P+\lambda.Q$.

(2) **Produit** Si f et g admettent un $\mathrm{DL}_n(a)$ de parties régulières respectives P et Q, alors $f\times g$ aussi et sa partie régulière est $P\times Q$ tronqué au degré n.

(3) **Composé** Soient u admettant un $\mathrm{DL}_n(a)$ de partie régulière Q et f admettant un $\mathrm{DL}_n(b)$ avec $b=u(a)$, de partie régulière P. Alors $f\circ u$ admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ et sa partie régulière est le polynôme $P\circ Q$ tronqué au degré n.

(4) **Quotient** Si f et g admettent un $\mathrm{DL}_n(a)$ de parties régulières respectives P et Q, et si $g(a)\neq 0$ a alors f/g admet un $\mathrm{DL}_n(a)$.

(5) **Primitive** Soit f définie au voisinage de a, admettant une primitive F. Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+\ldots+c_n(x-a)^n+\underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$$

alors F admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$ et :

$$F(x)=F(a)+c_0(x-a)+c_1\frac{(x-a)^2}{2}+\ldots+c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}+\underset{x\to a}{o}((x-a)^{n+1})$$

7.4 Développement limités usuels en 0

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)}$$

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n})}$$

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \ldots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})}$$

$$\boxed{(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)}$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)} \qquad \text{(suite géométrique)}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)} \qquad \text{(échanger } x \text{ en } -x\text{)}$$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)} \qquad \text{(intégrer } \tfrac{1}{1+x}\text{)}$$

$$\boxed{\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots - \frac{1}{n}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)} \qquad \text{(échanger } x \text{ en } -x\text{)}$$

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2.4}x^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1.3.\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n)}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)} \qquad (a = \tfrac{1}{2})$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \ldots + (-1)^n\frac{1.3.\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)} \qquad (a = -\tfrac{1}{2})$$

Avec les changements de variable $x \leftrightarrow \pm x^2$ on peut trouver les DL de $\dfrac{1}{1\pm x^2}$ et de $\dfrac{1}{\sqrt{1\pm x^2}}$ et en intégrant, ceux de arctan, arcsin, arccos

7.5 Application des développements limités

On peut être amené à étudier une fonction au voisinage de $+\infty$: il est bien sûr impossible de parler de développement limité (i.e. polynomial). On adapte donc la situation :

Définition 7.5.1 (développement asymptotique) *Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. On dira que f admet un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ à l'ordre n*

quand la fonction $x \mapsto f(1/x)$ admet un développement limité en 0^+ à l'ordre n. Si P est la partie régulière de ce développement limité, on écrira :

$$f(x) = P\Big(\frac{1}{x}\Big) + \underset{x\to+\infty}{o}\Big(\frac{1}{x^n}\Big)$$

Exemple 7.5.2 *la fonction $f : x \mapsto x\sin(1/x)$ admet un développement asymptotique à l'ordre 4 en $+\infty$. En effet,*

$$f\Big(\frac{1}{x}\Big) = \frac{1}{x}\sin(x) = \frac{1}{x}\Big(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \underset{x\to+\infty}{o}(x^5)\Big)$$

et donc

$$f(x) = 1 - \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{120x^4} + \underset{x\to+\infty}{o}\Big(\frac{1}{x^4}\Big)$$

• Recherche d'équivalents, de limites et d'asymptotes

Définition 7.5.3 *Soient f et g deux fonctions d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ et $a \in I$. On dira que f est équivalente à g au voisinage de a, quand il existe une fonction $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et un voisinage U de a tels que :*

$$\forall x \in I \cap U,\ f(x) = \alpha(x)g(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to a} \alpha(x) = 1$$

on note alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ ou simplement $f \underset{a}{\sim} g$. En pratique, si g ne s'annule pas au voisinage de a, on retient que : $f \underset{a}{\sim} g \iff \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

Exemple 7.5.4 *Chercher un équivalent quand x tend vers 0 de $\tan(x) - \sin(x)$.*
On peut écrire $\tan(x) = x + o(x)$ et $\sin(x) = x + o(x)$: c'est insuffisant pour conclure. En poussant plus loin on a : $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ et $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ et on peut ainsi conclure

$$\tan(x) - \sin(x) = \frac{3x^3}{6} + o(x^3) \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^3}{2}$$

En utilisant les développements limités usuels on trouve les équivalents usuels en 0 suivants :

Proposition 7.5.5 (équivalents usuels)

(1)	$\sin(x) \underset{0}{\sim} x$	(2)	$\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$	(3)	$\tan(x) \underset{0}{\sim} x$
(4)	$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$	(5)	$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$	(6)	$(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$
(7)	$\dfrac{1}{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} -x$	(8)	$\sqrt{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2}x$	(9)	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{2}x$
(10)	$\arcsin(x) \underset{0}{\sim} x$	(11)	$\arccos(x) - \dfrac{\pi}{2} \underset{0}{\sim} -x$	(12)	$\arctan(x) \underset{0}{\sim} x$