

Identités fonctionnelles hyperlogarithmiques et tissus en coniques sur les surfaces de Del Pezzo

Luc PIRIO

10 novembre 2022

Plan

I Introduction

Logarithme, polylogarithmes : identités fonctionnelles, etc

Surfaces recouvertes par des coniques : cylindres, etc

II Tissus en coniques sur les dP_d

Surfaces de Del Pezzo

Tissus, tissus $\mathcal{W}_{dP_d}$

III Hyperlogarithmes

Définition, propriétés, identités fonctionnelles

IV Identité $H\log_r$ sur dP_d

V Tissus $\mathcal{W}_{dP_5}$ et $\mathcal{W}_{dP_4}$

Le logarithme

- $\mathbf{L}_0(z) = \mathbf{Log}(z)$

- Représentations intégrales : $\mathbf{L}_0(z) = \int^z \frac{du}{u}$
 $-\mathbf{Log}(1-z) = \mathbf{L}_1(z) = \int^z \frac{du}{1-u}$

- Dévelop^t en série : $\mathbf{L}_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$

- Monodromie : $\mathcal{M}_0(\mathbf{L}_0) = \mathbf{L}_0 + 2i\pi$

- Identité fonctionnelle : $\mathbf{Log}(\textcolor{red}{x}) - \mathbf{Log}(\textcolor{red}{y}) - \mathbf{Log}(\textcolor{red}{x}/\textcolor{red}{y}) = 0$

“indoles logarithmorum hac aequatione fundamentalis continetur”
(Pfaff 1788)

Le dilogarithme $\mathbf{Li}_2$

- $\mathbf{Li}_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$
- **Représentation intégrale :** $\mathbf{Li}_2(z) = \mathbf{L}_{01}(z) = \int^z -\log(1-u) \frac{du}{u}$
 $\mathbf{L}_{10}(z) = \int^z \log(u) \frac{du}{1-u}$
- **Monodromie :** $\mathcal{M}_1(\mathbf{Li}_2) = \mathbf{Li}_2 - 2i\pi \cdot \mathbf{L}_0$
- **Identité fonctionnelle d'Abel ($\mathcal{Ab}$)** $(0 < x < y < 1)$

$$\mathbf{Li}_2(x) - \mathbf{Li}_2(y) - \mathbf{Li}_2\left(\frac{x}{y}\right) - \mathbf{Li}_2\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \mathbf{Li}_2\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) =$$
$$-\frac{\pi^2}{6} + \text{Log}(y) \text{Log}\left(\frac{1-y}{1-x}\right)$$

Le dilogarithme $\mathbf{Li}_2$

- $\mathbf{Li}_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$
- **Représentation intégrale :** $\mathbf{Li}_2(z) = \mathbf{L}_{01}(z) = \int^z -\log(1-u) \frac{du}{u}$
 $\mathbf{L}_{10}(z) = \int^z \log(u) \frac{du}{1-u}$
- **Monodromie :** $\mathcal{M}_1(\mathbf{Li}_2) = \mathbf{Li}_2 - 2i\pi \cdot \mathbf{L}_0$
- **Identité fonctionnelle d'Abel ($\mathcal{Ab}$)** $(0 < x < y < 1)$

$$\mathbf{R}(x) - \mathbf{R}(y) - \mathbf{R}\left(\frac{x}{y}\right) - \mathbf{R}\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \mathbf{R}\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0$$

$$\mathbf{R}(x) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{L}_{01}(x) - \mathbf{L}_{10}(x) \right) = \mathbf{Li}_2(x) + \frac{1}{2} \text{Log}(x) \text{Log}(1-x) - \frac{\pi^2}{6}$$

Les polylogarithmes Li_n ($n \geq 1$)

- $\text{Li}_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}$
- **Représentation integrale :** $\text{Li}_n(z) = \int^z \text{Li}_{n-1}(u) \frac{du}{u} = \text{L}_{0^{n-1}1}(z)$
 $\text{Li}_n'(z) = \text{Li}_{n-1}(z)/z$
- **Monodromie :** $\mathcal{M}_1(\text{Li}_n) = \text{Li}_n - 2i\pi \frac{(\text{L}_0)^{n-1}}{(n-1)!}$
- **Identités fonctionnelles en une variable :**
$$\text{Li}_n(z^r) = r^{n-1} \sum_{\omega^r=1} \text{Li}_n(\omega z) \quad (|z| < 1)$$

$$\text{Li}_n(z) + (-1)^n \text{Li}_n(z^{-1}) = -\frac{(2i\pi)^n}{n!} \mathbf{B}_n\left(\frac{\text{Log } z}{2i\pi}\right) \quad (z \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[)$$

Les polylogarithmes Li_n ($n \geq 1$)

- $\text{Li}_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}$
- **Représentation integrale :** $\text{Li}_n(z) = \int^z \text{Li}_{n-1}(u) \frac{du}{u} = \text{L}_{0^{n-1}1}(z)$
 $\text{Li}_n'(z) = \text{Li}_{n-1}(z)/z$
- **Monodromie :** $\mathcal{M}_1(\text{Li}_n) = \text{Li}_n - 2i\pi \frac{(\text{L}_0)^{n-1}}{(n-1)!}$
- **Identités fonctionnelles en plusieurs variables ($\exists?$) :**

$$\sum_{i \in I} c_i \text{Li}_n(\textcolor{red}{U}_i) = \textcolor{green}{Elem}_{<n}$$

$$\left(I \text{ fini, } c_i \in \mathbb{Z}, \textcolor{red}{U}_i \in \mathbb{Q}(x, y) \right)$$

Les polylogarithmes Li_n ($n \geq 1$)

- $\text{Li}_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}$
- **Représentation integrale :** $\text{Li}_n(z) = \int^z \text{Li}_{n-1}(u) \frac{du}{u} = \text{L}_{0^{n-1}1}(z)$
 $\text{Li}_n'(z) = \text{Li}_{n-1}(z)/z$
- **Monodromie :** $\mathcal{M}_1(\text{Li}_n) = \text{Li}_n - 2i\pi \frac{(\text{L}_0)^{n-1}}{(n-1)!}$
- **Identités fonctionnelles en plusieurs variables ($\exists?$) :**

$$\sum_{i \in I} c_i \text{Li}_n(\textcolor{red}{U}_i) = \textcolor{green}{\text{Elem}}_{<n} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i \in I} c_i \mathcal{L}_n(\textcolor{red}{U}_i) = \textcolor{green}{0}$$

$$\left(I \text{ fini, } c_i \in \mathbb{Z}, \textcolor{red}{U}_i \in \mathbb{Q}(x, y) \right)$$

Exemple : Li_3

- $\text{Li}_3(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k/k^3 = \int^z \text{Li}_2(u) \frac{du}{u}$

- **Identité de Spence-Kummer (1809-1840) :**

$$\begin{aligned} 2\text{Li}_3(x) + 2\text{Li}_3(y) - \text{Li}_3\left(\frac{x}{y}\right) + 2\text{Li}_3\left(\frac{1-x}{1-y}\right) + 2\text{Li}_3\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) - \text{Li}_3(xy) \\ + 2\text{Li}_3\left(-\frac{x(1-y)}{(1-x)}\right) + 2\text{Li}_3\left(-\frac{(1-y)}{y(1-x)}\right) - \text{Li}_3\left(\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\right) \\ = 2\text{Li}_3(1) - \text{Log}(y)^2 \text{Log}\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \frac{\pi^2}{3} \text{Log}(y) + \frac{1}{3} \text{Log}(y)^3 \end{aligned}$$

Exemple : Li_3

- $\text{Li}_3(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k/k^3 = \int^z \text{Li}_2(u) \frac{du}{u}$

- Identité de Spence-Kummer (1809-1840) :**

$$\begin{aligned} 2\text{Li}_3(x) + 2\text{Li}_3(y) - \text{Li}_3\left(\frac{x}{y}\right) + 2\text{Li}_3\left(\frac{1-x}{1-y}\right) + 2\text{Li}_3\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) - \text{Li}_3(xy) \\ + 2\text{Li}_3\left(-\frac{x(1-y)}{(1-x)}\right) + 2\text{Li}_3\left(-\frac{(1-y)}{y(1-x)}\right) - \text{Li}_3\left(\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\right) \\ = 2\text{Li}_3(1) - \text{Log}(y)^2 \text{Log}\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \frac{\pi^2}{3} \text{Log}(y) + \frac{1}{3} \text{Log}(y)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\mathcal{L}_3(x) + 2\mathcal{L}_3(y) - \mathcal{L}_3\left(\frac{x}{y}\right) + 2\mathcal{L}_3\left(\frac{1-x}{1-y}\right) + 2\mathcal{L}_3\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) - \mathcal{L}_3(xy) \\ + 2\mathcal{L}_3\left(-\frac{x(1-y)}{(1-x)}\right) + 2\mathcal{L}_3\left(-\frac{(1-y)}{y(1-x)}\right) - \mathcal{L}_3\left(\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_3(z) = \text{Li}_3(z) - \text{Li}_2(z) \text{Log}|x| + \frac{1}{3} \text{Li}_1(z) (\text{Log}|x|)^2$$

Exemple : $\mathbf{Li}_4$

- $\mathbf{Li}_4(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k / k^4$ $\mathcal{L}_4(x) = \mathbf{Li}_4(x) + \mathbf{Elem}_{<4}(x)$

- **Identité fonctionnelle de Kummer (1840) :**

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}_4\left(-\frac{x^2 y \eta}{\zeta}\right) + \mathcal{L}_4\left(-\frac{y^2 x \zeta}{\eta}\right) + \mathcal{L}_4\left(\frac{x^2 y}{\eta^2 \zeta}\right) + \mathcal{L}_4\left(\frac{y^2 x}{\zeta^2 \eta}\right) \\
 & - 6 \mathcal{L}_4(xy) - 6 \mathcal{L}_4\left(\frac{xy}{\eta \zeta}\right) - 6 \mathcal{L}_4\left(-\frac{xy}{\eta}\right) - 6 \mathcal{L}_4\left(-\frac{xy}{\zeta}\right) \\
 & - 3 \mathcal{L}_4(x\eta) - 3 \mathcal{L}_4(y\zeta) - 3 \mathcal{L}_4\left(\frac{x}{\eta}\right) - 3 \mathcal{L}_4\left(\frac{y}{\zeta}\right) \\
 & - 3 \mathcal{L}_4\left(-\frac{x\eta}{\zeta}\right) - 3 \mathcal{L}_4\left(-\frac{y\zeta}{\eta}\right) - 3 \mathcal{L}_4\left(-\frac{x}{\eta \zeta}\right) - 3 \mathcal{L}_4\left(-\frac{y}{\eta \zeta}\right) \\
 & + 6 \mathcal{L}_4(x) + 6 \mathcal{L}_4(y) + 6 \mathcal{L}_4\left(-\frac{x}{\zeta}\right) + 6 \mathcal{L}_4\left(-\frac{y}{\eta}\right) = \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

$$(\zeta = 1 - x, \eta = 1 - y)$$

- Abel 1881 (Spence 1809, Hill 1829, Rogers 1907)

$$R(x) - R(y) - R\left(\frac{x}{y}\right) - R\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + R\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0 \quad (\mathcal{A}b)$$

- Spence-Kummer : $\sum_{i=1}^9 c_i \mathcal{L}_3(U_i(x, y)) = 0 \quad (\mathcal{SK})$

- Kummer 1840 : $\sum_i c_i \mathcal{L}_n(U_i(x, y)) = 0 \quad (n \leq 5) \quad (\mathcal{K}_n)$

- ...

- Goncharov 1995 : $\sum_{i=1}^{22} c_i \mathcal{L}_3(U_i(a, b, c)) = 0 \quad (\mathcal{Gon})$

- Gangl 2003 : $\sum_i c_i \mathcal{L}_n(U_i(x, y)) = 0 \quad (n = 6, 7) \quad (\mathcal{Gan}_n)$

- Charlton, Gangl, Radchenko, Rudenko, ...

- **Identités Fonctionnelles (IF) des polylogarithmes :**

- ▶ Géométrie hyperbolique
- ▶ Géométrie des tissus
- ▶ K-théorie des corps de nombres $(n \leq 4)$
- ▶ Théorie des motifs
- ▶ Théorie des périodes (VZM)
- ▶ Ψ des particules ("*Scattering amplitudes*")
- ▶ Y-systèmes et algèbres amassées $(n = 2)$
- ▶ Symétrie miroir ("à la GHK") $(n = 2)$

- **Problèmes :**
 - construire des **IF** pour les $\mathcal{L}_n$ $(\exists n \geq 8 ?)$
 - mieux comprendre les **IF** polylogarithmiques

- $\mathbf{Ab}(x, y) = \mathbf{R}(x) - \mathbf{R}(y) - \mathbf{R}\left(\frac{x}{y}\right) - \mathbf{R}\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \mathbf{R}\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) \equiv 0$

Thm [de Jeu] : Pour I fini, $c_i \in \mathbf{Q}$ et $U_i \in \mathbf{Q}[x_1, \dots, x_m]$ ($\forall i \in I$)

$$\sum_{i \in I} c_i \mathcal{L}_2(U_i) \equiv \text{cst} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \sum_{i \in I} c_i \mathcal{L}_2(U_i) \text{ est une CL} \\ \text{de special}^\circ \text{ de } \mathbf{Ab}(X_s, Y_s) \\ \text{avec } X_s, Y_s \in \mathbf{Q}[x_1, \dots, x_M] \end{array}$$

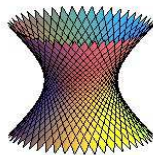
- $(\mathbf{Log}(x) - \mathbf{Log}(y) - \mathbf{Log}(x/y) = 0)$ est l'IF fondamentale du log
- $(\mathcal{Ab}) \Leftrightarrow (\mathbf{Ab}(x, y) \equiv 0)$ est l'IF fondamentale du dilog
- **Pbm** - Pour $n \geq 3$, $\exists$ IF fondamentale **IFF**($\mathbf{Li}_n$) du n -ième polylog ?
 - Si oui, les **IFF**($\mathbf{Li}_n$) viennent-elles en série ?

Surfaces avec des familles de “courbes simples”

- [Wren 1669] “Generatio corporis cylindroidis hyperbolici ...”

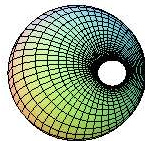
L'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ est 2-reglée}$$



- [Dupin 1802] “Applications de géométrie et de mécanique, à la Marine, aux Ponts et Chaussées, etc.” (1822)

*Découverte des **cyclides** :
surfaces $S \subset \mathbb{E}^3$ dont les lignes
de courbure sont des cercles*

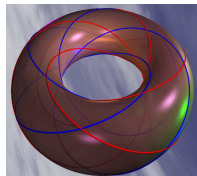
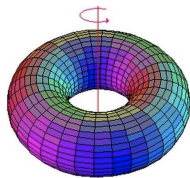


- [Liouville, Thomson, ...] : *Une cyclide de Dupin s'obtient comme inversion d'un tore par rapport à une sphère*

Surfaces avec des familles de “courbes simples”

- [Villarceau 1848]

Un tore $\mathcal{T} \subset \mathbb{E}^3$ porte quatre familles de cercles inclus dedans (“Cercles de Villarceau”)



- $\implies$ *Par un point générique d'une cyclide $\mathcal{S} \subset \mathbb{E}^3$ passe au moins quatre cercles inclus dans $\mathcal{S}$*
- [Cayley-Salmon 1849] *Il y a 27 droites dans une surface cubique !*
 - $\longrightarrow$ *Une surface cubique est recouverte par 27 familles de coniques contenues dedans*
- [Kummer 1863, Moutard 1864, Darboux 1864, etc]
 - $\longrightarrow$ *familles de coniques sur les cyclides !*

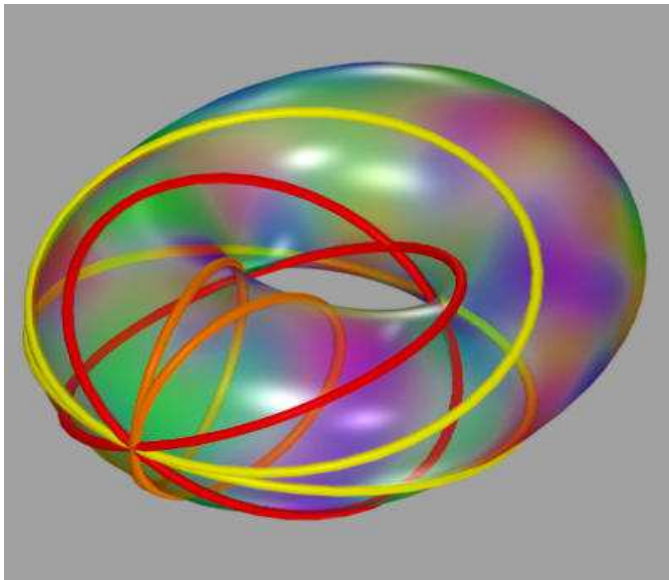
Cyclides

- **Kummer** : *surface quartique dans $\mathbf{P}^3$ avec une conique de points doubles dans le plan à l'infini*
- **Darboux** : *surface quartique dans $\mathbb{E}^3$ avec un cercle de points doubles "à l'infini" ("Cyclides de Darboux")*
- **Dupin** : *surface quartique dans $\mathbb{E}^3$ avec 4 points doubles "à l'infini"*

- | |
|--|
| <p>Thm • Une cyclide est recouverte par $N \leq 10$ familles de coniques</p> <p>• [Blum 1980] Une cyclide de Darboux est recouverte par 4,5 ou 6 familles de coniques</p> |
|--|

- **Cyclides** : de Dupin à... maintenant !
(En géométrie, architecture, CAGD/Visualisation, etc)

Une cyclide de Blum



Des cyclides aux surfaces de Del Pezzo

- Soit $\mathcal{C} \subset \mathbf{P}^3$ une surface cyclide quartique
- [Clebsch 1868 (Darboux 1871)] “Représentation de $\mathcal{C}$ dans le plan” (via un système linéaire de cubiques avec 5 points bases)
- [Segre, Veronese 1884] $\mathcal{C} \subset \mathbf{P}^3$ est l'image de l'intersection de deux quadriques $Q_1, Q_2 \subset \mathbf{P}^4$ par une projection de centre $p \in \mathbf{P}^4$:

$$\mathcal{C} = \pi_p(\mathcal{C}') \quad \text{avec} \quad \mathcal{C}' = Q_1 \cap Q_2 \subset \mathbf{P}^4$$

- [Del Pezzo 1887] Pour $r \leq 8$ points $p_1, \dots, p_r$ en PG dans $\mathbf{P}^2$

$$\mathbf{dP}_d = \text{Im} \left(\varphi_{|3H - \sum_{i=1}^r p_i|} : \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^d \right) \quad (d = 9 - r)$$

Surfaces de Del Pezzo I : propriétés

- $dP_d \subset P^d$ surface lisse de degré d ($d = 9 - r$)
- $dP_d \simeq Bl_{p_1+\dots+p_r}(P^2)$, $Pic(dP_d) = Z h \oplus (\bigoplus_{i=1}^r Z \ell_i) \simeq Z^{r+1}$
- $-K_{dP_d} = 3h - \sum_{i=1}^r \ell_i$ très ample $\rightsquigarrow \varphi_{|-K|} : dP_d \longrightarrow P^d$ plong^t
- $Pic(dP_d) \supset K^\perp = \langle \rho_1, \dots, \rho_r \rangle$ $\rho_i = \ell_i - \ell_{i+1}$ $i = 1, \dots, r-1$
et $\rho_r = 3h - \sum_{i=1}^3 \ell_i$
- $-(\cdot, \cdot) + \{\rho_i\}_{i=1}^r \rightsquigarrow$ système de racines $R_r = K^\perp \otimes R$ de type E_r
- Pour toute racine ρ : $s_\rho : R_r \rightarrow R_r$ (reflection)
$$d \mapsto d + (d, \rho)\rho$$
- $W_r = \langle s_{\rho_1}, \dots, s_{\rho_r} \rangle \subset O(R_r)$: groupe de Weyl de type E_r

Surfaces de Del Pezzo III

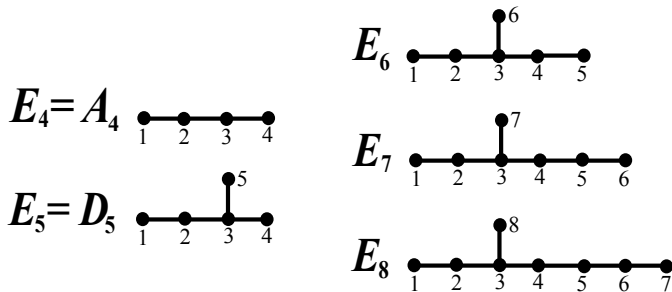


FIGURE – Diagramme de Dynkin E_r (où k dénote ρ_k pour $k = 1, \dots, r$)

Surfaces de Del Pezzo II : droites et coniques

- $X_r = \mathbf{dP}_d$ ($d = 9 - r$)
- Droites $\mathcal{L}_r = \left\{ d \in \mathbf{Pic}(X_r) \mid (d, -K) = 1, d^2 = -1 \right\}$
 $\mathcal{L}_r \ni \delta \rightsquigarrow \mathbf{P}^1 \simeq \delta \subset X_r$

$$\mathcal{L}_r = \mathbf{W}_r \cdot (\ell_1) \qquad \mathbf{W}'_{r-1} = \text{Stab}(\ell_1) = \langle s_{\rho_1}, \dots, s_{\rho_{r-1}} \rangle \\ = W(E'_{r-1}) \quad (\text{groupe de Weyl})$$

- Cloniques $\mathcal{K}_r = \left\{ \mathfrak{c} \in \mathbf{Pic}(X_r) \mid (\mathfrak{c}, -K) = 2, \mathfrak{c}^2 = 0 \right\}$
 $\mathcal{K}_r \ni \mathfrak{c} \rightsquigarrow \text{Fibration en coniques } \varphi_{\mathfrak{c}} : X_r \rightarrow \mathbf{P}^1$

$$\mathcal{K}_r = \mathbf{W}_r \cdot (\mathbf{h} - \ell_1) \qquad \mathbf{W}''_{r-1} = \text{Stab}(\mathbf{h} - \ell_1) = \langle s_{\rho_2}, \dots, s_{\rho_r} \rangle \\ = W(E''_{r-1}) \quad (\text{groupe de Weyl})$$

Surfaces de Del Pezzo III

r	4	5	6	7	8
E_r	A_4	D_5	E_6	E_7	E_8
E'_{r-1}	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
E''_{r-1}	A_3	D_4	D_5	D_6	D_7
$W_r = W(E_r)$	$\mathfrak{S}_5$	$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4 \rtimes \mathfrak{S}_5$	$W(E_6)$	$W(E_7)$	$W(E_8)$
$\omega_r = W_r $	$5!$	$2^4 \cdot 5!$	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$	$2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	
$l_r = \mathcal{L}_r = W_r / W_{r-1} $	10	16	27	56	240
$\kappa_r = \mathcal{K}_r = W_r / W''_{r-1} $	5	10	27	126	2056

Exemple : droites sur dP_2

- $X_7 = dP_2 = \mathbf{Bl}_{p_1+\dots+p_7}(\mathbf{P}^2) \xrightarrow{\beta} \mathbf{P}^2$
- $\ell_i = \beta^{-1}(p_i) \subset X_7 \rightsquigarrow \ell_i \in \mathbf{Pic}(X_7)$
 $\rightsquigarrow \ell = \sum_{i=1}^7 \ell_i$

Line	Class in $\mathbf{Pic}(X_7)$	Number of such lines	Model in $\mathbf{P}^2$
ℓ_i	ℓ_i	7	first infinitesimal neighbourhood $p_i^{(1)}$
ℓ_{ij}	$h - \ell_i - \ell_j$	21	line joining p_i to p_j
C_{ij}	$2h - \ell + \ell_i + \ell_j$	21	conic through the p_k 's, $k \notin \{i, j\}$
C_i^3	$3h - \ell - \ell_i$	7	cubic through all the p_l 's with a node at p_i

TABLE 2. Lines on dP_2 and the corresponding ‘curves’ in the projective plane

Exemple : cloniques sur dP_2

Conic class $\mathfrak{c}$	Number of such $\mathfrak{c}$	Linear system $ \mathfrak{C}_{\mathfrak{c}} $	$\mathfrak{C}_{\mathfrak{c}}^{\text{red}}$
$h - \ell_i$	7	lines through p_i	$\ell_{ij} + \ell_j$
$2h - \sum_{i \in I} \ell_i$	35	conics through the p_i 's, $i \in I$	$\ell_{i_1 i_2} + \ell_{i_3 i_4}$ $\ell_{i_3} + C_{i_1 i_2}$
$3h - \ell + \ell_i - \ell_j$	42	cubics through the p_k 's for $k \neq i$, with a node at p_j	$\ell_{jk} + C_{ik}$ $\ell_i + C_j^3$
$4h - \ell - \sum_{j \in J} \ell_j$	35	quartics through the p_k 's with a node at p_j for $j \in J$	$C_{k_1 k_2} + C_{k_3 k_4}$ $\ell_{j_1 j_2} + C_{j_3}^3$
$5h - 2\ell + \ell_i$	7	quintics through the p_k 's with a node at p_k except for $k = i$	$C_{ij} + C_j^3$

TABLE 3. Conic classes on dP_2 and their reducible fibers

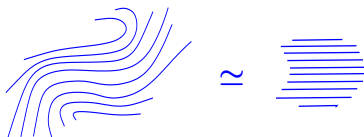
Surfaces de Del Pezzo : coniques singulières

- $L_r = \cup_{\ell \in \mathcal{L}_r} \ell \subset X_r \rightsquigarrow \mathbf{Y}_r = X_r \setminus L_r$
- $\mathcal{K}_r \ni \mathfrak{c} \rightsquigarrow$ Fibration en coniques $\varphi_{\mathfrak{c}} : X_r \rightarrow \mathbf{P}^1$
- $\Sigma_{\mathfrak{c}} = \mathbf{Spectre}(\varphi_{\mathfrak{c}}) = \{ \lambda \in \mathbf{P}^1 \mid \varphi_{\mathfrak{c}}^{-1}(\lambda) \text{ pas irréductible} \} \subset \mathbf{P}^1$

$$= \{ \sigma_{\mathfrak{c},1}, \dots, \sigma_{\mathfrak{c},r-1} \} \quad (\sigma_{\mathfrak{c},r-1} = \infty)$$
- Pour tout $\sigma_{\mathfrak{c},i} : \varphi_{\mathfrak{c}}^{-1}(\sigma_{\mathfrak{c},i}) = L'_{\mathfrak{c},i} + L''_{\mathfrak{c},i} \quad L'_{\mathfrak{c},i}, L''_{\mathfrak{c},i} \in \mathcal{L}_r$
- $\mathbf{H}_{\mathfrak{c}} = \mathbf{H}^0(\mathbf{P}^1, \Omega_{\mathbf{P}^1}^1(\text{Log } \Sigma_{\mathfrak{c}})) = \left\langle \frac{dz}{z - \sigma_{\mathfrak{c},i}} \mid i = 1, \dots, r-2 \right\rangle$
- $\mathcal{H}_{\mathfrak{c}} = \varphi_{\mathfrak{c}}^*(\mathbf{H}_{\mathfrak{c}}) = \left\langle \frac{d\varphi_{\mathfrak{c}}}{\varphi_{\mathfrak{c}} - \sigma_{\mathfrak{c},i}} \right\rangle \subset \mathbf{H}^0(X_r, \Omega_{X_r}^1(\text{Log } L_r))$
- $\mathcal{W}_{\text{dP}_d} = \mathcal{W}(\varphi_{\mathfrak{c}})_{\mathfrak{c} \in \mathcal{K}_r} \quad \kappa_r\text{-tissu sur } Y_r$

Tissus I

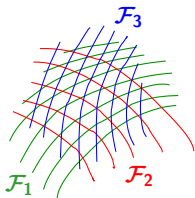
- **Feuilletage** : famille
• localement triviale
de sous-variétés



- Un **d -tissu** est une collection de d feuilletages 2 à 2 transverses

$$\mathcal{W}_d = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_d)$$

- **Ex. 1**



un 3-tissu plan

- 2** $\mathcal{W}_{\text{dP}_d} = \mathcal{W}(\varphi_{\mathbf{c}} \mid \mathbf{c} \in \mathcal{K}_r) :$ κ_r -tissu sur Y_r , en courbes rationnelles

Tissus II

- $\mathbf{P}^2 \supset C$ courbe alg, $\deg C = d$ $\rightsquigarrow \mathcal{W}_C = \mathcal{W}(P_1, \dots, P_d)$ d -tissu sur $\check{\mathbf{P}}^2$
- $H^0(\omega_C^1) \ni \omega$ $\rightsquigarrow \left(\int^{P_1} \omega, \dots, \int^{P_d} \omega \right)$ tq $\sum_{i=1}^d \int^{P_i} \omega = 0$
- $\mathcal{W}(U_i)_{i=1}^d$ $\rightsquigarrow \left(F_1(U_1), \dots, F_d(U_d) \right)$ tq $\sum_{i=1}^d F_i(U_i) = 0$
- $\mathcal{W}_{dP_6} = \mathcal{W}\left(\text{triangle with 6 tangents} \right) = \mathcal{W}\left(x, y, \frac{x}{y} \right)$ $\text{Log}(x) - \text{Log}(y) - \text{Log}\left(\frac{x}{y}\right) = 0$
- $\mathcal{W}_{dP_5} = \mathcal{W}\left(\text{pentagon with 5 tangents} \right) = \mathcal{W}\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-y}{1-x}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)} \right)$

$$R(x) - R(y) - R\left(\frac{x}{y}\right) - R\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + R\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0$$

Tissus de Del Pezzo

- $\mathcal{W}_{\mathbf{dP}_d} = \mathcal{W}(\varphi_{\mathbf{c}})_{\mathbf{c} \in \mathcal{K}_r} :$ $\mathcal{K}_r$ -tissu en coniques sur $\mathbf{dP}_d$
- Quest^o : $\exists (F_{\mathbf{c}}(\varphi_{\mathbf{c}}))_{\mathbf{c} \in \mathcal{K}_r}$ tel que $\sum_{\mathbf{c} \in \mathcal{K}_r} F_{\mathbf{c}}(\varphi_{\mathbf{c}}) = 0$
avec les $F_{\mathbf{c}}$ polylogarithmiques ?

Théorème : $\exists (\epsilon_{\mathbf{c}})_{\mathbf{c} \in \mathcal{K}_r} \in \{1, -1\}^{\mathcal{K}_r}$, $\pm$ -unique tel que

$$(\mathbf{HLog}^{r-2}) \quad \sum_{\mathbf{c} \in \mathcal{K}_r} \epsilon_{\mathbf{c}} \mathbf{AI}_{\mathbf{c}}^{r-2}(\varphi_{\mathbf{c}}) = 0$$

où $\forall \mathbf{c} : \mathbf{AI}_{\mathbf{c}}^{r-2} =$ hyperlogarithme antisymétrique complet
de poids $r - 2$ sur $\mathbf{P}^1 \setminus \Sigma_{\mathbf{c}}$.

III Intégrales itérées

- Poincaré (1884), Lappo-Danilevski (1928)
- Y variété complexe
- $\mathcal{H} = \langle \omega_1, \dots, \omega_m \rangle \subset \mathbf{H}^0(Y, \Omega_Y^1) + \left[\begin{array}{l} d\omega_i = 0 \\ \omega_i \wedge \omega_j = 0 \end{array} \right]$
- **Ex :** $\varphi : Y \rightarrow C$ et $\omega_i \in \varphi^*(\mathbf{H}^0(C, \Omega_C^1))$ $i = 1, \dots, m$
- Point base $y \in Y$, chemin $\gamma^z : [0, 1] \rightarrow Y$ de y à z :
 - $\mathbb{I}_{\omega_i} : z \mapsto \int_{\gamma^z} \omega_i \quad \rightsquigarrow \quad \mathbb{I}_{\omega_i} \in \mathcal{O}_y$
 - $\mathbb{I}_{\omega_j \omega_i} : z \mapsto \int_{\gamma^z} \omega_j(u) \cdot \mathbb{I}_{\omega_i}(u) \quad \rightsquigarrow \quad \mathbb{I}_{\omega_j \omega_i} \in \mathcal{O}_y$
 - $\mathbb{I}_{\omega_k \omega_j \omega_i} : z \mapsto \int_{\gamma^z} \omega_k(u) \cdot \mathbb{I}_{\omega_j \omega_i}(u) \quad \rightsquigarrow \quad \mathbb{I}_{\omega_k \omega_j \omega_i} \in \mathcal{O}_y$

III Intégrales itérées (polylogarithmes)

$$\mathbb{I}^w : \mathcal{H}^{\otimes w} \longrightarrow \mathcal{O}_Y$$

- $\underline{\omega} = \omega_{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{i_w} \longmapsto \mathbb{I}_{\underline{\omega}} : z \mapsto \int_{\gamma^z} \omega_{i_1}(u) \cdot \mathbb{I}_{\omega_{i_2} \cdots \omega_{i_w}}(u)$

- $\mathbb{I} : \left(\bigoplus_{w \geq 0} \mathcal{H}^{\otimes w}, \mathbb{I} \right) \longrightarrow \mathcal{O}_Y$ morphisme injectif
de $\mathbf{C}$ -algèbres

- $\forall \underline{\omega} : \begin{array}{l} \mathbb{I}_{\underline{\omega}} \in \mathcal{O}_Y \cap \tilde{\mathcal{O}}(Y) \\ \text{monod. unipotente} \end{array} \implies \text{Symbole } \mathcal{S}(\mathbb{I}_{\underline{\omega}}) = \underline{\omega} \quad \checkmark$

- Ex : $Y = \mathbf{P}^1 \setminus \Sigma$ avec $\Sigma = \{0, 1, \infty\}$

$$\mathcal{H} = \left\langle \frac{dz}{z}, \frac{dz}{1-z} \right\rangle = \mathbf{H}^0(\mathbf{P}^1, \Omega_{\mathbf{P}^1}^1(\text{Log } \Sigma))$$

$$\text{Li}_n = \mathbb{I}^n \left(\left(\frac{dz}{z} \right)^{\otimes (n-1)} \otimes \left(\frac{dz}{1-z} \right) \right) \quad (\text{“Polylogarithmes”})$$

III Intégrales itérées : hyperlogarithmes

- **Ex :** $Y = \mathbf{P}^1 \setminus \Sigma$ avec $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{r-1}\}$ ($\sigma_{r-1} = \infty$)

$$\mathcal{H} = \left\langle \frac{dz}{z-\sigma_1}, \dots, \frac{dz}{z-\sigma_{r-2}} \right\rangle = \mathbf{H}^0\left(\mathbf{P}^1, \Omega_{\mathbf{P}^1}^1(\text{Log } \Sigma)\right)$$

$$\text{HL}_{\underline{\omega}}^n = \mathbb{I}^n\left(\left(\frac{dz}{z-\sigma_{i_1}}\right) \otimes \dots \otimes \left(\frac{dz}{z-\sigma_{i_n}}\right)\right) \quad \text{“Hyperlogarithmes”}$$

- **Hyperlog antisymétrique complet de poids $r-2$ sur $\mathbf{P}^1 \setminus \Sigma$:**

$$\begin{aligned} \mathbf{AI}_{\Sigma}^{r-2} &= \mathbb{I}^n\left(\text{Asym}\left(\left(\frac{dz}{z-\sigma_1}\right) \otimes \dots \otimes \left(\frac{dz}{z-\sigma_{r-2}}\right)\right)\right) \\ &= \mathbb{I}^n\left(\frac{1}{(r-2)!} \sum_{\nu \in \mathfrak{S}_{r-2}} \mathbf{s}(\nu) \left(\frac{dz}{z-\sigma_{\nu(1)}}\right) \otimes \dots \otimes \left(\frac{dz}{z-\sigma_{\nu(r-2)}}\right)\right) \end{aligned}$$

- **Ex :** $\mathbf{AI}_{\{0,1,\infty\}}^2 = \frac{1}{2} \mathbb{I}^2\left(\frac{dz}{z} \otimes \frac{dz}{(1-z)} - \frac{dz}{(1-z)} \otimes \frac{dz}{z}\right) = \mathbf{R}$

IV Identité $\mathbf{HLog}_r$: preuve

$$(\mathbf{HLog}_r) : \sum_{\mathbf{c} \in \mathcal{K}_r} \epsilon_{\mathbf{c}} \mathbf{AI}_{\mathbf{c}}^{r-2}(\varphi_{\mathbf{c}}) = 0 \text{ avec } \mathbf{AI}_{\mathbf{c}}^{r-2} = \mathbf{AI}_{\Sigma_{\mathbf{c}}}^{r-2}$$

- $\varphi_{\mathbf{c}} : X_r \rightarrow \mathbf{P}^1 \supset \Sigma_{\mathbf{c}} = \{\sigma_{\mathbf{c},i}\}_{i=1}^{r-1} \quad \mathbf{H}_{\mathbf{c}} = \mathbf{H}^0(\Omega_{\mathbf{P}^1}^1(\mathrm{Log} \Sigma_{\mathbf{c}}))$
- $\mathcal{H}_{\mathbf{c}} = \varphi_{\mathbf{c}}^*(\mathbf{H}_{\mathbf{c}}) \subset \mathbf{H}^0(\Omega_{X_r}^1(\mathrm{Log} L_r)) = \mathcal{H}_{X_r}$
- $\mathbf{AI}_{\mathbf{c}}^{r-2}(\varphi_{\mathbf{c}}) = \Pi \left(\left(\frac{d\varphi_{\mathbf{c}}}{\varphi_{\mathbf{c}} - \sigma_{\mathbf{c},1}} \right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{d\varphi_{\mathbf{c}}}{\varphi_{\mathbf{c}} - \sigma_{\mathbf{c},r-2}} \right) \right) \in \Pi^{r-2}(\mathcal{H}_{\mathbf{c}}^{\wedge(r-2)})$
 $\downarrow \mathcal{S}$
- $\Omega_{\mathbf{c}}^{r-2} = \left(\frac{d\varphi_{\mathbf{c}}}{\varphi_{\mathbf{c}} - \sigma_{\mathbf{c},1}} \right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{d\varphi_{\mathbf{c}}}{\varphi_{\mathbf{c}} - \sigma_{\mathbf{c},r-2}} \right) \in \mathcal{H}_{\mathbf{c}}^{\wedge(r-2)} \subset (\mathcal{H}_{X_r})^{\wedge(r-2)}$

$$(\mathbf{HLog}_r) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{\mathbf{c}} \epsilon_{\mathbf{c}} \Omega_{\mathbf{c}}^{r-2} = 0 \quad \text{dans} \quad (\mathcal{H}_{X_r})^{\wedge(r-2)}$$

IV Identité $\mathbf{HLog}_r$: preuve

$$(\mathbf{HLog}_r) \iff \sum_{\mathbf{c}} \epsilon_{\mathbf{c}} \Omega_{\mathbf{c}}^{r-2} = 0 \quad \text{dans} \quad (\mathcal{H}_{X_r})^{\wedge(r-2)}$$

- $\mathbf{H}^0\left(\Omega_{X_r}^1(\mathrm{Log} L_r)\right) = \mathcal{H}_{X_r} \xrightarrow{\oplus_{\ell} \mathrm{Res}_{\ell}} \mathbf{C}^{\mathcal{L}_r} \quad \text{injectif}$

$$\Omega_{\mathbf{c}}^{r-2} \in (\mathcal{H}_{X_r})^{\wedge(r-2)} \hookrightarrow \wedge^{r-2} \mathbf{C}^{\mathcal{L}_r} \xleftarrow{\text{blue}} W(E_r)\text{-rep}$$

- $0 \rightarrow \mathbf{hlog}_r \rightarrow \oplus_{\mathbf{c}} (\mathcal{H}_{\mathbf{c}})^{\wedge(r-2)} \rightarrow \wedge^{r-2} \mathbf{C}^{\mathcal{L}_r} \quad \text{SE de } \mathbf{C}\text{-ev}$

⌋

$$\mathrm{Ind}_{W_{r-1}''}^{W_r}(\mathbf{sign}_{r-1}'') \rightarrow \wedge^{r-2} \mathbf{C}^{\mathcal{L}_r} \quad \text{SE de } W_r\text{-mod}$$

- $\mathbf{c}_0 \rightsquigarrow \Omega_{\mathbf{c}_0}^{r-2} \rightsquigarrow W_{r-1}'' = \mathrm{Stab}(\mathbf{c}_0) \subset W_r = W(E_r)$

IV Identité $H\text{Log}_r$: preuve

- $\mathfrak{c}_0 \rightsquigarrow \Omega_{\mathfrak{c}_0}^{r-2} \rightsquigarrow W''_{r-1} = \text{Stab}(\mathfrak{c}_0) \subset W_r = W(E_r)$
- $W_r = \sqcup_{\mathfrak{c}} \gamma_{\mathfrak{c}_0}^{\mathfrak{c}} \cdot W''_{r-1} \rightsquigarrow \Omega_{\mathfrak{c}}^{r-2} = \mathbf{sign}(\gamma_{\mathfrak{c}_0}^{\mathfrak{c}}) \left(\gamma_{\mathfrak{c}_0}^{\mathfrak{c}} \bullet \Omega_{\mathfrak{c}_0}^{r-2} \right)$
- Faits : 1. $\mathbf{C} \cdot \Omega_{\mathfrak{c}}^{r-2} = (\mathcal{H}_{\mathfrak{c}})^{\wedge(r-2)}$
 2. $(\Omega_{\mathfrak{c}}^{r-2})_{\mathfrak{c}} \in \oplus_{\mathfrak{c}} (\mathcal{H}_{\mathfrak{c}})^{\wedge(r-2)}$ est W_r -stable
 et engendre $\mathbf{sign}_r : W_r \rightarrow \{\pm 1\}$
- $\mathbf{sign}_r \hookrightarrow \oplus_{\mathfrak{c}} (\mathcal{H}_{\mathfrak{c}})^{\wedge(r-2)} \longrightarrow \wedge^{r-2} \mathbf{C}^{\mathcal{L}_r}$ SE de W_r -rep
 $1 \longmapsto (\Omega_{\mathfrak{c}}^{r-2})_{\mathfrak{c}} \longmapsto \sum_{\mathfrak{c}} \Omega_{\mathfrak{c}}^{r-2}$
- $\mathbf{sign}_r$ n'apparaît pas dans $\wedge^{r-2} \mathbf{C}^{\mathcal{L}_r} \implies$ on a $\sum_{\mathfrak{c}} \Omega_{\mathfrak{c}}^{r-2} = 0$

Preuve : fin

Proposition : 1. Pour $r = 4, \dots, 8$, on a les décompositions suivantes en $W(E_r)$ -modules irréductibles

$$A_4 \quad \mathbf{C}^{\mathcal{L}_4} = \mathbf{1} \oplus V_{[41]}^4 \oplus V_{[32]}^5$$

$$D_5 \quad \mathbf{C}^{\mathcal{L}_5} = \mathbf{1} \oplus V_{[4,1]}^5 \oplus V_{[3,2]}^{10}$$

$$E_6 \quad \mathbf{C}^{\mathcal{L}_6} = \mathbf{1} \oplus V^{6,1} \oplus V^{20,2}$$

$$E_7 \quad \mathbf{C}^{\mathcal{L}_7} = \mathbf{1} \oplus V^{7,1} \oplus V^{21,3} \oplus V^{27,2}$$

$$E_8 \quad \mathbf{C}^{\mathcal{L}_8} = \mathbf{1} \oplus V^{8,1} \oplus V^{35,2} \oplus V^{84,4} \oplus V^{112,3}$$

2. sign_r n'apparaît pas dans $\wedge^{r-2} \mathbf{C}^{\mathcal{L}_r} \iff r \leq 7$

Corollaire : Pour $r \leq 7$, on a $\sum_c \Omega_c^{r-2} = 0$ dans $\wedge^{r-2} \mathbf{C}^{\mathcal{L}_r}$

Extra : décompositions en $W(E_r)$ -irreps

- $\mathcal{L}_r = \{ \text{'droites' incluses dans } X_r \}$ $\mathcal{K}_r = \{ \text{"cloniques" de } X_r \}$
- $\mathbf{C}^{\mathcal{L}_r}, \mathbf{C}^{\mathcal{K}_r}$ sont des $W(E_r)$ -modules

$$A_4 \quad \mathbf{C}^{\mathcal{L}_4} = \mathbf{1} \oplus V_{[41]}^4 \oplus V_{[32]}^5 \quad [\text{DFL}]$$

$$D_5 \quad \mathbf{C}^{\mathcal{L}_5} = \mathbf{1} \oplus V_{[4,1]}^5 \oplus V_{[3,2]}^{10}$$

$$E_6 \quad \mathbf{C}^{\mathcal{L}_6} = \mathbf{1} \oplus V^{6,1} \oplus V^{20,2}$$

$$E_7 \quad \mathbf{C}^{\mathcal{L}_7} = \mathbf{1} \oplus V^{7,1} \oplus V^{21,3} \oplus V^{27,2}$$

$$E_8 \quad \mathbf{C}^{\mathcal{L}_8} = \mathbf{1} \oplus V^{8,1} \oplus V^{35,2} \oplus V^{84,4} \oplus V^{112,3}$$

$$A_4 \quad \mathbf{C}^{\mathcal{K}_4} = \mathbf{1} \oplus V_{[41]}^4$$

$$D_5 \quad \mathbf{C}^{\mathcal{K}_5} = \mathbf{1} \oplus V_{[-,41]}^4 \oplus V_{[4,1]}^5$$

$$E_6 \quad \mathbf{C}^{\mathcal{K}_6} = \mathbf{1} \oplus V^{6,1} \oplus V^{20,2}$$

$$E_7 \quad \mathbf{C}^{\mathcal{K}_7} = \mathbf{1} \oplus V^{7,1} \oplus V^{27,2} \oplus V^{35,4} \oplus V^{56,3}$$

$$E_8 \quad \mathbf{C}^{\mathcal{K}_8} = \mathbf{1} \oplus V^{8,1} \oplus V^{35,2} \oplus V^{50,8} \oplus V^{84,4} \oplus V^{112,3} \oplus V^{210,4} \oplus V^{400,7} \oplus V^{700,6}$$

V Tissu $\mathcal{W}_{\mathrm{dP}_5} = \mathcal{B} =$ tissu de Bol

[N-Lin] $\mathcal{B}$ n'est pas linéarisable

[Rang] $\mathcal{B}$ est de rang maximal 6

- $\mathrm{AR}(\mathcal{B}) = \mathrm{AR}_{\mathrm{Log}}(\mathcal{B}) \oplus \langle \mathcal{A}\mathbf{b} \rangle$
- $\mathcal{A}\mathbf{b}$ engendre $\mathrm{AR}_{\mathrm{Log}}(\mathcal{B})$ par résidu/monodromie

[Hexag] $\mathcal{B}$ est hexagonal et cela le caractérise

- [GM] 1. $\mathcal{B}$ est le quotient du tissu $\mathbf{H}_{A_4}$ -équiv $\mathcal{W}(\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^5) \xrightarrow{\tilde{f}_i} \mathbf{G}_2(\mathbb{R}_i^4))$
2. Construction cohomologico-géométrique de $\mathcal{A}\mathbf{b}$

[Clust] $\mathcal{B}$ est équivalent au $\mathcal{X}$ -tissu cluster de type A_2

$$\mathcal{B} \simeq \mathcal{XW}_{A_2} = \mathcal{W}\left(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \frac{1+\mathbf{x}}{\mathbf{y}}, \frac{1+\mathbf{y}}{\mathbf{x}}, \frac{1+\mathbf{x}+\mathbf{y}}{\mathbf{xy}}\right)$$

V Tissue $\mathcal{W}_{\mathrm{dP}_4}$ sur $\mathrm{dP}_4 = \mathrm{Bl}_{p_1+\dots+p_5}(\mathbf{P}^2) \subset \mathbf{P}^4$

[N-Lin] $\mathcal{W}_{\mathrm{dP}_4}$ n'est pas linéarisable

[Rang] $\mathcal{W}_{\mathrm{dP}_4}$ est de rang maximal 36

- $\mathrm{AR}(\mathcal{W}_{\mathrm{dP}_4}) = \mathrm{AR}_{\mathrm{Log}}(\mathcal{W}_{\mathrm{dP}_4}) \oplus \mathrm{AR}_{\mathrm{Dilog}}(\mathcal{W}_{\mathrm{dP}_4}) \oplus \langle \mathrm{HLog}^3 \rangle$
- HLog^3 engendre $\mathrm{AR}_{\mathrm{Dilog}}(\mathcal{W}_{\mathrm{dP}_4})$ par résidu/monodromie

[Hexag] $\mathcal{W}_{\mathrm{dP}_4}$ est caractérisé par le matroïde formé par ses sous-3-tissus hexagonaux

- [GM] 1. $\mathcal{W}_{\mathrm{dP}_4}$ est le quotient du tissu $\mathbf{H}_{D_5}$ -équiv $\mathcal{W}(\mathbb{S}_5 \xrightarrow{\varphi_i} \mathbb{S}_4(i))$
2. Construction cohomologico-géométrique de HLog^3 (?)

[Clust] $\mathcal{W}_{\mathrm{dP}_4}$ est un $\mathcal{X}$ -tissu cluster de type D_4 ffff

Et après ?

- Applications — $\mathbf{HLog}^1 = \left(\text{Log}(x) - \text{Log}(y) - \text{Log}\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \right)$ ✓
 - $\mathbf{HLog}^2 = \left(\mathbf{R}(x) - \mathbf{R}(y) - \mathbf{R}\left(\frac{x}{y}\right) - \mathbf{R}\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \mathbf{R}\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0 \right)$ ✓
 - $\mathbf{HLog}^3 = \left(\sum_{i=1}^{10} A_i^3(U_i(x, y)) = 0 \right)$?
- Construction Construire $\mathbf{HLog}^3$ à la Gelfand-MacPherson ($\mathbb{S}_5$)
- Interprétation En terme du SC de $\mathbf{dP}_4$?
- Versions Univ. $\mathbf{HLog}_{\text{univ}}^3$? Quantique $\mathbf{HLog}_q^3$? Motivique $\mathbf{HLog}_{\text{mot}}^3$?
- Dimension $\geq \mathbf{dP}_5 = \mathbf{Bl}_{4 \text{ pts}}(\mathbf{P}^2) \rightsquigarrow (n+3)\text{-tissu en courbes}$ ✓
rat^{elles} sur $\mathbf{Bl}_{n+2 \text{ pts}}(\mathbf{P}^n)$
 $\mathbf{dP}_4 = \mathbf{Bl}_{5 \text{ pts}}(\mathbf{P}^2) \rightsquigarrow (2(n+3))\text{-tissu en courbes}$?
rat^{elles} sur $\mathbf{Bl}_{n+3 \text{ pts}}(\mathbf{P}^n)$