
REPRÉSENTATIONS CUSPIDALES DE $GL_r(D)$ DISTINGUÉES PAR UNE INVOLUTION INTÉRIEURE

par

Vincent Sécherre

Résumé. — Soit un entier $n \geq 1$, soit F un corps localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle $p \neq 2$ et soit G une forme intérieure de $GL_{2n}(F)$. C'est un groupe de la forme $GL_r(D)$ pour un entier $r \geq 1$ et une F -algèbre à division D de degré réduit d tel que $rd = 2n$. Soit K une extension quadratique de F dans l'algèbre des matrices de taille r à coefficients dans D , et soit H son centralisateur dans G . Nous étudions les représentations cuspidales autoduales complexes de G et leur distinction par H du point de vue de la théorie des types. Si π est une telle représentation et si ϕ est son paramètre de Langlands, nous calculons la valeur en $1/2$ du facteur epsilon de la restriction de ϕ au groupe de Weil-Deligne de K , notée $e_K(\phi)$. Lorsque F est de caractéristique nulle, nous en déduisons que π est distinguée par H si et seulement si ϕ est de parité symplectique et $e_K(\phi) = (-1)^r$. Ceci prouve dans ce cas une conjecture de Prasad et Takloo-Bighash.

Abstract. — Let n be a positive integer, F be a non-Archimedean locally compact field of residue characteristic $p \neq 2$ and G be an inner form of $GL_{2n}(F)$. This is a group of the form $GL_r(D)$ for a positive integer r and division F -algebra D of reduced degree d such that $rd = 2n$. Let K be a quadratic extension of F in the algebra of matrices of size r with coefficients in D , and H be its centralizer in G . We study selfdual cuspidal complex representations of G and their distinction by H from the point of view of type theory. Given such a representation π , we compute the value at $1/2$ of the epsilon factor of the restriction of the Langlands parameter ϕ of π to the Weil-Deligne group of K , denoted $e_K(\phi)$. When F has characteristic 0, we deduce that π is H -distinguished if and only if ϕ is symplectic and $e_K(\phi) = (-1)^r$. This proves in this case a conjecture by Prasad-Takloo-Bighash.

2010 Mathematics Subject Classification: 22E50

Keywords and Phrases: Cuspidal representation, Distinguished representation, Endo-class, Root number, Symplectic parameter, Type theory

À la mémoire de Colin Bushnell

1. Introduction

1.1. Soit un entier $n \geq 1$, soit F un corps localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle p et soit A une F -algèbre centrale simple de degré réduit $2n$. C'est une algèbre de la forme $\mathbf{M}_r(D)$ pour un entier $r \geq 1$ et une F -algèbre à division D de degré réduit $d \geq 1$ tels que $rd = 2n$. Notons $G = A^\times = GL_r(D)$ le groupe des éléments inversibles de A . Un tel groupe est une forme intérieure de $GL_{2n}(F)$, et la théorie des représentations (lisses, complexes) de G est

liée à celle de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ par la correspondance de Jacquet-Langlands [50, 64, 30, 4], qui est une bijection entre classes d'isomorphisme de représentations essentiellement de carré intégrable de G et $\mathrm{GL}_{2n}(F)$, caractérisée par une identité de caractères sur les classes de conjugaison elliptiques régulières.

Soit K une extension quadratique de F incluse dans A , soit H son centralisateur dans G et soit μ un caractère de K^\times . On note Nrd_H la norme réduite de H dans K^\times . Une représentation irréductible π de G sur un espace vectoriel (complexe) V est dite μ -distinguée si V admet une forme linéaire non nulle \mathcal{L} telle que :

$$\mathcal{L}(\pi(h)v) = \mu(\mathrm{Nrd}_H(h)) \cdot v, \quad h \in H, \quad v \in V,$$

c'est-à-dire si l'espace $\mathrm{Hom}_H(\pi, \mu \circ \mathrm{Nrd}_H)$ est non nul. Dans [63] Prasad et Takloo-Bighash ont formulé la conjecture suivante. On verra μ indifféremment comme un caractère de K^\times ou du groupe de Weil de K via l'homomorphisme de réciprocité de la théorie du corps de classes local.

Conjecture 1.1. — *Soit π une représentation irréductible de G dont le transfert à $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ soit générique. Supposons que la restriction de μ^n à F^\times soit égale au caractère central de π . Notons ϕ le paramètre de Langlands de π et ϕ_K sa restriction au groupe de Weil-Deligne de K .*

(1) *Si la représentation π est μ -distinguée, alors :*

(a) *le paramètre de Langlands ϕ est à valeurs dans le groupe $\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{C})$ des similitudes symplectiques et son facteur de similitude est égal à la restriction de μ à F^\times ,*

(b) *la valeur en $1/2$ du facteur epsilon de $\phi_K \cdot \mu^{-1}$ est égale à $(-1)^r \mu(-1)^n$.*

(2) *Si la représentation π est essentiellement de carré intégrable, alors elle est μ -distinguée si et seulement si les conditions (1.a) et (1.b) sont satisfaites.*

Expliquons ce que signifie la condition de généricité portant sur π . D'après [83, 79, 6], il y a des entiers $r_1, \dots, r_k \geq 1$ et des représentations essentiellement de carré intégrable $\delta_1, \dots, \delta_k$ de $\mathrm{GL}_{r_1}(D), \dots, \mathrm{GL}_{r_k}(D)$ tels que π soit isomorphe à l'unique quotient irréductible de l'induite parabolique normalisée de $\delta_1 \otimes \dots \otimes \delta_k$ prise par rapport au sous-groupe parabolique triangulaire supérieur par blocs. Chaque δ_i a un transfert de Jacquet-Langlands noté σ_i , qui est une représentation essentiellement de carré intégrable de $\mathrm{GL}_{r_i d}(F)$. L'induite parabolique normalisée de $\sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_k$ admet un unique quotient irréductible, qui est le transfert de π , et ce transfert est générique si cette induite est irréductible.

1.2. Cette conjecture est inspirée de résultats dus à Tunnel [81] et à Saito [65] dans le cas où n et d sont égaux à 1, et où F est soit de caractéristique nulle, soit de caractéristique p impaire. Dans le cas où μ est trivial, Guo [42] prouve que, si F est de caractéristique nulle et si $d \leq 2$, l'espace $\mathrm{Hom}_H(\pi, \mathbb{C})$ est de dimension au plus 1 pour toute représentation irréductible π de G et que, si cette dimension est non nulle, c'est-à-dire si π est H -distinguée, alors π est autoduale. Dans [63], Prasad et Takloo-Bighash prouvent leur conjecture lorsque $n = 2$. Leur preuve repose en partie sur des résultats de Gan-Takeda [36], qui supposent que F est de caractéristique nulle. Il y a eu récemment plusieurs résultats en direction de la preuve de la conjecture 1.1.

Quand μ est trivial et F de caractéristique nulle, Feigon-Martin-Whitehouse [32] prouvent la conjecture 1.1(1) pour les représentations cuspidales de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$.

Chommaux [27] prouve la conjecture 1.1(2) lorsque π est la représentation de Steinberg de G tordue par un caractère et F est de caractéristique différente de 2. Puis Chommaux et Matringe [28] prouvent la même conjecture dans le cas où π est une représentation cuspidale de niveau 0 de $GL_{2n}(F)$ et où $p \neq 2$.

Broussous et Matringe [13] étendent le théorème de multiplicité 1 de Guo au cas où l'entier d est quelconque et F est de caractéristique différente de 2. Ils étendent aussi au cas d'une forme intérieure quelconque le théorème d'autodualité de Guo ; leur argument repose sur des résultats ([42, 51]) supposant que F est de caractéristique nulle, mais on trouve dans [28] un argument valable dès que F est de caractéristique différente de 2.

Dans le cas où μ est trivial et F de caractéristique différente de 2, Suzuki [77] étend la conjecture 1.1(1) à toutes les représentations irréductibles, sans hypothèse de généricité, et ramène la preuve de cette conjecture au cas des représentations essentiellement de carré intégrable.

Enfin, dans le cas où μ est trivial et F de caractéristique nulle, Xue [82] prouve d'une part la conjecture 1.1(1), d'autre part la conjecture 1.1(2) dans les cas suivants : (i) pour les représentations cuspidales dont le transfert de Jacquet-Langlands à $GL_{2n}(F)$ est cuspidal, (ii) pour toutes les représentations cuspidales si $d \leq 2$; et Suzuki et Xue [78] ont annoncé que la preuve de la conjecture 1.1(2) se ramène au cas des représentations cuspidales.

1.3. Dorénavant, nous supposons que le caractère μ de la conjecture 1.1 est trivial. Dans cet article, nous prouvons le théorème suivant (voir le théorème 9.5).

***Théorème 1.2.** — Supposons que $p \neq 2$, et que la condition (1.a) de la conjecture 1.1 soit vérifiée par toute représentation cuspidale H -distinguée de G . Alors la conjecture 1.1(2) est vraie pour toute représentation cuspidale de G .*

Dans le cas où F est de caractéristique nulle et de caractéristique résiduelle $p \neq 2$, on en déduit grâce à [82] le résultat suivant (voir le corollaire 9.6).

***Corollaire 1.3.** — Supposons que F soit de caractéristique nulle et que $p \neq 2$. Alors la conjecture 1.1(2) est vraie pour toute représentation cuspidale de G .*

Par conséquent, compte tenu des résultats présentés dans le paragraphe précédent, le corollaire 1.3 complète la preuve de la conjecture 1.1 dans le cas où F est de caractéristique nulle et de caractéristique résiduelle $p \neq 2$ (et où le caractère μ est trivial).

Notre approche, complètement différente de celle de [82], repose sur la description des représentations cuspidales des formes intérieures de $GL_{2n}(F)$ par la théorie des types. On renvoie au paragraphe 1.5 pour une discussion de l'hypothèse " $p \neq 2$ " dans ce théorème et son corollaire.

1.4. Bushnell et Kutzko ont montré dans [26] que, quels que soient l'entier n et le corps localement compact non archimédien F , toute représentation cuspidale de $GL_n(F)$ s'obtient par induction compacte d'une représentation d'un sous-groupe ouvert et compact modulo le centre de $GL_n(F)$. Ce résultat a ensuite été étendu aux représentations cuspidales de n'importe quelle forme intérieure de $GL_n(F)$ (voir [12, 66, 67, 70]). Plus précisément, notant temporairement

G une forme intérieure de $\mathrm{GL}_n(F)$ (et non pas de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ comme dans les paragraphes précédents), il y a une famille de paires $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ formées d'un sous-groupe \mathbf{J} ouvert compact modulo le centre de G et d'une représentation $\boldsymbol{\lambda}$ de \mathbf{J} telle que :

- pour toute paire $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$, l'induite compacte de $\boldsymbol{\lambda}$ à G soit irréductible et cuspidale ;
- toute représentation (irréductible) cuspidale de G s'obtienne ainsi pour une paire $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ unique à G -conjugaison près.

Ces paires $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ sont appelées des *types simples maximaux étendus* de G , ce que nous abrègerons en *types* dans cet article. Étant donné une représentation cuspidale π de G et un type $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ lui correspondant, ainsi qu'un sous-groupe fermé H de G , une simple application de la formule de Mackey montre qu'on a un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$(1.1) \quad \mathrm{Hom}_H(\pi, \mathbb{C}) \simeq \prod_g \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}^g \cap H}(\boldsymbol{\lambda}^g, \mathbb{C})$$

où g décrit un système de représentants de (\mathbf{J}, H) -doubles classes de G . Ainsi, pour étudier la distinction de π par H , il suffit d'étudier la distinction de $\boldsymbol{\lambda}^g$ par $\mathbf{J}^g \cap H$ pour chaque g .

1.5. Cette approche a été utilisée par Hakim et Murnaghan (voir par exemple [44, 45, 43]) pour étudier la distinction par divers sous-groupes d'une certaine classe de représentations cuspidales de $\mathrm{GL}_n(F)$, dites *essentiellement modérées*. Il s'agit des représentations cuspidales dont le paramètre de Langlands contient un caractère du sous-groupe d'inertie sauvage de F . La construction de ces représentations par induction compacte est plus simple que dans le cas non essentiellement modéré, et peut être décrite au moyen des paires admissibles ([48, 21]) de Howe.

Si l'on s'intéresse aux représentations cuspidales générales de $\mathrm{GL}_n(F)$ et non pas seulement à celles qui sont essentiellement modérées, les paires admissibles ne suffisent pas : il faut considérer directement les types $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ mentionnés au paragraphe précédent. Dans cette situation, [69] fournit une analyse complète de la distinction par $\mathrm{GL}_n(F_0)$ des représentations irréductibles cuspidales de $\mathrm{GL}_n(F)$ pour une extension quadratique F/F_0 de corps localement compacts non archimédiens, lorsque $p \neq 2$. Les méthodes développées dans [69] ont été adaptées par Jiandi Zou ([85, 86]) aux involutions unitaires et orthogonales de $\mathrm{GL}_n(F)$, toujours lorsque $p \neq 2$.

Une restriction inhérente à la méthode générale employée pour aborder tous ces résultats est que la caractéristique résiduelle p doit être supposée impaire, notamment parce qu'on utilise le fait que le premier ensemble de cohomologie de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ à valeurs dans un pro- p -groupe est trivial. (Voir aussi le paragraphe 1.9 pour une utilisation de l'hypothèse $p \neq 2$ dans le cas de ce travail.)

•

Dans cette introduction, nous supposerons dorénavant que $p \neq 2$.

1.6. Revenons maintenant à la situation introduite au paragraphe 1.1, en ayant supposé que p est impair et que μ est trivial. En particulier, G est une forme intérieure de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$. Rappelons que, selon [42, 13], toute représentation cuspidale H -distinguée de G est autoduale, c'est-à-dire isomorphe à sa contragrédiente, de sorte que nous ne nous intéresserons par la suite qu'aux représentations cuspidales de G qui sont autoduales.

Notre preuve du théorème 1.2 repose sur un argument de comptage : sous l'hypothèse que la condition (1.a) de la conjecture 1.1 soit vérifiée par toute représentation cuspidale H -distinguée de G , nous prouvons qu'il existe pour G autant de représentations cuspidales H -distinguées que de représentations cuspidales autoduales satisfaisant aux conditions (1.a) et (1.b) de la conjecture 1.1. Bien sûr, les représentations cuspidales autoduales de G sont en nombre infini.⁽¹⁾ Pour se ramener à des ensembles finis, on peut borner le niveau des représentations ; mais il est beaucoup plus éclairant d'introduire la notion d'endo-classe.

1.7. Une endo-classe (sur F) est un invariant associé, par la théorie des types, à toute représentation essentiellement de carré intégrable d'une forme intérieure d'un groupe linéaire général sur F ([16, 14]). La définition générale de cet invariant requiert une machinerie considérable. Cependant, il a une interprétation arithmétique simple *via* la correspondance de Langlands locale ([19, 72, 31]) : deux représentations essentiellement de carré intégrable de formes intérieures de groupes linéaires généraux sur F ont la même endo-classe si et seulement si leurs paramètres de Langlands, une fois restreints au sous-groupe d'inertie sauvage \mathcal{P}_F du groupe de Weil \mathcal{W}_F de F relativement à une clôture séparable \overline{F} de F , ont un facteur en commun. La correspondance de Langlands locale induit alors une bijection entre classes de \mathcal{W}_F -conjugaison de représentations irréductibles de \mathcal{P}_F et F -endo-classes. L'endo-classe est un invariant plus fin que le niveau normalisé, et il n'y a qu'un nombre fini d'endo-classes de niveau normalisé fixé.

1.8. Reprenons la suite du paragraphe 1.6, et fixons une endo-classe Θ , à laquelle on peut penser pour le moment comme à une classe de \mathcal{W}_F -conjugaison de représentations irréductibles de \mathcal{P}_F . Supposons dans cette introduction que Θ soit non nulle, c'est-à-dire qu'elle ne corresponde pas au caractère trivial de \mathcal{P}_F . (Le cas de l'endo-classe nulle est un peu moins direct mais se traite essentiellement de la même façon.) Notons $\mathbf{A}(G, \Theta)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations cuspidales autoduales de G d'endo-classe Θ , et notons $\mathbf{A}^+(G, \Theta)$ le sous-ensemble de celles qui sont distinguées par H . Notons également :

- $\mathbf{A}^{\text{sp}}(G, \Theta)$ le sous-ensemble de $\mathbf{A}(G, \Theta)$ formé des classes de représentations dont le paramètre de Langlands est symplectique (voir le paragraphe 9.1),
- $\mathbf{A}^{\text{ptb}}(G, \Theta)$ le sous-ensemble de $\mathbf{A}^{\text{sp}}(G, \Theta)$ formé des classes de représentations satisfaisant aux conditions (1.a) et (1.b) de la conjecture 1.1.

L'ensemble $\mathbf{A}(G, \Theta)$ est fini, et nous prouvons en nous inspirant de [10] qu'il est formé d'autant de représentations de parité symplectique que de représentations de parité orthogonale (voir les lemmes 9.2 et 9.4). Le cardinal de $\mathbf{A}^{\text{sp}}(G, \Theta)$ est donc la moitié de celui de $\mathbf{A}(G, \Theta)$. Par hypothèse, nous supposons dans le théorème 1.2 que l'on a l'inclusion :

$$(1.2) \quad \mathbf{A}^+(G, \Theta) \subseteq \mathbf{A}^{\text{sp}}(G, \Theta).$$

⁽¹⁾Par exemple, si P_0 est une extension modérément ramifiée de degré n de F et P une extension quadratique de P_0 , les caractères de P^\times qui sont admissibles au sens du paragraphe 1.5 et triviaux sur $N_{P/P_0}(P^\times)$ paramètrent une infinité de représentations cuspidales autoduales de $GL_{2n}(F)$: voir [44].

Une simple application d'une formule de Bushnell-Henniart [18] décrivant le comportement du facteur epsilon d'une représentation cuspidale de niveau non nul par torsion par un caractère modérément ramifié (voir la proposition 8.1) montre que, pour une représentation π dans $\mathbf{A}(G, \Theta)$, la valeur du facteur epsilon apparaissant dans la conjecture 1.1 prend la forme :

$$(1.3) \quad c_\pi(-1) \cdot w_K(\Theta)$$

où c_π est le caractère central de π et $w_K(\Theta)$ est un signe ne dépendant ni du choix de π ni de la forme intérieure considérée mais *uniquement de Θ* . Ceci a pour conséquence que $\mathbf{A}^{\text{ptb}}(G, \Theta)$ est soit égal à $\mathbf{A}^{\text{sp}}(G, \Theta)$, soit vide. (Il y a une exception quand Θ est nulle : voir la remarque 8.10.) Notre stratégie consiste à montrer :

- d'une part que l'ensemble $\mathbf{A}^+(G, \Theta)$ est vide si et seulement si $\mathbf{A}^{\text{ptb}}(G, \Theta)$ l'est, c'est-à-dire si et seulement si $w_K(\Theta) \neq (-1)^r$,
- d'autre part que, s'il est non vide, son cardinal est au moins moitié de celui de $\mathbf{A}(G, \Theta)$.

(On observera que le caractère central c_π est trivial pour les représentations π dans $\mathbf{A}^{\text{sp}}(G, \Theta)$.) Il nous faut maintenant comprendre à quelles conditions $\mathbf{A}^+(G, \Theta)$ et $\mathbf{A}^{\text{ptb}}(G, \Theta)$ sont vides.

1.9. Pour déterminer à quelles conditions l'ensemble $\mathbf{A}^{\text{ptb}}(G, \Theta)$ est vide, c'est-à-dire pour calculer le signe $w_K(\Theta)$, il nous faut introduire deux invariants supplémentaires. Soit π une représentation cuspidale autoduale de G d'endo-classe Θ , et soit γ un facteur irréductible de la restriction à \mathcal{P}_F du paramètre de Langlands de π , qui n'est pas trivial puisque Θ a été supposée non nulle. (D'après le paragraphe 1.7, la classe de \mathcal{W}_F -conjugaison de γ et Θ se déterminent l'une l'autre.) Le stabilisateur de γ dans \mathcal{W}_F est un sous-groupe de \mathcal{W}_F égal à \mathcal{W}_T pour une unique extension modérément ramifiée T de F dans \overline{F} . On pose :

$$(1.4) \quad \deg(\Theta) = \dim(\gamma) \cdot [T : F],$$

qu'on appelle le *degré* de Θ . De même, le stabilisateur dans \mathcal{W}_F de la somme directe de γ et de sa contragrédiente γ^\vee est égal à \mathcal{W}_{T_0} pour une unique extension T_0 de F contenue dans T . La représentation π étant autoduale, et comme $p \neq 2$, les représentations γ^\vee et γ sont conjuguées mais pas isomorphes, ce qui entraîne que l'extension T/T_0 est quadratique. Celle-ci ne dépend, à F -isomorphisme près, que de Θ (voir le lemme 5.21). (Si Θ est nulle, c'est-à-dire si γ est le caractère trivial de \mathcal{P}_F , on a $T = T_0 = F$.)

Fixons maintenant un élément $\kappa \in K$ engendrant K sur F , et tel que $\alpha = \kappa^2 \in F^\times$. L'automorphisme de conjugaison $\text{Ad}(\kappa)$, noté τ , est une involution sur G , dont le sous-groupe G^τ des points fixes est égal à H . Nous prouvons le résultat suivant (voir le théorème 8.6).

Théorème 1.4. — *Soit Θ l'endo-classe d'une représentation cuspidale autoduale de niveau non nul de G . Alors :*

$$(1.5) \quad w_K(\Theta) = \omega_{T/T_0}(\alpha)^{2n/[T:F]}$$

où ω_{T/T_0} est le caractère de T_0^\times de noyau $N_{T/T_0}(T^\times)$.

Le cas des représentations de niveau 0 nécessite un traitement à part : voir le paragraphe 8.4.

1.10. Pour aller plus loin, on ne peut plus se contenter de l'interprétation d'une endo-classe comme classe de \mathcal{W}_F -conjugaison de représentations irréductibles de \mathcal{P}_F , et il faut introduire la notion de caractère simple, qui est au coeur de la théorie des types.

Les caractères simples sont des caractères bien particuliers de pro- p -sous-groupes ouverts bien particuliers de G , construits dans [26, 12, 40, 66]. L'ensemble des caractères simples des formes intérieures des groupes linéaires généraux sur F possède des propriétés remarquables d'entrelacement et de transfert d'un groupe à l'autre, subsumées dans la définition d'une relation d'équivalence sur cet ensemble appelée *endo-équivalence* (voir le paragraphe 3.6). Une endo-classe est alors une classe d'équivalence de caractères simples pour cette relation. Une représentation cuspidale π de G contient, à conjugaison près par G , un unique caractère simple ; sa classe d'endo-équivalence est l'endo-classe de π .

1.11. Dans l'étude des représentations cuspidales de $GL_n(F)$ distinguées par $GL_n(F_0)$ effectuée dans [69], un résultat fondamental est l'existence, dans toute représentation cuspidale σ -autoduale de $GL_n(F)$, c'est-à-dire toute représentation cuspidale π dont la contragrédiente π^\vee est isomorphe à la conjuguée π^σ par l'automorphisme non trivial $\sigma \in \text{Gal}(F/F_0)$, d'un caractère simple σ -autodual ([3, Theorem 4.1]), c'est-à-dire un caractère simple θ tel que $\theta^\sigma = \theta^{-1}$. Dans l'étude des représentations cuspidales autoduales de $GL_{2n}(F)$, il suit des travaux de Blondel [9] qu'un bon analogue consiste à choisir pour σ un élément de $GL_{2n}(F)$ tel que $\sigma^2 = 1$, et dont le polynôme caractéristique est égal à $(X^2 - 1)^n$: toute représentation cuspidale autoduale de $GL_{2n}(F)$ contient alors un caractère simple σ -autodual (voir le corollaire 4.6).

Soit maintenant π une représentation cuspidale autoduale d'une forme intérieure quelconque G de $GL_{2n}(F)$, et soit τ comme au paragraphe 1.9. *Contrairement au cas σ -autodual considéré plus haut*, π ne contient pas toujours un caractère simple θ qui soit τ -autodual, c'est-à-dire tel que $\theta^\tau = \theta^{-1}$. Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un caractère simple τ -autodual dans une représentation cuspidale autoduale de G . Il généralise le corollaire 4.6 (voir le théorème 5.22).

Théorème 1.5. — *Soit π une représentation cuspidale autoduale de niveau non nul de G . Notons Θ son endo-classe. Alors π contient un caractère simple τ -autodual si et seulement si :*

$$(1.6) \quad \omega_{T/T_0}(\alpha)^{2n/[T:F]} = (-1)^r.$$

Ici encore, le cas des représentations de niveau 0 nécessite un traitement à part : voir le corollaire 7.3.

Le lien avec le facteur epsilon du paragraphe 1.8 est transparent : d'après le théorème 1.4, une représentation cuspidale autoduale de niveau non nul de G et d'endo-classe Θ contient un caractère simple τ -autodual si et seulement si $w_K(\Theta) = (-1)^r$.

Il ressort aussi des paragraphes 5.2 à 5.9 menant à la preuve du théorème 1.5 que le problème de l'existence d'un caractère simple τ -autodual dans une représentation cuspidale de niveau non nul et d'endo-classe donnée peut être interprété comme un problème de plongement : pour qu'un tel caractère existe, il faut et suffit qu'il y ait un plongement de T dans A tel que la conjugaison par κ induise sur T l'automorphisme non trivial de T/T_0 (voir la proposition 5.12).

Il ressort enfin de cette analyse que, pour qu'une représentation cuspidale autoduale de niveau non nul de $\mathbf{A}^{\text{sp}}(G, \Theta)$ appartienne à $\mathbf{A}^{\text{ptb}}(G, \Theta)$, il faut et suffit qu'elle contienne un caractère simple τ -autodual.

1.12. Cette analyse de $\mathbf{A}^{\text{ptb}}(G, \Theta)$ en termes de caractères simples τ -autoduaux n'est pas un simple artifice : c'est ce qui va nous permettre de déterminer s'il peut y avoir distinction par H . Faire le lien entre caractères simples τ -autoduaux et distinction est l'objet de la section 6. Le premier résultat dans cette direction est le suivant (voir la proposition 6.3 et le paragraphe 7.3).

Proposition 1.6. — *Toute représentation cuspidale autoduale H -distinguée de G contient un caractère simple τ -autodual.*

En d'autres termes, il découle de la proposition 1.6, des théorèmes 1.5 et 1.4 et enfin de (1.2), qu'on a l'inclusion :

$$(1.7) \quad \mathbf{A}^+(G, \Theta) \subseteq \mathbf{A}^{\text{ptb}}(G, \Theta).$$

On en déduit immédiatement que, si $\mathbf{A}^{\text{ptb}}(G, \Theta)$ est vide, alors $\mathbf{A}^+(G, \Theta)$ l'est aussi, ce qui prouve la conjecture dans ce cas.

Il reste alors à prouver l'égalité entre $\mathbf{A}^+(G, \Theta)$ et $\mathbf{A}^{\text{ptb}}(G, \Theta)$ dans le cas où ce dernier n'est pas vide. Dans ce cas, partant de :

$$(1.8) \quad \mathbf{A}^+(G, \Theta) \subseteq \mathbf{A}^{\text{ptb}}(G, \Theta) = \mathbf{A}^{\text{sp}}(G, \Theta),$$

et sachant que le cardinal de $\mathbf{A}^{\text{sp}}(G, \Theta)$ est égal à la moitié de celui de $\mathbf{A}(G, \Theta)$ (voir le paragraphe 1.8), notre stratégie consiste à construire dans $\mathbf{A}^+(G, \Theta)$ des représentations H -distinguées de G en quantité au moins égale à la moitié du cardinal de $\mathbf{A}(G, \Theta)$. C'est ce que nous faisons dans les paragraphes 6.4 à 6.11 : voir la proposition 6.17 (et la proposition 7.10 en niveau 0). Pour des raisons de cardinal, et compte tenu de (1.8), on obtient ainsi l'égalité cherchée.

1.13. Lorsque r est pair, de la forme $2k$ pour un entier $k \geq 1$, tous les résultats des sections 5 et 6 s'adaptent au cas où H est remplacé par le sous-groupe de Levi $L = \text{GL}_k(D) \times \text{GL}_k(D)$ de G . Si l'on choisit un élément $\sigma \in G$ tel que $\sigma^2 = 1$ et dont le polynôme caractéristique réduit est égal à $(X^2 - 1)^n$, l'automorphisme de conjugaison $\text{Ad}(\sigma)$, simplement noté σ , est une involution de G dont le sous-groupe des points fixes est conjugué à L . Le théorème 1.5 devient alors (voir le corollaire 5.24 et la remarque 7.4) :

Théorème 1.7. — *Toute représentation cuspidale autoduale de G contient un caractère simple σ -autodual.*

Les arguments de la preuve du théorème 1.2 sont eux aussi valables pour le groupe L . Ainsi, si π est une représentation cuspidale de $\text{GL}_{2k}(D)$, et si l'on considère les assertions :

- (1) la représentation π est distinguée par $\text{GL}_k(D) \times \text{GL}_k(D)$,
- (2) le paramètre de Langlands de π est autodual symplectique,

on a le résultat suivant (voir le théorème 9.11).

Théorème 1.8. — *Si (1) implique (2) pour toute représentation cuspidale de G , alors les assertions (1) et (2) sont équivalentes pour toute représentation cuspidale de G .*

Dans le cas où G est déployé et F est de caractéristique nulle, il est connu que les assertions (1) et (2) sont équivalentes pour toute représentation cuspidale : voir [52] et le théorème 9.12.

1.14. Voici deux conséquences que nous tirons du théorème 1.2 et des résultats de la section 6 dans le cas où le corps F est de caractéristique nulle.

D’abord, la proposition 6.14 affirme qu’une représentation cuspidale autoduale de niveau non nul π de G contenant un caractère simple τ -autodual contient automatiquement un type τ -autodual, c’est-à-dire un type $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ tel que $\boldsymbol{\lambda}^\tau$ soit isomorphe à $\boldsymbol{\lambda}^\vee$. (On observera que ce résultat est faux en niveau 0 : voir le paragraphe 7.5.) Parmi les types τ -autoduaux contenus dans π , qui sont en nombre fini à H -conjugaison près, il est possible de mettre en évidence un type particulier, unique à H -conjugaison près, dit *générique*. (On renvoie au paragraphe 9.3 pour une justification de la terminologie.) On a le résultat suivant (voir le théorème 9.10, que l’on comparera à [3, Corollary 6.6]).

Théorème 1.9. — *La représentation π est H -distinguée si et seulement si son type générique est distinguée.*

Enfin, soit π une représentation cuspidale autoduale de $GL_{2n}(F)$ de niveau non nul. Il existe une unique représentation cuspidale autoduale de $GL_{2n}(F)$ inertielle équivalente mais non isomorphe à π ; notons-la π^* . Soit Θ l’endo-classe de π , soit T/T_0 l’extension quadratique qui lui est associée et posons $m = 2n/\deg(\Theta)$. Lorsque T/T_0 est ramifiée et $m = 1$, les représentations π et π^* ont la même parité, et [10, 6.8] montre comment déterminer cette parité en termes de théorie des types. Dans les autres cas, c’est-à-dire si T/T_0 est non ramifiée, ou si T/T_0 est ramifiée et m est pair, les représentations π et π^* ont des parités différentes, et il s’agit de déterminer laquelle des deux est de parité symplectique en termes de types. Les propositions 9.13 et 9.15 donnent une réponse à cette question.

1.15. Pour finir, dans la section 10, nous expliquons brièvement comment les méthodes développées dans les sections 5 et 6 de l’article peuvent s’appliquer au cas d’une involution galoisienne sur une forme intérieure de $GL_n(F)$.

Remerciements

Je remercie chaleureusement Nadir Matringe pour de nombreuses discussions stimulantes à propos de ce travail. Je le remercie en particulier de m’avoir expliqué les arguments de globalisation utilisés dans [13] et [28], ainsi que [58].

Je remercie également l’Institut Universitaire de France pour les excellentes conditions de travail qu’il m’a fournies durant la réalisation de ce travail.

Je remercie enfin les rapporteurs anonymes pour leur relecture méticuleuse et leurs excellentes suggestions, et pour m’avoir permis de corriger plusieurs erreurs dans certains arguments.

2. Notations

2.1. On fixe un corps localement compact non archimédien F , de caractéristique résiduelle p impaire. On fixe une fois pour toute un caractère :

$$(2.1) \quad \psi : F \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

trivial sur \mathfrak{p}_F mais pas sur \mathcal{O}_F , à valeurs complexes.

Si K est une extension finie de F , ou plus généralement une F -algèbre à division de dimension finie, on note \mathcal{O}_K son anneau d'entiers, \mathfrak{p}_K l'idéal maximal de \mathcal{O}_K et \mathbf{k}_K son corps résiduel, qui est un corps fini de cardinal noté q_K .

Si n est un entier strictement positif, on note $\mathbf{M}_n(K)$ l'algèbre des matrices carrés de taille n à coefficients dans K et $\mathrm{GL}_n(K)$ le groupe de ses éléments inversibles.

Si K est commutatif, on note $N_{K/F}$ et $\mathrm{tr}_{K/F}$ la norme et la trace de K sur F , et on note $e_{K/F}$ et $f_{K/F}$ l'indice de ramification et le degré résiduel de K sur F . On note aussi μ_K le sous-groupe de K^\times formé de ses racines de l'unité d'ordre premier à p .

Si K est quadratique sur F , on note $\omega_{K/F}$ le caractère de F^\times de noyau $N_{K/F}(K^\times)$.

2.2. Par *représentation* d'un groupe localement profini G , on entendra toujours une représentation lisse sur un \mathbb{C} -espace vectoriel. On appellera *caractère* de G un homomorphisme de groupes de G dans \mathbb{C}^\times de noyau ouvert.

Étant donné une représentation π d'un sous-groupe fermé H de G , on note π^\vee sa représentation contragrédiente. Si χ est un caractère de H , on note $\pi\chi$ la représentation $x \mapsto \chi(x)\pi(x)$ de H . Si $g \in G$, on pose $H^g = g^{-1}Hg$ et on note π^g la représentation $x \mapsto \pi(gxg^{-1})$ de H^g .

Si σ est une involution continue de G , on note π^σ la représentation $\pi \circ \sigma$ de $\sigma(H)$. Si μ est un caractère de $H \cap G^\sigma$, on dit que π est μ -*distinguée* si l'espace $\mathrm{Hom}_{H \cap G^\sigma}(\pi, \mu)$ est non nul. Si μ est le caractère trivial, on dit simplement que π est $H \cap G^\sigma$ -*distinguée*, ou juste *distinguée*.

3. Préliminaires sur les types simples

Nous introduisons dans cette section le langage élémentaire de la théorie des types simples, et nous rappelons les principaux résultats dont nous aurons besoin concernant les strates, caractères et types simples. Ces résultats sont issus de [26, 16, 25] pour les groupes linéaires généraux sur F et de [66, 67, 68, 70, 14] pour leurs formes intérieures. On trouvera également quelques résultats originaux : il s'agit principalement de résultats qui étaient déjà connus pour les groupes linéaires généraux mais pas pour leurs formes intérieures (à l'exception des deux derniers paragraphes 3.9 et 3.10).

3.1. Dans toute cette section, on fixe un entier $n \geq 1$ et une F -algèbre centrale simple A de degré réduit n . (On notera la différence avec le paragraphe 1.1 de l'introduction, où le degré réduit de A est supposé être égal à $2n$. Nous reviendrons à une F -algèbre centrale simple de degré réduit $2n$ à partir de la section 4.) Fixons un A -module à gauche simple V , et notons D la F -algèbre opposée à $\mathrm{End}_A(V)$. C'est une F -algèbre à division centrale, V est un D -espace vectoriel à droite et A s'identifie naturellement à la F -algèbre $\mathrm{End}_D(V)$. Notons r la dimension de V sur D et d

le degré réduit de D sur F . On a donc $n = rd$ et, si l'on fixe une base de V sur D , on obtient un isomorphisme de D -espaces vectoriels entre V et D^r et un isomorphisme de F -algèbres entre A et $\mathbf{M}_r(D)$.

Soit $[\mathfrak{a}, \beta]$ une strate simple dans A . Rappelons que \mathfrak{a} est un \mathcal{O}_F -ordre héréditaire dans A et que β est un élément de A satisfaisant à certaines conditions, parmi lesquelles :

- (1) la F -algèbre $E = F[\beta]$ est un corps,
- (2) son groupe multiplicatif E^\times normalise \mathfrak{a} .

L'inclusion de E dans A fait de V un $E \otimes_F D$ -module à droite. Le centralisateur de E dans A , noté B , est une E -algèbre centrale simple s'identifiant naturellement à $\text{End}_{E \otimes D}(V)$, et l'intersection $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap B$ est un \mathcal{O}_E -ordre héréditaire de B .

Notons $\mathfrak{p}_{\mathfrak{a}}$ le radical de Jacobson de \mathfrak{a} . Alors $\mathbf{U}^i(\mathfrak{a}) = 1 + \mathfrak{p}_{\mathfrak{a}}^i$ est un pro- p -sous-groupe ouvert compact de $G = A^\times$ contenu dans \mathfrak{a}^\times , pour tout entier $i \geq 1$. La *période* de \mathfrak{a} est l'unique entier $e \geq 1$ tel que $\mathfrak{a}\mathfrak{p}_F$ soit égal à $\mathfrak{p}_{\mathfrak{a}}^{ed}$.

On associe à $[\mathfrak{a}, \beta]$ des pro- p -sous-groupes ouverts compacts $H^1(\mathfrak{a}, \beta) \subseteq \mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta) \subseteq \mathbf{U}^1(\mathfrak{a})$ et un ensemble fini non vide $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ de caractères de $H^1(\mathfrak{a}, \beta)$ appelés *caractères simples*, dépendant du caractère ψ fixé à la section 2. On pose $\mathbf{J}^0(\mathfrak{a}, \beta) = \mathfrak{b}^\times \mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta)$ et on note $\mathbf{J}(\mathfrak{a}, \beta)$ le sous-groupe de G engendré par $\mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta)$ et le normalisateur de \mathfrak{b} dans B^\times . On a :

$$(3.1) \quad \mathbf{J}^0(\mathfrak{a}, \beta) \cap B^\times = \mathfrak{b}^\times, \quad \mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta) \cap B^\times = \mathbf{U}^1(\mathfrak{b}), \quad \mathbf{J}^0(\mathfrak{a}, \beta)/\mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta) \simeq \mathfrak{b}^\times/\mathbf{U}^1(\mathfrak{b}).$$

Pour la proposition qui suit, nous renvoyons à [25, 2.1], [26, Proposition 5.1.1], [66, 3.3.2], [59, Proposition 2.1] et à la preuve de [31, Proposition 2.6].

Proposition 3.1. — *Soit $[\mathfrak{a}, \beta]$ une strate simple dans A , et soit $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$.*

- (1) *Le normalisateur de θ dans G est égal à $\mathbf{J}(\mathfrak{a}, \beta)$.*
- (2) *Le groupe $\mathbf{J}(\mathfrak{a}, \beta)$ a les propriétés suivantes :*
 - (a) *C'est un sous-groupe ouvert et compact modulo le centre de G .*
 - (b) *Il possède un unique sous-groupe compact maximal, égal à $\mathbf{J}^0(\mathfrak{a}, \beta)$.*
 - (c) *Il possède un unique pro- p -sous-groupe compact distingué maximal, égal à $\mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta)$.*
- (3) *L'ensemble d'entrelacement de θ dans G est égal à $\mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta)B^\times\mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta)$.*
- (4) *Il existe une représentation irréductible η de $\mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta)$, unique à isomorphisme près, dont la restriction à $H^1(\mathfrak{a}, \beta)$ contient θ , et une telle représentation se prolonge à $\mathbf{J}(\mathfrak{a}, \beta)$.*

Remarque 3.2. — Ceci inclut le cas particulier où $\beta = 0$. Dans ce cas, $[\mathfrak{a}, 0]$ est une strate simple dans A quel que soit l'ordre héréditaire \mathfrak{a} . Une telle strate simple est dite *nulle*. Dans cette situation, on a $E = F$ et $H^1(\mathfrak{a}, 0) = \mathbf{U}^1(\mathfrak{a})$, et $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, 0)$ est réduit au caractère trivial de $\mathbf{U}^1(\mathfrak{a})$. Le groupe $\mathbf{J}(\mathfrak{a}, 0)$ est le normalisateur de \mathfrak{a} dans G , et on a $\mathbf{J}^0(\mathfrak{a}, 0) = \mathfrak{a}^\times$ et $\mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, 0) = \mathbf{U}^1(\mathfrak{a})$. Ainsi la représentation η est le caractère trivial de $\mathbf{U}^1(\mathfrak{a})$.

Si θ est un caractère simple dans G , c'est-à-dire s'il existe une strate simple $[\mathfrak{a}, \beta]$ dans A telle que $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$, on note \mathbf{J}_θ son normalisateur, \mathbf{J}_θ^0 l'unique sous-groupe compact maximal de \mathbf{J}_θ et \mathbf{J}_θ^1 son unique pro- p -sous-groupe distingué maximal. On note aussi H_θ^1 le pro- p -sous-groupe de \mathbf{J}_θ^1 sur lequel θ est défini. La représentation irréductible η de \mathbf{J}_θ^1 caractérisée par la proposition 3.1(4) est appelée la *représentation de Heisenberg* associée à θ .

3.2. Fixons un $E \otimes_F D$ -module à droite simple S et posons $W = \text{Hom}_{E \otimes_F D}(S, V)$. C'est un B -module à gauche simple. Notons C la E -algèbre à division opposée à $\text{End}_B(W)$. Notons m la dimension de W sur C et c le degré réduit de C sur E . D'après [84, Proposition 1], on a :

$$(3.2) \quad mc = \frac{n}{[E : F]}, \quad c = \frac{d}{(d, [E : F])}, \quad r = m \frac{[E : F]}{(d, [E : F])}.$$

Le choix d'un isomorphisme de $E \otimes_F D$ -modules $V \simeq S^m$ induit un isomorphisme de F -algèbres :

$$(3.3) \quad \phi : A \rightarrow \mathbf{M}_m(\text{End}_D(S))$$

dont la restriction à B induit un isomorphisme de E -algèbres $B \simeq \mathbf{M}_m(C)$. On note $\mathcal{P}(\mathfrak{a}, \beta)$ l'ensemble des isomorphismes (3.3) ainsi obtenus tels que l'ordre $\phi(\mathfrak{a} \cap B)$ soit standard, c'est-à-dire formé de matrices à coefficients dans \mathcal{O}_C dont la réduction modulo \mathfrak{p}_C soit triangulaire supérieure par blocs. Un choix de $\phi \in \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \beta)$ induit un isomorphisme de groupes :

$$(3.4) \quad \mathbf{J}^0(\mathfrak{a}, \beta) / \mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta) \simeq \mathfrak{b}^\times / \mathbf{U}^1(\mathfrak{b}) \simeq \text{GL}_{m_1}(\mathfrak{l}) \times \cdots \times \text{GL}_{m_s}(\mathfrak{l})$$

(le premier isomorphisme provenant de (3.1)) où \mathfrak{l} est le corps résiduel de C , les m_i sont des entiers de somme m et l'entier s est la période de \mathfrak{b} .

Remarque 3.3. — Le cardinal de \mathfrak{l} et l'entier s sont entièrement déterminés par n'importe quel caractère simple $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$. En effet, d'après (3.4) et la proposition 3.1, le centre de $\mathbf{J}_\theta^0 / \mathbf{J}_\theta^1$ est un groupe abélien fini isomorphe à $(\mathfrak{l}^\times)^s$. On observe que l'ordre \mathfrak{b} est maximal si et seulement si $s = 1$, c'est-à-dire si et seulement si le centre de $\mathbf{J}_\theta^0 / \mathbf{J}_\theta^1$ est cyclique.

3.3. Par la suite, nous ne considérerons que des caractères simples *maximaux*, au sens de la définition suivante (voir la remarque 3.14 pour une justification).

Définition 3.4. — Une strate simple $[\mathfrak{a}, \beta]$ dans A est dite *maximale* si $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap B$ est un ordre maximal dans B . Si c'est le cas, les caractères simples dans $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ sont dits *maximaux*.

La remarque 3.3 montre que, pour un caractère simple, la propriété d'être maximal est indépendante de la strate simple choisie pour le définir. En d'autres termes, si $[\mathfrak{a}, \beta]$ est maximale, si $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ et si $[\mathfrak{a}', \beta']$ est une strate simple telle que $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}', \beta')$, alors $[\mathfrak{a}', \beta']$ est maximale.

Une strate simple maximale a les propriétés suivantes, qui précisent la proposition 3.1.

Proposition 3.5. — Si $[\mathfrak{a}, \beta]$ est une strate simple maximale dans A , alors \mathfrak{a} est l'unique ordre de A normalisé par E^\times tel que $\mathfrak{a} \cap B = \mathfrak{b}$, et le groupe $\mathbf{J}(\mathfrak{a}, \beta)$ normalise \mathfrak{a} .

Démonstration. — La première assertion se déduit de [67, Lemme 1.6]. Rappelons ensuite que $\mathbf{J}(\mathfrak{a}, \beta)$ est engendré par $\mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta)$, qui normalise \mathfrak{a} car il est inclus dans $\mathbf{U}^1(\mathfrak{a})$, et le normalisateur de \mathfrak{b} dans B^\times . La seconde assertion suit alors de la propriété d'unicité de \mathfrak{a} . \square

La proposition suivante montre que des strates simples définissant un même caractère simple maximal ont de nombreux invariants en commun.

Proposition 3.6. — Soit $[\mathfrak{a}, \beta]$ et $[\mathfrak{a}', \beta']$ des strates simples maximales dans A telles que l'intersection $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta) \cap \mathcal{C}(\mathfrak{a}', \beta')$ soit non vide. Alors :

$$\mathcal{C}(\mathfrak{a}', \beta') = \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta), \quad \mathfrak{a}' = \mathfrak{a}, \quad e_{F[\beta']/F} = e_{F[\beta]/F}, \quad f_{F[\beta']/F} = f_{F[\beta]/F}.$$

Démonstration. — Posons $E = F[\beta]$ et $E' = F[\beta']$. Soit $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta) \cap \mathcal{C}(\mathfrak{a}', \beta')$. D'après la proposition 3.1, son normalisateur \mathbf{J}_θ est égal à $\mathbf{J}(\mathfrak{a}, \beta) = \mathbf{J}(\mathfrak{a}', \beta')$. Ce groupe contient E^\times et E'^\times et, les deux strates étant maximales, il normalise \mathfrak{a} et \mathfrak{a}' . Intersectant la relation $\mathbf{J}^0(\mathfrak{a}, \beta) \subseteq \mathfrak{a}'^\times$ avec B^\times , on trouve que $\mathfrak{b}^\times \subseteq \mathfrak{a}'^\times \cap B^\times$. Comme \mathfrak{a}' est normalisé par E^\times , l'intersection $\mathfrak{a}' \cap B$ est un ordre héréditaire de B . Comme \mathfrak{b} est maximal, on en déduit donc que $\mathfrak{a}' \cap B = \mathfrak{b}$. La proposition 3.5 entraîne que $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$, les égalités $e_{E'/F} = e_{E/F}$ et $f_{E'/F} = f_{E/F}$ suivent de [14, Lemma 4.14] et l'égalité $\mathcal{C}(\mathfrak{a}', \beta') = \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ suit de [14, Theorem 4.16]. \square

Remarque 3.7. — (1) Lorsque A est déployée sur F , la proposition est vraie sans hypothèse de maximalité (voir [25, 2.1.1] et l'argument au début de [76, Section 6]).

(2) Dans le cas non déployé, il n'est pas difficile de trouver des strates simples $[\mathfrak{a}, \beta]$ et $[\mathfrak{a}', \beta']$ telles que $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta) = \mathcal{C}(\mathfrak{a}', \beta')$ et $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}'$. Par exemple, soit D une algèbre de quaternions sur F , et soit E une extension quadratique non ramifiée de F incluse dans D . Posons $A = \mathbf{M}_2(D)$ et :

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_D & \mathcal{O}_D \\ \mathfrak{p}_D & \mathcal{O}_D \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathcal{O}_D) \mid c \in \mathfrak{p}_D \right\}.$$

qui est un ordre minimal de A . Choisissons un $\beta \in E$ minimal sur F au sens de [26, 1.4.14]. Alors $[\mathfrak{a}, \beta]$ est une strate simple dans A et $B = \mathbf{M}_2(E)$. Tout élément $y \in B^\times$ normalisant $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap B$ normalise aussi chaque caractère simple de $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$. On a donc $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta) = \mathcal{C}(\mathfrak{a}^y, \beta)$. Pourtant, si :

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varpi_F & 0 \end{pmatrix} \in B^\times, \quad \varpi_F \text{ uniformisante de } F,$$

on a $\mathfrak{a}^y \neq \mathfrak{a}$.

Soit θ un caractère simple maximal de G , et soit $[\mathfrak{a}, \beta]$ une strate simple telle que $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$. L'ensemble $\mathcal{P}(\mathfrak{a}, \beta)$ défini au paragraphe 3.2 est formé des isomorphismes (3.3) tels que l'image de $\mathfrak{a} \cap B$ soit égale à $GL_m(\mathcal{O}_C)$. En vertu du théorème de Skolem-Noether, deux isomorphismes de $\mathcal{P}(\mathfrak{a}, \beta)$ sont conjugués sous $C^\times GL_m(\mathcal{O}_C)$. Un choix de $\phi \in \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \beta)$ induit un isomorphisme :

$$(3.5) \quad \mathbf{J}^0(\mathfrak{a}, \beta) / \mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta) \simeq GL_m(\mathfrak{l})$$

de groupes, où l'on rappelle que \mathfrak{l} est le corps résiduel de C .

3.4. Une famille de paires $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ appelées *types simples maximaux étendus* de G , constituées d'un sous-groupe \mathbf{J} ouvert compact modulo le centre de G et d'une représentation irréductible $\boldsymbol{\lambda}$ de \mathbf{J} , a été construite dans [26] et [66, 67, 68]. Pour qu'une paire $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ soit un type simple maximal étendu de G , il faut et suffit qu'il existe un caractère simple maximal θ de G tel que :

- (1) $F^\times \mathbf{J}_\theta^0 \subseteq \mathbf{J} \subseteq \mathbf{J}_\theta$ et le normalisateur de $\boldsymbol{\lambda}$ dans G est égal à \mathbf{J} ,
- (2) la restriction de $\boldsymbol{\lambda}$ à H_θ^1 est un multiple de θ ,
- (3) étant donné une représentation $\boldsymbol{\kappa}$ de \mathbf{J} prolongeant la représentation de Heisenberg de θ , il existe une représentation irréductible $\boldsymbol{\rho}$ de \mathbf{J} triviale sur \mathbf{J}_θ^1 telle que :

(a) $\boldsymbol{\lambda}$ soit isomorphe à $\boldsymbol{\kappa} \otimes \boldsymbol{\rho}$,

(b) pour un (ou, de façon équivalente, pour tout) choix d'une strate simple $[\mathfrak{a}, \beta]$ telle que $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ et d'un isomorphisme $\phi \in \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \beta)$, la restriction de $\boldsymbol{\rho}$ à \mathbf{J}^0 est l'inflation *via* (3.5) d'une représentation cuspidale de $GL_m(\mathfrak{l})$.

Dans toute la suite, pour abrégier, nous écrirons *type* plutôt que *type simple maximal étendu*.

Remarque 3.8. — Un tel groupe \mathbf{J} a un unique sous-groupe compact maximal \mathbf{J}^0 et un unique pro- p -sous-groupe compact distingué maximal \mathbf{J}^1 et, pour tout caractère simple maximal θ de G comme en (1), on a $\mathbf{J}^0 = \mathbf{J}_\theta^0$ et $\mathbf{J}^1 = \mathbf{J}_\theta^1$.

Remarque 3.9. — Un *type de niveau 0* est un type (\mathbf{J}, λ) de G attaché à une strate simple maximale nulle $[\mathfrak{a}, 0]$ au sens de la remarque 3.2. L'ordre \mathfrak{a} est maximal et λ est une représentation irréductible de $\mathbf{J}(\mathfrak{a}, 0)$ triviale sur $\mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, 0) = \mathbf{U}^1(\mathfrak{a})$ dont la restriction à $\mathbf{J}^0(\mathfrak{a}, 0) = \mathfrak{a}^\times$ induit une représentation cuspidale de $\mathfrak{a}^\times/\mathbf{U}^1(\mathfrak{a}) \simeq \mathrm{GL}_r(\mathbf{k}_D)$. Une représentation cuspidale π de G contient un type de niveau 0 si et seulement si elle est de niveau 0. On a alors $[E : F] = 1$.

Soit (\mathbf{J}, λ) un type de G , et soit θ un caractère simple maximal comme ci-dessus. Si κ est une représentation de \mathbf{J} prolongeant la représentation de Heisenberg η associée à θ , l'application :

$$(3.6) \quad \xi \mapsto \kappa \otimes \xi$$

induit une bijection entre classes d'isomorphisme de représentations irréductibles ξ de \mathbf{J} triviales sur \mathbf{J}^1 et classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de \mathbf{J} dont la restriction au sous-groupe \mathbf{J}^1 contient η (voir par exemple [59, Lemme 2.6]). Par conséquent, la représentation ρ de \mathbf{J} triviale sur \mathbf{J}^1 telle que λ soit isomorphe à $\kappa \otimes \rho$ est unique.

Remarque 3.10. — Fixons un isomorphisme $\phi \in \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \beta)$ comme en (3). Soit ϖ une uniformisante de C , soit ρ la représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_m(\mathfrak{l})$ dont la restriction de ρ à \mathbf{J}^0 est l'inflation et soit b l'indice de \mathbf{J} dans \mathbf{J}_θ . Le groupe \mathbf{J}_θ est engendré par \mathbf{J}^0 et ϖ et l'orbite de ρ sous l'action de $\mathrm{Gal}(\mathfrak{l}/\mathbf{k}_E)$ a pour cardinal b , c'est-à-dire que \mathbf{J} est engendré par \mathbf{J}^0 et ϖ^b .

Remarque 3.11. — Le lecteur au fait de la théorie des types aura remarqué que nous n'avons pas utilisé ici la notion de beta-extension (voir [67] et [68, 4.1]). Une beta-extension est une représentation de \mathbf{J}^0 prolongeant η et entrelacée par $\mathbf{J}^1 B^\times \mathbf{J}^1$. Elle est donc normalisée par \mathbf{J}_θ et se prolonge à \mathbf{J}_θ . Inversement, étant donné une représentation κ_β de \mathbf{J}_θ prolongeant une beta-extension, toute représentation κ de \mathbf{J}_θ prolongeant η s'obtient en tordant κ_β par un caractère ξ de \mathbf{J}_θ trivial sur \mathbf{J}^1 . La restriction de ξ à \mathbf{J}^0 s'identifie *via* (3.5) à un caractère ξ de $\mathrm{GL}_m(\mathfrak{l})$. Ce groupe n'étant pas isomorphe à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ puisque $p \neq 2$, et ξ étant invariant par conjugaison par l'uniformisante ϖ de C , le caractère ξ se factorise par le déterminant et est invariant sous l'action de $\mathrm{Gal}(\mathfrak{l}/\mathbf{k}_E)$. Aussi ξ , vu comme un caractère de $(\mathbf{J}_\theta \cap B^\times)/(\mathbf{J}^1 \cap B^\times)$, se factorise-t-il par $\mathrm{Nrd}_{B/E}$. Compte tenu de [67, Théorème 2.28], la restriction de κ à \mathbf{J}^0 est une beta-extension.

Profitons-en pour énoncer le lemme suivant, qui sera très utile par la suite.

Lemme 3.12. — *Soit θ un caractère simple maximal de G , soit \mathbf{J}_θ son normalisateur dans G et soit η sa représentation de Heisenberg. Il existe des prolongements de η à \mathbf{J}_θ dont le déterminant soit d'ordre une puissance de p .*

Démonstration. — Si κ est un prolongement de \mathbf{J}_θ à η , son déterminant est un caractère de \mathbf{J}_θ noté δ . Quitte à tordre κ par un caractère de \mathbf{J}_θ trivial sur \mathbf{J}_θ^0 , on peut supposer que l'ordre de δ est fini. Il se décompose donc de façon unique comme le produit d'un caractère d'ordre une

puissance de p et d'un caractère d'ordre premier à p . Notons ω ce dernier : c'est un caractère de \mathbf{J}_θ trivial sur \mathbf{J}_θ^1 . Comme la dimension de κ est une puissance de p , il existe un entier $a \geq 1$ tel que $a \cdot \dim \kappa$ soit congru à 1 modulo l'ordre de ω . On vérifie alors que la représentation $\kappa\omega^{-a}$ a la propriété voulue. \square

3.5. Donnons la classification des représentations irréductibles cuspidales de G en termes de types (voir [26, 6.2, 8.4], [70, Théorème 5.23] et [71, Corollary 7.3]).

Théorème 3.13. — (1) *Étant donné une représentation cuspidale π de G , il existe un type (\mathbf{J}, λ) tel que λ apparaisse comme sous-représentation de la restriction de π à \mathbf{J} , et un tel type est unique à G -conjugaison près.*

(2) *L'induction compacte induit une bijection entre classes de G -conjugaison de types et classes d'isomorphisme de représentations cuspidales de G .*

Plus précisément, fixons un caractère simple maximal θ de G et une représentation κ de \mathbf{J}_θ prolongeant sa représentation de Heisenberg. L'application :

$$(3.7) \quad (\mathbf{J}, \rho) \mapsto \text{ind}_{\mathbf{J}}^G (\kappa|_{\mathbf{J}} \otimes \rho)$$

induit une bijection entre :

(1) classes de \mathbf{J}_θ -conjugaison de paires (\mathbf{J}, ρ) telles que :

- (a) $F^\times \mathbf{J}^0 \subseteq \mathbf{J} \subseteq \mathbf{J}_\theta$ et ρ est une classe d'isomorphisme de représentations irréductibles de \mathbf{J} triviale sur \mathbf{J}^1 dont le normalisateur dans \mathbf{J}_θ est égal à \mathbf{J} ,
- (b) la restriction de ρ à \mathbf{J}^0 est l'inflation d'une représentation cuspidale de $GL_m(\mathfrak{l})$,

(2) classes d'isomorphisme de représentations irréductibles cuspidales de G contenant θ .

La bijection (3.7) dépend du choix de la représentation κ , mais l'ensemble (1) n'en dépend pas.

Remarque 3.14. — Un caractère simple contenu dans une représentation cuspidale de G est toujours maximal ([70, Corollaire 5.20]), ce qui justifie qu'on ne s'intéresse ici qu'aux caractères simples maximaux. Inversement, étant donné un caractère simple maximal θ de G , il existe une représentation cuspidale de G contenant θ .

Étant donné une représentation cuspidale π de G , nous lui associons deux invariants importants, qui seront utiles à partir de la section 5. D'une part, si (\mathbf{J}, λ) est un type contenu dans la représentation π , le *degré paramétrique* de π est l'entier :

$$(3.8) \quad \delta(\pi) = mb \cdot [E : F]$$

où m est défini par (3.2) et b par la remarque 3.10 (voir [23, Définition 2.7]).

D'autre part, le transfert de Jacquet-Langlands de π à $GL_n(F)$ est une représentation essentiellement de carré intégrable, notée π' . D'après [83, Theorem 9.3], il y a un unique diviseur $s = s(\pi)$ de n et une unique représentation cuspidale π'_0 de $GL_{n/s}(F)$ telle que π' soit isomorphe à l'unique quotient irréductible $L(\pi'_0, s)$ de l'induite parabolique :

$$\text{Ind}_P^{GL_n(F)} \left(\pi'_0 \nu^{(1-s)/2} \otimes \dots \otimes \pi'_0 \nu^{(s-1)/2} \right),$$

l'induction étant normalisée et prise par rapport au sous-groupe parabolique standard triangulaire supérieur par blocs P , et ν désignant le caractère non ramifié “valeur absolue du déterminant” de $\mathrm{GL}_{n/s}(F)$. Ces deux entiers sont liés par la relation importante :

$$(3.9) \quad \delta(\pi)s(\pi) = n$$

(voir par exemple [60, Proposition 12.2]).

Remarque 3.15. — (1) Cette relation est une conséquence directe de l'identité $\delta(\pi) = \delta(\pi'_0)$ donnée par 2.8 Corollary 1 et l'identité (2.8.1) de [23]. Il s'ensuit que $bs(\pi) = c$, c'est-à-dire que, compte tenu de la remarque 3.10 dont on reprend les notations, $s(\pi)$ est l'ordre du stabilisateur de ρ dans $\mathrm{Gal}(\mathbf{l}/\mathbf{k}_E)$.

(2) De cette première remarque on déduit que $s(\pi)$ est premier à r (selon [60, Corollaire 3.9]). Posant $\delta = \delta(\pi)$ et $s = s(\pi)$, on obtient les formules :

$$(3.10) \quad r = \frac{\delta}{(d, \delta)}, \quad s = \frac{d}{(d, \delta)}.$$

(3) Inversement, si k est un diviseur de n et ρ est une représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_{n/k}(F)$, le transfert de Jacquet-Langlands de $L(\rho, k)$ à G est une représentation essentiellement de carré intégrable σ . D'après [30, 79] (voir aussi [6, (2.2)]), il y a un unique diviseur t de r et une unique représentation cuspidale μ de $\mathrm{GL}_{r/t}(D)$ tel que celle-ci soit isomorphe à l'unique quotient irréductible $L(\mu, t)$ de l'induite parabolique :

$$\mathrm{Ind}_Q^G \left(\mu\nu^{s(\mu)(1-t)/2} \otimes \dots \otimes \mu\nu^{s(\mu)(t-1)/2} \right),$$

l'induction étant normalisée et prise par rapport au sous-groupe parabolique standard triangulaire supérieur par blocs Q , et ν désignant ici le caractère non ramifié “valeur absolue de la norme réduite” de $\mathrm{GL}_{r/t}(D)$. Le transfert de Jacquet-Langlands de μ à $\mathrm{GL}_{n/t}(F)$ étant de la forme $L(\mu'_0, s(\mu))$ pour une représentation cuspidale μ'_0 de $\mathrm{GL}_{n/ts(\mu)}(F)$, on en déduit que μ'_0 et ρ sont isomorphes, donc que $\delta(\mu) = n/k$. Appliquant (3.10) à la représentation μ , on trouve :

$$\frac{r}{t} = \frac{n/k}{(d, n/k)} = \frac{r}{(r, k)},$$

ce dont on déduit que $t = (r, k)$. Par conséquent, pour que σ soit cuspidale, il faut et suffit que k soit premier à r .

3.6. Introduisons maintenant la notion d'endo-classe de caractères simples [16, 24, 14], qui sera au centre de tout notre travail.

Soit $[\mathfrak{a}, \beta]$ une strate simple dans A , et soit $[\mathfrak{a}', \beta']$ une strate simple dans une autre F -algèbre centrale simple A' . Supposons qu'il existe un isomorphisme de F -algèbres $\phi : F[\beta] \rightarrow F[\beta']$ tel que $\phi(\beta) = \beta'$. Il y a alors une bijection canonique :

$$\mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta) \rightarrow \mathcal{C}(\mathfrak{a}', \beta')$$

appelée *transfert* ([26, 3.6] et [66, 3.3.3]).

Les applications de transfert jouissent d'une propriété de transitivité : si $[\mathfrak{a}, \beta]$ et $[\mathfrak{a}', \beta']$ sont comme ci-dessus, si $[\mathfrak{a}'', \beta'']$ est une strate simple dans une F -algèbre centrale simple A'' et s'il y

a un isomorphisme de F -algèbres de $F[\beta']$ sur $F[\beta'']$ envoyant β' sur β'' , le transfert de $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ à $\mathcal{C}(\mathfrak{a}'', \beta'')$ est la composée du transfert de $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ à $\mathcal{C}(\mathfrak{a}', \beta')$ et du transfert de $\mathcal{C}(\mathfrak{a}', \beta')$ à $\mathcal{C}(\mathfrak{a}'', \beta'')$.

Remarque 3.16. — Un cas particulier simple mais important de transfert est celui où $A' = A$ et $[\mathfrak{a}', \beta']$ est conjuguée à $[\mathfrak{a}, \beta]$ par un $g \in G$. Dans ce cas, le transfert de $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ à $\mathcal{C}(\mathfrak{a}', \beta')$ est donné par la conjugaison par g .

Dans la suite du paragraphe, nous nous concentrons sur les propriétés des caractères simples *maximaux* vis-à-vis du transfert.

Définition 3.17. — Soient A_1 et A_2 des F -algèbres centrales simples, et θ_1 et θ_2 des caractères simples maximaux dans A_1^\times et A_2^\times respectivement. Les caractères simples θ_1 et θ_2 sont dits *endo-équivalents* s'il existe des strates simples $[\mathfrak{a}_1, \beta_1]$ et $[\mathfrak{a}_2, \beta_2]$ dans A_1 et A_2 telles que :

- (1) $\theta_1 \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}_1, \beta_1)$ et $\theta_2 \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}_2, \beta_2)$,
- (2) les extensions $F[\beta_1]$ et $F[\beta_2]$ ont le même degré sur F ,
- (3) il y a une F -algèbre centrale simple A' et des strates simples maximales $[\mathfrak{a}', \beta'_1]$ et $[\mathfrak{a}', \beta'_2]$ dans A' telles que θ_1 et θ_2 se transfèrent en des caractères simples $\theta'_1 \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}', \beta'_1)$ et $\theta'_2 \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}', \beta'_2)$ qui s'entrelacent dans A'^\times , c'est-à-dire qu'il existe un $g \in A'^\times$ tel que :

$$\theta'_2(x) = \theta'_1(gxg^{-1}), \quad x \in H^1(\mathfrak{a}', \beta'_2) \cap g^{-1}H^1(\mathfrak{a}', \beta'_1)g.$$

En particulier, deux caractères simples maximaux transferts l'un de l'autre sont endo-équivalents.

La notion d'endo-équivalence a été introduite dans [16] (voir [14] pour les formes intérieures) d'une façon légèrement différente reposant sur la notion de caractère simple potentiel, que nous n'utiliserons pas dans cet article. Dans le cas des groupes linéaires généraux déployés, [24] explique comment faire l'économie des caractères simples potentiels. Dans le présent article, nous nous contentons de le faire pour les caractères simples maximaux des formes intérieures. Ainsi, la proposition suivante est une adaptation de [14, Corollary 8.3].

Proposition 3.18. — *L'endo-équivalence est une relation d'équivalence sur l'ensemble :*

$$\mathcal{C}_{\max}(F) = \bigcup_{[\mathfrak{a}, \beta]} \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta),$$

l'union étant prise sur l'ensemble des strates simples maximales des F -algèbres centrales simples.

Démonstration. — Prouvons qu'il s'agit d'une relation transitive. Soit θ_1, θ_2 et θ_3 des caractères simples maximaux tels que θ_1, θ_2 soient endo-équivalents, ainsi que θ_2, θ_3 . Pour θ_1, θ_2 , il y a des strates simples maximales $[\mathfrak{a}_1, \beta_1], [\mathfrak{a}_2, \beta_2]$ et $[\mathfrak{a}', \beta'_1], [\mathfrak{a}', \beta'_2]$ comme ci-dessus, avec des transferts θ'_1, θ'_2 qui s'entrelacent dans A'^\times . D'après [14, Lemma 4.7], on a :

$$(3.11) \quad e_{F[\beta_1]/F} = e_{F[\beta_2]/F}, \quad f_{F[\beta_1]/F} = f_{F[\beta_2]/F}.$$

Pour θ_2, θ_3 , il y a des strates simples maximales $[\mathfrak{a}_2^*, \beta_2^*]$ et $[\mathfrak{a}_3^*, \beta_3^*]$ dans A_2 et A_3 telles que :

- (1) $\theta_2 \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}_2^*, \beta_2^*)$ et $\theta_3 \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}_3^*, \beta_3^*)$,
- (2) les extensions $F[\beta_2^*]$ et $F[\beta_3^*]$ ont le même degré sur F ,

(3) il y a une F -algèbre centrale simple A'' et des strates simples maximales $[\mathfrak{a}'', \beta_2'']$ et $[\mathfrak{a}'', \beta_3'']$ dans A'' telles que θ_2 et θ_3 se transfèrent en des caractères simples $\theta_2'' \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}'', \beta_2'')$ et $\theta_3'' \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}'', \beta_3'')$ qui s'entrelacent dans A''^\times ,

et de façon analogue à (3.11) on a les égalités $e_{F[\beta_2^*]/F} = e_{F[\beta_3^*]/F}$ et $f_{F[\beta_2^*]/F} = f_{F[\beta_3^*]/F}$. Comme le caractère simple θ_2 est dans l'intersection $\mathcal{C}(\mathfrak{a}_2, \beta_2) \cap \mathcal{C}(\mathfrak{a}_2^*, \beta_2^*)$, la proposition 3.6 implique :

$$\mathcal{C}(\mathfrak{a}_2^*, \beta_2^*) = \mathcal{C}(\mathfrak{a}_2, \beta_2), \quad \mathfrak{a}_2^* = \mathfrak{a}_2, \quad e_{F[\beta_2^*]/F} = e_{F[\beta_2]/F}, \quad f_{F[\beta_2^*]/F} = f_{F[\beta_2]/F}.$$

On en déduit que les extensions $F[\beta_1]$, $F[\beta_2]$, $F[\beta_2^*]$ et $F[\beta_3^*]$ ont le même indice de ramification (noté e), le même degré résiduel (noté f) et le même degré (noté g) sur F .

Soit maintenant une F -algèbre centrale simple déployée A° , dont le degré réduit n° soit divisible par g , et fixons un \mathcal{O}_F -ordre principal \mathfrak{a}° de A° de période e (c'est-à-dire que la \mathbf{k}_F -algèbre $\mathfrak{a}^\circ/\mathfrak{p}_{\mathfrak{a}^\circ}$ est isomorphe à la somme directe de e copies de $\mathbf{M}_{n^\circ/e}(\mathbf{k}_D)$). Selon [16, Proposition 1.1], pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, il y a des plongements de F -algèbres $\iota_i : F[\beta_i] \rightarrow A^\circ$ tels que $\iota_i(F[\beta_i])^\times$ normalise \mathfrak{a}° . On en déduit des strates simples maximales $[\mathfrak{a}^\circ, \beta_1^\circ]$, $[\mathfrak{a}^\circ, \beta_2^\circ]$, $[\mathfrak{a}^\circ, \beta_3^\circ]$ de A° telles que $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ se transfèrent en $\theta_1^\circ \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}^\circ, \beta_1^\circ)$, $\theta_2^\circ \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}^\circ, \beta_2^\circ)$, $\theta_3^\circ \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}^\circ, \beta_3^\circ)$.

Comme θ_1' et θ_2' s'entrelacent dans A'^\times , il suit de [14, Theorem 1.11] que θ_1° et θ_2° s'entrelacent dans $A^{\circ\times}$, et de [26, Theorem 3.5.11] qu'ils sont conjugués sous $A^{\circ\times}$. Faisant de même avec θ_2'' et θ_3'' , on trouve que $\theta_2^\circ, \theta_3^\circ$ sont conjugués sous $A^{\circ\times}$. Par conséquent, θ_1° et θ_3° sont conjugués, donc s'entrelacent dans $A^{\circ\times}$. \square

Une classe d'équivalence pour cette relation sur $\mathcal{C}_{\max}(F)$ est appelée une F -endo-classe. On note $\mathcal{E}(F)$ l'ensemble des F -endo-classes.

Étant donné un caractère simple maximal $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$, le degré de $F[\beta]/F$, son indice de ramification et son degré résiduel dépendent uniquement de son endo-classe Θ . Ces entiers sont appelés respectivement le degré, l'indice de ramification et le degré résiduel de Θ . Cette extension $F[\beta]$ n'est pas uniquement déterminée, mais sa sous-extension modérément ramifiée maximale l'est, à F -isomorphisme près ([25, 2.2, 2.4]).

Remarque 3.19. — L'endo-classe nulle est l'endo-classe d'un caractère simple maximal trivial associé à une strate simple maximale nulle (voir la remarque 3.2).

3.7. Lorsqu'on s'intéresse aux caractères simples maximaux d'un même groupe, la relation d'endo-équivalence prend une forme simplifiée.

Proposition 3.20. — Soit A une F -algèbre centrale simple, et soit θ_1, θ_2 des caractères simples maximaux de $G = A^\times$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) Les caractères θ_1, θ_2 sont endo-équivalents,
- (2) Les caractères θ_1, θ_2 sont entrelacés par un élément de G ,
- (3) Les caractères θ_1, θ_2 sont conjugués sous G ,
- (4) Les caractères θ_1, θ_2 sont contenus dans une même représentation cuspidale de G .

Démonstration. — Le fait que (1) implique (3) est donné par [31, Proposition 2.5]. Bien sûr, (3) implique (2), elle-même impliquant (1) par définition. Ensuite, la remarque 3.14 assure qu'il y a

une représentation cuspidale de G contenant θ_1 . Une telle représentation contient tous les conjugués de θ_1 sous G , ce qui entraîne que (3) implique (4). Enfin, si θ_1, θ_2 sont contenus dans une même représentation cuspidale π de G , on a par réciprocity de Frobenius des morphismes surjectifs :

$$\mathrm{ind}_{H_{\theta_i}^1}^G(\theta_i) \rightarrow \pi, \quad i = 1, 2,$$

le membre de gauche désignant l'induite compacte de θ_i à G . Le sous-groupe $H_{\theta_i}^1$ étant ouvert et compact, cette induite compacte est un objet projectif de la catégorie des représentations (lisses, complexes) de G . On en déduit un morphisme non nul :

$$\mathrm{ind}_{H_{\theta_1}^1}^G(\theta_1) \rightarrow \mathrm{ind}_{H_{\theta_2}^1}^G(\theta_2).$$

Appliquant à nouveau la réciprocity de Frobenius, puis la formule de Mackey, on en déduit que θ_1 et θ_2 s'entrelacent, c'est-à-dire que (4) implique (2). \square

Définition 3.21. — L'endo-classe d'une représentation cuspidale π de G est l'endo-classe de n'importe quel caractère simple maximal contenu dans π .

Remarque 3.22. — Une représentation cuspidale de G est d'endo-classe nulle si et seulement si elle est de niveau 0, c'est-à-dire si et seulement si elle admet un vecteur non nul invariant par $U^1(\mathfrak{a})$, où \mathfrak{a} est un ordre maximal quelconque de A .

Compte tenu de la remarque 3.14, on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 3.23. — Soit π une représentation cuspidale de G d'endo-classe Θ . Pour qu'un caractère simple de G soit contenu dans π , il faut et suffit qu'il soit maximal et d'endo-classe Θ .

3.8. Nous déduisons du paragraphe 3.7 le résultat complémentaire suivant.

Proposition 3.24. — Soit $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ un type de G . Le caractère simple maximal θ vérifiant les conditions (1) et (2) du paragraphe 3.4 est unique. On l'appelle le caractère simple attaché à $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$.

Démonstration. — Soit θ, θ' des caractères simples maximaux de G vérifiant les conditions requises. Soit $[\mathfrak{a}, \beta], [\mathfrak{a}', \beta']$ des strates simples de A telles que $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ et $\theta' \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}', \beta')$. Restreignant $\boldsymbol{\lambda}$ au pro- p -sous-groupe $H_{\theta}^1 \cap H_{\theta'}^1$, on a l'égalité $\theta = \theta'$ sur ce sous-groupe. D'après la proposition 3.20, et du fait que θ, θ' sont contenus dans la représentation cuspidale $\mathrm{ind}_{\mathbf{J}}^G(\boldsymbol{\lambda})$, il y a un $g \in G$ tel que $\theta' = \theta^g$. Il entrelace θ , on a donc $g \in \mathbf{J}^1 B^\times \mathbf{J}^1$. Comme \mathbf{J}^1 normalise θ , on peut supposer que $g \in B^\times$. De l'égalité $\mathbf{J}_{\theta'} = \mathbf{J}_{\theta}^g$, on tire que $\mathbf{J}^0 = \mathbf{J}^{0g}$ par unicité du sous-groupe compact maximal. Intersectant avec B^\times , on trouve $\mathfrak{b}^\times = \mathfrak{b}^{\times g}$, c'est-à-dire que g normalise \mathfrak{b} , donc θ . \square

Remarque 3.25. — (1) Un même caractère simple maximal θ peut être attaché à des types non isomorphes.

(2) Si π est une représentation cuspidale de G , deux types contenus dans π ont le même caractère simple attaché θ si et seulement s'ils sont conjugués sous \mathbf{J}_{θ} .

(3) Si A est déployée sur F , et si $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ est un type de caractère simple attaché θ , alors $\mathbf{J} = \mathbf{J}_\theta$. Par conséquent, une représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_n(F)$ contenant θ contient un unique type auquel θ est attaché.

3.9. Si θ est un caractère simple maximal de G , et si $[\mathbf{a}, \beta]$ est une strate simple de A telle que $\theta \in \mathcal{C}(\mathbf{a}, \beta)$, alors $[\mathbf{a}, -\beta]$ est une strate simple dans A et $\theta^{-1} \in \mathcal{C}(\mathbf{a}, -\beta)$.

Deux caractères simples maximaux sont endo-équivalents si et seulement si leurs inverses sont endo-équivalents. Par conséquent, étant donné une endo-classe $\Theta \in \mathcal{E}(F)$ et un caractère simple maximal θ d'endo-classe Θ , l'endo-classe de θ^{-1} ne dépend pas du choix de θ . On la note Θ^\vee .

Définition 3.26. — Une endo-classe $\Theta \in \mathcal{E}(F)$ est dite *autoduale* si $\Theta^\vee = \Theta$.

En d'autres termes, pour qu'une endo-classe Θ soit autoduale, il faut et suffit qu'au moins un, ou de façon équivalente n'importe quel, caractère simple maximal d'endo-classe Θ soit conjugué à son inverse.

Lemme 3.27. — Soient A_1 et A_2 des F -algèbres centrale simples, soient $[\mathbf{a}_1, \beta_1]$ et $[\mathbf{a}_2, \beta_2]$ des strates simples maximales respectivement dans A_1 et A_2 , soient $\theta_1 \in \mathcal{C}(\mathbf{a}_1, \beta_1)$, $\theta_2 \in \mathcal{C}(\mathbf{a}_2, \beta_2)$ des caractères simples et soient u_1 et u_2 des éléments inversibles de A_1 et A_2 respectivement. Supposons que θ_2 soit le transfert de θ_1 . Pour chaque $i \in \{1, 2\}$, notons σ_i l'automorphisme intérieur de conjugaison par u_i , supposons que \mathbf{a}_i soit stable par σ_i et que $\sigma_i(\beta_i) = -\beta_i$. Alors $\theta_1 \circ \sigma_1 = \theta_1^{-1}$ si et seulement si $\theta_2 \circ \sigma_2 = \theta_2^{-1}$.

Démonstration. — Dans un premier temps, supposons simplement que $[\mathbf{a}_1, \beta_1]$ et $[\mathbf{a}_2, \beta_2]$ soient des strates simples maximales dans A_1 et A_2 et que θ_2 soit le transfert de θ_1 , sans supposer que \mathbf{a}_i soit stable par σ_i ni que $\sigma_i(\beta_i) = -\beta_i$. Désignons par \mathbf{t} le transfert de $\mathcal{C}(\mathbf{a}_1, \beta_1)$ à $\mathcal{C}(\mathbf{a}_2, \beta_2)$. On en déduit

- d'une part des strates simples maximales $[\sigma_1(\mathbf{a}_1), \sigma_1(\beta_1)]$ et $[\sigma_2(\mathbf{a}_2), \sigma_2(\beta_2)]$ et un transfert \mathbf{t}' de $\mathcal{C}(\sigma_1(\mathbf{a}_1), \sigma_1(\beta_1))$ à $\mathcal{C}(\sigma_2(\mathbf{a}_2), \sigma_2(\beta_2))$,
- et d'autre part des strates simples maximales $[\mathbf{a}_1, -\beta_1]$ et $[\mathbf{a}_2, -\beta_2]$ et un transfert \mathbf{t}'' de $\mathcal{C}(\mathbf{a}_1, -\beta_1)$ à $\mathcal{C}(\mathbf{a}_2, -\beta_2)$.

D'après la remarque 3.16, le transfert de $\mathcal{C}(\mathbf{a}_i, \beta_i)$ à $\mathcal{C}(\sigma_i(\mathbf{a}_i), \sigma_i(\beta_i))$ est donné par la conjugaison par u_i . Les propriétés de composition des transferts font donc que $\mathbf{t}' \circ \sigma_1$ est égal à $\sigma_2 \circ \mathbf{t}$.

Supposons maintenant que \mathbf{a}_i soit stable par σ_i et que $\sigma_i(\beta_i) = -\beta_i$. Alors [14, Theorem 7.8] assure que \mathbf{t}'' est égal à \mathbf{t}' . Enfin, supposant que $\theta_1 \circ \sigma_1 = \theta_1^{-1}$, on a :

$$\theta_2 \circ \sigma_2 = \mathbf{t}'(\theta_1 \circ \sigma_1) = \mathbf{t}''(\theta_1^{-1}) = \mathbf{t}(\theta_1)^{-1} = \theta_2^{-1},$$

l'avant-dernière égalité venant de ce que le transfert est compatible à l'inversion. \square

3.10. Nous terminons cette section par des lemmes généraux qui seront très utiles par la suite.

Lemme 3.28. — Soit τ un automorphisme continu de G , soit θ un caractère simple maximal de G tel que $\theta \circ \tau = \theta^{-1}$, soient \mathbf{J}_θ son normalisateur dans G et η sa représentation de Heisenberg.

- (1) La représentation $\eta^{\vee\tau}$ est isomorphe à η .

(2) Pour toute représentation κ de \mathbf{J}_θ prolongeant η , il y a un unique caractère ξ de \mathbf{J}_θ trivial sur \mathbf{J}_θ^1 tel que $\kappa^{\vee\tau}$ soit isomorphe à $\kappa\xi$.

(3) Notons val_F la valuation sur F et supposons que :

$$(3.12) \quad \text{val}_F \circ \text{Nrd}_{A/F} \circ \tau = \text{val}_F \circ \text{Nrd}_{A/F}.$$

Il existe une représentation κ de \mathbf{J}_θ prolongeant η telle que $\kappa^{\vee\tau}$ soit isomorphe à κ .

Démonstration. — L'hypothèse faite sur θ entraîne que \mathbf{J}_θ est stable par τ , et il en va de même de \mathbf{J}^0 , son sous-groupe compact maximal, et de \mathbf{J}^1 , son pro- p -sous-groupe distingué maximal. En outre, la restriction de $\eta^{\vee\tau}$ à H_θ^1 contient $\theta^{-1} \circ \tau = \theta$. Le premier point se déduit de la propriété d'unicité de η .

Ensuite, soit κ une représentation de \mathbf{J}_θ prolongeant η . L'existence et l'unicité du caractère ξ vient de (3.6).

Enfin, pour prouver (3), on choisit κ dont le déterminant soit d'ordre une puissance de p (voir le lemme 3.12). Il lui correspond un caractère ξ dont l'ordre est une puissance de p . Soit $[\mathfrak{a}, \beta]$ une strate simple maximale telle que $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$, et posons $E = F[\beta]$. Identifions la restriction de ξ à \mathbf{J}^0 à un caractère de $\mathbf{J}^0/\mathbf{J}^1$, et identifions ce groupe-ci à $GL_m(\mathfrak{l})$, où \mathfrak{l} est le corps résiduel de C et m est défini par (3.2). Comme $p \neq 2$, ses caractères se factorisent par le déterminant : ils sont donc d'ordre premier à p . Par conséquent, ξ est trivial sur \mathbf{J}^0 .

Enfin, rappelons que \mathbf{J}_θ est engendré par \mathbf{J}^0 et une uniformisante ϖ de C (selon la remarque 3.10). Un caractère de \mathbf{J}_θ trivial sur \mathbf{J}^0 est donc déterminé par sa valeur en ϖ . Écrivons $\tau(\varpi)$ sous la forme $\varpi^k x$ pour un $k \in \mathbb{Z}$ et un $x \in \mathbf{J}^0$. La valuation de la norme réduite de ϖ est égale à $mf_{E/F}$ et celle de x est nulle car \mathbf{J}^0 est compact. Compte tenu de (3.12), on trouve que $k = 1$. Choisissons un caractère ζ de \mathbf{J}_θ trivial sur \mathbf{J}^0 tel que $\zeta^2 = \xi$, ce qui équivaut à $\zeta(\zeta \circ \tau) = \xi$ d'après ce qui précède. La représentation $\kappa\zeta$ a la propriété voulue. \square

Remarque 3.29. — Si τ est une involution de G , la propriété d'unicité du caractère ξ donnée par le lemme 3.28(2) implique que celui-ci vérifie l'identité $\xi \circ \tau = \xi$.

Sous les mêmes hypothèses que le lemme précédent, on a le lemme suivant.

Lemme 3.30. — Notons \mathbf{J}^1 le pro- p -sous-groupe distingué maximal de \mathbf{J}_θ .

(1) Le \mathbb{C} -espace vectoriel $\text{Hom}_{\mathbf{J}^1 \cap G^\tau}(\eta, \mathbb{C})$ est de dimension 1.

(2) Soit κ une représentation de \mathbf{J}_θ prolongeant η et soit ξ le caractère de \mathbf{J}_θ qui lui est associé par le lemme 3.28(2).

(a) Il y a un unique caractère χ de $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ trivial sur $\mathbf{J}^1 \cap G^\tau$ tel que :

$$\text{Hom}_{\mathbf{J}^1 \cap G^\tau}(\eta, \mathbb{C}) = \text{Hom}_{\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau}(\kappa, \chi^{-1})$$

et la restriction de ξ à $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ est égale à χ^2 .

(b) Soit ρ une représentation de \mathbf{J}_θ triviale sur \mathbf{J}^1 . L'application linéaire canonique :

$$\text{Hom}_{\mathbf{J}^1 \cap G^\tau}(\eta, \mathbb{C}) \otimes \text{Hom}_{\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau}(\rho, \chi) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau}(\kappa \otimes \rho, \mathbb{C})$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — La preuve de (1) est la même que pour [69, Proposition 6.12] (voir aussi [85, Proposition 6.14]). La preuve de (2.b) et de la première partie de (2.a) est la même que pour [69, Lemma 6.20]. Pour prouver la seconde partie de (2.a), on écrit :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{J}^1 \cap G^\tau}(\eta, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau}(\kappa, \chi^{-1}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau}(\chi, \kappa^{\vee\tau}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau}(\chi\xi^{-1}, \kappa)$$

le premier isomorphisme étant obtenu par application du foncteur $\pi \mapsto \pi^{\vee\tau}$, et on conclut grâce au fait que $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ est compact modulo le centre et à l'unicité de χ . \square

4. Représentations cuspidales autoduales de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$

Dans cette section, nous étudions les propriétés des représentations cuspidales autoduales de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ du point de vue de la théorie des types. Plus précisément, nous montrons que toute représentation cuspidale autoduale de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ contient un caractère simple – et même un type – possédant des propriétés de dualité remarquables.

4.1. Fixons un entier $n \geq 1$, et écrivons $G = \mathrm{GL}_{2n}(F)$ et $A = \mathbf{M}_{2n}(F)$. Notre point de départ sera le résultat suivant de Blondel.

Théorème 4.1 ([9] **Theorem 1**). — *Soit π une représentation cuspidale autoduale de niveau non nul de G . Il existe une strate simple $[\mathfrak{a}, \beta]$ dans A , un caractère simple $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ contenu dans π et un élément $u \in \mathfrak{a}^\times$ tels que $\theta^u = \theta^{-1}$ et $\beta^u = -\beta$.*

Faisons tout de suite quelques remarques sur ce résultat.

Remarque 4.2. — Posons $E = F[\beta]$, notons B le centralisateur de E dans A et \mathbf{J} le normalisateur de θ dans G .

(1) Le centralisateur de u dans E est le sous-corps $E_0 = F[\beta^2]$, l'extension E/E_0 est quadratique et $\mathrm{Ad}(u)$, l'automorphisme intérieur de conjugaison par u dans G , induit sur E l'automorphisme non trivial de E/E_0 . En outre, on a $u \notin \mathbf{J}$ et $u^2 \in \mathfrak{a}^\times \cap B = \mathfrak{b}^\times$.

(2) Si (\mathbf{J}, λ) est le type (unique d'après la remarque 3.25) contenu dans π auquel le caractère simple θ est attaché, alors $\mathbf{J}^u = \mathbf{J}$ et λ^u est isomorphe à λ^\vee .

4.2. Nous allons préciser le théorème 4.1, en montrant qu'on peut prendre pour u un élément d'une forme bien précise.

Soit σ un élément de G tel que $\sigma^2 = 1$ et dont les valeurs propres -1 et 1 aient même multiplicité n , c'est-à-dire que le polynôme caractéristique de σ sur F est égal à $(X^2 - 1)^n$. Le centralisateur de σ dans G est un sous-groupe de Levi conjugué à $\mathrm{GL}_n(F) \times \mathrm{GL}_n(F)$. L'automorphisme intérieur $\mathrm{Ad}(\sigma)$ de G sera simplement noté σ . Ainsi, on notera $\sigma(x) = \sigma x \sigma^{-1}$ pour tout élément $x \in G$.

Définition 4.3. — (1) Un caractère simple θ de G est σ -autodual si $\theta \circ \sigma = \theta^{-1}$.

(2) Un type (\mathbf{J}, λ) de G est σ -autodual si \mathbf{J} est stable par σ et λ^σ est isomorphe à λ^\vee .

(3) Une strate simple $[\mathfrak{a}, \beta]$ de A est σ -autoduale si \mathfrak{a} est stable par σ et $\sigma(\beta) = -\beta$.

On a le résultat suivant, que l'on comparera à [3, Theorem 4.2, Corollary 4.21].

Proposition 4.4. — Soit Θ une endo-classe autoduale non nulle, de degré divisant $2n$.

- (1) Il y a une strate simple maximale σ -autoduale $[\mathfrak{a}, \beta]$ de A ayant les propriétés suivantes :
- (a) L'ensemble $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ contient un caractère simple σ -autodual d'endo-classe Θ .
 - (b) Posant $E = F[\beta]$, $E_0 = F[\beta^2]$ et $m = 2n/[E : F]$, il y a un isomorphisme :

$$(4.1) \quad A \rightarrow \mathbf{M}_m(\text{End}_F(E))$$

de F -algèbres identifiant $\mathfrak{a} \cap B$ à l'ordre maximal standard $\mathbf{M}_m(\mathcal{O}_E)$ et l'action de σ sur B à celle de l'automorphisme non trivial de E/E_0 sur $\mathbf{M}_m(E)$.

(2) Pour tout isomorphisme (4.1) comme en (1.b), notant \mathfrak{l} le corps résiduel de E et \mathfrak{l}_0 celui de E_0 , l'action induite par σ sur $\mathbf{J}^0(\mathfrak{a}, \beta)/\mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta)$ s'identifie via (3.5) à l'action du générateur de $\text{Gal}(\mathfrak{l}/\mathfrak{l}_0)$ sur $GL_m(\mathfrak{l})$.

Démonstration. — Notons d le degré de Θ . Soit $\theta_\bullet \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}_\bullet, \beta_\bullet)$ un caractère simple d'endo-classe Θ , où $[\mathfrak{a}_\bullet, \beta_\bullet]$ est une strate simple maximale de $\mathbf{M}_d(F)$. Posons $G_\bullet = GL_d(F)$.

Lemme 4.5. — Il y a une représentation irréductible cuspidale autoduale de G_\bullet contenant θ_\bullet .

Démonstration. — Comme Θ est autoduale, il y a un $v \in G_\bullet$ tel que θ_\bullet^{-1} soit égal à θ_\bullet^v . Selon le lemme 3.28 appliqué à l'automorphisme intérieur de conjugaison par v , qui vérifie bien la condition (3.12), il existe une représentation κ_\bullet , prolongeant la représentation de Heisenberg de θ_\bullet à son normalisateur \mathbf{J}_\bullet dans G_\bullet , et telle que $\kappa_\bullet^{v^{-1}}$ soit isomorphe à κ_\bullet . Selon le théorème 3.13, l'induite compacte de κ_\bullet à G_\bullet est une représentation cuspidale autoduale de G_\bullet contenant le caractère simple θ_\bullet . \square

Soit donc π_\bullet une représentation cuspidale autoduale de G_\bullet contenant θ_\bullet . Comme son endo-classe est non nulle, [9, Theorem 1] assure que d est pair. Le théorème 4.1 appliqué à π_\bullet fournit une strate simple $[\mathfrak{a}_*, \beta]$ de $\mathbf{M}_d(F)$, un caractère simple $\theta_* \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}_*, \beta)$ et un élément $u \in \mathfrak{a}_*^\times$ tels que $\theta_*^u = \theta_*^{-1}$ et $\beta^u = -\beta$. On pose $E = F[\beta]$ et $E_0 = F[\beta^2]$.

Écrivons $2n = md$. Quitte à remplacer σ par un de ses conjugués, ce qui ne change rien au résultat à prouver, on peut identifier A à $\mathbf{M}_m(\mathbf{M}_d(F))$ et mettre σ sous la forme :

$$(4.2) \quad \text{diag}(\sigma_*, \dots, \sigma_*), \quad \sigma_* \in GL_d(F) \text{ de polynôme caractéristique } (X^2 - 1)^{d/2}.$$

Ensuite, identifions les F -agèbres $\mathbf{M}_d(F)$ et $\text{End}_F(E)$ de sorte que σ_* soit l'automorphisme défini par $\sigma_*(x + \beta y) = x - \beta y$ pour tout $x, y \in E_0$. Ainsi σ_* normalise E , et induit sur E l'automorphisme non trivial de E/E_0 . Comme E est maximal dans $\mathbf{M}_d(F)$, l'ordre \mathfrak{a}_* est l'unique ordre principal de $\mathbf{M}_d(F)$ normalisé par E^\times , qui est donc normalisé par σ_* . La strate simple maximale $[\mathfrak{a}_*, \beta]$ est donc σ_* -autoduale. L'involution σ_* agit sur le centralisateur de E dans $\mathbf{M}_d(F)$, égal à E , comme l'automorphisme non trivial de E/E_0 , et sur le quotient $\mathbf{J}^0(\mathfrak{a}_*, \beta)/\mathbf{J}^1(\mathfrak{a}_*, \beta)$, naturellement isomorphe à $\mathcal{O}_E^\times/(1 + \mathfrak{p}_E) = \mathfrak{l}^\times$, comme le générateur de $\text{Gal}(\mathfrak{l}/\mathfrak{l}_0)$.

Enfin, posons $\mathfrak{a} = \mathbf{M}_m(\mathfrak{a}_*)$ et identifions E à son image diagonale dans A . Notons $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ le transfert de θ_* , qui est σ -autodual grâce au lemme 3.27. On obtient une strate simple maximale σ -autoduale $[\mathfrak{a}, \beta]$ de A possédant les propriétés voulues. \square

On en déduit le corollaire suivant, que l'on comparera à [3, Theorem 4.1], [69, Remark 5.13].

Corollaire 4.6. — *Pour qu'une représentation cuspidale de G contienne un type σ -autodual, il faut et suffit qu'elle soit autoduale. En particulier, toute représentation cuspidale autoduale de G contient un caractère simple σ -autodual.*

Démonstration. — Soit π une représentation cuspidale de G . Si π contient un type σ -autodual $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ de G , sa contragrédiente π^\vee contient le type $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda}^\vee)$. On a donc :

$$\pi^\vee \simeq \text{ind}_{\mathbf{J}}^G(\boldsymbol{\lambda}^\vee) \simeq \text{ind}_{\mathbf{J}}^G(\boldsymbol{\lambda}^\sigma) \simeq \pi.$$

Supposons maintenant que π soit autoduale.

Si la représentation π est de niveau 0, elle contient un type $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ avec $\mathbf{J} = F^\times \text{GL}_{2n}(\mathcal{O}_F)$. On peut supposer que σ est diagonal, auquel cas il est dans \mathbf{J} . Alors π contient à la fois $\boldsymbol{\lambda} \simeq \boldsymbol{\lambda}^\sigma$ et $\boldsymbol{\lambda}^\vee$, qui sont donc conjugués par un élément $g \in G$ normalisant \mathbf{J} . On a donc $g \in \mathbf{J}$, et il s'ensuit que $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ est σ -autodual.

Supposons maintenant que π soit de niveau non nul. Son endo-classe, notée Θ , est non nulle et autoduale. D'après la proposition 4.4, il existe une strate simple maximale σ -autoduale $[\mathfrak{a}, \beta]$ dans A et un caractère simple (maximal) σ -autodual $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ d'endo-classe Θ . En particulier, le normalisateur \mathbf{J} de θ dans G est normalisé par σ . D'après le corollaire 3.23, le caractère θ est contenu dans π . Soit $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ le type contenu dans π auquel θ est attaché (remarque 3.25(3)). Les types $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda}^\sigma)$ et $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda}^\vee)$ sont contenus dans π et contiennent $\theta^\sigma = \theta^{-1}$. Ils sont donc (d'après le théorème 3.13) conjugués par un $g \in G$ normalisant ce caractère : on a donc $g \in \mathbf{J}$, c'est-à-dire que $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ est σ -autodual. \square

Remarque 4.7. — La preuve du corollaire 4.6 montre que toute représentation cuspidale autoduale de G de niveau non nul contient non seulement un type σ -autodual, mais plus précisément un type σ -autodual associé à une strate simple σ -autoduale $[\mathfrak{a}, \beta]$ dans A possédant la propriété (1.b) – donc aussi la propriété (2) – de la proposition 4.4. Il est naturel de se demander si un caractère simple maximal – ou un type – σ -autodual est toujours associé à une strate simple σ -autoduale. Le lemme 5.6 répondra à cette question par l'affirmative pour les caractères, dans un cadre plus général. Une telle strate ne vérifiera cependant pas toujours les propriétés (1.b) et (2) de la proposition 4.4 : on renvoie à la proposition 5.27 pour une classification complète.

4.3. Soit Θ une endo-classe autoduale non nulle de degré divisant $2n$. Selon la proposition 4.4, il existe une strate simple maximale σ -autoduale $[\mathfrak{a}, \beta]$ dans A et un caractère simple σ -autodual $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ d'endo-classe Θ . Notons $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathfrak{a}, \beta)$, ainsi que $\mathbf{J}^0 = \mathbf{J}^0(\mathfrak{a}, \beta)$ et $\mathbf{J}^1 = \mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta)$. Le caractère θ étant σ -autodual, son normalisateur \mathbf{J} est stable par σ , et il en va de même de \mathbf{J}^0 , son sous-groupe compact maximal, et de \mathbf{J}^1 , son pro- p -sous-groupe distingué maximal.

Posons $E = F[\beta]$ et $E_0 = F[\beta^2]$. Soit T la sous-extension modérément ramifiée maximale de E sur F . Alors $T_0 = T \cap E_0$ est la sous-extension modérément ramifiée maximale de E_0 sur F et l'extension T/T_0 est quadratique.

Remarque 4.8. — D'après [10, Proposition 6.7], la classe de F -isomorphisme de T/T_0 dépend uniquement de Θ , et ni du choix de n ni de celui de $[\mathfrak{a}, \beta]$. Voir [10, 6.3, 6.5] (et le paragraphe 1.9 de l'introduction) pour une interprétation de cette extension quadratique du côté galoisien de la correspondance de Langlands locale.

Les lemmes suivants joueront un rôle important par la suite.

Lemme 4.9. — *Posons $m = 2n/\deg(\Theta)$. Pour qu'il existe une représentation cuspidale autoduale de G d'endo-classe Θ , il faut et suffit que m vérifie les conditions suivantes :*

- (1) *si T/T_0 est non ramifiée, alors m est impair,*
- (2) *si T/T_0 est ramifiée, alors m est pair ou égal à 1.*

Démonstration. — On peut supposer, ce que l'on fera, que la strate simple $[\mathfrak{a}, \beta]$ fixée ci-dessus possède également la propriété (1.b) de la proposition 4.4. Le degré de Θ est égal à $[E : F]$.

Soit η la représentation de Heisenberg associée à θ , et soit κ une représentation de \mathbf{J} prolongeant η telle que $\kappa^{\vee\sigma}$ soit isomorphe à κ , dont l'existence est assurée par le lemme 3.28 appliqué à l'involution σ .

Supposons d'abord qu'il y ait une représentation cuspidale autoduale π de G d'endo-classe Θ . Selon le corollaire 3.23, elle contient θ . Soit (\mathbf{J}, λ) le type contenu dans π auquel θ est attaché (voir la remarque 3.25(3)). Il est σ -autodual (voir la preuve du corollaire 4.6). Soit ρ la représentation irréductible de \mathbf{J} triviale sur \mathbf{J}^1 telle que λ soit isomorphe à $\kappa \otimes \rho$. Par unicité, ρ est σ -autoduale. La représentation de $GL_m(\mathfrak{l})$ dont la restriction de ρ à \mathbf{J}^0 est l'inflation, notée ρ , est également σ -autoduale.

Si T/T_0 est non ramifiée, σ agit sur $GL_m(\mathfrak{l})$ comme l'automorphisme non trivial de $\mathfrak{l}/\mathfrak{l}_0$. Dans ce cas, le résultat est donné par [69, Lemma 2.3] appliqué à ρ .

Si T/T_0 est ramifiée, σ agit trivialement sur $GL_m(\mathfrak{l})$, c'est-à-dire que ρ est autoduale. Dans ce cas, le résultat est donné par [69, Lemma 2.17] appliqué à ρ .

Inversement, supposons que l'entier m vérifie les conditions de l'énoncé. Invoquant à nouveau [69, Lemmas 2.3, 2.17], on en déduit l'existence d'une représentation cuspidale σ -autoduale ρ de $GL_m(\mathfrak{l})$. L'action de E^\times par conjugaison sur $\mathbf{J}^0/\mathbf{J}^1$ étant triviale, l'inflation de ρ à \mathbf{J}^0 se prolonge à \mathbf{J} . Choisissons un tel prolongement ρ . La représentation $\lambda = \kappa \otimes \rho$ est un type auquel θ est attaché. D'après le théorème 3.13, son induite compacte à G , notée π , est une représentation cuspidale d'endo-classe Θ telle que π^\vee , π soient inertiellement équivalentes. Tordant π par un caractère non ramifié convenable de G , on obtient une représentation cuspidale autoduale de G d'endo-classe Θ . \square

Terminons cette section en énonçant l'analogue du lemme 4.9 pour les représentations cuspidales autoduales de niveau 0, issu de [1, Theorem 7.1] (qui omet le cas de F^\times , qui a quatre représentations cuspidales autoduales du fait que $p \neq 2$).

Lemme 4.10. — *Soit un entier $m \geq 1$. Pour qu'il y ait une représentation cuspidale autoduale de $GL_m(F)$ de niveau 0, il faut et suffit que m soit pair ou égal à 1.*

5. Involutions intérieures sur les formes intérieures de $GL_{2n}(F)$

Dans cette section, nous élargissons le cadre de notre étude en remplaçant le groupe $GL_{2n}(F)$ par une forme intérieure et l'involution σ par une involution plus générale. Ce nouveau cadre est fixé au paragraphe 5.1.

5.1. Soit A une F -algèbre centrale simple de degré réduit $2n$. Fixons un A -module à gauche simple V , et notons D la F -algèbre opposée à $\text{End}_A(V)$. C'est une F -algèbre à division centrale, V est un D -espace vectoriel à droite et A s'identifie naturellement à la F -algèbre $\text{End}_D(V)$. Notons r la dimension de V sur D et d le degré réduit de D sur F , de sorte que $2n = rd$.

Posons $G = A^\times$, fixons un $\alpha \in F^\times$ et fixons un $\kappa \in G$ non central tel que $\kappa^2 = \alpha$. Ceci définit une involution $\tau : g \mapsto \kappa g \kappa^{-1}$ du groupe G . Remplacer κ par $x \kappa x^{-1}$ pour un $x \in G$ a pour effet de changer τ en l'involution conjuguée :

$$x \cdot \tau = \text{Ad}(x) \circ \tau \circ \text{Ad}(x)^{-1}$$

et on a $G^{x \cdot \tau} = x G^\tau x^{-1}$. Par ailleurs, remplacer κ par $\lambda \kappa$ pour un $\lambda \in F^\times$ a pour effet de changer α en $\alpha \lambda^2$ sans changer τ . On peut donc considérer α modulo le sous-groupe $F^{\times 2}$.

Lemme 5.1. — Soit $\mathcal{O}(\alpha)$ l'ensemble des éléments $\kappa \in G$ non centraux tels que $\kappa^2 = \alpha$.

- (1) Si α n'est pas un carré de F^\times , alors $\mathcal{O}(\alpha)$ est formé d'une seule classe de G -conjugaison.
- (2) S'il existe un $\lambda \in F^\times$ tel que $\alpha = \lambda^2$, alors pour tout entier $i \in \{1, \dots, r-1\}$, il existe une unique classe de G -conjugaison dans $\mathcal{O}(\alpha)$ dont le polynôme caractéristique réduit sur F soit égal à $(X + \lambda)^{di} (X - \lambda)^{d(r-i)}$.

Démonstration. — L'assertion (1) est une conséquence du théorème de Skolem-Noether. S'il y a un $\lambda \in F^\times$ tel que $\alpha = \lambda^2$, on se ramène au cas où $\alpha = 1$ en appliquant $\kappa \mapsto \kappa \lambda^{-1}$. Supposons donc que $\alpha = 1$, et soit $\kappa \in G$ tel que $\kappa^2 = 1$. Considéré comme un F -endomorphisme de V , il définit une décomposition $V = \text{Ker}(\kappa - \text{id}) \oplus \text{Ker}(\kappa + \text{id})$ en sous- F -espaces propres. Comme κ est D -linéaire, ces F -espaces propres sont des D -espaces vectoriels. Le polynôme caractéristique réduit de κ sur F est donc de la forme :

$$(5.1) \quad \text{Pcrd}_{A/F}(\kappa) = (X + 1)^{di} (X - 1)^{d(r-i)} \in F[X]$$

pour un unique $i \in \{0, \dots, r\}$, les éléments centraux correspondant à $i = 0$ et $i = r$. Ceci prouve l'assertion (2). \square

Remarque 5.2. — On observera en particulier que, si A est une algèbre à division, c'est-à-dire si $r = 1$, les seuls $\sigma \in G$ tels que $\sigma^2 = 1$ sont 1 et -1 , c'est-à-dire que $\mathcal{O}(1)$ est vide.

Par la suite, nous adopterons la convention suivante.

Convention 5.3. — Nous considérerons uniquement les cas suivants :

- (1) ou bien $\alpha \notin F^{\times 2}$,
- (2) ou bien $\alpha = 1$, r est pair et $\text{Pcrd}_{A/F}(\kappa) = (X^2 - 1)^n$.

Dans tous les cas, le polynôme caractéristique réduit de κ sur F est donc égal à $(X^2 - \alpha)^n$.

Remarque 5.4. — En d'autres termes, si α est un carré de F^\times , nous ne traitons pas le cas où $\text{Pcrd}_{A/F}(\kappa)$ est de la forme (5.1) avec $i \neq r - i$. Les méthodes employées dans cet article peuvent en principe être adaptées à ce cas ; cependant, si $i \neq r - i$, on s'attend à ce qu'aucune représentation cuspidale de G ne soit distinguée par $\text{GL}_i(D) \times \text{GL}_{r-i}(D)$. Voir [57, Theorem 3.1] si D est égal à F .

5.2. Comme au paragraphe précédent, on fixe un $\alpha \in F^\times$ et un $\kappa \in G$ non central tel que $\kappa^2 = \alpha$, définissant une involution τ . La définition suivante généralise naturellement la définition 4.3.

Définition 5.5. — (1) Un caractère simple θ dans G est τ -autodual si $\theta \circ \tau = \theta^{-1}$.
 (2) Un type $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ dans G est τ -autodual si \mathbf{J} est stable par τ et $\boldsymbol{\lambda}^\tau$ est isomorphe à $\boldsymbol{\lambda}^\vee$.
 (3) Une strate simple $[\mathfrak{a}, \beta]$ dans A est τ -autoduale si \mathfrak{a} est stable par τ et $\tau(\beta) = -\beta$.

Contrairement à ce que nous avons vu au paragraphe 4.2, nous allons voir qu'il n'y a pas toujours, étant donné une endo-classe autoduale non nulle Θ , de caractère simple maximal τ -autodual d'endo-classe Θ dans G .

Lemme 5.6. — Soit θ un caractère simple maximal τ -autodual dans G .

- (1) Il y a une strate simple maximale τ -autoduale $[\mathfrak{a}, \beta]$ dans A telle que $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$.
- (2) Soit $[\mathfrak{a}, \beta]$ une strate simple τ -autoduale dans A , et posons $E = F[\beta]$ et $E_0 = F[\beta^2]$.
 - (a) L'involution τ induit sur E l'automorphisme non trivial de E/E_0 .
 - (b) Cette involution s'étend en une E_0 -involution du centralisateur B de E dans A .
 - (c) L'intersection $\mathfrak{a} \cap B$ est un ordre maximal de B stable par τ .

Démonstration. — Soit θ un caractère simple maximal dans G , et soit $[\mathfrak{a}, \gamma]$ une strate simple dans A telle que $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \gamma)$. Alors $[\mathfrak{a}^\kappa, -\gamma^\kappa]$ est une strate simple de A , et $\theta^{-1} \circ \tau$ est un caractère simple dans $\mathcal{C}(\mathfrak{a}^\kappa, -\gamma^\kappa)$. Supposons maintenant que θ soit τ -autodual. Alors la proposition 3.6 implique que \mathfrak{a} est stable par τ . Puis, adaptant [76, Proposition 1.10, Theorem 6.3] au cas de l'involution τ , on en déduit qu'il y a un $\beta \in A$ tel que $[\mathfrak{a}, \beta]$ soit une strate simple τ -autoduale dans A et $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$. (Voir [75, §4.2] pour l'adaptation de [76] à un autre type d'involution de G .) L'assertion (2) est immédiate. \square

Nous verrons que ces conditions imposent des contraintes à Θ vis-à-vis de A et de α . Le résultat principal de cette section, le théorème 5.22, donne une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un caractère simple maximal τ -autodual dans une représentation cuspidale autoduale de G de niveau non nul. Le cas des représentations de niveau 0 sera traité à la section 7.

5.3. Les notations du paragraphe 5.1 sont en vigueur. Soit E_0 une extension finie de F de degré divisant n , et soit E une extension quadratique de E_0 .

Lemme 5.7. — Supposons que $r = 2k$ pour un entier $k \geq 1$. Fixons un élément $\sigma \in G$ tel que $\sigma^2 = 1$, de polynôme caractéristique réduit $(X^2 - 1)^n$. Il existe un plongement de F -algèbres de E dans A tel que la conjugaison par σ induise sur E l'automorphisme non trivial de E/E_0 .

Démonstration. — Fixons un générateur β de E sur E_0 tel que $\beta^2 \in E_0$, et identifions A à la F -algèbre $\mathbf{M}_r(D)$ de façon que :

$$\sigma = \begin{pmatrix} -\text{id} & 0 \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_k(D) \times \mathbf{M}_k(D) \subseteq A$$

où id est l'identité de $\mathbf{M}_k(D)$. La F -algèbre A^σ s'identifie donc à $\mathbf{M}_k(D) \times \mathbf{M}_k(D)$ dans laquelle il suffit de plonger E_0 diagonalement, ce qui est possible car $[E_0 : F]$ divise $kd = n$. Il suffit alors

de plonger E de façon que l'image de β soit de la forme :

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

pour un $\gamma \in E_0^\times$. □

5.4. Nous traitons maintenant le cas plus difficile où α n'est pas un carré de F^\times , en commençant par le cas particulier où $E_0 = F$.

Lemme 5.8. — *Supposons que α ne soit pas un carré de F^\times et que $E_0 = F$. Pour qu'il existe un plongement de F -algèbres de E dans A tel que la conjugaison par κ induise sur E l'automorphisme non trivial de E/F , il faut et suffit que :*

$$\omega_{E/F}(\alpha)^n = (-1)^r$$

où $\omega_{E/F}$ est le caractère de F^\times de noyau $N_{E/F}(E^\times)$.

Démonstration. — Fixons un élément $\beta \in E^\times$ tel que $E = F[\beta]$ et $\gamma = \beta^2 \in F^\times$. Notons H la F -algèbre de dimension 4 de base $(1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ avec les relations :

$$\mathbf{i}^2 = \alpha, \quad \mathbf{j}^2 = \gamma, \quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}.$$

C'est une F -algèbre centrale simple de degré réduit 2. Notons $(\alpha, \gamma)_F$ le symbole de Hilbert de α et γ sur F . On a $(\alpha, \gamma)_F = \omega_{E/F}(\alpha)$. La F -algèbre H est :

- (a) déployée si $(\alpha, \gamma)_F = 1$, c'est-à-dire si $\alpha \in N_{E/F}(E^\times)$,
- (b) une algèbre à division si $(\alpha, \gamma)_F = -1$, c'est-à-dire si $\alpha \notin N_{E/F}(E^\times)$.

Pour qu'il existe un plongement de F -algèbres de E dans A vérifiant la condition demandée, il faut et suffit qu'il existe un plongement de F -algèbres $\phi : H \rightarrow A$ tel que $\phi(\mathbf{i}) = \kappa$ et $\phi(\mathbf{j}) = \beta$. Comme α n'est pas un carré dans F^\times , le théorème de Skolem-Noether assure que deux éléments de A de carré égal à α sont conjugués sous G . Nous aurons donc résolu notre problème une fois déterminées les conditions auxquelles il existe un plongement de F -algèbres de H dans A .

Lemme 5.9. — *Soit un entier $k \geq 1$. Pour qu'il y ait un plongement de $\mathbf{M}_k(F)$ dans A , il faut et suffit que k divise r .*

Démonstration. — C'est certainement une condition suffisante. Supposons que $\mathbf{M}_k(F)$ se plonge dans A . Son centralisateur C étant de même classe de Brauer que A , il est isomorphe à $\mathbf{M}_s(D)$ pour un certain $s \geq 1$, et son degré réduit $N = sd$ vérifie $kN = rd$, donc k divise r . □

Par conséquent, si H est déployée, c'est-à-dire si $\alpha \in N_{E/F}(E^\times)$, il y a un plongement de H dans A si et seulement si r est pair.

Lemme 5.10. — *Pour qu'il existe un plongement de H dans A , il faut et suffit qu'il existe un plongement de $\mathbf{M}_4(F)$ dans $A \otimes_F H$.*

Démonstration. — C'est une condition nécessaire car $H \otimes_F H \simeq \mathbf{M}_4(F)$. Supposons que $\mathbf{M}_4(F)$ se plonge dans $A \otimes_F H$. Tensorisant par H , il s'ensuit que $\mathbf{M}_4(H)$ se plonge dans $\mathbf{M}_4(A)$. Soit C son centralisateur. On a un isomorphisme de F -algèbres $\mathbf{M}_4(A) \simeq \mathbf{M}_4(H) \otimes_F C$. Considérons maintenant $H \otimes_F C$. C'est une F -algèbre centrale simple de même dimension et de même classe de Brauer que A , de sorte qu'elle lui est isomorphe. La F -algèbre H se plonge donc dans A . \square

Supposons maintenant que H soit une algèbre à division. Il s'agit de prouver que H se plonge dans A si et seulement si r et n ont même parité. Soit $h/d \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ l'invariant de Hasse de D , où h est un entier premier à d . Alors $A \otimes_F H$ est isomorphe à $\mathbf{M}_v(U)$, où $v \geq 1$ est un entier, U une F -algèbre à division centrale de degré réduit u et d'invariant de Hasse k/u donnés par :

$$\frac{k}{u} = \frac{h}{d} + \frac{1}{2} = \frac{2h+d}{2d}, \quad u = \frac{2d}{(2d, 2h+d)}, \quad uv = 2rd.$$

Selon le lemme 5.9, l'algèbre $\mathbf{M}_4(F)$ se plonge dedans si et seulement si $v = r(2d, 2h+d)$ est divisible par 4. C'est le cas si et seulement si 4 divise r , ou r et d sont pairs, ou d est divisible par 2 mais pas par 4, c'est-à-dire si et seulement si r et $n = rd/2$ ont même parité. \square

Remarque 5.11. — S'il y a un plongement de F -algèbres ι de E dans A satisfaisant aux conditions du lemme 5.8, le centralisateur de κ et ιE dans A est une F -algèbre centrale simple de même classe de Brauer que $A \otimes_F H$, isomorphe à $\mathbf{M}_w(U)$ avec :

$$u = \begin{cases} d & \text{si } \alpha \in N_{E/F}(E^\times) \text{ ou si } 4 \text{ divise } d, \\ 2d & \text{si } \alpha \notin N_{E/F}(E^\times) \text{ et } d \text{ est impair,} \\ d/2 & \text{si } \alpha \notin N_{E/F}(E^\times) \text{ et } d \text{ est divisible par 2 mais pas par 4,} \end{cases}$$

et $v = 4w$.

5.5. Nous traitons maintenant le cas général.

Proposition 5.12. — *Pour qu'il existe un plongement de F -algèbres de E dans A tel que τ induise sur E l'automorphisme non trivial de E/E_0 , il faut et suffit que :*

$$(5.2) \quad \omega_{E/E_0}(\alpha)^{2n/[E:F]} = (-1)^r.$$

Démonstration. — Le cas où α est un carré dans F^\times découle du lemme 5.7 (car r est pair dans ce cas d'après la convention 5.3). Traitons maintenant le cas où α n'est pas un carré dans F^\times . Il faut d'abord plonger E_0 dans le centralisateur de κ dans A . La F -algèbre $K = F[\kappa]$ est une extension quadratique ; son centralisateur dans A est donc une K -algèbre centrale simple S de degré réduit n . Y plonger E_0 équivaut à fixer un morphisme de K -algèbres de $K \otimes_F E_0$ dans S . Soit E_1 un facteur direct de $K \otimes_F E_0$. C'est une extension de K de degré égal soit à $[E_0 : F]$, soit à $[E_0 : F]/2$. Dans les deux cas, on peut la plonger dans S car $[E_0 : F]$ divise n . Ceci étant fait, il reste à plonger E comme E_0 -algèbre dans le centralisateur A_0 de E_0 dans A , qui est une E_0 -algèbre centrale simple contenant κ , de degré réduit $2n/[E_0 : F]$. Pour cela, on applique le lemme 5.8 en remplaçant F , A par E_0 , A_0 , le rôle de r étant joué par $t = 2n/\text{ppcm}(d, [E_0 : F])$. On obtient donc la condition :

$$\omega_{E/E_0}(\alpha)^{2n/[E:F]} = (-1)^t.$$

Il ne reste plus qu'à observer que t est pair si et seulement si $\text{ppcm}(d, [E_0 : F])$ divise n , c'est-à-dire si et seulement si d divise $n = rd/2$, c'est-à-dire si et seulement si r est pair. \square

Remarque 5.13. — (1) Selon la remarque 5.11, si l'on pose $g = [E_0 : F]$ et s'il y a un plongement de F -algèbres ι de E dans A satisfaisant aux conditions de la proposition 5.12, le centralisateur B_0 de κ et ιE dans A est isomorphe à une algèbre de matrices à coefficients dans une E_0 -algèbre à division centrale C_0 dont le degré réduit est égal à :

$$c_0 = \begin{cases} d/(d, g) & \text{si } \alpha \in N_{E/E_0}(E^\times) \text{ ou si } 4 \text{ divise } d/(d, g), \\ 2d/(d, g) & \text{si } \alpha \notin N_{E/E_0}(E^\times) \text{ et } d/(d, g) \text{ est impair,} \\ d/2(d, g) & \text{si } \alpha \notin N_{E/E_0}(E^\times) \text{ et } d/(d, g) \text{ est divisible par } 2 \text{ mais pas par } 4. \end{cases}$$

Cette formule est aussi valable dans le cas où α est un carré dans F^\times .

(2) Observons que $2n/[E : F] = mc$, et que m et c sont liés à r et d par les formules (3.2). Si l'on pose $k = r/m$, la formule (5.2) prend la forme plus symétrique :

$$\omega_{E/E_0}(\alpha)^{mc} = (-1)^{mk}$$

où c et k sont premiers entre eux.

5.6. Dans les paragraphes 5.6 et 5.7, E est une extension finie de F et B est une E -algèbre centrale simple munie d'une F -involution $*$. Le centre E de B est stable par $*$. Notons E_0 le sous-corps des éléments de E invariants par $*$. On suppose que E/E_0 est quadratique, c'est-à-dire que $*$ n'est pas triviale sur E .

Lemme 5.14. — *La sous-algèbre B_0 des éléments de B invariants par $*$ est une E_0 -algèbre centrale simple, et le morphisme naturel de E -algèbres de $B_0 \otimes_{E_0} E$ dans B est un isomorphisme.*

Démonstration. — D'après [37, Lemma 2.2.2], il suffit de prouver que $B_0 \otimes_{E_0} E$ est isomorphe à B . Fixons un $\beta \in E$ tel que $\beta \notin E_0$ et $\beta^2 \in E_0$. Tout $x \in B$ s'écrit $x' + \beta x''$ avec :

$$x' = \frac{x + x^*}{2} \in B_0, \quad x'' = \frac{x - x^*}{2\beta} \in B_0.$$

Le morphisme naturel de E -algèbres de $B_0 \otimes_{E_0} E$ dans B est donc surjectif. Ces deux E -algèbres ayant la même dimension, c'est un isomorphisme. \square

De par l'isomorphisme naturel entre $B_0 \otimes_{E_0} E$ et B , l'action de $*$ sur B s'identifie à l'action du générateur de $\text{Gal}(E/E_0)$ sur $B_0 \otimes_{E_0} E$. Par abus de notation, nous noterons $*$ le générateur de $\text{Gal}(E/E_0)$.

Prouvons d'abord le résultat suivant, qui sera utile au paragraphe 6.3. Notons $\text{Nrd}_{B/E}$ la norme réduite de B sur E .

Lemme 5.15. — *Pour tout $x \in B$, on a $\text{Nrd}_{B/E}(x^*) = \text{Nrd}_{B/E}(x)^*$.*

Démonstration. — Si $P \in E[X]$, on notera P^* le polynôme obtenu en appliquant $*$ à tous ses coefficients. Nous allons prouver l'égalité $\text{Pcrd}_{B/E}(x^*) = \text{Pcrd}_{B/E}(x)^*$ entre polynômes caractéristique réduits, dont nous déduirons l'égalité voulue en comparant les termes constants.

Selon [11, 17.2 Proposition 2], il suffit de prouver que x et x^* , considérés comme endomorphismes (par multiplication à gauche) de B considéré comme E -espace vectoriel, ont des polynômes caractéristiques conjugués l'un de l'autre par $*$. Il suffit pour cela de montrer que, pour tout endomorphisme $u \in \text{End}_E(B)$, les polynômes caractéristiques de u et de $u^* : x \mapsto u(x^*)^*$ sont conjugués l'un de l'autre par $*$. Pour le prouver, fixons une base de B sur E qui soit une base de B_0 sur E_0 . On voit alors que, pour $\lambda \in E$, la matrice de $\lambda \cdot \text{id}_B - u^*$ est conjuguée par $*$ à celle de $\lambda^* \cdot \text{id}_B - u$, ce qui donne le résultat voulu. \square

Fixons maintenant une E_0 -algèbre à division centrale C_0 et un entier m_0 tels que :

$$B_0 \simeq \mathbf{M}_{m_0}(C_0).$$

On en déduit un isomorphisme de E -algèbres $B \simeq \mathbf{M}_{m_0}(C_0 \otimes_{E_0} E)$ à travers lequel l'action de $*$ sur B dérive naturellement de celle de $*$ sur $C_0 \otimes_{E_0} E$. Notons c_0 le degré réduit de C_0 sur E_0 . Le lemme suivant sera essentiel dans la preuve du théorème 5.22.

Lemme 5.16. — *Pour qu'il existe un ordre maximal stable par $*$ dans B , il faut et suffit que c_0 soit impair, ou que c_0 soit pair et que E soit ramifié sur E_0 .*

Démonstration. — Pour prouver le lemme, nous allons décrire la E -algèbre $C_0 \otimes_{E_0} E$ munie de l'involution $*$, selon la parité de c_0 .

Si c_0 est impair, alors $C = C_0 \otimes_{E_0} E$ est une E -algèbre à division centrale de degré réduit c_0 . Elle a un unique ordre maximal \mathcal{O}_C , qui est donc stable par $*$. On en déduit que $\mathbf{M}_{m_0}(\mathcal{O}_C)$ est un ordre maximal de $B \simeq \mathbf{M}_{m_0}(C)$ stable par $*$.

On suppose maintenant que c_0 est pair. Dans ce cas, $C_0 \otimes_{E_0} E$ est isomorphe à l'algèbre des matrices de taille 2 à coefficients dans une E -algèbre à division centrale C de degré réduit c égal à $c_0/2$. Précisons cette description. Fixons pour cela une uniformisante ϖ_{E_0} de E_0 , ainsi qu'une extension non ramifiée L_0 de E_0 dans C_0 de degré c_0 et une uniformisante ϖ_0 de C_0 normalisant L_0 telle que $\varpi_0^{c_0}$ soit égale à ϖ_{E_0} (voir [49, §9.13]). Ainsi ϖ_0 définit, par conjugaison sur L_0 , un générateur de $\text{Gal}(L_0/E_0)$.

Si E/E_0 est non ramifiée, on plonge E dans L_0 et on note C le commutant de E dans C_0 . On observera que ϖ_0^2 agit trivialement par conjugaison sur E et est une uniformisante de C .

Si E/E_0 est ramifiée, il y a un choix de ϖ_{E_0} tel que E soit engendrée sur E_0 par une racine carrée de ϖ_{E_0} . On peut donc identifier E à l'extension de E_0 dans C_0 engendrée par ϖ_0^c , dont le carré est ϖ_{E_0} . À travers cette identification, $\varpi_E = \varpi_0^c$ est une uniformisante de E . On note C le commutant de E dans C_0 , et on fixe une racine de l'unité $\xi \in L_0$ d'ordre premier à p telle que $\varpi_E \xi = -\xi \varpi_E$. On observera que ϖ_0 appartient à C et en est une uniformisante.

Posons $\Omega = \varpi_0$ si E/E_0 est non ramifiée, et $\Omega = \xi$ si E/E_0 est ramifiée. Dans tous les cas, Ω définit, par conjugaison sur E , le générateur de $\text{Gal}(E/E_0)$, il normalise C et on a $\Omega^2 \in C$.

Considérons maintenant C_0 comme le C -espace vectoriel à droite $C + \Omega C$. L'application :

$$(5.3) \quad x + \Omega y \mapsto \begin{pmatrix} x & \Omega y \Omega \\ y & \Omega^{-1} x \Omega \end{pmatrix}, \quad x, y \in C,$$

est un plongement de E_0 -algèbres de C_0 dans $\mathbf{M}_2(C)$, induisant un isomorphisme de E -algèbres, noté ι , entre $C_0 \otimes_{E_0} E$ et $\mathbf{M}_2(C)$. On en déduit un isomorphisme entre B et la E -algèbre $\mathbf{M}_m(C)$

pour $m = 2m_0$. Prouvons que l'action de $*$ sur $C_0 \otimes_{E_0} E$ se transporte à $\mathbf{M}_2(C)$ en l'involution :

$$(5.4) \quad \begin{pmatrix} x & z \\ y & u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \Omega u \Omega^{-1} & \Omega y \Omega \\ \Omega^{-1} z \Omega^{-1} & \Omega^{-1} x \Omega \end{pmatrix} \quad x, y, z, u \in C.$$

Pour cela, on fixe, comme dans la preuve du lemme 5.14, un $\beta \in E$ tel que $\beta \notin E_0$ et $\beta^2 \in E_0$ et, pour tout $g \in \mathbf{M}_2(C)$ qu'on écrit sous la forme du membre de gauche de (5.4), on vérifie par un calcul explicite à partir de (5.3) que l'antécédent de g dans $C_0 \otimes_{E_0} E$ est l'élément :

$$(x + \Omega u \Omega^{-1} + \Omega y + z \Omega^{-1}) \otimes \frac{1}{2} + (x - \Omega u \Omega^{-1} + \Omega y - z \Omega^{-1}) \beta^{-1} \otimes \frac{\beta}{2}$$

dont le conjugué par $*$ est égal à :

$$(\Omega u \Omega^{-1} + x + z \Omega^{-1} + \Omega y) \otimes \frac{1}{2} + (\Omega u \Omega^{-1} - x + z \Omega^{-1} - \Omega y) \beta^{-1} \otimes \frac{\beta}{2}$$

car β^* est égal à $-\beta$.

Prouvons maintenant le lemme dans le cas où c_0 est pair. Si E/E_0 est ramifiée, l'ordre maximal \mathfrak{c} de $C_0 \otimes_{E_0} E$ correspondant à $\mathbf{M}_2(\mathcal{O}_C)$ est stable par $\text{Gal}(E/E_0)$ car $\Omega = \xi$ normalise \mathcal{O}_C . On en déduit que $\mathbf{M}_{m_0}(\mathfrak{c})$ est un ordre maximal de $B \simeq \mathbf{M}_{m_0}(C_0 \otimes_{E_0} E) \simeq \mathbf{M}_m(C)$ stable par $*$. Supposons maintenant que E/E_0 soit non ramifiée et qu'il y ait dans B un ordre maximal \mathfrak{b} stable par $*$. Dans ce cas, Ω est une uniformisante de C_0 normalisant C et, selon [15, Lemme 4.4], l'application $\mathfrak{b}_0 \mapsto \mathfrak{b}_0 \otimes \mathcal{O}_E$ est une bijection entre ordres de B_0 et ordres de B stables par $*$, le produit tensoriel étant pris sur \mathcal{O}_{E_0} . Il existe donc un unique ordre \mathfrak{b}_0 de B_0 correspondant à \mathfrak{b} par cette bijection, et \mathfrak{b}_0 est un ordre maximal de B_0 . Comme l'action de B_0^\times par conjugaison sur B commute à $*$, on peut même supposer, quitte à conjuguer \mathfrak{b} , que \mathfrak{b}_0 est égal à $\mathbf{M}_{m_0}(\mathcal{O}_{C_0})$. Par conséquent, $\mathcal{O}_{C_0} \otimes \mathcal{O}_E$ est maximal dans $C_0 \otimes_{E_0} E$ et stable par $*$. Mais (toujours d'après [15, Lemme 4.4]) $C_0 \otimes_{E_0} E$ admet un unique ordre stable par $\text{Gal}(E/E_0)$. Appliquant la formule (5.4), et compte tenu de ce que \mathcal{O}_C et \mathfrak{p}_C sont stables par conjugaison par Ω et Ω^2 est une uniformisante de C , on vérifie que l'ordre :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{O}_C & \mathfrak{p}_C \\ \mathcal{O}_C & \mathcal{O}_C \end{pmatrix}$$

est stable par $\text{Gal}(E/E_0)$. Celui-ci est minimal et non pas maximal, ce qui nous donne la contradiction voulue. \square

5.7. Nous sommes toujours dans la situation du paragraphe 5.6. Supposons en outre que B admette un ordre maximal stable par $*$. Définissons c_0 comme au paragraphe 5.6. D'après le lemme 5.16, l'extension E/E_0 est ramifiée si c_0 est pair.

Lemme 5.17. — *Soient C une E -algèbre à division réduite et m un entier tel que B soit isomorphe à $\mathbf{M}_m(C)$. Notons \mathfrak{l} le corps résiduel de C et c son degré réduit sur E .*

(1) *Il existe un ordre maximal \mathfrak{b} stable par $*$ et un isomorphisme de E -algèbres $B \simeq \mathbf{M}_m(C)$ tels que l'image de \mathfrak{b} soit égale à l'ordre maximal standard $\mathbf{M}_m(\mathcal{O}_C)$ et l'action induite par $*$ sur le groupe $\mathfrak{b}^\times / \mathbf{U}^1(\mathfrak{b}) \simeq \text{GL}_m(\mathfrak{l})$ soit :*

(a) *l'action de l'automorphisme d'ordre 2 de \mathfrak{l} si E/E_0 est non ramifiée,*

(b) l'action par conjugaison d'un $v \in GL_m(\mathbf{l})$ tel que $v^2 \in \mathbf{l}^\times$ et $v^2 \notin \mathbf{l}^{\times 2}$ si E/E_0 est ramifiée et c_0 est pair,

(c) triviale si E/E_0 est ramifiée et c_0 est impair.

(2) Le normalisateur de \mathfrak{b} dans $B^\times \simeq GL_m(C)$ est engendré par \mathfrak{b}^\times et une uniformisante ϖ de C telle que ϖ^c soit une uniformisante de E et :

$$\varpi^* = \begin{cases} -\varpi & \text{si } E/E_0 \text{ est ramifiée et } c_0 \text{ est impair,} \\ \varpi & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. — Comme au paragraphe précédent, on identifie B à $\mathbf{M}_{m_0}(C_0 \otimes_{E_0} E)$. Il suffit de prouver le lemme lorsque $m_0 = 1$, ce que l'on suppose par la suite. On a donc $B = C_0 \otimes_{E_0} E$.

Si c_0 est impair, alors $m = 1$ et $c = c_0$, et B est isomorphe à C . L'unique ordre maximal de B a les propriétés requises en (1). En outre, lorsque E/E_0 est non ramifiée, on choisit pour ϖ une uniformisante ϖ_0 de C_0 telle que $\varpi_0^{c_0}$ soit une uniformisante de E_0 et, lorsque E/E_0 est ramifiée, on choisit une uniformisante ϖ_0 de C_0 et une uniformisante ϖ_E de E telles que $\varpi_0^{c_0} = \varpi_E^2$ soit une uniformisante de E_0 , et on pose $\varpi = \varpi_E \varpi_0^{(1-c_0)/2}$, qui vérifie $\varpi^2 = \varpi_0$. Dans les deux cas, un tel ϖ vérifie les conditions de (2).

Si c_0 est pair, auquel cas E/E_0 est ramifiée, alors $m = 2$ et $c_0 = 2c$, et on fixe comme au paragraphe 5.6 un isomorphisme entre B et la E -algèbre $\mathbf{M}_2(C)$, sur laquelle $*$ agit par (5.4) avec $\Omega = \xi \in L_0$ et $\Omega^2 \in L_1 = L_0 \cap C$. On identifie, grâce à l'inclusion de L_0 dans C_0 , le corps résiduel de L_0 au corps résiduel \mathbf{l}_0 de C_0 . De même, on identifie le corps résiduel de L_1 à \mathbf{l} . Aussi \mathbf{l}_0 est-il une extension quadratique de \mathbf{l} . L'automorphisme de \mathbf{l} induit par conjugaison par Ω , qui appartient à L_0 , est donc trivial. On en déduit que l'action induite par $*$ sur $\mathfrak{b}/\mathfrak{p}_\mathfrak{b} \simeq \mathbf{M}_2(\mathbf{l})$ est \mathbf{l} -linéaire. D'après le théorème de Skolem-Noether, c'est donc l'action par conjugaison d'un élément $v \in GL_2(\mathbf{l})$ tel que $v^2 \in \mathbf{l}^\times$. Mais, selon (5.4), les points fixes de $*$ dans $\mathbf{M}_2(\mathbf{l})$ sont les :

$$(5.5) \quad \begin{pmatrix} x & \varepsilon y \\ y & x \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbf{l},$$

où ε désigne l'image de Ω^2 dans \mathbf{l} . Montrons que ε est un générateur de \mathbf{l}^\times . En effet, si ζ est un générateur de μ_{L_0} , le fait que $\varpi_E \xi = -\xi \varpi_E$ entraîne que $\xi \in \zeta^{(Q+1)/2} \mu_{L_1}$, où Q est le cardinal de \mathbf{l} , donc que ε appartient à $N_{L_0/L}(\zeta) \mathbf{l}^{\times 2}$. On en déduit que les points $*$ -fixes (5.5) forment une extension quadratique de \mathbf{l} , donc que $v^2 \notin \mathbf{l}^{\times 2}$. On a donc (1) et, pour obtenir (2), on choisit pour ϖ une uniformisante de C_0 telle que ϖ_0^c soit une uniformisante de E . \square

5.8. Nous allons reprendre la discussion du paragraphe 5.2 à la lumière du travail effectué dans les paragraphes précédent. Commençons par généraliser les résultats du paragraphe 4.3.

Lemme 5.18. — Soit Θ une endoclasse autoduale non nulle de degré divisant $2n$. Soit θ un caractère simple maximal de G d'endo-classe Θ , et soit $u \in G$ tel que $\theta^u = \theta^{-1}$. Supposons qu'il existe une strate simple maximale $[\mathfrak{a}, \beta]$ de A telle que $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ et $\beta^u = -\beta$. Posons $E = F[\beta]$ et $E_0 = F[\beta^2]$, notons T la sous-extension modérément ramifiée maximale de E sur F et posons $T_0 = T \cap E_0$. Alors la classe de F -isomorphisme de T/T_0 dépend uniquement de Θ .

Démonstration. — En d'autres termes, nous allons prouver que la classe de F -isomorphisme de T/T_0 ne dépend du choix ni de G , ni de θ , ni de $[\mathfrak{a}, \beta]$, ni de u . Posons :

$$\sigma = \begin{pmatrix} -\text{id} & 0 \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(F) \times \mathbf{M}_n(F) \subseteq \mathbf{M}_{2n}(F)$$

où id est l'identité de $\mathbf{M}_n(F)$. Soit $[\mathfrak{a}_1, \gamma]$ une strate simple maximale σ -autoduale de $\mathbf{M}_{2n}(F)$ telle que $\mathcal{C}(\mathfrak{a}_1, \gamma)$ contienne un caractère simple σ -autodual θ_1 d'endo-classe Θ , dont l'existence est assurée par la proposition 4.4. Posons $P = F[\gamma]$ et $P_0 = F[\gamma^2]$. Notons L la sous-extension modérément ramifiée maximale de P sur F , et posons $L_0 = L \cap P_0$. D'après la remarque 4.8, la classe de F -isomorphisme de L/L_0 dépend uniquement de Θ . Nous allons prouver que L/L_0 et T/T_0 sont F -isomorphes.

D'après le lemme 5.7, on peut plonger E dans $\mathbf{M}_{2n}(F)$ de façon que la conjugaison par σ induise l'automorphisme non trivial de E/E_0 . Le centralisateur B' de E dans $\mathbf{M}_{2n}(F)$ est une E -algèbre centrale simple munie d'une F -involution σ , entrant dans le cadre du paragraphe 5.6. La E_0 -algèbre B'^σ est isomorphe à une algèbre de matrices à coefficients dans E_0 . Selon le lemme 5.16, il y a donc dans B' un ordre maximal \mathfrak{b}' stable par σ . Notons \mathfrak{a}' l'unique ordre normalisé par E^\times tel que $\mathfrak{a}' \cap B' = \mathfrak{b}'$. Par unicité, il est stable par σ , donc $[\mathfrak{a}', \beta]$ est une strate simple maximale σ -autoduale de $\mathbf{M}_{2n}(F)$. D'après le lemme 3.27, le transfert $\theta' \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}', \beta)$ de θ est un caractère simple maximal σ -autodual d'endo-classe Θ . D'après la remarque 4.8, les extensions L/L_0 et T/T_0 sont F -isomorphes. \square

Le degré paramétrique d'une représentation cuspidale de G est défini par (3.8).

Lemme 5.19. — *Soit Θ une endo-classe autoduale de degré divisant $2n$ et soit un entier $N \geq 1$ divisant $2n/\deg(\Theta)$. On pose :*

$$(5.6) \quad c = \frac{d}{(d, \deg(\Theta))}, \quad m = \frac{2n}{c \cdot \deg(\Theta)},$$

et $\delta = N \cdot \deg(\Theta)$. Si Θ est non nulle, on note T/T_0 l'extension quadratique qui lui est associée au lemme 5.18. Pour qu'il y ait une représentation cuspidale autoduale de G d'endo-classe Θ et de degré paramétrique δ , il faut et suffit :

- (1) d'une part que $m = N/(c, N)$,
- (2) d'autre part que N vérifie les conditions suivantes :
 - (a) si Θ est non nulle et T/T_0 est non ramifiée, alors N est impair,
 - (b) si Θ est non nulle et T/T_0 est ramifiée, alors N est pair ou égal à 1,
 - (c) si Θ est nulle, alors N est pair ou égal à 1.

Démonstration. — Observons tout d'abord que :

$$\frac{\delta}{(d, \delta)} = \frac{N}{(c, N)} \cdot \frac{\deg(\Theta)}{(d, \deg(\Theta))}.$$

Soit π une représentation cuspidale de G d'endo-classe Θ et de degré paramétrique δ . De (3.10) on tire :

$$\frac{N}{(c, N)} \cdot c \cdot \deg(\Theta) = rd = m \cdot c \cdot \deg(\Theta),$$

ce qui donne $m = N/(c, N)$. Comme au paragraphe 3.5, le transfert de Jacquet-Langlands de π à $GL_{2n}(F)$ est de la forme $L(\pi'_0, s)$, où s est égal à $2n/\delta$ selon (3.9) et π'_0 est une représentation cuspidale de $GL_\delta(F)$. Celle-ci est autoduale si et seulement si π l'est. On a le résultat suivant, dû à [73, 23, 72] et [31, Theorem 4.8].

Théorème 5.20. — *Les représentations π et π'_0 ont la même endo-classe.*

Supposons maintenant que π soit autoduale. Alors π'_0 est elle-même autoduale, et la condition (2) sur N est une conséquence des lemmes 4.9 et 4.10 appliqués à π'_0 .

Inversement, supposons vérifiées les conditions du lemme. En vertu des lemmes 4.9, 4.10, il y a une représentation cuspidale autoduale π'_0 de $GL_\delta(F)$ d'endo-classe Θ . Posons $s = d/(d, \delta)$ et formons la représentation essentiellement de carré intégrable $L(\pi'_0, s)$ de $GL_{2n}(F)$. La condition (1) sur N entraîne que $r = \delta/(d, \delta)$, qui est premier à s . D'après la remarque 3.15, le transfert de Jacquet-Langlands de $L(\pi'_0, s)$ à G est une représentation cuspidale π de degré paramétrique δ , qui est autoduale car π'_0 l'est, et son endo-classe est égale à Θ d'après le théorème 5.20. \square

Terminons par le lemme suivant, qui nous sera utile par la suite.

Lemme 5.21. — *Soit E_0 une extension finie de F de degré g divisant n , et soit E une extension quadratique de E_0 . Notons T la sous-extension modérément ramifiée maximale de E sur F et posons $T_0 = T \cap E_0$.*

(1) *L'extension E/E_0 est ramifiée si et seulement si T/T_0 est ramifiée, et on a :*

$$(5.7) \quad N_{E/E_0}(E^\times) \cap F^\times = N_{T/T_0}(T^\times) \cap F^\times,$$

$$(5.8) \quad \omega_{E/E_0}(\alpha)^{2n/[E:F]} = \omega_{T/T_0}(\alpha)^{2n/[T:F]}.$$

(2) *Supposons qu'il existe un plongement de F -algèbres de E dans A tel que τ induise sur E l'automorphisme non trivial de E/E_0 . Alors :*

(a) *le centralisateur B de E dans A est une E -algèbre centrale simple munie de la F -involution τ ,*

(b) *et $B_0 = B^\tau$ est une E_0 -algèbre centrale simple isomorphe à une algèbre de matrices à coefficients dans une E_0 -algèbre à division centrale de degré réduit égal à :*

$$(5.9) \quad c_0 = \begin{cases} d/(d, g) & \text{si } \alpha \in N_{T/T_0}(T^\times) \text{ ou si } 4 \text{ divise } d/(d, g), \\ 2d/(d, g) & \text{si } \alpha \notin N_{T/T_0}(T^\times) \text{ et } d/(d, g) \text{ est impair,} \\ d/2(d, g) & \text{si } \alpha \notin N_{T/T_0}(T^\times) \text{ et } d/(d, g) \text{ est divisible par } 2 \text{ mais pas par } 4. \end{cases}$$

Démonstration. — La première assertion provient du fait que E est totalement sauvagement ramifiée sur T et que $p \neq 2$, ce qui entraîne en particulier que $[E : T]$ est impair. Pour obtenir la seconde assertion, on applique la remarque 5.13 et (5.7). \square

5.9. Nous en arrivons au résultat principal de cette section, qui donne une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un caractère simple τ -autodual dans une représentation cuspidale autoduale de G . Nous traitons ici le cas des représentations de niveau non nul. Le cas des représentations de niveau 0 sera traité à la section 7.

On fixe dans tout le reste de cette section une endo-classe autoduale non nulle Θ de degré divisant $2n$. On note T/T_0 l'extension quadratique qui lui est associée, on définit des entiers m et c par (5.6) et un entier c_0 par (5.9) avec $g = \deg(\Theta)/2$.

Théorème 5.22. — (1) *Pour qu'il existe un caractère simple maximal τ -autodual d'endo-classe Θ dans G , il faut et suffit que :*

(a) *d'une part :*

$$(5.10) \quad \omega_{T/T_0}(\alpha)^{2n/[T:F]} = (-1)^r,$$

(b) *d'autre part que, si T/T_0 est non ramifiée, l'entier c_0 soit impair.*

(2) *Soit π une représentation cuspidale autoduale de G d'endo-classe Θ . Pour que π contienne un caractère simple τ -autodual, il faut et suffit que l'égalité (5.10) soit vérifiée.*

Démonstration. — Soit d'abord θ un caractère simple maximal τ -autodual d'endo-classe Θ de G . Soit $[\mathfrak{a}, \beta]$ une strate simple τ -autoduale de A telle que $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$, dont l'existence est assurée par le lemme 5.6. On pose $E = F[\beta]$, $E_0 = F[\beta^2]$. Le lemme 5.6(2.a) et la proposition 5.12 entraînent (5.2). On déduit du lemme 5.21(1) d'une part l'égalité (5.10), d'autre part que E/E_0 est ramifiée si et seulement si T/T_0 l'est. Soit B le centralisateur de E dans A . Appliquant le lemme 5.21(2), la E_0 -algèbre $B_0 = B^\tau$ est isomorphe à une algèbre de matrices à coefficients dans une E_0 -algèbre à division de degré réduit c_0 . Comme $\mathfrak{a} \cap B$ est un ordre maximal de B stable par τ , il suit du lemme 5.16 que, si E/E_0 (ou de façon équivalente T/T_0) est non ramifiée, c_0 est impair.

Inversement, supposons que (5.10) soit vérifiée. Soit $[\mathfrak{a}_1, \beta]$ une strate simple maximale σ -autoduale de $\mathbf{M}_{2n}(F)$ telle que $\mathcal{C}(\mathfrak{a}_1, \beta)$ contienne un caractère simple σ -autodual θ_1 d'endo-classe Θ , dont l'existence est assurée par la proposition 4.4. Posons $E = F[\beta]$ et $E_0 = F[\beta^2]$. D'après le lemme 5.18, on peut identifier T à la sous-extension modérément ramifiée maximale de E sur F et T_0 à $T \cap E_0$. Compte tenu de (5.8) et de la proposition 5.12, il existe un plongement de F -algèbres de E dans A tel que τ induise sur E l'automorphisme non trivial de E/E_0 . Fixons un tel plongement. Alors :

- d'une part, le centralisateur B de E dans A est isomorphe à une algèbre $\mathbf{M}_m(C)$ de matrices à coefficients dans une E -algèbre à division centrale C de degré réduit c ,
- et d'autre part, la E_0 -algèbre $B_0 = B^\tau$ est isomorphe à une algèbre de matrices $\mathbf{M}_{m_0}(C_0)$ à coefficients dans une E_0 -algèbre à division centrale C_0 de degré réduit c_0 .

Supposons maintenant en outre que c_0 soit impair si T/T_0 est non ramifiée. Selon le lemme 5.16, il existe dans B un ordre maximal \mathfrak{b} stable par τ . Soit \mathfrak{a} l'unique ordre de A normalisé par E^\times tel que $\mathfrak{a} \cap B = \mathfrak{b}$ (lemme 3.5). Par unicité, \mathfrak{a} est stable par τ . La strate simple maximale $[\mathfrak{a}, \beta]$ est donc τ -autoduale. Le transfert de θ_1 à $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ est τ -autodual d'après le lemme 3.27. Ceci prouve la première partie du théorème.

Prouvons la seconde partie du théorème. Soit π une représentation cuspidale autoduale de G d'endo-classe Θ . Pour prouver que π contient un caractère simple τ -autodual, il suffit, d'après le corollaire 3.23, de prouver l'existence d'un caractère simple maximal τ -autodual de G d'endo-classe Θ . D'après la première partie du théorème, il suffit donc de prouver que c_0 est impair si

T/T_0 est non ramifiée. Supposons donc que T/T_0 soit non ramifiée, et notons δ le degré paramétrique de π . D'après le lemme 5.19, l'entier $N = \delta/\deg(\Theta)$ est impair. Comme c'est un multiple de m d'après (3.8), on en déduit que m est impair. Il suit du paragraphe 5.7 que c_0 est impair (et que $c = c_0$ l'est aussi), sans quoi on aurait $c_0 = 2c$ et $m = 2m_0$. \square

On tire de cette preuve le corollaire suivant, qui précise le lemme 5.19.

Corollaire 5.23. — *Soit π une représentation cuspidale autoduale de G d'endo-classe Θ . Supposons que π contienne un caractère simple τ -autodual.*

- (1) *Si T/T_0 est non ramifiée, alors m et c sont impairs.*
- (2) *Si T/T_0 est ramifiée, alors m est pair ou égal à 1.*
- (3) *Si r est impair, alors m et c sont impairs.*

Démonstration. — Reprenons les notations de la preuve du théorème 5.22. D'après (3.8), il y a un diviseur b de c tel que $N = mb$. L'assertion (1) a déjà été prouvée à la fin de la preuve précédente. Si T/T_0 est ramifiée, le lemme 5.19 assure que N est pair ou égal à 1. Si c_0 est pair, alors $m = 2m_0$ est pair. Si c_0 est impair, alors $c = c_0$ aussi, donc b aussi, donc m est pair ou égal à 1. Enfin, si r est impair, les formules (5.10) et (5.8) impliquent que $2n/[E : F] = mc$ est impair. \square

Voici une autre conséquence, simple mais importante, du théorème 5.22. Rappelons que, si r est pair, on a fixé un $\sigma \in G$ tel que $\sigma^2 = 1$ et de polynôme caractéristique réduit $(X^2 - 1)^n$.

Corollaire 5.24. — (1) *Supposons que r soit pair. Toute représentation cuspidale autoduale de niveau non nul de G contient un caractère simple σ -autodual.*

(2) *Supposons que m soit pair. Toute représentation cuspidale autoduale de niveau non nul de G contient un caractère simple τ -autodual, quel que soit $\alpha \in F^\times$.*

Démonstration. — La première assertion est une conséquence immédiate du théorème 5.22 dans le cas où r est pair et α est un carré dans F^\times . Pour ce qui est de la seconde assertion, m divisant à la fois $2n/[T : F]$ et r (voir (3.2)), on voit que l'égalité (5.10) est vérifiée lorsque m est pair. \square

Remarque 5.25. — Voici un exemple de représentation cuspidale autoduale ne contenant pas de caractère simple τ -autodual et pour laquelle les conclusions du corollaire 5.23 ne sont pas vérifiées. Supposons que T/T_0 soit non ramifiée, choisissons un $n \geq 1$ tel que $2n/\deg(\Theta)$ soit pair et supposons que $r = 1$. D'après le lemme 5.19, il y a une représentation cuspidale autoduale π de G d'endo-classe Θ et de degré paramétrique $\deg(\Theta)$. D'après le théorème 5.22, la représentation π ne contient pas de caractère simple τ -autodual, quel que soit α . Enfin, $c = 2n/\deg(\Theta)$ est pair.

Remarque 5.26. — Voici un exemple de caractère simple τ -autodual de G qui n'est contenu dans aucune représentation cuspidale autoduale de G . Soit D une F -algèbre à division centrale de degré réduit 2 et soit $A = \mathbf{M}_2(D)$. Supposons que T/T_0 soit non ramifiée, que $\alpha \notin N_{T/T_0}(T^\times)$ et que Θ soit de degré 2, de sorte que $E = T$, $E_0 = T_0 = F$ et $m = 2$. L'identité (5.10) est vérifiée et l'entier c_0 défini par (5.9) vaut 1. D'après le théorème 5.22, il existe un caractère simple τ -autodual de G . Mais il ne peut pas exister de représentation cuspidale autoduale de G le contenant, sans quoi le corollaire 5.23 serait contredit car $m = 2$.

5.10. On suppose dans ce paragraphe qu'il y a un caractère simple maximal τ -autodual de G dont l'endo-classe Θ est celle fixée au paragraphe 5.9. Les conditions (1.a) et (1.b) du théorème 5.22 sont donc vérifiées.

Pour la définition de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathfrak{a}, \beta)$ associé à une strate simple maximale $[\mathfrak{a}, \beta]$ et du corps fini \mathfrak{l} , on renvoie au paragraphe 3.2.

Proposition 5.27. — (1) *Le nombre de classes de G^τ -conjugaison de caractères simples τ -autoduaux contenus dans la classe de G -conjugaison d'un caractère simple maximal τ -autodual de G d'endo-classe Θ est :*

- (a) *égal à 1 si T/T_0 est non ramifiée, ou si T/T_0 est ramifiée et c_0 est pair,*
- (b) *égal à $\lfloor m/2 \rfloor + 1$ sinon.*

(2) *Si θ est un caractère simple maximal τ -autodual d'endo-classe Θ et si $[\mathfrak{a}, \beta]$ est une strate simple maximale τ -autoduale telle que $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$, alors il existe un isomorphisme de F -algèbres $\phi \in \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \beta)$ identifiant $\mathbf{J}^0(\mathfrak{a}, \beta)/\mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta)$ à $\mathrm{GL}_m(\mathfrak{l})$ et l'action de τ sur ce groupe à :*

- (a) *l'action de l'automorphisme d'ordre 2 de \mathfrak{l} si T/T_0 est non ramifiée,*
- (b) *l'action par conjugaison d'un $v \in \mathrm{GL}_m(\mathfrak{l})$ tel que $v^2 \in \mathfrak{l}^\times$ et $v^2 \notin \mathfrak{l}^{\times 2}$ si T/T_0 est ramifiée et c_0 est pair,*
- (c) *l'action par conjugaison de :*

$$(5.11) \quad \sigma_i = \mathrm{diag}(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1) \in \mathrm{GL}_m(\mathfrak{l})$$

où -1 apparaît avec multiplicité i , pour un unique entier $i \in \{0, \dots, \lfloor m/2 \rfloor\}$, si T/T_0 est ramifiée et c_0 est impair.

(3) *Notant B le centralisateur de $E = F[\beta]$ dans A , le normalisateur de θ dans G est engendré par $\mathbf{J}^0(\mathfrak{a}, \beta)$ et un élément $\varpi \in B^\times$ tel que ϖ^c soit une uniformisante de E et :*

$$\tau(\varpi) = \begin{cases} -\varpi & \text{si } T/T_0 \text{ est ramifiée et } c_0 \text{ est impair,} \\ \varpi & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 5.28. — L'entier i de (2.c) est appelé l'*indice* de θ . Il ne dépend que de sa classe de G^τ -conjugaison, et est déterminé par le fait que $(\mathbf{J}^0(\mathfrak{a}, \beta)/\mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta))^\tau \simeq \mathrm{GL}_i(\mathfrak{l}) \times \mathrm{GL}_{m-i}(\mathfrak{l})$.

Démonstration. — Fixons un caractère simple τ -autodual $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ d'endo-classe Θ . D'après le lemme 5.6, on peut supposer que la strate simple $[\mathfrak{a}, \beta]$ est τ -autoduale. Posons $E = F[\beta]$ et notons B son centralisateur dans A . Munie de l'involution τ , la E -algèbre B entre dans le cadre du paragraphe 5.6 et l'ordre maximal $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap B$ est stable par τ . D'après le lemme 5.17, il y a une E -algèbre à division centrale C et un isomorphisme de F -algèbres $\phi \in \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \beta)$ induisant un isomorphisme de F -algèbres entre B et $\mathbf{M}_m(C)$ tel que l'ordre maximal \mathfrak{b}' de B correspondant à $\mathbf{M}_m(\mathcal{O}_C)$ ait les propriétés décrites dans ce lemme. Quitte à conjuguer θ par un élément de B^\times , on peut supposer que \mathfrak{b}' est égal à \mathfrak{b} . En effet, si $y \in B^\times$ est tel que $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}^y$, le fait que \mathfrak{b} et \mathfrak{b}' soient tous deux stables par τ entraîne que $\tau(y)y^{-1}$ normalise \mathfrak{b} , donc θ . Il s'ensuit que θ^y est un caractère simple maximal τ -autodual d'endo-classe Θ . Posant $\mathbf{J}^0 = \mathbf{J}^0(\mathfrak{a}, \beta)$ et $\mathbf{J}^1 = \mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta)$, le quotient $\mathbf{J}^0/\mathbf{J}^1$ s'identifie donc à $\mathrm{GL}_m(\mathfrak{l})$ muni d'une action de τ décrite par le lemme 5.17. Selon les lemmes 5.18 et 5.21, E/E_0 est ramifiée si et seulement si T/T_0 est ramifiée.

La proposition 3.20 dit qu'un caractère simple maximal d'endo-classe Θ de G est de la forme θ^y pour un $y \in G$, et un tel caractère est τ -autodual si et seulement si $w = \tau(y)y^{-1}$ appartient au normalisateur de θ dans G . Comme $\tau(w) = w^{-1}$, cela équivaut même à ce que w appartienne à \mathbf{J}^0 . Notons u l'image de w dans $\mathbf{J}^0/\mathbf{J}^1 \simeq GL_m(\mathbf{l})$.

Si c_0 est impair et si E est non ramifiée sur E_0 , l'involution τ agit sur $GL_m(\mathbf{l})$ comme l'automorphisme non trivial de \mathbf{l}/\mathbf{l}_0 . Comme $u\tau(u) = 1$, il y a un $z \in GL_m(\mathbf{l})$ tel que $u = z\tau(z)^{-1}$. Ensuite, si c_0 est pair et si E est ramifiée sur E_0 , l'involution τ agit sur $GL_m(\mathbf{l})$ par conjugaison par un élément v tel que $v^2 \in \mathbf{l}^\times$ et $v^2 \notin \mathbf{l}^{\times 2}$. Écrivons :

$$(uv)^2 = uvuv = u\tau(u)v^2 = v^2.$$

D'après le théorème de Skolem-Noether, il existe un $z \in GL_m(\mathbf{l})$ tel que $uv = zvz^{-1}$, c'est-à-dire que $u = z\tau(z)^{-1}$. Dans les deux cas, remplaçant y par zy , où j est un relèvement de $\tau(z)^{-1}$ au groupe \mathbf{J}^0 , on peut supposer que $w \in \mathbf{J}^1$. Le premier ensemble de cohomologie de $\langle \tau \rangle$ dans \mathbf{J}^1 étant trivial, il y a un $x \in \mathbf{J}^1$ tel que $w = \tau(x)x^{-1}$. On a donc $x^{-1}y \in G^\tau$. Comme \mathbf{J}^1 normalise θ , il s'ensuit que θ^y est conjugué à θ sous G^τ (par $x^{-1}y$). On en déduit (1.a), et les assertions (2.a) et (2.b) suivent du lemme 5.17. Comme le normalisateur de θ dans G est, d'après la proposition 3.1, engendré par \mathbf{J}^0 et le normalisateur de \mathfrak{b} dans B^\times , on déduit également de ce même lemme l'assertion (3) dans le cas où E/E_0 est non ramifiée ou c_0 est pair.

Supposons maintenant que c_0 soit impair et que E/E_0 soit ramifiée. L'action de τ sur $GL_m(\mathbf{l})$ étant triviale, on a $u^2 = 1$, c'est-à-dire qu'il y a un $z \in GL_m(\mathbf{l})$ et un $i \in \{0, \dots, m\}$ tels que :

$$zuz^{-1} = \sigma_i$$

où σ_i est la matrice diagonale définie par (5.11). Remplaçant y par zy où $j \in \mathbf{J}^0$ est un relèvement de z , on peut supposer que $s_i w \in \mathbf{J}^1$, où s_i est la matrice $\text{diag}(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1) \in \mathbf{J}^0$ relevant σ_i . Selon le lemme 5.17(2), le normalisateur de \mathfrak{b} dans B^\times est engendré par \mathfrak{b}^\times et une uniformisante $\varpi \in C$ telle que ϖ^c soit une uniformisante de E et $\tau(\varpi) = -\varpi$. Posons :

$$t_i = \text{diag}(\varpi, \dots, \varpi, 1, \dots, 1) \in B^\times = GL_m(C),$$

où ϖ apparaît i fois. On remarque que $s_i t_i = \tau(t_i)$. Comme \mathbf{J}^{1t_i} est un pro- p -groupe τ -stable, le premier ensemble de cohomologie de $\langle \tau \rangle$ dans \mathbf{J}^{1t_i} est trivial. Il s'ensuit que θ^y est conjugué à $\theta_i = \theta^{t_i}$ sous G^τ . Enfin, pour vérifier que θ_i et θ_k sont G^τ -conjugués si et seulement si $i = k$ ou $i+k = m$, on raisonne comme dans la preuve de [3, Lemma 4.25]. Prouvons enfin (3). D'après la remarque 3.10, le normalisateur de θ dans G est engendré par \mathbf{J}^0 et ϖ . Celui de θ_i est donc engendré par \mathbf{J}^{0t_i} et l'élément $t_i^{-1}\varpi t_i = \varpi$, qui a les propriétés requises. \square

5.11. Avant de clore cette section, voici un résultat faisant pendant au corollaire 5.24(1). L'endo-classe Θ est toujours celle qui a été fixée au paragraphe 5.9.

Proposition 5.29. — *Soit π une représentation cuspidale autoduale de G d'endo-classe Θ . On suppose que r est impair. Il y a une strate simple maximale $[\mathfrak{a}, \beta]$, un caractère simple $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ contenu dans π et un $u \in G$ tels que, posant $E = F[\beta]$ et $E_0 = F[\beta^2]$, on ait $\theta^{-1} = \theta^u$, $\beta^u = -\beta$ et $\text{Nrd}_{B/E}(u^2) \notin \text{N}_{E/E_0}(E^\times)$.*

Démonstration. — Observons d’abord que la condition $\beta^u = -\beta$ entraîne que $u^2 \in B^\times$, ce qui assure qu’on peut former la norme réduite de u^2 . Comme r est impair et $rd = 2n$, l’entier d est pair. Comme dans la preuve du théorème 5.22, fixons un $\sigma \in \mathrm{GL}_{2n}(F)$ tel que $\sigma^2 = 1$, de polynôme caractéristique $(X^2 - 1)^n$. D’après la proposition 4.4, il existe une strate simple maximale σ -auto-duale $[\mathfrak{a}_1, \beta]$ de $\mathbf{M}_{2n}(F)$ telle que $\mathcal{C}(\mathfrak{a}_1, \beta)$ contienne un caractère simple maximal σ -auto-dual θ_1 d’endo-classe Θ . Posons $E = F[\beta]$ et $E_0 = F[\beta^2]$.

Fixons un plongement de F -algèbres de E_0 dans A . Identifions E_0 à son image par ce plongement et le centralisateur A_0 de E_0 dans A à une E_0 -algèbre $\mathbf{M}_k(U_0)$, où U_0 est une E_0 -algèbre à division, de degré réduit noté u_0 , et où k est un entier strictement positif. Selon les formules de (3.2), on a $ku_0 = 2n/[E_0 : F]$, qui est pair car $[E : F] = 2[E_0 : F]$ divise $2n$, et k divise r . On en déduit que k est impair et que u_0 est pair. On peut donc plonger E dans U_0 comme E_0 -algèbre, ce que l’on fait. Soit C le centralisateur de E dans U_0 . Le centralisateur B de E dans A s’identifie à $\mathbf{M}_k(C)$. On a donc $k = m$. Notons \mathfrak{b} l’ordre maximal standard $\mathbf{M}_m(\mathcal{O}_C)$ de B , et \mathfrak{a} l’ordre héréditaire de A normalisé par E^\times tel que $\mathfrak{a} \cap B = \mathfrak{b}$. Soit $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ le transfert de θ_1 . Observons que m est impair, car c’est un diviseur de r d’après (3.2).

Lemme 5.30. — *Pour tout $u \in U_0^\times$ tel que $\beta^u = -\beta$, on a $\theta^{-1} = \theta^u$.*

Démonstration. — Un tel élément u normalise E , donc son centralisateur C . Il normalise donc \mathcal{O}_C , donc aussi \mathfrak{b} et \mathfrak{a} . Le résultat découle alors du lemme 3.27. \square

Fixons une extension non ramifiée maximale L_0 de E_0 dans U_0 et une uniformisante ϖ_0 de U_0 normalisant L_0 telle que $\varpi_0^{u_0}$ soit une uniformisante de E_0 . L’élément ϖ_0 induit, par conjugaison sur L_0 , un générateur de $\mathrm{Gal}(L_0/E_0)$.

Supposons d’abord que E/E_0 soit non ramifiée. On peut supposer que E est inclus dans L_0 , auquel cas il est le corps des points fixes de ϖ_0^2 dans L_0 . On a donc $\varpi_0 \beta \varpi_0^{-1} = -\beta$. D’autre part, ϖ_0^2 étant une uniformisante de C , sa norme réduite relativement à B/E est de valuation m dans E . L’entier m étant impair, celle-ci n’appartient pas à $N_{E/E_0}(E^\times)$. Appliquant le lemme 5.30 à $u = \varpi_0$, on trouve que $\theta^{-1} = \theta^u$.

Supposons maintenant que E/E_0 soit ramifiée. Écrivons $u_0 = 2c$. On peut supposer que ϖ_0^c est une uniformisante ϖ_E de E . Celle-ci induit, par conjugaison sur L_0 , l’unique automorphisme d’ordre 2 de L_0/E_0 . Il existe donc une racine de l’unité $\xi \in \mu_{L_0}$ telle que $\varpi_E \xi = -\xi \varpi_E$. À son tour, cette racine de l’unité induit, par conjugaison sur E , l’automorphisme non trivial de E/E_0 . Comme $\beta \notin E_0$ et $\beta^2 \in E_0$, on en déduit que $\xi \beta \xi^{-1} = -\beta$. Enfin, comme $\xi^2 \in C$, on a :

$$(5.12) \quad \mathrm{Nrd}_{B/E}(\xi^2) = \mathrm{N}_{L/E}(\xi^2)^m$$

où L/E est une extension non ramifiée maximale de E dans C . L’entier m étant impair et L/E étant non ramifiée, cette quantité appartient à $N_{E/E_0}(E^\times)$ si et seulement si $\mathrm{N}_{\mathfrak{l}/\mathfrak{k}_E}(\xi^2) \in \mathfrak{k}_E^{\times 2}$, où \mathfrak{l} est le corps résiduel de L , et cette dernière condition équivaut à $\xi^2 \in \mathfrak{l}^{\times 2}$, c’est-à-dire à $\xi \in \mathfrak{l}^\times$. Comme ξ ne commute pas à E , on en déduit que (5.12) n’appartient pas à $N_{E/E_0}(E^\times)$. En appliquant le lemme 5.30 à $u = \xi$, on trouve que $\theta^{-1} = \theta^u$. \square

6. Caractères simples τ -autoduaux et distinction

Dans cette section, on suppose être dans la situation introduite dans la section 5. On a donc une F -algèbre centrale simple A de degré réduit $2n$, un élément $\alpha \in F^\times$ et un $\kappa \in A^\times$ non central tel que $\kappa^2 = \alpha$. On pose $G = A^\times$ et on note τ l'automorphisme involutif de conjugaison par κ . Rappelons que, compte tenu de la convention 5.3, le polynôme caractéristique réduit de κ sur F est égal à $(X^2 - \alpha)^n$. En particulier, lorsque $\alpha \in F^{\times 2}$, auquel cas on suppose que $\alpha = 1$, l'entier r est pair. Nous allons prouver deux résultats essentiels pour la suite, faisant tous deux un lien entre distinction par G^τ et existence d'un caractère simple maximal τ -autodual :

- nous prouvons d'abord, dans le paragraphe 6.3, que toute représentation cuspidale G^τ -distinguée de niveau non nul de G contient un caractère simple τ -autodual ;
- nous prouvons ensuite, dans le paragraphe 6.11, que l'ensemble des représentations cuspidales autoduales de G d'endo-classe non nulle donnée, s'il contient une représentation G^τ -distinguée, en est constitué au moins pour moitié.

Sauf dans le paragraphe 6.1, nous ne considérerons dans cette section que des représentations de niveau non nul de G . Le cas de représentations de niveau 0 sera traité dans la section 7.

6.1. Le résultat suivant jouera un rôle important par la suite.

Théorème 6.1. — *Toute représentation cuspidale G^τ -distinguée de G est autoduale.*

Démonstration. — Lorsque α n'est pas un carré de F^\times , le résultat est initialement dû à Guo [42] si $d \leq 2$ et si F est de caractéristique nulle. Dans le cas d'une forme intérieure quelconque et d'un corps F de caractéristique résiduelle $p \neq 2$, il est prouvé par Chommaux-Matringe [28, Proposition 3.2].

Lorsque α est un carré dans F^\times , le résultat est dû à Jacquet-Rallis [51, Theorem 1.1] si G est déployé et F est de caractéristique nulle. Pour traiter le cas d'une forme intérieure quelconque sur un corps F de caractéristique résiduelle impaire, il suffit d'utiliser un argument de globalisation similaire à celui de [13] et [28]. Comme $\alpha \in F^{\times 2}$, rappelons que $A \simeq \mathbf{M}_r(D)$ avec r pair.

Soit k un corps global possédant une place w divisant p pour laquelle k_w soit isomorphe à F , et soit l une extension quadratique de k telle que $l_w = l \otimes_k k_w$ soit décomposée sur k_w . Soit \mathbf{A} l'anneau des adèles de k . Fixons des isomorphismes $k_w \simeq F$, $l_w \simeq F \oplus F$. Selon [61, Theorem 1.12], il y a une k -algèbre à division \mathbb{D} telle que :

- (1) il existe un isomorphisme de F -algèbres $\mathbb{D} \otimes_k F \simeq A$,
- (2) il existe un plongement de k -algèbres de l dans \mathbb{D} vérifiant les conditions suivantes:
 - (a) l'image du centralisateur de l_w dans $(\mathbb{D} \otimes_k F)^\times$ par l'isomorphisme ci-dessus est G^τ ,
 - (b) pour presque toute place finie v de k , la k_v -algèbre $\mathbb{D} \otimes_k k_v$ est déployée et le centralisateur de $l_v = l \otimes_k k_v$ dans $(\mathbb{D} \otimes_k k_v)^\times \simeq \mathrm{GL}_{2n}(k_v)$ est isomorphe à $\mathrm{GL}_n(k_v) \times \mathrm{GL}_n(k_v)$ si v est décomposée et à $\mathrm{GL}_n(l_v)$ si v est inerte.

(Il suffit de fixer un ensemble fini S de places finies de k contenant w et d'imposer que $\mathbb{D} \otimes_k k_v$ soit déployée pour toute place $v \notin S$, auquel cas l_v se plonge dans $\mathbb{D} \otimes_k k_v \simeq \mathbf{M}_{2n}(k_v)$ comme

souhaité, et de fixer pour toute place $v \in S$ une k_v -algèbre à division centrale D_v de degré réduit d_v et d'invariant de Hasse $h_v/d_v \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tels que :

$$\sum_{v \in S} \frac{h_v}{d_v} \in \mathbb{Z}$$

et $D_w \simeq D$. On peut alors imposer à \mathbb{D} , outre les conditions (1) et (2) ci-dessus, la condition supplémentaire $\mathbb{D} \otimes_k k_v \simeq \mathbf{M}_{2n/d_v}(D_v)$ pour toute $v \in S$. On pose $\mathbb{G} = (\mathbb{D} \otimes_k \mathbf{A})^\times$ et on note \mathbb{H} le centralisateur de l dans \mathbb{G} . À la place w , on a donc $\mathbb{G}_w \simeq \mathrm{GL}_r(D)$ et $\mathbb{H}_w \simeq \mathrm{GL}_s(D) \times \mathrm{GL}_s(D)$ avec $r = 2s$.

Soit π une représentation cuspidale de $G \simeq \mathbb{G}_w$ distinguée par $G^\tau \simeq \mathbb{H}_w$. Selon [62, Theorem 4.1] et [35, Theorem 1.3], il existe une représentation automorphe cuspidale Π de \mathbb{G} telle que la composante locale de Π en w soit isomorphe à π , et telle que Π ait une période non nulle relativement à \mathbb{H} . Pour toute place finie v de k , la composante locale Π_v de Π en v est distinguée par \mathbb{H}_v . En presque toute place finie v , le groupe \mathbb{G}_v est isomorphe à $\mathrm{GL}_{2n}(k_v)$ et \mathbb{H}_v est isomorphe à $\mathrm{GL}_n(k_v) \times \mathrm{GL}_n(k_v)$ ou à $\mathrm{GL}_n(l_v)$ (selon que v est décomposée ou inerte dans l), et Π_v est générique et non ramifiée. Ainsi [28, Proposition 3.1] entraîne que Π_v est autoduale en presque toute place finie v . Appliquant le théorème de multiplicité 1 forte pour les formes intérieures de GL_n sur k (voir [5, Theorem 5.1] en caractéristique nulle, [7, Theorem 3.3] en caractéristique p), on en déduit que les représentations automorphes cuspidales Π et Π^\vee sont isomorphes. En particulier, la représentation $\Pi_w \simeq \pi$ est autoduale. \square

6.2. Prouvons la variante⁽²⁾ suivante de [69, Lemma 6.5].

Lemme 6.2. — *Soit ι une involution de G , soit H un pro- p -sous-groupe ouvert compact de G et soit χ un caractère de H . Supposons qu'il y ait un élément $w \in G$ tel que :*

$$\iota(H) = H^w \quad \text{et} \quad \chi^{-1} \circ \iota = \chi^w.$$

Pour tout $g \in G$, le caractère χ^g est trivial sur $H^g \cap G^u$ si et seulement si $w\iota(g)g^{-1}$ entrelace χ .

Démonstration. — Soit $g \in G$. Exactement comme dans la preuve de [69, Lemma 6.5], on prouve que χ^g est trivial sur $H^g \cap G^u$ si et seulement si :

$$(6.1) \quad \chi^g(\iota(x)) = \chi^g(x)^{-1}, \quad \text{pour tout } x \in H^g \cap \iota(H^g).$$

Ensuite, par hypothèse sur χ , on a :

$$\chi^g \circ \iota = (\chi \circ \iota)^{\iota(g)} = (\chi^{-1})^{w\iota(g)} = (\chi^{w\iota(g)})^{-1}$$

sur $H^{w\iota(g)}$. Si l'on pose $\gamma = w\iota(g)g^{-1}$, alors (6.1) est équivalent à l'identité $\chi(h) = \chi^\gamma(h)$ pour tout $h \in H \cap H^\gamma$, c'est-à-dire que γ entrelace χ . \square

⁽²⁾Je remercie Jiandi Zou d'avoir attiré mon attention sur le fait qu'une telle variante est possible.

6.3. On en déduit le résultat suivant, donnant une condition nécessaire de G^τ -distinction pour les représentations cuspidales de G en termes de théorie des types, et qui est le premier résultat principal de cette section.

Proposition 6.3. — *Toute représentation cuspidale G^τ -distinguée de niveau non nul de G contient un caractère simple τ -autodual.*

Démonstration. — Soit π une représentation cuspidale G^τ -distinguée de G , de niveau non nul. D'après le théorème 6.1, elle est autoduale. On note Θ son endo-classe, et on définit des entiers m et c par (5.6).

Lemme 6.4. — *Il y a une strate simple maximale $[\mathfrak{a}, \beta]$, un caractère simple $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ contenu dans π et un $u \in G$ tels que, posant $E = F[\beta]$ et $E_0 = F[\beta^2]$, on ait $\theta^{-1} = \theta^u$, $\beta^u = -\beta$ et :*

$$\omega_{E/E_0}(\mathrm{Nrd}_{B/E}(u^2)) = (-1)^r.$$

Démonstration. — Si r est impair, le résultat est donné par la proposition 5.29.

Si r est pair, fixons comme au paragraphe 5.3 un élément $\sigma \in G$ tel que $\sigma^2 = 1$, de polynôme caractéristique réduit $(X^2 - 1)^n$. D'après le corollaire 5.24, la représentation π contient un caractère simple maximal σ -autodual θ . Fixons une strate simple σ -autoduale $[\mathfrak{a}, \beta]$ de A telle que $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$, dont l'existence est assurée par le lemme 5.6. On obtient le résultat voulu avec $u = \sigma$. \square

Soient $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ et $u \in G$ comme dans le lemme 6.4. Notons \mathbf{J}_θ le normalisateur de θ dans G , et notons respectivement \mathbf{J}^0 et \mathbf{J}^1 le sous-groupe compact maximal et le pro- p -sous-groupe distingué maximal de \mathbf{J}_θ . Posons $E = F[\beta]$ et $E_0 = F[\beta^2]$. L'induite compacte de θ à G , dont π est un quotient, admet une forme linéaire G^τ -invariante non nulle. Appliquant la formule de Mackey, il existe un $g \in G$ tel que θ^g soit trivial sur $H^1(\mathfrak{a}, \beta)^g \cap G^\tau$. On observera que u normalise B^\times et $u^2 \in \mathbf{J}_\theta \cap B^\times$.

Posons maintenant $w = u\kappa$, de sorte que $\theta^{-1} \circ \tau = \theta^w$. Appliquant le lemme 6.2 au caractère θ et à l'involution τ , on en déduit que $\gamma = w\tau(g)g^{-1}$ entrelace θ , c'est-à-dire, d'après la proposition 3.1(3), que $\gamma \in \mathbf{J}^1 B^\times \mathbf{J}^1$, où B désigne le centralisateur de E dans A . L'élément γ vérifie :

$$(6.2) \quad u\gamma u^{-1} = \alpha u^2 \gamma^{-1}.$$

Fixons un élément $x \in B^\times$ tel que $\gamma \in \mathbf{J}^1 x \mathbf{J}^1$. Le groupe \mathbf{J}_θ est stable par conjugaison par u , car c'est à la fois le normalisateur de θ et de $\theta^{-1} = \theta^u$. Il en est donc de même de \mathbf{J}^1 , ce qui donne :

$$(6.3) \quad \mathbf{J}^1 u x u^{-1} \mathbf{J}^1 = \mathbf{J}^1 \alpha u^2 x^{-1} \mathbf{J}^1.$$

Prenant l'intersection avec B^\times et appliquant [66, Corollaire 3.3], l'égalité (6.3) devient :

$$(6.4) \quad \mathbf{U}^1(\mathfrak{b}) u x u^{-1} \mathbf{U}^1(\mathfrak{b}) = \mathbf{U}^1(\mathfrak{b}) \alpha u^2 x^{-1} \mathbf{U}^1(\mathfrak{b}).$$

Puis, prenant la norme réduite de B sur E , on obtient l'identité :

$$(6.5) \quad \mathrm{Nrd}_{B/E}(x) \cdot \mathrm{Nrd}_{B/E}(u x u^{-1}) \equiv \alpha^{2n/[E:F]} \cdot \mathrm{Nrd}_{B/E}(u^2)$$

dans $E^\times/(1 + \mathfrak{p}_E)$, du fait que l'image de $\mathbf{U}^1(\mathfrak{b})$ par $\mathrm{Nrd}_{B/E}$ est égale à $1 + \mathfrak{p}_E$. D'après le lemme 5.15, le membre de gauche de (6.5) est égal à $N_{E/E_0}(\mathrm{Nrd}_{B/E}(x))$ et $\mathrm{Nrd}_{B/E}(u^2) \in E_0^\times$. L'identité

(6.5) est donc valable dans $E_0^\times/(1 + \mathfrak{p}_{E_0})$. On peut ainsi lui appliquer le caractère quadratique ω_{E/E_0} , ce qui donne :

$$\omega_{E/E_0}(\alpha)^{2n/[E:F]} = \omega_{E/E_0}(\mathrm{Nrd}_{B/E}(u^2)) = (-1)^r.$$

Appliquant le lemme 5.21 et le théorème 5.22, on en déduit que π contient un caractère simple τ -autodual. \square

6.4. Fixons un caractère simple maximal τ -autodual non trivial θ de G . On note \mathbf{J}_θ le normalisateur de θ dans G , \mathbf{J}^0 le sous-groupe compact maximal de \mathbf{J}_θ et \mathbf{J}^1 son pro- p -sous-groupe normal maximal. L'objectif des paragraphes 6.4 à 6.7 qui suivent est de montrer que, sous certaines hypothèses, la représentation de Heisenberg η admet un prolongement à \mathbf{J}_θ , ou à certains sous-groupes d'indice fini de \mathbf{J}_θ , possédant des propriétés remarquables vis-à-vis de τ : voir les corollaires 6.8 et 6.13. On fixe une strate simple τ -autoduale $[\mathfrak{a}, \beta]$ telle que $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$, dont l'existence est assurée par le lemme 5.6, et on utilise les notations de la section 5. En particulier :

- on pose $E = F[\beta]$ et $E_0 = F[\beta^2]$,
- on note B le centralisateur de E dans A et m, c les entiers définis par (3.2),
- on note c_0 l'entier défini par (5.9) avec $g = [E_0 : F]$.

D'après la proposition 5.27, on peut identifier $\mathbf{J}^0/\mathbf{J}^1$ à $\mathrm{GL}_m(\mathbf{l})$ de façon que l'action de τ soit :

- (1) l'action de l'automorphisme d'ordre 2 de \mathbf{l} si E/E_0 est non ramifiée (donc c_0 impair),
- (2) l'action par conjugaison d'un élément $v \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{l})$ si E/E_0 est ramifiée, avec :
 - (a) $v^2 \in \mathbf{l}^\times$ et $v^2 \notin \mathbf{l}^{\times 2}$ si c_0 est pair,
 - (b) v est diagonal, $v^2 = 1$ et les multiplicités des valeurs propres -1 et 1 sont respectivement i et $m - i$, avec $i \in \{0, \dots, \lfloor m/2 \rfloor\}$, si c_0 est impair.

(Dans ce dernier cas, rappelons que l'entier i s'appelle l'indice de θ (voir la définition 5.28).) On fixe également un élément ϖ de $\mathbf{J}_\theta \cap B^\times$ comme dans la proposition 5.27(3), c'est-à-dire que ϖ^c est une uniformisante de E , le groupe \mathbf{J}_θ est engendré par \mathbf{J}^0 et ϖ et :

$$\tau(\varpi) = \begin{cases} -\varpi & \text{si } T/T_0 \text{ est ramifiée et } c_0 \text{ est impair,} \\ \varpi & \text{sinon.} \end{cases}$$

On ne suppose pas ici que θ apparaît dans une représentation cuspidale autoduale de G . On ne peut donc pas utiliser le corollaire 5.23.

Lemme 6.5. — *Le groupe $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ est engendré par $\mathbf{J}^0 \cap G^\tau$ et un élément ϖ' tel que :*

- (1) $\varpi' = \varpi$ si E/E_0 est non ramifiée, ou si E/E_0 est ramifiée et c_0 est pair,
- (2) $\varpi' = \varpi^2$ si E/E_0 est ramifiée, c_0 est impair et $m \neq 2i$,
- (3) $\varpi' = \varpi t$ pour un élément $t \in \mathbf{J}^0$ dont la réduction modulo \mathbf{J}^1 est :

$$(6.6) \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id} \\ \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{l})$$

si E/E_0 est ramifiée, c_0 est impair et $m = 2i$, où id est l'identité de $\mathrm{GL}_i(\mathbf{l})$.

Démonstration. — Soit un élément $x \in \mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$, qu'on écrit $\varpi^k y$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbf{J}^0$. Si E/E_0 est non ramifiée, ou si E/E_0 est ramifiée et c_0 est pair, alors ϖ est invariant par τ , donc y l'est aussi, ce qui traite le cas (1). Si E/E_0 est ramifiée et c_0 est impair, on a $\tau(\varpi) = -\varpi$. Ainsi, ou bien k est pair et $\tau(y) = y$, ou bien k est impair et $\tau(y) = -y$. Supposons qu'on soit dans le second cas. Réduisant y modulo \mathbf{J}^1 , on obtient un $z \in GL_m(\mathbf{l})$ tel que $\tau(z) = -z$. Comme τ agit sur $GL_m(\mathbf{l})$ par conjugaison par l'élément σ_i défini par (5.11), on en déduit que σ_i et $-\sigma_i$ sont conjugués, donc que $m = 2i$.

Inversement, si $m = 2i$, on note s l'élément (6.6), qui est anti-invariant par τ . Si $u \in \mathbf{J}^0$ relève s , on a donc $v = -\tau(u)u^{-1} \in \mathbf{J}^1$. Comme $\tau(v)v = 1$, il existe un $w \in \mathbf{J}^1$ tel que $v = \tau(w)w^{-1}$. L'élément $t = w^{-1}u$ a la propriété requise. \square

6.5. La situation est la même qu'au paragraphe précédent. On suppose en outre que, si E/E_0 est ramifiée et c_0 est impair, m est pair ou égal à 1 et θ est d'indice $i = \lfloor m/2 \rfloor$. (Voir la remarque 5.4.) On a donc $m = 1$ ou $m = 2i$. Rappelons que, comme $p \neq 2$, tout caractère de $GL_m(\mathbf{l})$ se factorise par le déterminant.

Proposition 6.6. — *Supposons que l'on soit dans l'un des cas suivants :*

- (1) E/E_0 est non ramifiée, ou E/E_0 est ramifiée et c_0 est pair,
- (2) E/E_0 est ramifiée, c_0 est impair, m est pair ou égal à 1 et θ est d'indice $i = \lfloor m/2 \rfloor$.

Alors il existe une représentation $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ -distinguée de \mathbf{J}_θ prolongeant η .

Démonstration. — Soit κ une représentation τ -autoduale de \mathbf{J}_θ prolongeant η , dont l'existence est assurée par la proposition 3.28. Selon le lemme 3.30, il lui correspond un caractère χ du groupe $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ trivial sur $\mathbf{J}^1 \cap G^\tau$ tel que $\text{Hom}_{\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau}(\kappa, \chi^{-1})$ soit non nul. Comme κ est τ -autoduale, χ^2 est trivial. On cherche un caractère ω de \mathbf{J}_θ trivial sur \mathbf{J}^1 tel que $\kappa\omega$ soit $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ -distinguée, c'est-à-dire telle que la restriction de ω à $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ soit égale à χ . Soit $\varpi \in \mathbf{J}_\theta \cap B^\times$ comme dans le paragraphe 6.4. Commençons par traiter le cas (1).

Si E/E_0 est non ramifiée, notons \mathbf{l}_0 le sous-corps des invariants de \mathbf{l} par son automorphisme d'ordre 2. La restriction de χ à $\mathbf{J}^0 \cap G^\tau$ s'identifie à un caractère de $GL_m(\mathbf{l}_0)$, qui se factorise sous la forme $\delta \circ \det$ pour un unique caractère quadratique δ de \mathbf{l}_0^\times , qu'on écrit $\delta = \varepsilon \circ N_{\mathbf{l}_0/\mathbf{k}_{E_0}}$ pour un unique caractère quadratique ε de $\mathbf{k}_{E_0}^\times$. Soit γ un caractère de \mathbf{k}_E^\times prolongeant ε . On pose $\varphi = \gamma \circ N_{\mathbf{l}/\mathbf{k}_E}$. Le degré de \mathbf{l}/\mathbf{k}_E , qui est égal à c_0 , est impair. La restriction de φ à \mathbf{l}_0^\times est donc égale à δ .

Si E/E_0 est ramifiée et c_0 est pair, soit \mathbf{l}_0 l'extension quadratique de \mathbf{l} engendrée par v dans $\mathbf{M}_m(\mathbf{l})$. La restriction de χ à $\mathbf{J}^0 \cap G^\tau$ s'identifie à un caractère de $GL_{m/2}(\mathbf{l}_0)$ de la forme $\delta \circ \det$ où δ est un caractère quadratique de \mathbf{l}_0^\times . On note φ l'unique caractère quadratique de \mathbf{l}^\times tel que δ soit égal à $\varphi \circ N_{\mathbf{l}_0/\mathbf{l}}$.

Dans ces deux cas, φ est invariant par $\text{Gal}(\mathbf{l}/\mathbf{k}_E)$. Le caractère ω de \mathbf{J}^0 trivial sur \mathbf{J}^1 obtenu par inflation du caractère $\varphi \circ \det$ de $GL_m(\mathbf{l})$ est donc normalisé par ϖ , et son unique prolongement à \mathbf{J}_θ tel que $\omega(\varpi) = \chi(\varpi)$ a la propriété voulue. Traitons maintenant le cas (2).

Dans le cas où $m = 1$, on a $\mathbf{J}^0 = (\mathbf{J}^0 \cap G^\tau)\mathbf{J}^1$. Il existe donc un unique caractère ω de \mathbf{J}^0 trivial sur \mathbf{J}^1 et coïncidant avec χ sur $\mathbf{J}^0 \cap G^\tau$, et il est normalisé par \mathbf{J}_θ . On le prolonge à \mathbf{J}_θ en demandant que $\omega(\varpi)^2 = \chi(\varpi^2)$. On obtient un caractère ayant la propriété voulue.

Enfin, dans le cas où $m = 2i$, on suit l'argument de la preuve de [69, Lemma 7.10] dont on reproduit ici les grandes lignes pour la commodité du lecteur. On identifie la restriction de χ à $\mathbf{J}^0 \cap G^\tau$ à un caractère de $\mathrm{GL}_i(\mathbf{l}) \times \mathrm{GL}_i(\mathbf{l})$, qu'on écrit $(\delta_1 \circ \det) \otimes (\delta_2 \circ \det)$, où δ_1, δ_2 sont des caractères quadratiques de \mathbf{l}^\times . Comme l'élément t du lemme 6.5(3) normalise κ et le sous-groupe $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$, il normalise aussi χ . On en déduit que $\delta_1 = \delta_2$, puis que la restriction de χ à $\mathbf{J}^0 \cap G^\tau$ se prolonge en un unique caractère ω de \mathbf{J}^0 trivial sur \mathbf{J}^1 . Celui-ci est normalisé par \mathbf{J}_θ . En le prolongeant à \mathbf{J}_θ en demandant que $\omega(\varpi) = \chi(\varpi t)\omega(t)^{-1}$, on obtient un caractère ayant la propriété voulue. \square

6.6. Dans le cas où E/E_0 est ramifiée, on en déduit le résultat suivant.

Proposition 6.7. — *Supposons que l'on soit dans l'un des cas suivants :*

- (1) E/E_0 est ramifiée et c_0 est pair,
- (2) E/E_0 est ramifiée, c_0 est impair, m est pair ou égal à 1 et θ est d'indice $i = \lfloor m/2 \rfloor$.

Alors toute représentation $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ -distinguée de \mathbf{J}_θ prolongeant η est τ -autoduale.

Démonstration. — Soit κ une représentation $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ -distinguée de \mathbf{J}_θ prolongeant η . D'après le lemme 3.28, il y a un unique caractère ξ de \mathbf{J}_θ trivial sur \mathbf{J}^1 tel que $\kappa^{\vee\tau}$ soit isomorphe à $\kappa\xi$. Comme κ est $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ -distinguée, la restriction de ξ à $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ est triviale. Il s'agit de prouver que ξ est trivial sur \mathbf{J}_θ . Soit $\varpi \in \mathbf{J}_\theta \cap B^\times$ comme dans le paragraphe 6.4.

Commençons par le cas (1). La restriction de ξ à \mathbf{J}^0 s'identifie à un caractère de $\mathrm{GL}_m(\mathbf{l})$ trivial sur $\mathrm{GL}_{m/2}(\mathbf{l}_0)$, où \mathbf{l}_0 est l'extension quadratique de \mathbf{l} engendrée par v dans $\mathbf{M}_m(\mathbf{l})$. Celui-ci se factorise sous la forme $v \circ \det$ où v est un caractère de \mathbf{l}^\times trivial sur $N_{\mathbf{l}_0/\mathbf{l}}(\mathbf{l}_0^\times) = \mathbf{l}^\times$, c'est-à-dire que ξ est trivial sur \mathbf{J}^0 . Il l'est aussi sur \mathbf{J}_θ , car $\xi(\varpi) = 1$ d'après le lemme 6.5.

Passons au cas (2). Si $m = 1$, la paire $(\mathbf{J}_\theta, \kappa)$ est un type $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ -distingué de G . Son induite compacte π est donc une représentation cuspidale G^τ -distinguée de G . D'après le théorème 6.1, celle-ci est autoduale. Par conséquent, les types κ et $\kappa^{\vee\tau} \simeq \kappa\xi$ sont tous les deux contenus dans π , ce dont on déduit que ξ est trivial. Si $m = 2i$, la restriction de ξ à \mathbf{J}^0 s'identifie à un caractère de $\mathrm{GL}_m(\mathbf{l})$ trivial sur $\mathrm{GL}_i(\mathbf{l}) \times \mathrm{GL}_i(\mathbf{l})$. On en déduit que ξ est trivial sur \mathbf{J}^0 . Puis on a $\xi(\varpi t) = 1$ (voir le lemme 6.5) et $\xi(t) = 1$, donc $\xi(\varpi) = 1$. \square

Nous en déduisons l'existence et l'unicité d'un prolongement remarquable de η à \mathbf{J}_θ .

Corollaire 6.8. — *Supposons que l'on soit dans l'un des cas considérés à la proposition 6.7.*

(1) *Le nombre de représentations de \mathbf{J}_θ prolongeant η étant à la fois τ -autoduales et $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ -distinguées est :*

- (a) *égal à 2 si E/E_0 est ramifiée, c_0 est impair et $m = 1$,*
- (b) *égal à 1 sinon.*

(2) *Il existe une unique représentation κ_θ de \mathbf{J}_θ prolongeant η étant à la fois τ -autoduale et $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ -distinguée, et dont le déterminant soit d'ordre une puissance de p .*

Démonstration. — Soit κ une représentation de \mathbf{J}_θ prolongeant η qui soit à la fois τ -autoduale et $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ -distinguée. Son déterminant δ est un caractère τ -autodual de \mathbf{J}_θ trivial sur $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$. Le lemme 6.5 assure qu'il est d'ordre fini. Le facteur ω de δ d'ordre premier à p est τ -autodual et $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ -distingué. Raisonnant comme dans la preuve du lemme 3.12, on montre que, tordant κ par ω^{-a} pour un entier a convenable, on obtient une représentation κ_θ à la fois τ -autoduale et $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ -distinguée, et dont le déterminant est d'ordre une puissance de p . Une représentation de \mathbf{J}_θ prolongeant η à la fois τ -autoduale et $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ -distinguée s'écrit donc sous la forme $\kappa_\theta \xi$ pour un caractère ξ de \mathbf{J}_θ trivial sur $(\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau)\mathbf{J}^1$ et τ -autodual.

Nous allons voir que ξ est trivial sur \mathbf{J}^0 . Identifions la restriction de ξ à \mathbf{J}^0 à un caractère de $GL_m(\mathbf{l})$ trivial sur $GL_m(\mathbf{l})^\tau$, se factorisant sous la forme $v \circ \det$ où v est un caractère de \mathbf{l}^\times .

– Si E/E_0 est ramifiée et c_0 est pair, $v \circ \det$ est trivial sur $GL_m(\mathbf{l})^\tau = GL_{m/2}(\mathbf{l}_0)$, donc v est trivial sur $N_{\mathbf{l}_0/\mathbf{l}}(\mathbf{l}_0^\times) = \mathbf{l}^\times$.

– Si E/E_0 est ramifiée, c_0 est impair et $m = 2i$, alors $v \circ \det$ est trivial sur le sous-groupe $GL_m(\mathbf{l})^\tau = GL_i(\mathbf{l}) \times GL_i(\mathbf{l})$, donc v est trivial.

– Si E/E_0 est ramifiée, c_0 est impair et $m = 1$, alors $\mathbf{l}^{\times\tau} = \mathbf{l}^\times$ donc v est trivial.

Ensuite, d'après le lemme 6.5, on a :

- $\xi(\varpi) = 1$ si E/E_0 est ramifiée et c_0 est pair,
- $\xi(\varpi t) = 1$ si E/E_0 est ramifiée, c_0 est impair et $m = 2i$,
- $\xi(\varpi^2) = 1$ si E/E_0 est ramifiée, c_0 est impair et $m = 1$.

Dans les deux premiers cas, le caractère ξ est trivial (dans le second cas car $\xi(t) = 1$ puisque ξ est trivial sur \mathbf{J}^0). Dans le troisième et dernier cas, ξ est quadratique et trivial sur \mathbf{J}^0 ; il y a exactement deux tels caractères, dont un seul qui soit d'ordre une puissance de p . \square

6.7. Dans ce paragraphe, on s'intéresse au cas où E/E_0 est non ramifiée. Si ρ est une représentation irréductible cuspidale de $GL_m(\mathbf{l})$, on note $s(\rho)$ l'ordre du stabilisateur de la classe d'isomorphisme de ρ sous l'action de $\text{Gal}(\mathbf{l}/\mathbf{k}_E)$. D'après [60, Corollaire 3.9], c'est un diviseur de c premier à m .

Lemme 6.9. — *On suppose que mc est impair. Soit un entier $s \geq 1$. Pour qu'il existe une représentation cuspidale τ -autoduale ρ de $GL_m(\mathbf{l})$ telle $s(\rho) = s$, il faut et suffit que s soit un diviseur de c premier à m .*

Démonstration. — Comme $\text{Gal}(\mathbf{l}/\mathbf{k}_E)$ est d'ordre c , le fait que s divise c est certainement une condition nécessaire. Supposons donc désormais que s divise c . Soit \mathbf{t} une extension de \mathbf{l} de degré m dans $\mathbf{M}_m(\mathbf{l})$, et considérons \mathbf{t}^\times comme un tore maximal de $GL_m(\mathbf{l})$. Soit ξ un caractère \mathbf{l} -régulier de \mathbf{t}^\times (c'est-à-dire que ses conjugués sous $\text{Gal}(\mathbf{t}/\mathbf{l})$ sont distincts deux à deux) et soit ρ la représentation cuspidale de $GL_m(\mathbf{l})$ qui lui correspond au sens de [41], c'est-à-dire que :

$$(6.7) \quad \text{tr } \rho(x) = (-1)^{m-1} \cdot \sum_{\gamma} \xi^\gamma(x)$$

pour tout $x \in \mathbf{t}^\times$ dont le polynôme caractéristique est irréductible sur \mathbf{l} , la somme étant prise sur $\text{Gal}(\mathbf{t}/\mathbf{l})$. Notons q_0 le cardinal du corps résiduel de E_0 . Alors [69, Lemma 2.3] (et plus précisément sa preuve) assure que ρ est τ -autoduale si et seulement si l'ordre de ξ divise $q_0^{mc} + 1$.

Écrivons $c = bs$ et fixons un caractère ξ de \mathbf{t}^\times d'ordre $q_0^{mb} + 1$, ce qui est possible car $q_0^{mb} + 1$ divise l'ordre de \mathbf{t}^\times . L'entier c (donc s) étant impair, $q_0^{mb} + 1$ divise $q_0^{mc} + 1$. L'ordre de q_0^2 dans $(\mathbb{Z}/(q_0^{mb} + 1)\mathbb{Z})^\times$ est égal à mb , donc celui de q_0^{2c} est égal à $mb/(mb, c) = m$ car s est premier à m . Par conséquent, le caractère ξ est \mathbf{l} -régulier, la représentation cuspidale ρ qui lui correspond est τ -autoduale et $s(\rho)$ est égal à s . \square

Proposition 6.10. — *On suppose que mc est impair. Soit b un diviseur de c tel que c/b soit premier à m , et soit \mathbf{J}_b le sous-groupe de \mathbf{J}_θ engendré par ϖ^b et \mathbf{J}^0 . Il existe une représentation de \mathbf{J}_b prolongeant η qui est à la fois τ -autoduale et $\mathbf{J}_b \cap G^\tau$ -distinguée.*

Démonstration. — Nous allons suivre l'argument de la preuve de [69, Proposition 9.4]. Soit une représentation τ -autoduale κ de \mathbf{J}_θ prolongeant η , dont l'existence est assurée par la proposition 3.28. D'après le lemme 6.9, il existe une représentation cuspidale τ -autoduale ρ de $\mathrm{GL}_m(\mathbf{l})$ telle $s(\rho) = c/b$. D'après [39], la représentation ρ est $\mathrm{GL}_m(\mathbf{l}_0)$ -distinguée, où \mathbf{l}_0 est le sous-corps de \mathbf{l} invariant par son automorphisme d'ordre 2. Notant encore ρ son inflation à \mathbf{J}^0 , son normalisateur dans \mathbf{J}_θ est égal à \mathbf{J}_b car l'action de ϖ par conjugaison induit sur \mathbf{l} l'action d'un générateur de $\mathrm{Gal}(\mathbf{l}/\mathbf{k}_E)$ (voir la remarque 3.10).

Lemme 6.11. — *Il existe une représentation de \mathbf{J}_b prolongeant ρ qui est à la fois τ -autoduale et $\mathbf{J}_b \cap G^\tau$ -distinguée.*

Démonstration. — Soit ρ une représentation de \mathbf{J}_b prolongeant ρ . Tout autre prolongement de ρ à \mathbf{J}_b s'obtient en tordant ρ par un caractère non ramifié de \mathbf{J}_b . Quitte à tordre par un caractère non ramifié convenable, on peut donc supposer que ρ est τ -autoduale, ce que nous ferons. Selon [39, Theorem 3.6], l'espace :

$$(6.8) \quad \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(\mathbf{l}_0)}(\rho, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}^0 \cap G^\tau}(\rho, \mathbb{C})$$

est de dimension 1. Faisant agir le groupe $\mathbf{J}_b \cap G^\tau$ sur cet espace, on en déduit un unique caractère ζ de $\mathbf{J}_b \cap G^\tau$ trivial sur $\mathbf{J}^0 \cap G^\tau$ tel que celui-ci soit égal à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{J}_b \cap G^\tau}(\rho, \zeta)$. Par unicité de ζ et comme ρ est τ -autoduale, on a $\zeta^2 = 1$. Soit ρ^* le prolongement τ -autodual de ρ obtenu en tordant ρ par le caractère non ramifié ε de \mathbf{J}_b d'ordre 2. Alors l'une des représentations ρ et ρ^* est $\mathbf{J}_b \cap G^\tau$ -distinguée. \square

Remarque 6.12. — Plus précisément, une seule des deux représentations ρ et ρ^* est $\mathbf{J}_b \cap G^\tau$ -distinguée, car l'autre, qui est ε -distinguée, ne peut pas être distinguée. En effet, si c'était le cas, on aurait deux formes linéaires non nulles sur l'espace de ρ , non colinéaires car l'une est $\mathbf{J}_b \cap G^\tau$ -invariante et l'autre ε -équivariante. Elles sont pourtant toutes les deux $\mathrm{GL}_m(\mathbf{l}_0)$ -invariantes, ce qui contredit le fait que (6.8) est de dimension 1.

Soit ρ une représentation comme au lemme 6.11, et soit $\lambda = \kappa \otimes \rho$. La paire (\mathbf{J}_b, λ) est un type τ -autodual. Soit χ le caractère de $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ associé à κ par le lemme 3.30. On a alors :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{J}_b \cap G^\tau}(\lambda, \chi^{-1}) \neq \{0\}.$$

Comme dans [69, Lemma 9.2], on prouve que tout caractère de $\mathbf{J}_b \cap G^\tau$ trivial sur $\mathbf{J}^1 \cap G^\tau$ se prolonge en un caractère de \mathbf{J}_b trivial sur \mathbf{J}^1 . Soit donc ω un caractère de \mathbf{J}_b trivial sur \mathbf{J}^1

prolongeant χ^{-1} , et posons $\lambda' = \lambda\omega^{-1}$. La paire (\mathbf{J}_b, λ') est un type $\mathbf{J}_b \cap G^\tau$ -distingué. Son induite compacte à G , notée π' , est une représentation irréductible cuspidale G^τ -distinguée. D'après le théorème 6.1, elle est autoduale. Elle contient donc à la fois λ' et $\lambda'^{\vee\tau} \simeq \lambda'\omega(\omega \circ \tau)$, ce dont on déduit que le caractère $\omega(\omega \circ \tau)$ est trivial sur \mathbf{J}_b . Il s'ensuit que la représentation $\kappa' = \kappa\omega^{-1}$ prolonge η , et est à la fois τ -autoduale et $\mathbf{J}_b \cap G^\tau$ -distinguée. \square

Le corollaire suivant fait pendant au corollaire 6.8.

Corollaire 6.13. — *Il existe une unique représentation κ_b de \mathbf{J}_b prolongeant η étant à la fois τ -autoduale et $\mathbf{J}_b \cap G^\tau$ -distinguée, et dont le déterminant soit d'ordre une puissance de p .*

Démonstration. — Pour prouver l'existence de κ_b , on raisonne exactement comme au début de la preuve du corollaire 6.8. Prouvons maintenant l'unicité. Si une représentation κ de \mathbf{J}_b a les mêmes propriétés que κ_b , alors elle est de la forme $\kappa_b\xi$ où ξ est un caractère de \mathbf{J}_b trivial sur $(\mathbf{J}_b \cap G^\tau)\mathbf{J}^1$, d'ordre une puissance de p et τ -autodual. Un caractère du groupe $\mathbf{J}^0/\mathbf{J}^1 \simeq GL_m(\mathbf{l})$ se factorise en un caractère de \mathbf{l}^\times , qui est d'ordre premier à p . Le caractère ξ est donc trivial sur \mathbf{J}^0 . Enfin, d'après le lemme 6.5, on a $\xi(\varpi^b) = 1$, ce qui implique que ξ est trivial. \square

6.8. Nous discutons maintenant l'existence de types τ -autoduaux dans une représentation cuspidale autoduale de G de niveau non nul. Le cas du niveau 0 sera traité à la section 7. La proposition suivante généralise le corollaire 4.6.

Proposition 6.14. — *Une représentation cuspidale autoduale de G de niveau non nul contient un caractère simple τ -autodual si et seulement si elle contient un type τ -autodual.*

Démonstration. — L'une de ces implications est immédiate, car le caractère simple attaché à un type τ -autodual est τ -autodual. Soit maintenant π une représentation cuspidale autoduale de G contenant un caractère simple τ -autodual $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$. D'après le lemme 5.6, on peut supposer que la strate simple $[\mathfrak{a}, \beta]$ est τ -autoduale, ce que nous ferons. Soit (\mathbf{J}, λ) un type contenu dans π auquel θ soit attaché. Alors τ stabilise le normalisateur \mathbf{J}_θ de θ , donc aussi son sous-groupe compact maximal \mathbf{J}^0 . Le quotient de \mathbf{J}_θ par $F^\times\mathbf{J}^0$ étant cyclique, il possède un unique sous-groupe d'indice donné, donc τ normalise \mathbf{J} . Aussi le type $(\mathbf{J}, \lambda^{\vee\tau})$, qui est contenu dans π , est conjugué à (\mathbf{J}, λ) par un $g \in G$ normalisant \mathbf{J} . Comme le caractère simple qui lui est attaché est $\theta^{-1} \circ \tau = \theta$, on a $g \in \mathbf{J}_\theta$. Notons b l'indice de \mathbf{J} dans \mathbf{J}_θ , et fixons un $\varpi \in \mathbf{J}_\theta \cap B^\times$ tel que \mathbf{J}_θ soit engendré par \mathbf{J}^0 et ϖ comme dans le paragraphe 6.4. Par conséquent, \mathbf{J} est engendré par ϖ^b et \mathbf{J}^0 . On peut donc supposer que $g = \varpi^i$ pour un $i \in \{0, \dots, b-1\}$ tel que $\varpi^i\tau(\varpi^i) \in \mathbf{J}$, c'est-à-dire que b divise $2i$. Si b est impair, alors $i = 0$ et (\mathbf{J}, λ) est τ -autodual.

Supposons maintenant que b soit pair et posons $\varpi' = \varpi^{b/2}$. Fixons une représentation κ de \mathbf{J} prolongeant η et notons ρ la représentation de \mathbf{J} triviale sur \mathbf{J}^1 telle que $\lambda \simeq \kappa \otimes \rho$. Quoique ce ne soit pas indispensable dans ce qui suit, nous supposons que κ est τ -autoduale, comme nous y autorise la proposition 3.28. Supposons que (\mathbf{J}, λ) ne soit pas τ -autodual. Alors la représentation $\lambda^{\vee\tau}$ est isomorphe à $\lambda^{\varpi'}$ et, comme ϖ' normalise κ , on en déduit que $\rho^{\vee\tau}$ est isomorphe à $\rho^{\varpi'}$. D'autre part, le fait que b soit pair implique que c l'est aussi. On est donc dans le cas où $c = c_0/2$ et $m = 2m_0$, donc E/E_0 est ramifiée et m est pair, avec les notations des paragraphes 5.6 et 5.7.

Identifions maintenant $\mathbf{J}^0/\mathbf{J}^1 \simeq \mathfrak{b}^\times/\mathbf{U}^1(\mathfrak{b})$ et $\mathrm{GL}_m(\mathfrak{l})$ de sorte que τ agisse sur $\mathrm{GL}_m(\mathfrak{l})$ de la façon décrite à la proposition 5.27, c'est-à-dire par conjugaison par un élément $v \in \mathrm{GL}_m(\mathfrak{l})$ tel que $v^2 \in \mathfrak{l}^\times$ et $v^2 \notin \mathfrak{l}^{\times 2}$. Soit ρ la représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_m(\mathfrak{l})$ définie par ρ . La conjugaison par ϖ agit sur $\mathrm{GL}_m(\mathfrak{l})$ comme un générateur γ de $\mathrm{Gal}(\mathfrak{l}/\mathfrak{k}_E)$ dépendant de l'invariant de Hasse de C . L'élément ϖ' agit donc comme l'élément $\gamma' = \gamma^{b/2}$. Compte tenu de la définition de b à la remarque 3.10, la représentation $\rho^{\gamma'}$ est isomorphe à $\bar{\rho}$, le conjugué de ρ par l'unique élément de $\mathrm{Gal}(\mathfrak{l}/\mathfrak{k}_E)$ d'ordre 2. La relation $\rho^{\tau^\vee} \simeq \rho^{\varpi'}$ entraîne donc $\rho^\vee \simeq \bar{\rho}$. D'après [69, Lemma 2.3], on en déduit que m est impair : contradiction. Ainsi le type (\mathbf{J}, λ) est τ -autodual. \square

Il est intéressant de noter que ce résultat est faux en niveau 0 : nous verrons dans la section 7 qu'une représentation cuspidale autoduale de niveau 0 de G peut contenir un caractère simple τ -autodual sans contenir de type τ -autodual (voir le paragraphe 7.5).

6.9. La situation est la même qu'au paragraphe 6.4 : on a fixé un caractère simple maximal τ -autodual θ et une strate simple τ -autoduale $[\mathfrak{a}, \beta]$ telle que $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$. Supposons en outre qu'on soit dans l'un des cas suivants :

- E/E_0 est non ramifiée et mc est impair,
- E/E_0 est ramifiée, c_0 est impair, m est pair ou égal à 1, et θ est d'indice $i = \lfloor m/2 \rfloor$,
- E/E_0 est ramifiée et c_0 est pair.

Notons $\Omega = \Omega_\theta$ l'ensemble des paires (\mathbf{J}, ρ) tels que :

- (1) $F^\times \mathbf{J}^0 \subseteq \mathbf{J} \subseteq \mathbf{J}_\theta$ et ρ est une classe d'isomorphisme de représentation irréductible τ -autoduale de \mathbf{J} triviale sur \mathbf{J}^1 ,
- (2) le normalisateur de ρ dans \mathbf{J}_θ est égal à \mathbf{J} ,
- (3) la restriction de ρ à \mathbf{J}^0 est l'inflation d'une représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_m(\mathfrak{l})$.

Cela signifie donc que, si κ est une représentation de \mathbf{J}_θ prolongeant η , alors $(\mathbf{J}, \kappa \otimes \rho)$ est un type de G .

Étant donné $(\mathbf{J}, \rho) \in \Omega$, notons b l'indice de \mathbf{J} dans \mathbf{J}_θ . D'après les remarques 3.10 et 3.15, c est un diviseur de c et c/b est premier à m .

Lemme 6.15. — *L'ensemble Ω est fini, et il existe un sous-ensemble $\Omega^+ \subseteq \Omega$ tel que :*

- (1) le cardinal de Ω est le double de celui de Ω^+ ,
- (2) pour tout $(\mathbf{J}, \rho) \in \Omega^+$, la représentation ρ est $\mathbf{J} \cap G^\tau$ -distinguée.

Démonstration. — Pour prouver que Ω est fini, il suffit de prouver qu'une représentation cuspidale τ -autoduale ρ de $\mathrm{GL}_m(\mathfrak{l})$ n'admet qu'un nombre fini de prolongements τ -autoduaux à son normalisateur \mathbf{J} dans \mathbf{J}_θ . Or, si ρ est un tel prolongement, les autres sont de la forme $\rho\chi$ où χ est un caractère quadratique de \mathbf{J} trivial sur \mathbf{J}^0 .

Soit (\mathbf{J}, ρ) une paire de Ω et soit ρ la représentation cuspidale τ -autoduale de $\mathrm{GL}_m(\mathfrak{l})$ qu'elle définit. D'après [39] si E/E_0 est non ramifiée, [44, Proposition 6.1] si E/E_0 est ramifiée et c_0 est impair, et enfin [29, Lemme 4.3.11] si E/E_0 est ramifiée et c_0 est pair, ρ est $\mathrm{GL}_m(\mathfrak{l})^\tau$ -distinguée et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(\mathfrak{l})^\tau}(\rho, \mathbb{C})$ est de dimension 1. Il existe donc un unique caractère ζ de $\mathbf{J} \cap G^\tau$ trivial sur $\mathbf{J}^0 \cap G^\tau$ tel que :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(\mathfrak{l})^\tau}(\rho, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{J} \cap G^\tau}(\rho, \zeta)$$

et, par unicité de ζ et comme ρ est τ -autoduale, on a $\zeta^2 = 1$. Le quotient \mathbf{J}/\mathbf{J}^0 étant isomorphe à \mathbb{Z} , le groupe \mathbf{J} a un unique caractère d'ordre 2 trivial sur \mathbf{J}^0 , que l'on note ω . Posons $\rho^* = \rho\omega$. Alors $(\mathbf{J}, \rho^*) \in \Omega$ et :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{J} \cap G^\tau}(\rho, \zeta) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{J} \cap G^\tau}(\rho^*, \zeta\omega).$$

Supposons que E/E_0 soit non ramifiée, ou que c_0 soit pair, ou que $m > 1$. Le groupe $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ est engendré par $\mathbf{J}^0 \cap G^\tau$ et par un élément $\varpi' \in \varpi\mathbf{J}^0$ défini par le lemme 6.5, donc $\mathbf{J} \cap G^\tau$ est engendré par $\mathbf{J}^0 \cap G^\tau$ et ϖ'^b . Le caractère ω est donc non trivial sur $\mathbf{J} \cap G^\tau$, car il est non trivial en $\varpi'^b \in \varpi^b\mathbf{J}^0$. Par conséquent, exactement une représentation parmi ρ et ρ^* est distinguée par $\mathbf{J} \cap G^\tau$.

Supposons enfin que E/E_0 soit ramifiée, que c_0 soit impair et que $m = 1$. Le groupe $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ est engendré par ϖ^2 et $\mathbf{J}^0 \cap G^\tau$, donc ω est trivial sur $\mathbf{J} \cap G^\tau$. Soit ν le caractère quadratique non trivial de \mathbf{J}^\times prolongé à \mathbf{J} en posant $\nu(\varpi^b) = 1$. Alors Ω est constitué des quatre caractères 1, ω , ν et $\nu\omega$. Ceux qui sont distingués par $\mathbf{J} \cap G^\tau = \langle \varpi^{2b}, \mathbf{J}^0 \cap G^\tau \rangle$ sont 1 et ω . \square

6.10. Dans ce paragraphe, on note Θ l'endo-classe du caractère simple maximal τ -autodual θ fixé au paragraphe 6.4 et T/T_0 l'extension quadratique qui lui est associée. On suppose qu'il existe une représentation cuspidale autoduale de G d'endo-classe Θ contenant θ . D'après la proposition 5.27, quitte à remplacer θ par l'un de ses conjugués, on peut supposer que θ est d'indice $[m/2]$ si T/T_0 est ramifiée et c_0 est impair. D'après le corollaire 5.23, on a :

- (1) si T/T_0 est non ramifiée, alors mc est impair,
- (2) si T/T_0 est ramifiée, alors m est pair ou égal à 1.

Nous sommes donc dans le champ d'application des résultats des paragraphes 6.5 à 6.9.

Soit une paire $(\mathbf{J}, \rho) \in \Omega$. Notons b l'indice de \mathbf{J} dans \mathbf{J}_θ . D'après les corollaires 6.8 et 6.13, il y a une unique représentation κ_* de \mathbf{J}_b prolongeant η , étant à la fois τ -autoduale et distinguée par $\mathbf{J}_b \cap G^\tau$, et dont le déterminant soit d'ordre une puissance de p . On pose :

$$\Pi(\mathbf{J}, \rho) = \mathrm{ind}_{\mathbf{J}}^G(\kappa_* \otimes \rho).$$

La paire $(\mathbf{J}, \kappa_* \otimes \rho)$ étant par construction un type τ -autodual de G , la représentation $\Pi(\mathbf{J}, \rho)$ est une représentation cuspidale autoduale de G d'endo-classe Θ . Notons maintenant :

$$\mathbf{A}(G, \Theta)$$

l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations cuspidales autoduales d'endo-classe Θ de G .

Proposition 6.16. — (1) L'application de Ω dans $\mathbf{A}(G, \Theta)$ définie par :

$$\Pi : (\mathbf{J}, \rho) \mapsto \Pi(\mathbf{J}, \rho)$$

est surjective.

(2) Deux paires (\mathbf{J}, ρ) et (\mathbf{J}', ρ') de Ω ont la même image par Π si et seulement si $\mathbf{J}' = \mathbf{J}$ et les représentations ρ, ρ' sont conjuguées sous \mathbf{J}_θ .

(3) Si ρ est $\mathbf{J} \cap G^\tau$ -distinguée, alors $\Pi(\mathbf{J}, \rho)$ est G^τ -distinguée.

Démonstration. — Commençons par prouver la surjectivité. Soit π une représentation cuspidale autoduale de G d'endo-classe Θ . Elle contient le caractère simple θ d'après la proposition 3.20. D'après la proposition 6.14, elle contient donc un type τ -autodual (\mathbf{J}, λ) , et la représentation λ se décompose sous la forme $\kappa_* \otimes \rho$. Comme κ_* est τ -autoduale, ρ l'est aussi. Par conséquent, la paire (\mathbf{J}, ρ) appartient à Ω et π est isomorphe à $\Pi(\mathbf{J}, \rho)$.

Soient ensuite (\mathbf{J}, ρ) et (\mathbf{J}', ρ') deux paires de Ω donnant lieu à la même représentation cuspidale autoduale π de G . Alors les types $(\mathbf{J}, \kappa_* \otimes \rho)$ et $(\mathbf{J}', \kappa_* \otimes \rho')$ sont conjugués par un élément $g \in G$ normalisant non seulement \mathbf{J} , mais aussi le caractère simple θ attaché à ces types. On en déduit que $g \in \mathbf{J}_\theta$.

Prouvons le point (3). Si ρ est $\mathbf{J} \cap G^\tau$ -distinguée, alors $\kappa_* \otimes \rho$ est $\mathbf{J} \cap G^\tau$ -distinguée car κ_* est $\mathbf{J} \cap G^\tau$ -distinguée (voir le lemme 3.30). Par application de la formule de Mackey, son induite compacte $\Pi(\mathbf{J}, \rho)$ est G^τ -distinguée. \square

6.11. Dans ce paragraphe, Θ est une endo-classe autoduale de niveau non nul de degré divisant $2n$ (qui n'est plus définie par le caractère simple maximal τ -autodual θ fixé au paragraphe 6.4). On note $\mathbf{A}^+(G, \Theta)$ le sous-ensemble de $\mathbf{A}(G, \Theta)$ formé des représentations distinguées par G^τ . Le résultat suivant met un terme à cette section.

Proposition 6.17. — (1) *L'ensemble $\mathbf{A}(G, \Theta)$ est fini.*

(2) *si $\mathbf{A}^+(G, \Theta)$ n'est pas vide, alors :*

$$|\mathbf{A}^+(G, \Theta)| \geq \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{A}(G, \Theta)|.$$

(3) *Pour que $\mathbf{A}^+(G, \Theta)$ soit non vide, il faut et suffit qu'une représentation cuspidale autoduale de G d'endo-classe Θ contienne un caractère simple τ -autodual.*

Démonstration. — Il n'existe qu'un nombre fini de classes d'inertie de représentations cuspidales d'endo-classe fixée. Pour prouver la finitude de $\mathbf{A}(G, \Theta)$, il suffit donc de prouver qu'il n'existe qu'un nombre fini de représentations cuspidales autoduales de classes d'inertie fixée. Or si π est une représentation cuspidale autoduale, les représentations autoduales qui lui sont inertiuellement équivalentes sont de la forme $\pi\chi$ où χ est un caractère non ramifié de G tel que $\pi\chi^2 \simeq \pi$, ce qui assure que χ est d'ordre fini divisant $4n$ (voir par exemple le début de [23, 2.7]).

Si $\mathbf{A}^+(G, \Theta)$ est non vide, la proposition 6.3 assure qu'il existe une représentation cuspidale autoduale de G d'endo-classe Θ contenant un caractère simple τ -autodual. Inversement, s'il y a une représentation cuspidale autoduale de G d'endo-classe Θ contenant un caractère simple θ τ -autodual, la proposition 6.16 et le lemme 6.15 montrent que :

$$\{\Pi(\mathbf{J}, \rho) \mid (\mathbf{J}, \rho) \in \Omega^+\} \subseteq \mathbf{A}^+(G, \Theta).$$

En outre, notant $[\Omega]$ l'ensemble des classes de \mathbf{J}_θ -conjugaison de Ω et $[\Omega^+]$ l'analogue pour Ω^+ , le cardinal du membre de gauche est égal à celui de $[\Omega^+]$. Comme $\mathbf{A}(G, \Theta)$ et $[\Omega]$ ont le même cardinal, il ne reste qu'à prouver que le cardinal de $[\Omega^+]$ est au moins égal à la moitié de celui de $[\Omega]$, ce qui se déduit du lemme 6.15(1). \square

7. Le niveau 0

Nous traitons dans cette section le cas des représentations de niveau 0. Notons A la F -algèbre centrale simple $\mathbf{M}_r(D)$ et posons $G = A^\times$. Comme au paragraphe 5.1, on fixe un $\alpha \in F^\times$ et un $\kappa \in G$ non central tel que $\kappa^2 = \alpha$, définissant une involution τ de G . Si α est un carré dans F^\times , on se place dans le cadre de la convention 5.3. Sinon, on pose $K = F[\kappa]$, qui est une extension quadratique de F .

7.1. En niveau 0, un caractère simple est le caractère trivial d'un sous-groupe ouvert compact de la forme $\mathbf{U}^1(\mathfrak{a})$ où \mathfrak{a} est un ordre héréditaire de A , et un tel caractère simple est maximal si \mathfrak{a} est maximal. Pour qu'il y ait un caractère simple maximal τ -autodual, il faut et suffit donc qu'il y ait un ordre maximal stable par τ dans A .

Lemme 7.1. — *Supposons que α ne soit pas un carré de F^\times . Un ordre maximal de A est stable par τ si et seulement s'il est normalisé par K^\times .*

Démonstration. — Un ordre de A est stable par τ si et seulement s'il est normalisé par κ . Par conséquent, tout ordre normalisé par K^\times est stable par τ . Inversement, soit \mathfrak{a} un ordre maximal stable par τ . Montrons qu'il est normalisé par K^\times . Pour cela, il est commode d'identifier \mathfrak{a} à l'ordre maximal standard. Son normalisateur dans G est engendré par \mathfrak{a}^\times et une uniformisante ϖ de D telle que $\varpi^d \in F$. Aussi peut-on écrire κ sous la forme $\varpi^k u$ pour un unique $k \in \mathbb{Z}$ et un unique $u \in \mathfrak{a}^\times$. Soit maintenant $\lambda = x + y\kappa \in K^\times$ avec $x, y \in F$ qu'on peut supposer non nuls. Montrons que λ normalise \mathfrak{a} .

Notons val_D la valuation sur D^\times prenant la valeur 1 en n'importe quelle uniformisante de D .

Si $\text{val}_D(x) \neq \text{val}_D(y) + k$, on peut se ramener, en divisant par x ou par $y\kappa$, au cas où λ appartient à $1 + \varpi\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^\times$. Sinon, k est un multiple de d donc $\varpi^k \in F^\times$. On peut alors se ramener au cas où $k = \text{val}_F(x) = \text{val}_F(y) = 0$, donc $\lambda = x + yu \in \mathfrak{a}$. Comme $u^2 = \alpha$ est une unité de F qui n'est pas un carré de F , l'identité $(x + yu)(x - yu) = x^2 - \alpha y^2 \in \mathcal{O}_F^\times$ assure que $\lambda \in \mathfrak{a}^\times$. \square

Proposition 7.2. — *Pour qu'il y ait un ordre maximal stable par τ dans A , il faut et suffit que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :*

- (1) ou bien $\alpha \in F^{\times 2}$,
- (2) ou bien $\alpha \notin F^{\times 2}$ et $e_{K/F}$ divise d .

Démonstration. — Si $\alpha \in F^{\times 2}$, on peut supposer que κ est diagonal et que ses éléments diagonaux sont égaux à 1 ou à -1 , auquel cas il normalise l'ordre maximal standard $\mathbf{M}_r(\mathcal{O}_D)$.

Par ailleurs, pour qu'il y ait un ordre principal de période e de A normalisé par K^\times , il faut et suffit que $e_{K/F}$ divise ed , et un ordre principal est maximal si et seulement si sa période vaut 1. Si $\alpha \notin F^{\times 2}$, on déduit du lemme 7.1 qu'il y a un ordre maximal stable par τ dans A si et seulement si $e_{K/F}$ divise d . \square

Une représentation irréductible de G est de niveau 0 si elle a un vecteur non nul invariant par un sous-groupe de la forme $\mathbf{U}^1(\mathfrak{a})$, où \mathfrak{a} est un ordre maximal. Les ordres maximaux de A étant tous conjugués sous G , une représentation de niveau 0 contient un caractère simple τ -autodual

si et seulement s'il existe un ordre maximal dans A stable par τ . On en déduit immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 7.3. — *Soit π une représentation cuspidale autoduale de niveau 0 de G . Pour que π contienne un caractère simple τ -autodual, il faut et suffit que $\alpha \in F^{\times 2}$ ou que $e_{K/F}$ divise d .*

Remarque 7.4. — La première partie du corollaire 5.24 s'étend aux représentations cuspidales autoduales de niveau 0.

7.2. Classons maintenant, à conjugaison près par G^τ , les ordres maximaux de A stables par τ . On suppose qu'il en existe un, c'est-à-dire que les conditions de la proposition 7.2 sont vérifiées.

Proposition 7.5. — (1) *Le nombre de classes de G^τ -conjugaison d'ordres maximaux de A stables par τ est :*

- (a) *égal à 1 si K/F est ramifiée, ou si K/F est non ramifiée et d est impair,*
- (b) *égal à $\lfloor r/2 \rfloor + 1$ sinon.*

(2) *Si \mathfrak{a} est un tel ordre, il existe un F -automorphisme intérieur de A identifiant \mathfrak{a} à l'ordre maximal standard $\mathbf{M}_m(\mathcal{O}_D)$ et l'action de τ sur $\mathfrak{a}^\times/\mathbf{U}^1(\mathfrak{a}) \simeq \mathrm{GL}_r(\mathbf{k}_D)$ à :*

- (a) *l'action de l'élément d'ordre 2 de $\mathrm{Gal}(\mathbf{k}_D/\mathbf{k}_F)$ si K/F est ramifiée,*
- (b) *l'action par conjugaison d'un $v \in \mathrm{GL}_r(\mathbf{k}_D)$ tel que $v^2 \in \mathbf{k}_D^\times$ et $v^2 \notin \mathbf{k}_D^{\times 2}$ si K/F est non ramifiée et d est impair,*
- (c) *l'action par conjugaison de :*

$$(7.1) \quad \sigma_i = \mathrm{diag}(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1) \in \mathrm{GL}_r(\mathbf{k}_D)$$

où -1 apparaît avec multiplicité i , pour un unique entier $i \in \{0, \dots, \lfloor r/2 \rfloor\}$, si K/F est non ramifiée et d est pair, ou si $\alpha \in F^{\times 2}$.

Démonstration. — Par hypothèse, α est un carré de F^\times ou $e_{K/F}$ divise d . Notons \mathfrak{a} l'ordre maximal standard $\mathbf{M}_r(\mathcal{O}_D)$.

Supposons d'abord que K/F soit ramifiée. Comme d est pair dans ce cas, on peut supposer, grâce au théorème de Skolem-Noether et quitte à remplacer κ par un de ses conjugués sous G , ce qui ne change pas le résultat à prouver, que $K \subseteq D$. On peut aussi supposer que α est une uniformisante de F , de sorte que κ soit une uniformisante de K . Dans ces conditions, l'ordre \mathfrak{a} est stable par τ , qui induit sur $\mathfrak{a}^\times/\mathbf{U}^1(\mathfrak{a}) \simeq \mathrm{GL}_r(\mathbf{k}_D)$ l'unique \mathbf{k}_F -automorphisme de \mathbf{k}_D d'ordre 2. Les autres ordres maximaux sont conjugués à \mathfrak{a} sous G . Étant donné un $y \in G$, l'ordre \mathfrak{a}^y est stable par τ si et seulement si $w = \tau(y)y^{-1} \in \mathfrak{a}^\times$. Raisonnant comme dans la preuve de la proposition 5.27, on prouve qu'il y a un $x \in \mathfrak{a}^\times$ tel que $w = \tau(x)x^{-1}$, donc que \mathfrak{a}^y est conjugué à \mathfrak{a} sous G^τ .

Supposons maintenant K/F non ramifiée et d impair. Comme r est pair dans ce cas, on peut écrire $r = 2k$, identifier A à $\mathbf{M}_k(\mathbf{M}_2(D))$ et supposer que $K \subseteq \mathbf{M}_2(F)$. On peut aussi supposer que $\alpha \in \mu_F$ et $\kappa \in \mathbf{M}_2(\mathcal{O}_F)$. Dans ces conditions, \mathfrak{a} est stable par τ , qui induit sur $\mathrm{GL}_r(\mathbf{k}_D)$ un automorphisme de conjugaison par un élément $v \in \mathrm{GL}_r(\mathbf{k}_D)$ tel que $v^2 = \alpha \in \mathbf{k}_D^\times$, où l'on note encore α l'image de α dans \mathbf{k}_F^\times . En outre, comme d est impair et $\alpha \notin \mathbf{k}_F^{\times 2}$, on a $\alpha \notin \mathbf{k}_D^{\times 2}$. On termine la preuve du cas (2.b) comme celle du cas précédent.

Supposons K/F non ramifiée et d pair. Comme dans le cas (2.a), on suppose que K est inclus dans D . On peut aussi supposer que $\alpha \in \mu_F$ et $\kappa \in \mu_K$. Dans ces conditions, \mathfrak{a} est stable par τ , qui induit sur $GL_r(\mathbf{k}_D)$ l'automorphisme trivial. Les autres ordres maximaux stables par τ sont de la forme \mathfrak{a}^y où y est un élément de G tel que $w = \tau(y)y^{-1} \in \mathfrak{a}^\times$. Raisonnant comme dans la preuve de la proposition 5.27, on prouve qu'il y a un $x \in \mathfrak{a}^\times$ et un entier $i \in \{0, \dots, r\}$ tels que :

$$w = \tau(xt_i)(xt_i)^{-1}, \quad t_i = \text{diag}(\varpi, \dots, \varpi, 1, \dots, 1) \in GL_r(D),$$

où ϖ est une uniformisante de D telle que $\tau(\varpi) = -\varpi$, apparaissant i fois. Il s'ensuit que \mathfrak{a}^y est conjugué à \mathfrak{a}^{t_i} sous G^τ , et on termine comme dans la preuve de la proposition 5.27.

Supposons enfin que $\alpha \in F^{\times 2}$. Dans ce cas, r est pair, qu'on écrit $r = 2k$, et on peut supposer que $\kappa = \text{diag}(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1)$. Dans ces conditions, l'ordre \mathfrak{a} est stable par τ , qui induit sur $GL_r(\mathbf{k}_D)$ l'automorphisme de conjugaison par l'élément σ_k défini par (7.1). On termine la preuve du cas (2.c) comme celle du cas précédent. \square

7.3. On suppose toujours qu'il existe un ordre maximal stable par τ , c'est-à-dire que les conditions de la proposition 7.2 sont vérifiées.

Si \mathfrak{a} est un ordre maximal de A , nous noterons $\mathbf{J}_\mathfrak{a}$ le normalisateur de \mathfrak{a} dans G . Rappelons (voir la remarque 3.9) qu'une paire (\mathbf{J}, ρ) est un type de niveau 0 de G s'il existe un ordre maximal \mathfrak{a} de A tel que :

- (1) $F^\times \mathfrak{a}^\times \subseteq \mathbf{J} \subseteq \mathbf{J}_\mathfrak{a}$ et ρ est une représentation irréductible de \mathbf{J} triviale sur $\mathbf{U}^1(\mathfrak{a})$,
- (2) le normalisateur de ρ dans $\mathbf{J}_\mathfrak{a}$ est égal à \mathbf{J} ,
- (3) la restriction de ρ à \mathfrak{a}^\times est l'inflation d'une représentation cuspidale de $\mathfrak{a}^\times/\mathbf{U}^1(\mathfrak{a})$.

L'induite compacte à G d'un type de niveau 0 est une représentation irréductible cuspidale de niveau 0 de G , et toutes s'obtiennent ainsi. Par cohérence avec le cas du niveau non nul, nous noterons $\mathbf{J}^0 = \mathfrak{a}^\times$ et $\mathbf{J}^1 = \mathbf{U}^1(\mathfrak{a})$. De [46, Proposition 5.20], on tire le résultat suivant.

Lemme 7.6. — *Soit π une représentation cuspidale de niveau 0 de G . Pour que π soit distinguée par G^τ , il faut et suffit qu'elle contienne un type (\mathbf{J}, ρ) de niveau 0 tel que \mathbf{J} soit stable par τ et ρ soit $\mathbf{J} \cap G^\tau$ -distinguée.*

On en déduit la condition nécessaire suivante de distinction. Soit (\mathbf{J}, ρ) un type de niveau 0 de G tel que \mathbf{J} soit stable par τ . Soit \mathfrak{a} l'ordre maximal de A tel que $\mathbf{J} \subseteq \mathbf{J}_\mathfrak{a}$. Il est stable par τ . Quitte à conjuguer par un élément de G , on peut supposer qu'on est dans l'un des cas décrits par la proposition 7.5. En particulier, si K/F est non ramifiée et d est pair, ou si $\alpha \in F^{\times 2}$, il y a un entier $i \in \{0, \dots, \lfloor r/2 \rfloor\}$ défini par la proposition 7.5(2.c).

Proposition 7.7. — (1) *Soit (\mathbf{J}, ρ) un type de niveau 0 de G tel que \mathbf{J} soit stable par τ et la représentation ρ soit distinguée par $\mathbf{J} \cap G^\tau$. Alors :*

- (a) *la représentation ρ est τ -autoduale,*
 - (b) *si K/F est non ramifiée et d est pair, ou si $\alpha \in F^{\times 2}$, l'entier i est égal à $\lfloor r/2 \rfloor$.*
- (2) *Soit (\mathbf{J}, ρ) un type τ -autodual de niveau 0 de G . Alors :*
- (a) *si K/F est ramifiée, l'entier r est impair,*
 - (b) *si K/F est non ramifiée et d est impair, l'entier r est pair,*

(c) si K/F est non ramifiée et d est pair, ou si $\alpha \in F^{\times 2}$, l'entier r est pair ou égal à 1.

Démonstration. — On identifie \mathfrak{a} à l'ordre maximal standard et $\mathfrak{a}^\times/\mathbf{U}^1(\mathfrak{a})$ au groupe $\mathrm{GL}_r(\mathbf{k}_D)$, noté \mathcal{J} . On note ρ la représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_r(\mathbf{k}_D)$ définie par ρ . Dans chacun des cas (a), (b) et (c) de l'item 2, l'action de τ sur $\mathrm{GL}_r(\mathbf{k}_D)$ est décrite par la proposition 7.5.

Dans le cas (2.a), l'entier d est pair et \mathcal{J}^τ est de la forme $\mathrm{GL}_r(\mathbf{k})$ où \mathbf{k} est l'unique sous-corps de \mathbf{k}_D sur lequel celui-ci soit de degré 2. D'après [39], la représentation ρ est distinguée par \mathcal{J}^τ si et seulement si ρ^\vee est isomorphe au conjugué $\bar{\rho}$ de ρ par l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(\mathbf{k}_D/\mathbf{k})$. D'après par exemple [69, Lemma 2.3], si ρ^\vee et $\bar{\rho}$ sont isomorphes, alors r est impair.

Dans le cas (2.b), l'entier r est pair et \mathcal{J}^τ est de la forme $\mathrm{GL}_{r/2}(\mathbf{k})$ où \mathbf{k} est une extension quadratique de \mathbf{k}_D dans $\mathbf{M}_r(\mathbf{k}_D)$. Selon [29, Lemme 4.3.11], la représentation ρ est distinguée par \mathcal{J}^τ si et seulement si elle est autoduale.

Dans le cas (2.c), le sous-groupe \mathcal{J}^τ est égal à $\mathrm{GL}_i(\mathbf{k}_D) \times \mathrm{GL}_{r-i}(\mathbf{k}_D)$. D'après par exemple [69, Proposition 2.14, Lemma 2.19], la représentation ρ est distinguée par \mathcal{J}^τ si et seulement si i est égal à $\lfloor r/2 \rfloor$ et ρ est autoduale. D'après par exemple [69, Lemma 2.17], si ρ est autoduale, alors r est pair ou égal à 1. Ceci prouve (2) et (1.b).

Supposons maintenant que ρ soit distinguée par $\mathbf{J} \cap G^\tau$. Dans tous les cas, d'après ce qui précède, la représentation ρ est τ -autoduale, donc les restrictions à \mathbf{J}^0 de ρ^{τ^\vee} et ρ sont isomorphes. Il y a donc un caractère non ramifié χ de \mathbf{J} tel que $\rho^{\tau^\vee} \simeq \rho\chi$. Notons π la représentation cuspidale G^τ -distinguée obtenue par induction compacte de (\mathbf{J}, ρ) à G . Elle est autoduale d'après le théorème 6.1. Elle contient donc à la fois ρ et $\rho^{\tau^\vee} \simeq \rho\chi$, ce dont on déduit que χ est trivial. \square

7.4. Fixons un ordre maximal \mathfrak{a} de A stable par τ , et notons $\Omega_{\mathfrak{a}}$ l'ensemble des types τ -autoduaux (\mathbf{J}, ρ) de niveau 0 de G tels que \mathbf{J} normalise \mathfrak{a} .

Lemme 7.8. — *L'ensemble $\Omega_{\mathfrak{a}}$ est fini, et il existe un sous-ensemble $\Omega_{\mathfrak{a}}^+ \subseteq \Omega_{\mathfrak{a}}$ tel que :*

- (1) *le cardinal de $\Omega_{\mathfrak{a}}$ est le double de celui de $\Omega_{\mathfrak{a}}^+$,*
- (2) *pour tout $(\mathbf{J}, \rho) \in \Omega_{\mathfrak{a}}^+$, la représentation ρ est $\mathbf{J} \cap G^\tau$ -distinguée.*

Démonstration. — Même preuve qu'en niveau non nul (voir le lemme 6.15). \square

Pour tout $(\mathbf{J}, \rho) \in \Omega_{\mathfrak{a}}$, on pose :

$$\Pi(\mathbf{J}, \rho) = \mathrm{ind}_{\mathbf{J}}^G(\rho).$$

La représentation $\Pi(\mathbf{J}, \rho)$ est une représentation cuspidale autoduale de niveau 0 de G . Notons $\mathbf{A}(G, \mathbf{0})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations cuspidales autoduales de G de niveau 0.

Proposition 7.9. — (1) *L'application de $\Omega_{\mathfrak{a}}$ dans $\mathbf{A}(G, \mathbf{0})$ définie par :*

$$\Pi : (\mathbf{J}, \rho) \mapsto \Pi(\mathbf{J}, \rho)$$

est surjective.

(2) *Deux paires (\mathbf{J}, ρ) et (\mathbf{J}', ρ') de $\Omega_{\mathfrak{a}}$ ont la même image par Π si et seulement si $\mathbf{J}' = \mathbf{J}$ et les représentations ρ, ρ' sont conjuguées sous $\mathbf{J}_{\mathfrak{a}}$.*

(3) *Si ρ est $\mathbf{J} \cap G^\tau$ -distinguée, alors $\Pi(\mathbf{J}, \rho)$ est G^τ -distinguée.*

Démonstration. — Même preuve qu'en niveau non nul (voir la proposition 6.16), en remplaçant la proposition 6.14 par le lemme 7.6. \square

Enfin, nous avons le résultat suivant. Notons $\mathbf{A}^+(G, \mathbf{0})$ le sous-ensemble de $\mathbf{A}(G, \mathbf{0})$ formé des représentations distinguées par G^τ .

Proposition 7.10. — (1) *L'ensemble $\mathbf{A}(G, \mathbf{0})$ est fini.*
 (2) *Si $\mathbf{A}^+(G, \mathbf{0})$ n'est pas vide, alors :*

$$|\mathbf{A}^+(G, \mathbf{0})| \geq \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{A}(G, \mathbf{0})|.$$

(3) *Pour que $\mathbf{A}^+(G, \mathbf{0})$ soit non vide, il faut et suffit qu'il existe à la fois une représentation cuspidale autoduale de G de niveau 0 et un ordre maximal dans A stable par τ .*

Démonstration. — Même preuve qu'en niveau non nul (voir la proposition 6.17), en remplaçant la proposition 6.3 par le lemme 7.6, la proposition 6.16 par la proposition 7.9 et le lemme 6.15 par le lemme 7.8. \square

Remarque 7.11. — Dans le cas où G est déployé et α n'est pas un carré de F^\times , Chommaux et Matringe [28] donnent directement une condition nécessaire et suffisante pour qu'une représentation cuspidale de niveau 0 de G soit distinguée par G^τ , en termes d'objets (appelés paires admissibles modérées) paramétrant les types de niveau 0 de G . Quand G est une forme intérieure quelconque, la preuve de [28, Theorem 2.1] reste valable pour les représentations cuspidales dont le transfert à $GL_{2n}(F)$ est cuspidal. Pour une représentation cuspidale quelconque, la paramétrisation d'un type de niveau 0 par une paire admissible modérée (voir [74]) est moins transparente et ne permet pas une adaptation immédiate de [28]. Nous avons préféré procéder ici comme en niveau non nul, de façon à avoir une approche uniforme.

7.5. Dans ce paragraphe, nous montrons que, contrairement au cas de niveau non nul (proposition 6.14) et à celui de l'involution galoisienne traitée dans [3], l'existence d'un caractère simple τ -autodual n'entraîne pas celle d'un type τ -autodual.

Supposons par exemple que $r = 1$ et que K/F soit non ramifiée. Désignons par q le cardinal du corps résiduel de F , et fixons un caractère non quadratique ρ de \mathbf{k}_D^\times tel que $\rho^{q^n} = \rho^{-1}$. On note \mathbf{J} son normalisateur dans D^\times et b l'indice de \mathbf{J} dans D^\times . Si ϖ est une uniformisante de D telle que ϖ^d soit une uniformisante de F , alors \mathbf{J} est engendré par ϖ^b et le groupe des unités de D . Soit enfin ρ un caractère de \mathbf{J} prolongeant ρ et tel que $\rho(\varpi^b) \in \{-1, 1\}$. Alors (\mathbf{J}, ρ) est un type de niveau 0, son induite compacte π à D^\times est irréductible (de dimension b) et autoduale, et pourtant ρ ne peut pas être τ -autodual car le caractère ρ n'est pas quadratique.

8. Calcul du facteur epsilon

Dans toute cette section, on suppose que l'élément α de la section 5 n'est pas un carré de F^\times , et on pose $K = F[\kappa]$. On fixe une clôture séparable \overline{F} de F et un plongement de K dans \overline{F} . On note \mathcal{W}_F le groupe de Weil de \overline{F} sur F . On rappelle que $\omega_{K/F}$ désigne le caractère quadratique

de F^\times de noyau $N_{K/F}(K^\times)$, et que ψ est un caractère additif de F , trivial sur \mathfrak{p}_F mais pas sur \mathcal{O}_F . On pose $\psi_K = \psi \circ \text{tr}_{K/F}$.

Le résultat principal de cette section est le théorème 8.6 et la proposition 8.7, qui calculent le facteur epsilon du paragraphe 1.1 pour une représentation cuspidale autoduale de G .

8.1. Dans un premier temps, on considère des représentations cuspidales de $\text{GL}_{2n}(F)$. Si π est une telle représentation, on lui associe :

- son caractère central c_π , qui est un caractère de F^\times ,
- son paramètre de Langlands ϕ , qui est une représentation irréductible de \mathcal{W}_F de dimension $2n$,

et on note ϕ_K la restriction de ϕ à \mathcal{W}_K . Rappelons (voir [80]) qu'il correspond à ϕ_K un facteur epsilon, que l'on note $\varepsilon(s, \phi_K, \psi_K)$. On pose :

$$(8.1) \quad \mathbf{e}_K(\pi) = \mathbf{e}_K(\phi) = \varepsilon\left(\frac{1}{2}, \phi_K, \psi_K\right),$$

qui ne dépend pas du choix de ψ . Il sera commode de poser $\mathbf{e}_F(V) = \varepsilon(1/2, V, \psi)$ pour toute représentation V de dimension finie de \mathcal{W}_F . Écrivons ([22, (30.4.2)]) :

$$(8.2) \quad \mathbf{e}_F(\text{Ind}_{K/F}(\phi_K)) = \lambda_{K/F}^{2n} \cdot \varepsilon\left(\frac{1}{2}, \phi_K, \psi_K\right)$$

où $\text{Ind}_{K/F}$ désigne l'induction de \mathcal{W}_K à \mathcal{W}_F et $\lambda_{K/F}$ la constante de Langlands ([22, (30.4.1)]). Le carré de cette constante étant égal à $\omega_{K/F}(-1)$ (voir [22, (30.4.3)]), la quantité (8.2) devient $\omega_{K/F}(-1)^n \cdot \mathbf{e}_K(\pi)$. D'un autre côté, on a :

$$(8.3) \quad \mathbf{e}_F(\text{Ind}_{K/F}(\phi_K)) = \mathbf{e}_F(\phi \otimes \text{Ind}_{K/F}(1)) = \mathbf{e}_F(\phi) \cdot \mathbf{e}_F(\phi\omega_{K/F})$$

où $\omega_{K/F}$ est considéré comme un caractère de \mathcal{W}_F *via* le morphisme de réciprocité d'Artin de la théorie du corps de classes. D'après les propriétés de la correspondance de Langlands locale, le facteur $\mathbf{e}_F(\phi)$ est égal au facteur epsilon de Godement-Jacquet $\varepsilon(1/2, \pi, \psi)$, que l'on note $\mathbf{e}_F(\pi)$. De façon analogue, $\mathbf{e}_F(\phi\omega_{K/F})$ est égal à $\mathbf{e}_F(\pi\omega_{K/F})$. On trouve donc :

$$(8.4) \quad \mathbf{e}_K(\pi) = \omega_{K/F}(-1)^n \cdot \mathbf{e}_F(\pi) \cdot \mathbf{e}_F(\pi\omega_{K/F}).$$

Nous allons pousser ce calcul plus loin, en supposant que π est autoduale.

8.2. Dans ce paragraphe, π est autoduale de niveau non nul. Le résultat suivant exprime le signe $\mathbf{e}_K(\pi)$ en fonction de données relevant de la description de π en termes de types grâce à [18, Théorème 4.1].

Proposition 8.1. — *Soit π une représentation cuspidale autoduale de $\text{GL}_{2n}(F)$, de niveau non nul. Soit $[\mathfrak{a}, \beta]$ une strate simple maximale de $\mathbf{M}_{2n}(F)$ telle que π contienne un caractère simple de $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$. Alors on a :*

$$(8.5) \quad \mathbf{e}_K(\pi) = c_\pi(-1) \cdot \omega_{K/F}((-1)^n \det \beta).$$

Démonstration. — Supposons d'abord que π est une représentation cuspidale de $GL_{2n}(F)$ de niveau non nul, pas forcément autoduale. Soit $[\mathfrak{a}, \beta]$ une strate simple maximale de $\mathbf{M}_{2n}(F)$ telle que π contienne un caractère simple de $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$. Invoquant [18, Théorème 4.1], on a :

$$(8.6) \quad \mathbf{e}_F(\pi\chi) = \chi(\det \beta)^{-1} \cdot \mathbf{e}_F(\pi)$$

pour tout caractère modérément ramifié χ de F^\times . Appliquant ce résultat au caractère quadratique $\omega_{K/F}$, on trouve que $\mathbf{e}_F(\pi\omega_{K/F})$ est égal à $\omega_{K/F}(\det \beta) \cdot \mathbf{e}_F(\pi)$. D'après [17], on a l'identité $\mathbf{e}_F(\pi) \cdot \mathbf{e}_F(\pi^\vee) = c_\pi(-1)$. Supposant maintenant que π est autoduale, on obtient le résultat annoncé en appliquant (8.4). \square

Nous allons pousser plus loin le calcul de $\mathbf{e}_K(\pi)$ en choisissant pour $[\mathfrak{a}, \beta]$ une strate particulière.

Proposition 8.2. — *Soit π une représentation cuspidale autoduale de $GL_{2n}(F)$ de niveau non nul, d'endo-classe notée Θ . On note T/T_0 l'extension quadratique qui lui est associée au paragraphe 4.3. On a :*

$$(8.7) \quad \mathbf{e}_K(\pi) = c_\pi(-1) \cdot \omega_{T/T_0}(\alpha)^{2n/[T:F]}.$$

Démonstration. — Comme au paragraphe 4.2, fixons un élément $\sigma \in GL_{2n}(F)$ tel que $\sigma^2 = 1$, de polynôme caractéristique $(X^2 - 1)^n$, et notons encore σ l'automorphisme de conjugaison par σ . D'après la remarque 4.7, il y a une strate simple maximale σ -autoduale $[\mathfrak{a}, \beta]$ dans $\mathbf{M}_{2n}(F)$ telle que π contienne un caractère simple σ -autodual de $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$. Posons $E = F[\beta]$ et $E_0 = F[\beta^2]$, et identifions T à la sous-extension modérément ramifiée maximale de E sur F et T_0 à $T \cap E_0$. Le degré de Θ est égal à $[E : F]$. Posant $m = 2n/[E : F]$, on a :

$$\det \beta = N_{E/F}(\beta)^m = N_{E_0/F}(-\beta^2)^m = (-1)^n \cdot N_{E_0/F}(\beta^2)^m$$

car $N_{E/E_0}(\beta) = -\beta^2$ et $m[E_0 : F] = n$. Appliquant la proposition 8.1, on trouve :

$$c_\pi(-1) \cdot \mathbf{e}_K(\pi) = \omega_{K/F}(N_{E_0/F}(\beta^2))^m = (\alpha, N_{E_0/F}(\beta^2))_F^m$$

où $(\cdot, \cdot)_F$ désigne le symbole de Hilbert sur F .

Posons maintenant $\gamma = N_{E/T}(\beta)$. Comme $[E : T]$ est une puissance de p , qui est impair, on a $\sigma(\gamma) = -\gamma$. On en déduit d'une part que T est engendré par γ sur T_0 , et d'autre part que :

$$N_{E_0/F}(\beta^2) = (-1)^{[E_0:F]} \cdot N_{E/F}(\beta) = (-1)^{[E_0:F]} \cdot N_{T/F}(\gamma) = N_{T_0/F}(\gamma^2).$$

Par conséquent, on a $(\alpha, N_{E_0/F}(\beta^2))_F = (\alpha, N_{T_0/F}(\gamma^2))_F$. Les propriétés du symbole de Hilbert vis-à-vis du changement de base (voir par exemple [33, Proposition IV.5.1(8)]) assurent que :

$$(\alpha, N_{T_0/F}(\gamma^2))_F = (\alpha, \gamma^2)_{T_0}$$

et le membre de droite est égal à $\omega_{T/T_0}(\alpha)$. On conclut en observant que $2n/[T : F] = m[E : T]$ où $[E : T]$ est impair. \square

8.3. On suppose maintenant que π est autoduale de niveau 0.

Théorème 8.3. — *Soit π une représentation cuspidale autoduale de niveau 0 de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$.*

(1) On a :

$$\mathbf{e}_K(\pi) = (-1)^{f_{K/F}}.$$

(2) Le caractère central de π est quadratique et non ramifié.

Démonstration. — Dans le cas où le caractère central de π est trivial, le résultat est donné par [28, Theorem 6.1]. On prendra garde au fait que les auteurs de [28] utilisent une normalisation différente et calculent :

$$\mathbf{e}_F(\mathrm{Ind}_{K/F}(\phi_K)) = \omega_{K/F}(-1)^n \cdot \mathbf{e}_K(\pi).$$

Dans le cas général, π est paramétré, comme expliqué dans [28], par un caractère modérément ramifié χ de L^\times , où L est une extension non ramifiée de degré $2n$ de F , avec les propriétés suivantes :

- le caractère χ est distinct de tous ses conjugués sous $\mathrm{Gal}(L/F)$,
- le fait que π soit autoduale se traduit par le fait que χ est trivial sur $N_{L/L_0}(L^\times)$, où L_0 est la sous-extension de degré n de F dans L ,
- le caractère central de π est égal à la restriction de χ à F^\times .

En particulier, le caractère χ est trivial sur $\mathcal{O}_{L_0}^\times$, ce qui prouve (2), le fait que c_π soit quadratique provenant de ce que π est autoduale. Supposons que le caractère central de π soit non trivial. Fixons un caractère non ramifié φ de F^\times tel que φ^{2n} soit d'ordre 2. Alors $\pi\varphi$ est une représentation cuspidale autoduale de niveau 0 et de caractère central trivial. On a $\mathbf{e}_K(\pi\varphi) = (-1)^{f_{K/F}}$. Par ailleurs, on a :

$$\mathbf{e}_K(\pi\varphi) = \omega_{K/F}(-1)^n \cdot \mathbf{e}_F(\pi\varphi) \cdot \mathbf{e}_F(\pi\varphi\omega_{K/F})$$

d'après (8.4). Le résultat suit de ce que $\mathbf{e}_F(\pi\varphi) = \mathbf{e}_F(\pi)$ et $\mathbf{e}_F(\pi\varphi\omega_{K/F}) = \mathbf{e}_F(\pi\omega_{K/F})$ car φ est un caractère non ramifié et ni π ni $\pi\omega_{K/F}$ ne sont des caractères non ramifiés de F^\times (voir Tate [80, (3.4.6)]). \square

8.4. On considère maintenant des représentations cuspidales autoduales d'une forme intérieure G de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$. Si π est une telle représentation, on note Θ son endo-classe et δ son degré paramétrique. On lui associe :

- son caractère central c_π , qui est un caractère de F^\times ,
- son transfert de Jacquet-Langlands à $\mathrm{GL}_{2n}(F)$, noté π' ,
- le paramètre de Langlands ϕ de π' , qui est une représentation irréductible de dimension $2n$ du groupe de Weil-Deligne $\mathcal{W}_F \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

Comme au paragraphe 3.5, on écrit π' sous la forme $L(\pi'_0, s)$, où s est égal à $2n/\delta$ selon (3.9) et où π'_0 est une représentation cuspidale autoduale de $\mathrm{GL}_\delta(F)$, d'endo-classe Θ selon le théorème 5.20. Comme dans le cas déployé, on pose :

$$(8.8) \quad \mathbf{e}_K(\pi) = \mathbf{e}_K(\pi') = \mathbf{e}_K(\phi) = \varepsilon \left(\frac{1}{2}, \phi_K, \psi_K \right),$$

qui ne dépend pas du choix de ψ .

Lemme 8.4. — (1) *Le degré paramétrique δ est soit pair, soit égal à 1.*
 (2) *Si $\delta = 1$, alors $r = 1$ et Θ est nulle.*

Démonstration. — Comme en (3.8), écrivons δ sous la forme $mb[E : F]$. Si Θ est non nulle, on déduit (1) de ce que $[E : F]$ est pair. Si Θ est nulle, le lemme 5.19 appliqué à π'_0 assure que δ , qui est égal à mb , est pair ou égal à 1.

Ensuite, rappelons que $r = \delta/(d, \delta)$ d'après (3.10). Si $\delta = 1$, alors d'une part $r = 1$, et d'autre part π'_0 est un caractère quadratique (donc modérément ramifié car $p \neq 2$) de F^\times , donc Θ est nulle. \square

Proposition 8.5. — *Soit π une représentation cuspidale autoduale de G . Si $\delta \neq 1$, on a :*

$$(8.9) \quad \mathbf{e}_K(\pi) = \mathbf{e}_K(\pi'_0)^s.$$

Démonstration. — Comme au paragraphe 8.1 (voir (8.2) et (8.3)), on a :

$$\mathbf{e}_K(\pi) = \omega_{K/F}(-1)^n \cdot \mathbf{e}_F(\pi') \cdot \mathbf{e}_F(\pi' \omega_{K/F}),$$

où $\mathbf{e}_F(\pi')$ désigne le facteur de Godement-Jacquet $\varepsilon(1/2, \pi', \psi)$. Comme $\delta \neq 1$, la représentation cuspidale π'_0 n'est pas un caractère non ramifié de F^\times . On a donc $\mathbf{e}_F(\pi') = \mathbf{e}_F(\pi'_0)^s$, et on a un résultat similaire pour $\pi' \omega_{K/F}$. Comme s divise n d'après le lemme 8.4, on trouve :

$$\mathbf{e}_K(\pi) = \omega_{K/F}(-1)^n \cdot \mathbf{e}_F(\pi') \cdot \mathbf{e}_F(\pi' \omega_{K/F}) = \left(\omega_{K/F}(-1)^{n/s} \cdot \mathbf{e}_F(\pi'_0) \cdot \mathbf{e}_F(\pi'_0 \omega_{K/F}) \right)^s$$

ce qui donne le résultat voulu. \square

On en déduit le théorème suivant.

Théorème 8.6. — *Soit π une représentation cuspidale autoduale de G de niveau non nul. On a alors :*

$$\mathbf{e}_K(\pi) = c_\pi(-1) \cdot \omega_{T/T_0}(\alpha)^{2n/[T:F]}$$

où T/T_0 est l'extension quadratique associée à l'endo-classe de π .

Démonstration. — La représentation π étant de niveau non nul, π'_0 est niveau non nul. On peut donc lui appliquer la proposition 8.2, ce qui donne :

$$\mathbf{e}_K(\pi'_0) = c_{\pi'_0}(-1) \cdot \omega_{T/T_0}(\alpha)^{\delta/[T:F]}.$$

On en déduit également, d'après le lemme 8.4, que $\delta \neq 1$. On peut donc appliquer la proposition 8.5, qui donne :

$$\mathbf{e}_K(\pi) = c_{\pi'_0}(-1)^s \cdot \omega_{T/T_0}(\alpha)^{s\delta/[T:F]} = c_{\pi'}(-1) \cdot \omega_{T/T_0}(\alpha)^{2n/[T:F]}.$$

La correspondance de Jacquet-Langlands préservant le caractère central, on obtient le résultat voulu. \square

Dans le cas de niveau 0, on a le résultat suivant.

Proposition 8.7. — *Soit π une représentation cuspidale autoduale de G de niveau 0.*

(1) Si $\delta = 1$, c'est-à-dire si $r = 1$ et $\pi = \chi \circ \text{Nrd}_{A/F}$ pour un caractère quadratique χ de F^\times , on a :

$$\mathbf{e}_K(\pi) = \begin{cases} -1 & \text{si } \chi \text{ est trivial sur } \mathbf{N}_{K/F}(K^\times), \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(2) Sinon, on a $\mathbf{e}_K(\pi) = (-1)^{sf_{K/F}}$.

Démonstration. — Dans le premier cas, c'est-à-dire si $\delta = 1$, le transfert de π à $\text{GL}_{2n}(F)$ est la représentation de Steinberg tordue par le caractère $\chi \circ \det$ et le calcul a été fait dans [27, Section 4]. Dans le second cas, le résultat suit de la proposition 8.5 et du théorème 8.3. \square

Pour toute représentation cuspidale autoduale π de G , on pose :

$$\mathbf{w}_K(\pi) = c_\pi(-1) \cdot \mathbf{e}_K(\pi).$$

On observe que, compte tenu du théorème 8.3(2), on a $\mathbf{w}_K(\pi) = \mathbf{e}_K(\pi)$ quand π est de niveau 0. On déduit de ce qui précède les résultats suivants (voir les paragraphes 6.10, 6.11 et 7.4 pour les notations).

Corollaire 8.8. — Soit π une représentation cuspidale autoduale de G de niveau non nul. La représentation π contient un caractère simple τ -autodual si et seulement si $\mathbf{w}_K(\pi) = (-1)^r$.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer les théorèmes 8.6 et 5.22. \square

Corollaire 8.9. — Soit π une représentation cuspidale autoduale de G d'endo-classe Θ .

(1) Si π est distinguée par G^τ , alors $\mathbf{w}_K(\pi) = (-1)^r$.

(2) Si $\mathbf{w}_K(\pi) = (-1)^r$, alors $\mathbf{A}^+(G, \Theta)$ est non vide et :

$$(8.10) \quad |\mathbf{A}^+(G, \Theta)| \geq \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{A}(G, \Theta)|.$$

Démonstration. — Dans le cas où π est de niveau non nul, l'assertion (1) suit de la proposition 6.3 et du corollaire 8.8, et l'assertion (2) suit du corollaire 8.8 et de la proposition 6.17.

On suppose dans toute la suite de la preuve que π est de niveau 0. Prouvons l'assertion (1). Supposons d'abord que $\delta = 1$, c'est-à-dire que $r = 1$ et $\pi = \chi \circ \text{Nrd}_{A/F}$ pour un caractère quadratique χ de F^\times . Le fait que π soit G^τ -distingué signifie que π est trivial sur G^τ , c'est-à-dire que le caractère $\chi \circ \mathbf{N}_{K/F}$ est trivial sur K^\times . Appliquant la proposition 8.7, on en déduit que $\mathbf{e}_K(\pi) = -1 = (-1)^r$. Supposons maintenant que $\delta \neq 1$. D'après la proposition 8.7, il s'agit de prouver que :

$$(8.11) \quad (-1)^{sf_{K/F}} = (-1)^r.$$

D'après le lemme 7.6 et la proposition 7.7(1), la représentation cuspidale distinguée π contient un type τ -autodual (\mathbf{J}, ρ) de niveau 0, tel que ρ soit $\mathbf{J} \cap G^\tau$ -distingué. Considérons tour à tour les trois cas de la proposition 7.7(2). Dans le cas (2.c), l'entier r est pair ou égal à 1. Le cas où $r = 1$, qui entraîne que ρ est un caractère quadratique, n'est possible que si $s = 2n$, ce qui a été exclu. Donc r est pair et, $f_{K/F}$ étant pair, l'identité (8.11) est vérifiée. Dans le cas (2.b), r et $f_{K/F}$ sont pairs, ce qui donne encore (8.11). Dans le cas (2.a) enfin, $f_{K/F}$ et r sont impairs. Il nous reste donc à prouver que s est impair dans ce cas.

Supposons donc que K/F soit ramifiée. Notons ρ la représentation cuspidale de $GL_r(\mathbf{k}_D)$ définie par ρ , et notons ξ le caractère \mathbf{k}_D -régulier de \mathbf{t}^\times paramétrant ρ comme dans la preuve du lemme 6.9. Posant $b = d/s$, et notant q le cardinal de \mathbf{k}_F et N l'ordre de ξ , on sait que l'ordre de q dans $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ est égal à rb . L'ordre de q^n vaut donc :

$$\frac{rb}{(rb, n)} = \frac{2rb}{(2rb, rd)} = \frac{2}{(2, s)}.$$

Or d'après la proposition 7.7, la représentation ρ^\vee est isomorphe au conjugué de ρ par l'élément d'ordre 2 de $\text{Gal}(\mathbf{k}_D/\mathbf{k}_F)$. D'après par exemple [69, Lemma 2.3], cela implique que $\xi^{q^n} = \xi^{-1}$, c'est-à-dire que l'ordre de q^n dans $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ est égal à 2. On en déduit que s est impair. Ceci termine la preuve de l'assertion (1).

Supposons enfin que $\mathbf{A}^+(G, \mathbf{0})$ soit vide. D'après les propositions 7.10 et 7.2, l'extension K/F est ramifiée et d est impair. Dans ce cas, r est pair et s (qui divise d) est impair, et la proposition 8.7 assure que $e_K(\pi) \neq (-1)^r$. L'inégalité (8.10) suit alors de la proposition 7.10. \square

Remarque 8.10. — La preuve du corollaire 8.9 montre plus précisément que, quand K/F est ramifiée, s est impair pour toute représentation $\pi \in \mathbf{A}(G, \mathbf{0})$. On en déduit que la valeur $e_K(\pi)$ est la même pour toutes les $\pi \in \mathbf{A}(G, \mathbf{0})$ telles que $\delta \neq 1$. Lorsque $\delta = 1$ en revanche (ce qui ne peut se produire que si $r = 1$), considérons les caractères autoduaux $\pi(\chi) = \chi \circ \text{Nrd}_{A/F}$ où χ est un caractère quadratique de F^\times . Ils sont tous les quatre dans $\mathbf{A}(G, \mathbf{0})$, mais $e_K(\pi(\chi)) = -1$ si et seulement si χ est trivial sur $N_{K/F}(K^\times)$. Voir le lemme 9.4.

9. La conjecture de Prasad et Takloo-Bighash

Soit A une F -algèbre centrale simple de degré réduit $2n$, et posons $G = A^\times$. C'est une forme intérieure du groupe $G' = \text{GL}_{2n}(F)$.

9.1. On fixe une endo-classe autoduale Θ de degré divisant $2n$. On rappelle que $\mathbf{A}(G, \Theta)$ est l'ensemble des (classes d'isomorphisme de) représentations cuspidales autoduales de G d'endo-classe Θ . Étant donné une telle représentation, il lui correspond son paramètre de Langlands ϕ , qui est une représentation irréductible autoduale de dimension $2n$ de $W_F \times \text{SL}_2(\mathbb{C})$. Selon le lemme de Schur, le \mathbb{C} -espace vectoriel des homomorphismes de ϕ vers ϕ^\vee est de dimension 1. Soit $f : \phi \rightarrow \phi^\vee$ un isomorphisme. Identifiant canoniquement $\phi^{\vee\vee}$ à ϕ , l'isomorphisme contragrédient f^\vee est donc égal à $\chi(\phi)f$ pour un unique signe $\chi(\phi) \in \{-1, 1\}$, indépendant du choix de f .

Définition 9.1. — On dit que ϕ est de parité *orthogonale* si $\chi(\phi) = 1$, et de parité *symplectique* si $\chi(\phi) = -1$.

Notons $\mathbf{A}^{\text{sp}}(G, \Theta)$ et $\mathbf{A}^{\text{or}}(G, \Theta)$ les ensembles de représentations π dans $\mathbf{A}(G, \Theta)$ dont le paramètre de Langlands soit de parité symplectique et orthogonale. Ainsi l'ensemble $\mathbf{A}(G, \Theta)$ est la réunion disjointe de $\mathbf{A}^{\text{sp}}(G, \Theta)$ et $\mathbf{A}^{\text{or}}(G, \Theta)$.

Lemme 9.2. — Les ensembles $\mathbf{A}^{\text{sp}}(\text{GL}_{2n}(F), \Theta)$ et $\mathbf{A}^{\text{or}}(\text{GL}_{2n}(F), \Theta)$ ont le même cardinal.

Démonstration. — Si Θ est non nulle et $m = 2n/\deg(\Theta)$ ne vérifie pas les conditions du lemme 4.9, les ensembles $\mathbf{A}(\mathrm{GL}_{2n}(F), \Theta)$, $\mathbf{A}^{\mathrm{sp}}(\mathrm{GL}_{2n}(F), \Theta)$ et $\mathbf{A}^{\mathrm{or}}(\mathrm{GL}_{2n}(F), \Theta)$ sont tous les trois vides. Nous supposons donc par la suite que ces conditions sont vérifiées. (Si Θ est nulle, la condition du lemme 4.10 est toujours vérifiée.)

La preuve commence comme celle du lemme 4.9. En particulier, on a une représentation κ de \mathbf{J} prolongeant η telle que $\kappa^{\vee\sigma}$ soit isomorphe à κ . Selon le paragraphe 3.5, on a une bijection (3.7) entre :

- (1) classes d'isomorphisme de représentations irréductibles ρ de \mathbf{J} triviale sur \mathbf{J}^1 dont la restriction à \mathbf{J}^0 soit l'inflation d'une représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_m(\mathfrak{l})$,
- (2) et classes d'isomorphisme de représentations cuspidales de G d'endo-classe Θ .

Comme $\kappa^{\vee\sigma}$ est isomorphe à κ , elle induit une bijection entre représentations ρ telles que $\rho^{\vee\sigma}$ soit isomorphe à ρ et l'ensemble $\mathbf{A}(G, \Theta)$. À partir de là, on procède exactement comme dans la preuve de [10, Lemma 7.2], en faisant agir sur $\mathbf{A}(G, \Theta)$ le groupe X des caractères modérément ramifiés de T^\times , d'ordre divisant $2m$, dont la restriction à \mathcal{O}_T^\times soit quadratique. On montre que chaque $\pi \in \mathbf{A}(G, \Theta)$ a une orbite sous X de cardinal 4, contenant exactement deux éléments de $\mathbf{A}^{\mathrm{sp}}(G, \Theta)$ et deux de $\mathbf{A}^{\mathrm{or}}(G, \Theta)$. \square

Remarque 9.3. — On comparera ce lemme à [10, Lemma 7.2], qui s'appuie sur une définition d'endo-classe autoduale différente de la nôtre, quoique probablement équivalente.

Lemme 9.4. — On a :

$$(9.1) \quad |\mathbf{A}^{\mathrm{sp}}(G, \Theta)| = \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{A}(G, \Theta)| + \begin{cases} 2 & \text{si } \Theta \text{ est nulle et } r = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. — D'après le paragraphe 5.9, la correspondance de Jacquet-Langlands et la classification des représentations essentiellement de carré intégrable de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ induisent une correspondance bijective :

$$\mathbf{A}(G, \Theta) \leftrightarrow \coprod_{\delta} \mathbf{A}(\mathrm{GL}_{\delta}(F), \Theta)$$

où l'union disjointe dans le membre de droite porte sur l'ensemble Δ des entiers de la forme $\delta(\pi)$ pour $\pi \in \mathbf{A}(G, \Theta)$: voir le paragraphe 3.5 et le lemme 5.19 qui décrit précisément l'ensemble Δ . Étant donné une représentation cuspidale $\pi \in \mathbf{A}(G, \Theta)$, son transfert à $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ s'écrit $L(\pi'_0, s)$ avec $s = 2n/\delta(\pi)$. Son paramètre de Langlands ϕ est égal à $\phi_0 \otimes \mathrm{Sym}^{s-1}$, où ϕ_0 est le paramètre de Langlands de π'_0 et Sym^{s-1} est la représentation irréductible de dimension s de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, chacune des deux étant autoduale. Selon [34, Lemma 3.2], on a $\chi(\phi) = \chi(\phi_0) \cdot \chi(\mathrm{Sym}^{s-1})$. Puis, selon [38, Lemma 3.2.15], on a $\chi(\mathrm{Sym}^{s-1}) = (-1)^{s-1}$. Il s'ensuit que ϕ est de parité symplectique si et seulement si :

- ou bien s est impair et π'_0 est de parité symplectique,
- ou bien s est pair et π'_0 est de parité orthogonale,

sachant que, si $\delta = 1$, tout caractère autodual (c'est-à-dire quadratique) de F^\times est de parité orthogonale. On en déduit une bijection :

$$\mathbf{A}^{\text{sp}}(G, \Theta) \leftrightarrow \coprod_{2n/\delta \text{ impair}} \mathbf{A}^{\text{sp}}(\text{GL}_\delta(F), \Theta) \cup \coprod_{2n/\delta \text{ pair}} \mathbf{A}^{\text{or}}(\text{GL}_\delta(F), \Theta).$$

D'après le lemme 9.2, pour tout $\delta \neq 1$, les ensembles $\mathbf{A}^{\text{sp}}(\text{GL}_\delta(F), \Theta)$ et $\mathbf{A}^{\text{or}}(\text{GL}_\delta(F), \Theta)$ ont le même cardinal, ils sont disjoints et leur réunion est $\mathbf{A}(\text{GL}_\delta(F), \Theta)$. Compte tenu du lemme 8.4, si Θ est non nulle ou si $r \neq 1$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}^{\text{sp}}(G, \Theta)| &= \sum_{2n/\delta \text{ impair}} |\mathbf{A}^{\text{sp}}(\text{GL}_\delta(F), \Theta)| + \sum_{2n/\delta \text{ pair}} |\mathbf{A}^{\text{or}}(\text{GL}_\delta(F), \Theta)| \\ &= \sum_{2n/\delta \text{ impair}} \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{A}(\text{GL}_\delta(F), \Theta)| + \sum_{2n/\delta \text{ pair}} \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{A}(\text{GL}_\delta(F), \Theta)| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\delta} |\mathbf{A}(\text{GL}_\delta(F), \Theta)| \end{aligned}$$

ce qui est égal à $|\mathbf{A}(G, \Theta)|/2$ comme voulu. Si Θ est nulle et $r = 1$, l'ensemble :

$$\mathbf{A}^{\text{or}}(\text{GL}_1(F), \mathbf{0}) = \mathbf{A}(\text{GL}_1(F), \mathbf{0})$$

est de cardinal 4. On trouve :

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}^{\text{sp}}(D^\times, \mathbf{0})| &= \sum_{2n/\delta \text{ impair}} \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{A}(\text{GL}_\delta(F), \mathbf{0})| + \sum_{2n/\delta \text{ pair}, \delta \neq 1} \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{A}(\text{GL}_\delta(F), \mathbf{0})| + 4 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\delta} |\mathbf{A}(\text{GL}_\delta(F), \Theta)| - \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{A}(F^\times, \mathbf{0})| + 4 \end{aligned}$$

qui est égal à la quantité voulue. \square

9.2. On fixe une extension quadratique K de F incluse dans \overline{F} et un générateur de κ de K sur F tel que $\alpha = \kappa^2 \in F^\times$. On fixe un plongement de K dans A et on note τ l'involution $\text{Ad}(\kappa)$ de G . La notation \mathbf{e}_K est définie au paragraphe 8.4.

Théorème 9.5. — *Supposons que $\mathbf{A}^+(G, \Theta)$ soit inclus dans $\mathbf{A}^{\text{sp}}(G, \Theta)$. Alors on a :*

$$\pi \in \mathbf{A}^+(G, \Theta) \Leftrightarrow \pi \in \mathbf{A}^{\text{sp}}(G, \Theta) \text{ et } \mathbf{e}_K(\pi) = (-1)^r.$$

Démonstration. — Notons $\mathbf{A}^{\text{ptb}}(G, \Theta)$ le sous-ensemble de $\mathbf{A}^{\text{sp}}(G, \Theta)$ formé des représentations π telles que $\mathbf{e}_K(\pi) = (-1)^r$. L'ensemble $\mathbf{A}(G, \Theta)$ est fini et les ensembles $\mathbf{A}^{\text{ptb}}(G, \Theta)$, $\mathbf{A}^+(G, \Theta)$ sont tous les deux inclus dans $\mathbf{A}^{\text{sp}}(G, \Theta)$. Par ailleurs, le caractère central d'une représentation $\pi \in \mathbf{A}^{\text{sp}}(G, \Theta)$, correspond *via* l'homomorphisme de réciprocité de la théorie du corps de classes local à $\det \phi$, qui est trivial car $\text{Sp}_{2n}(\mathbb{C}) \subseteq \text{SL}_{2n}(\mathbb{C})$. D'après le corollaire 8.9(1), on en déduit :

$$(9.2) \quad \mathbf{A}^+(G, \Theta) \subseteq \mathbf{A}^{\text{ptb}}(G, \Theta).$$

On en déduit le résultat voulu dans le cas où $\mathbf{A}^{\text{ptb}}(G, \Theta)$ est vide. Supposons jusqu'à la fin de la preuve que $\mathbf{A}^{\text{ptb}}(G, \Theta)$ n'est pas vide. D'après le corollaire 8.9(2), l'ensemble $\mathbf{A}^+(G, \Theta)$ n'est

pas vide et on a :

$$(9.3) \quad \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{A}(G, \Theta)| \leq |\mathbf{A}^+(G, \Theta)| \leq |\mathbf{A}^{\text{sp}}(G, \Theta)|.$$

Si Θ est non nulle ou si $r \neq 1$, on déduit le résultat voulu du lemme 9.4. Si Θ est nulle et $r = 1$, la proposition 8.7 et la remarque 8.10 montrent que $\mathbf{A}^{\text{ptb}}(D^\times, \mathbf{0})$ est égal à $\mathbf{A}^{\text{sp}}(D^\times, \mathbf{0})$ privé des deux caractères $\chi \circ \text{Nrd}_{D/F}$ où χ n'est pas trivial sur $\text{N}_{K/F}(K^\times)$, c'est-à-dire que :

$$|\mathbf{A}^{\text{ptb}}(D^\times, \mathbf{0})| = |\mathbf{A}^{\text{sp}}(D^\times, \mathbf{0})| - 2.$$

On déduit le résultat voulu du lemme 9.4. □

Corollaire 9.6. — *On suppose que F est de caractéristique nulle.*

- (1) *La conjecture 1.1(2) est vraie pour toute représentation cuspidale de G .*
- (2) *Pour toute endo-classe autoduale Θ de degré divisant $2n$, on a :*

$$(9.4) \quad |\mathbf{A}^+(G, \Theta)| = \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{A}(G, \Theta)|.$$

Démonstration. — Compte tenu du théorème 9.5, il suffit de prouver que, si F est de caractéristique nulle, toute représentation cuspidale G^τ -distinguée de G a un paramètre de Langlands autodual symplectique, ce qui découle de [82, Theorem 1.1(1)]. L'identité (9.4) suit de la preuve du théorème 9.5. □

Remarque 9.7. — Dans le cas où G est déployé et où π est de niveau 0, voir [28, Corollary 6.1] sous l'hypothèse que F est de caractéristique résiduelle impaire. Dans le cas où le transfert de π à $\text{GL}_{2n}(F)$ est cuspidal, voir [82, Theorems 4.1, 7.3].

9.3. En guise de corollaire au théorème précédent, donnons le théorème suivant, qui est un analogue autodual de [69, Theorem 10.3]. On suppose ici que F est de caractéristique nulle. Par analogie avec [69, Definition 1.5], on introduit la définition suivante.

Définition 9.8. — Un type τ -autodual (\mathbf{J}, λ) auquel est attaché un caractère simple τ -autodual $\theta \in \mathcal{C}(\alpha, \beta)$ sera dit *générique* si l'on est dans l'un des cas suivants :

- (1) T/T_0 est non ramifiée, ou T/T_0 est ramifiée et c_0 est pair,
- (2) T/T_0 est ramifiée, c_0 est impair et θ est d'indice $\lfloor m/2 \rfloor$.

On observera que, selon la proposition 5.27, si une représentation cuspidale contient un type τ -autodual, elle contient un type τ -autodual générique, et il est unique à G^τ -conjugaison près.

Remarque 9.9. — Cette terminologie introduite dans [69] est justifiée par [3, Proposition 5.5], faisant le lien entre [69, Definition 1.5] et la compatibilité de certains types à certaines données de Whittaker. Je ne sais pas s'il y a un analogue de [3, Proposition 5.5] pour les types τ -autoduaux de G .

Le résultat suivant détermine l'image de Ω^+ par l'application Π définie au paragraphe 6.10.

Théorème 9.10. — *On suppose que F est de caractéristique nulle. Une représentation cuspidale de niveau non nul de G est G^τ -distinguée si et seulement si elle contient un type τ -autodual générique (\mathbf{J}, λ) tel que λ soit distingué par $\mathbf{J} \cap G^\tau$.*

Démonstration. — Si π contient un type τ -autodual $\mathbf{J} \cap G^\tau$ -distingué, alors π est autoduale et G^τ -distinguée. Inversement, supposons que π soit une représentation cuspidale G^τ -distinguée de G . D'après le théorème 6.1, elle est autoduale. D'après la proposition 6.3, elle contient un caractère simple τ -autodual θ , d'endo-classe notée Θ . D'après la proposition 6.14, elle contient un type τ -autodual, que l'on peut supposer générique. D'après la proposition 6.16, π est donc de la forme $\Pi(\mathbf{J}, \rho)$ pour un $(\mathbf{J}, \rho) \in \Omega$, et le type $(\mathbf{J}, \kappa_* \otimes \rho)$ est τ -autodual et générique. Nous allons montrer que $(\mathbf{J}, \rho) \in \Omega^+$. Cela provient de ce que :

$$\frac{1}{2} \cdot |\Omega| = |\Omega^+| \leq |\mathbf{A}^+(G, \Theta)| = \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{A}(G, \Theta)| = \frac{1}{2} \cdot |\Omega|$$

(l'égalité centrale provenant du corollaire 9.6) donc l'image de Ω^+ par Π est exactement égale à $\mathbf{A}^+(G, \Theta)$. \square

9.4. Supposons maintenant que r soit pair, qu'on écrit $r = 2k$, et que τ soit l'automorphisme de conjugaison par un élément $\sigma \in G$ tel que $\sigma^2 = 1$, de polynôme caractéristique réduit $(X^2 - 1)^n$. De façon analogue au théorème 9.5, on a le résultat suivant.

Proposition 9.11. — *Soit Θ une endo-classe autoduale, de degré divisant $2n$. Supposons que $\mathbf{A}^+(G, \Theta) \subseteq \mathbf{A}^{\text{sp}}(G, \Theta)$. Alors $\mathbf{A}^+(G, \Theta) = \mathbf{A}^{\text{sp}}(G, \Theta)$.*

Démonstration. — D'après le corollaire 5.24(1) et la proposition 6.17, on a :

$$(9.5) \quad \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{A}(G, \Theta)| \leq |\mathbf{A}^+(G, \Theta)| \leq |\mathbf{A}^{\text{sp}}(G, \Theta)|.$$

Comme $r \neq 1$, on déduit le résultat voulu du lemme 9.4. \square

9.5. Dans ce paragraphe, G est égal à $GL_{2n}(F)$. La proposition 9.11 prend la forme plus précise suivante.

Théorème 9.12 ([52] **Theorem 1.1**). — *On suppose que F est de caractéristique nulle. Une représentation cuspidale autoduale de $GL_{2n}(F)$ est de parité symplectique si et seulement si elle est distinguée par $GL_n(F) \times GL_n(F)$.*

Soit π une représentation cuspidale autoduale de $GL_{2n}(F)$ de niveau non nul. Il y a une unique représentation cuspidale autoduale de $GL_{2n}(F)$ inertiuellement équivalente mais non isomorphe à π ; notons-là π^* . Soit Θ l'endo-classe de π , soit T/T_0 l'extension quadratique qui lui est associée et posons $m = 2n/\deg(\Theta)$. On définit σ comme au paragraphe 4.2.

Selon [10, Proposition 6.6], les représentations π, π^* ont même parité si et seulement si T/T_0 est ramifiée et $m = 1$, auquel cas [10, 6.8] montre comment déterminer cette parité en termes de types. Dans les autres cas, c'est-à-dire (d'après le lemme 4.9) si T/T_0 est non ramifiée, ou si T/T_0 est ramifiée et m est pair, les représentations π et π^* ont des parités différentes, et il s'agit de déterminer laquelle des deux est de parité symplectique en termes de types. Nous donnons ci-dessous une réponse à cette question.

D'après le corollaire 4.6, la représentation π contient un type σ -autodual (\mathbf{J}, λ) , qu'on peut supposer générique, auquel cas il est unique à G^σ -conjugaison près. Notons θ le caractère simple qui lui est attaché et η la représentation de Heisenberg de θ . D'après les corollaires 6.8 et 6.13, il existe une unique représentation κ_* de \mathbf{J} prolongeant η , qui soit à la fois σ -autoduale et $\mathbf{J} \cap G^\sigma$ -distinguée et dont le déterminant soit d'ordre une puissance de p . Soit ρ l'unique représentation de \mathbf{J} triviale sur \mathbf{J}^1 telle que λ soit isomorphe à $\kappa_* \otimes \rho$.

Notons \mathcal{Z} le centre de \mathbf{J}/\mathbf{J}^1 . Si $[\mathfrak{a}, \beta]$ est une strate simple σ -autoduale dans $\mathbf{M}_{2n}(F)$ telle que $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$, il est égal à $E^\times \mathbf{J}^1/\mathbf{J}^1$, avec $E = F[\beta]$.

Proposition 9.13. — *On suppose que F est de caractéristique nulle. Supposons que T/T_0 soit ramifiée. La représentation cuspidale autoduale de niveau non nul π est de parité symplectique si et seulement si :*

- (1) ρ est un caractère non ramifié si $m = 1$,
- (2) la restriction de ρ à \mathcal{Z} est non triviale si m est pair.

Remarque 9.14. — (1) Dans le cas où $m = 1$, on retrouve le résultat de [10, 6.8], c'est-à-dire que π est de parité symplectique si et seulement si elle contient la restriction de la représentation κ_* au sous-groupe compact \mathbf{J}^0 .

(2) Dans le cas où m est pair, le caractère central de ρ sur \mathcal{Z} est toujours un caractère non ramifié d'ordre au plus 2.

Démonstration. — En vertu du théorème 9.12, la représentation π est de parité symplectique si et seulement si elle est distinguée par $\mathrm{GL}_n(F) \times \mathrm{GL}_n(F)$, qui est conjugué à G^σ dans G . Raisonnant comme dans la preuve du théorème 9.10, on voit que c'est le cas si et seulement si le type générique $\kappa_* \otimes \rho$ est distingué par $\mathbf{J} \cap G^\sigma$, c'est-à-dire si et seulement si ρ est $\mathbf{J} \cap G^\sigma$ -distinguée, car κ_* est $\mathbf{J} \cap G^\sigma$ -distinguée. La représentation ρ étant σ -autoduale, elle est $\mathbf{J}^0 \cap G^\sigma$ -distinguée. Le résultat suit de [44, Proposition 6.3] (voir également [69, Lemma 8.2]). \square

Dans le cas où T/T_0 est non ramifiée, posons $E_0 = F[\beta^2]$ et $\mathcal{Z}_0 = E_0^\times \mathbf{J}^1$. C'est un sous-groupe du centre \mathcal{Z} qui ne dépend pas du choix de la strate $[\mathfrak{a}, \beta]$. En effet, si $[\mathfrak{a}, \beta']$ en est une autre, on a $E'^\times \mathbf{J}^1 = E^\times \mathbf{J}^1$, donc il y a un $x \in \mathbf{J}^1$ tel que $\beta' = \beta x$. De façon similaire à la proposition 9.13, en remplaçant [44, Proposition 6.3] par [69, Lemma 9.11], on obtient :

Proposition 9.15. — *On suppose que F est de caractéristique nulle. Supposons que T/T_0 soit non ramifiée. La représentation cuspidale autoduale de niveau non nul π est de parité symplectique si et seulement si la restriction de ρ à \mathcal{Z}_0 est triviale.*

10. Involutions galoisiennes sur les formes intérieures de $\mathrm{GL}_n(F)$

Nous considérons maintenant une situation différente de celle introduite à la section 5 et indiquons comment les méthodes développées dans les sections 5 et 6 peuvent s'y appliquer.

10.1. Fixons une extension quadratique F/F_0 , une F_0 -algèbre centrale simple A_0 de degré réduit n et posons $A = A_0 \otimes_{F_0} F$. C'est une F -algèbre centrale simple de degré réduit n , qu'on munit de l'action naturelle de $\text{Gal}(F/F_0)$ dont on note σ le générateur. Posons $G = A^\times$. Nous allons montrer que l'étude des représentations cuspidales de G distinguées par G^σ au moyen de la théorie des types offre beaucoup de similarités avec celle traitée dans cet article. Observons que le cas où A_0 est égale à $\mathbf{M}_n(F_0)$, c'est-à-dire le cas des représentations cuspidales de $GL_n(F)$ distinguées par $GL_n(F_0)$, a été traité dans [3, 69].

10.2. Fixons un $\alpha \in F_0^\times$ et un $\kappa \in G$ tel que $\kappa\sigma(\kappa) = \alpha$. Ceci définit l'involution $\tau = \text{Ad}(\kappa) \circ \sigma$ de G . La F -algèbre centrale simple A munie de l'involution τ entre dans le cadre du paragraphe 5.6 et notamment du lemme 5.14. Par conséquent, A^τ est une F_0 -algèbre centrale simple et A s'identifie à $A^\tau \otimes_{F_0} F$, c'est-à-dire que la paire (A^τ, A) relève du cadre fixé au paragraphe 10.1. Nous ne gagnons donc aucune généralité à passer de σ à τ .

10.3. Une représentation irréductible π de G est dite σ -autoduale si sa contragrédiente π^\vee est isomorphe à sa conjuguée π^σ . Nous allons voir que, contrairement à ce qui se passe dans le cas autodual, une représentation cuspidale σ -autoduale de G contient *toujours* un caractère simple maximal σ -autodual. D'abord, c'est vrai dans le cas où $A_0 = \mathbf{M}_n(F_0)$ grâce à [3, Theorem 4.1, 4.2]. Soit π une représentation cuspidale σ -autoduale de G et soit Θ son endoclasse. Nous allons suivre la preuve du théorème 5.22. D'abord, il existe dans $GL_n(F)$ un caractère simple maximal σ -autodual $\theta_1 \in \mathcal{C}(\alpha_1, \beta)$ d'endo-classe Θ , et on peut supposer, d'après [3, Corollary 4.21], que la strate simple $[\alpha_1, \beta]$ est σ -autoduale. Posons $E = F[\beta]$ et $E_0 = E^\sigma$. D'après [3, Remark 4.22], l'homomorphisme naturel $E_0 \otimes_{F_0} F \rightarrow E$ est un isomorphisme. Pour plonger E dans A de façon que σ induise sur E l'automorphisme non trivial de E/E_0 , il suffit donc de plonger E_0 dans A_0 comme une F_0 -algèbre, ce qui est toujours possible au vu des degrés réduits, puis d'en déduire un plongement de F -algèbres de E dans A par extension de F_0 à F . Fixons un tel plongement, et notons B le centralisateur de E dans A .

Pour comprendre l'analogie entre les cas autodual et σ -autodual, il faut comprendre que B se comporte ici exactement comme au paragraphe 5.6 : c'est une E -algèbre centrale simple munie de la E_0 -involution σ . Par conséquent, les conditions d'existence d'un ordre maximal de B stable par σ sont exactement les mêmes que dans le cas autodual. Pour adapter au cas σ -autodual le lemme 5.19, il suffit de prouver, en reprenant la preuve du lemme 4.9, que pour qu'il existe une représentation irréductible cuspidale σ -autoduale de $GL_n(F)$ d'endo-classe Θ , il faut et suffit que l'entier $m = n/\deg(\Theta)$ soit impair si E/E_0 est non ramifiée, et pair ou égal à 1 si E/E_0 est ramifiée. (On observera que, contrairement au cas autodual, le cas où Θ est nulle n'est pas traité à part.) Pour finir d'adapter la preuve du théorème 5.22, il ne reste donc qu'à adapter le lemme 3.27 au cas σ -autodual.

10.4. La E -algèbre B se comportant de la même façon qu'on soit dans le cas σ -autodual ou autodual, la classification des caractères simples σ -autoduaux contenus dans une représentation irréductible cuspidale σ -autoduale de G , ainsi que la description de l'action résiduelle de σ sur le

groupe $\mathbf{J}^0(\mathfrak{a}, \beta)/\mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta) \simeq \mathrm{GL}_m(\mathfrak{l})$, est exactement celle donnée par la proposition 5.27. Il s'ensuit que toute l'analyse faite aux paragraphes 6.4 à 6.10 reste valable, quitte à remplacer le théorème 6.1 par une version non déployée de [69, Theorem 4.1]. Par conséquent, si π est une représentation cuspidale σ -autoduale de G , si θ est un caractère simple σ -autodual générique contenu dans π et si $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ est un type contenu dans π auquel θ est attaché, alors :

- le type $\boldsymbol{\lambda}$ est σ -autodual,
- il existe une unique représentation κ_* de \mathbf{J} prolongeant la représentation de Heisenberg de θ , étant à la fois σ -autoduale et $\mathbf{J} \cap G^\sigma$ -distinguée, et telle que $\det \kappa_*$ soit d'ordre une puissance de p ,
- et $\boldsymbol{\lambda}$ s'écrit $\kappa_* \otimes \boldsymbol{\rho}$ pour une unique représentation irréductible σ -autoduale $\boldsymbol{\rho}$ de \mathbf{J} triviale sur \mathbf{J}^1 .

En outre, si cette représentation $\boldsymbol{\rho}$ est $\mathbf{J} \cap G^\sigma$ -distinguée, alors π est G^σ -distinguée. Pour prouver que la réciproque est vraie et obtenir du même coup un théorème de dichotomie et de disjonction ([54, 2]), il faut analyser la contribution de toutes les doubles classes dans (1.1). Ceci peut être fait en suivant l'approche de [69, Section 6].

10.5. Beuzart-Plessis a montré ([8, Theorem 1]) qu'une représentation cuspidale (et plus généralement une représentation essentiellement de carré intégrable) de G est G^σ -distinguée si et seulement si son transfert de Jacquet-Langlands au groupe $\mathrm{GL}_n(F)$ est $\mathrm{GL}_n(F_0)$ -distingué. Il serait intéressant de savoir si un tel résultat est accessible par les méthodes présentées ici.

Références

1. J. Adler, *Self-contragredient supercuspidal representations of GL_n* , Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), n°8, 2471–2479.
2. U. K. Anandavardhanan, A. Kable et R. Tandon, *Distinguished representations and poles of twisted tensor L -functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), n°10, 2875–2883.
3. U. K. Anandavardhanan, R. Kurinczuk, N. Matringe, V. Sécherre et S. Stevens, *Galois self-dual cuspidal types and Asai local factors*, J. Eur. Math. Soc. **23** (2021), n°9, 3129–3191.
4. I. Badulescu, *Correspondance de Jacquet-Langlands pour les corps locaux de caractéristique non nulle*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **35** (2002), n°5, p. 695–747.
5. ———, *Global Jacquet-Langlands correspondence, multiplicity one and classification of automorphic representations*, Invent. Math. **172** (2008), 383–438. With an appendix by Neven Grbac.
6. A. I. Badulescu, G. Henniart, B. Lemaire et V. Sécherre, *Sur le dual unitaire de $\mathrm{GL}_r(D)$* , Amer. J. Math. **132** (2010), n°5, 1365–1396.
7. I. Badulescu et P. Roche, *Global Jacquet-Langlands correspondence for division algebras in characteristic p* , Int. Math. Res. Not. **7** (2017), 2172–2206.
8. R. Beuzart-Plessis, *On distinguished square-integrable representations for Galois pairs and a conjecture of Prasad*, Invent. Math. **214** (2018), 437–521.
9. C. Blondel, *$\mathrm{Sp}(2N)$ -covers for self-contragredient supercuspidal representations of $\mathrm{GL}(N)$* , Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **37** (2004), n°4, 533–558.
10. C. Blondel, G. Henniart et S. Stevens, *Jordan blocks of cuspidal representations of symplectic groups*, Algebra Number Theory **12** (2018), n°10, 2327–2386.
11. N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Algèbre, chapitre 8 : Modules et anneaux semi-simples*, Springer-Verlag, Berlin, 2012.

12. P. Broussous, *Extension du formalisme de Bushnell et Kutzko and cas d'une algèbre à division*, Proc. London Math. Soc. **77** (1998), n°3, 292–326.
13. P. Broussous et N. Matringe, *Multiplicity one for pairs of Prasad–Takloo–Bighash type*, à paraître à Int. Math. Res. Not.
14. P. Broussous, V. Sécherre et S. Stevens, *Smooth representations of $GL_m(D)$, V: endo-classes*, Documenta Math. **17** (2012), 23–77.
15. F. Bruhat et J. Tits, *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local*, Bull. Soc. Math. France **112** (1984), n°2, 259–301.
16. C. J. Bushnell et G. Henniart, *Local tame lifting for $GL(N)$, I: simple characters*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **83** (1996), 105–233.
17. ———, *Calculs de facteurs epsilon de paires pour GL_n sur un corps local, I*, Bull. London Math. Soc. **31** (1999), 534–542.
18. ———, *Sur le comportement, par torsion, des facteurs epsilon de paires*, Canad. J. Math. **53** (2001), 1141–1173.
19. ———, *Local tame lifting for $GL(N)$, IV: simple characters and base change*, Proc. London Math. Soc. (3) **87** (2003), 337–362.
20. ———, *Local tame lifting for $GL(N)$, III: explicit base change and Jacquet–Langlands correspondence*, J. Reine Angew. Math. **580** (2005), 39–100.
21. ———, *The essentially tame local Langlands correspondence, I*, J. Amer. Math. Soc. **18** (2005) n°3, 685–710.
22. ———, *The local Langlands conjecture for $GL(2)$* , Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 335, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
23. ———, *The essentially tame Jacquet–Langlands correspondence for inner forms of $GL(n)$* , Pure Appl. Math. Q. **7** (2011), n°3, 469–538.
24. ———, *Intertwining of simple characters in $GL(n)$* , Int. Math. Res. Not. **17** (2013), 3977–3987.
25. ———, *To an effective local Langlands correspondence*, Mem. Amer. Math. Soc. **231** (2014).
26. C. J. Bushnell et P. C. Kutzko, *The admissible dual of $GL(N)$ via compact open subgroups*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
27. M. Chommaux, *Distinction of the Steinberg representation and a conjecture of Prasad and Takloo–Bighash*, J. Number Theory **202** (2019), 200–219.
28. M. Chommaux et N. Matringe, *The split case of the Prasad–Takloo–Bighash conjecture for cuspidal representations of level 0*, Ann. Inst. Fourier **72** (2022), n°1, 123–153.
29. C. Coniglio-Guilloton, *Correspondance de Jacquet–Langlands et distinction : cas des représentations cuspidales de niveau 0*, Bull. Soc. Math. France **144** (2016), n°2, 163–216.
30. P. Deligne, D. Kazhdan et M.-F. Vignéras, *Représentations des algèbres centrales simples p -adiques*, in *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*, coll. Travaux en cours, Hermann, Paris, 1984.
31. A. Dotto, *The inertial Jacquet–Langlands correspondence*, J. Reine Angew. Math. **784** (2022), 177–214.
32. B. Feigon, K. Martin et D. Whitehouse, *Periods and non-vanishing of central L -values for $GL(2n)$* , Israel J. Math. **225** (2018), n°1, 223–266.
33. Fesenko, I. et Vostokov, S., *Local fields and their extensions*, Translations of Mathematical Monographs 121, American Mathematical Society, 2002.
34. W. T. Gan, B. Gross et D. Prasad, *Symplectic local root numbers, central critical L -values, and restriction problems in the representation theory of classical groups*, in *Sur les conjectures de Gross et Prasad. I.*, Astérisque **346** (2012), 1–109.
35. W. T. Gan et L. Lomelí, *Globalization of supercuspidal representations over function fields and applications*, J. Eur. Math. Soc. **20** (2018), 2813–2858.

36. W. T. Gan et S. Takeda, *The local Langlands conjecture for $\mathrm{GSp}(4)$* , *Annals of Math.* **173** (2011), 1841–1882.
37. P. Gille et T. Szamuely, *Central simple algebras and Galois cohomology*, *Cambridge studies in advanced mathematics* **101**, Cambridge University Press, 2006.
38. R. Goodman et N. Wallach, *Symmetry, representations and invariants*, *Graduate Texts in Mathematics* **255**, Springer, 2009.
39. R. Gow, *Two multiplicity-free permutation representations of the general linear group $\mathrm{GL}(n, q^2)$* , *Math. Z.* **188** (1984), 45–54.
40. M. Grabitz, *Simple characters for principal orders in $M_m(D)$* , *J. Number Theory* **126** (2007), n°1, 1–51.
41. J. Green, *The characters of the finite general linear groups*, *J. Algebra* **184** (1996), n°3, 839–851.
42. J. Guo, *Uniqueness of generalized Waldspurger model for $\mathrm{GL}(2n)$* , *Pacific J. Math.* **180** (1997), n°2, 273–289.
43. J. Hakim, *Tame supercuspidal representations of GL_n distinguished by orthogonal involutions*, *Represent. Theory* **17** (2013), 120–175.
44. J. Hakim et F. Murnaghan, *Two types of distinguished supercuspidal representations*, *Int. Math. Res. Not.* **35** (2002), 1857–1889.
45. ———, *Tame supercuspidal representations of GL_n distinguished by a unitary group*, *Compositio Math.* **133** (2002), 199–244.
46. ———, *Distinguished tame supercuspidal representations*, *Int. Math. Res. Pap.* (2008), n°2.
47. G. Henniart, *Correspondance de Langlands et fonctions L des carrés extérieur et symétrique*, *Int. Math. Res. Not.* **4** (2010), 633–673.
48. R. Howe, *Tamely ramified supercuspidal representations of GL_n* , *Pacific J. Math.* **73** (1977), 437–460.
49. N. Jacobson, *Basic Algebra II*, W. H. Freeman and Company, 1989.
50. H. Jacquet et R. P. Langlands, *Automorphic forms on $\mathrm{GL}(2)$* , *Lecture Notes in Mathematics* **114**, Springer, 1970.
51. H. Jacquet et S. Rallis, *Uniqueness of linear periods*, *Compositio Math.* **102** (1996), n°1, 65–123.
52. D. Jiang, C. Nien et Y. Qin, *Symplectic supercuspidal representations of $\mathrm{GL}(2n)$ over p -adic fields*, *Pacific J. Math.* **245** (2010), n°2, 273–313.
53. Y. Jo, *Derivatives and exceptional poles of the local exterior square L -function for GL_m* , *Math. Z.* **294** (2020), 1687–1725.
54. A. Kable, *Asai L -functions and Jacquet’s conjecture*, *Amer. J. Math.* **126** (2004), n°4, 789–820.
55. P. K. Kuwat et R. Raghunathan, *On the local and global exterior square L -functions of GL_n* , *Math. Res. Lett.* **19** (2012), n°4, 785–804.
56. G. Lusztig, *Symmetric spaces over a finite field*, in *The Grothendieck Festschrift*, Vol. III, *Progr. Math.* **88** (1990), 57–81.
57. N. Matringe, *Cuspidal representations of $\mathrm{GL}_n(F)$ distinguished by a maximal Levi subgroup, with F a non-archimedean local field*, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I* **350** (2012), 797–800.
58. ———, *Linear and Shakila local periods for the mirabolic group, and some consequences*, *J. Number Theory* **138** (2014), 1–19.
59. A. Mínguez et V. Sécherre, *Types modulo ℓ pour les formes intérieures de GL_n sur un corps local non archimédien*. *Proc. London Math. Soc.* **109** (2014), n°4, 823–891. Avec un appendice par V. Sécherre et S. Stevens.
60. ———, *Correspondance de Jacquet-Langlands locale et congruences modulo ℓ* , *Invent. Math.* **208** (2017), n°2, 553–631.
61. V. Platonov et A. Rapinchuk, *Algebraic groups and number theory*, *Pure and Applied Mathematics*, volume 139, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994.

62. D. Prasad et R. Schulze-Pillot, *Generalised form of a conjecture of Jacquet and a local consequence*, J. Reine Angew. Math. **616** (2008), 219–236.
63. D. Prasad et R. Takloo-Bighash, *Bessel models for $GSp(4)$* , J. Reine Angew. Math. **655** (2011), 189–243.
64. J. Rogawski, *Representations of $GL(n)$ and division algebras over a p -adic field*, Duke Math. J. **50** (1983), 161–196.
65. H. Saito, *On Tunnell’s formula for characters of $GL(2)$* , Compositio Math. **85** (1993), n°1, 99–108.
66. V. Sécherre, *Représentations lisses de $GL_m(D)$, I : caractères simples*, Bull. Soc. math. France **132** (2004), n°3, 327–396.
67. ———, *Représentations lisses de $GL_m(D)$, II : β -extensions*, Compositio Math. **141** (2005), 1531–1550.
68. ———, *Représentations lisses de $GL_m(D)$, III : types simples*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **38** (2005), 951–977.
69. ———, *Supercuspidal representations of $GL_n(F)$ distinguished by a Galois involution*, Algebra Number Theory **13** (2019), n°7, 1677–1733.
70. V. Sécherre et S. Stevens, *Représentations lisses de $GL_m(D)$, IV : représentations supercuspidales*, J. Inst. Math. Jussieu **7** (2008), n°3, p. 527–574.
71. ———, *Smooth representations of $GL_m(D)$, VI: semisimple types*, Int. Math. Res. Not. **13** (2012), 2994–3039.
72. ———, *Towards an explicit local Jacquet-Langlands correspondence beyond the cuspidal case*, Compositio Math. **155** (2019), 1853–1887.
73. A. Silberger et E.-W. Zink, *Weak explicit matching for level zero discrete series of unit groups of p -adic simple algebras*, Canad. J. Math. **55** (2003), n°2, 353–378.
74. ———, *An explicit matching theorem for level zero discrete series of unit groups of p -adic simple algebras*, J. Reine Angew. Math. **585** (2005), 173–235.
75. D. Skodlerack, *Semisimple characters for inner forms II: quaternionic forms of p -adic classical groups (p odd)*, Represent. Theory **24** (2020), 323–359.
76. S. Stevens, *Intertwining and supercuspidal types for p -adic classical groups*, Proc. London Math. Soc. (3), **83** (2001), n°1, 120–140.
77. M. Suzuki, *Classification of standard modules with linear periods*, J. Number Theory **218** (2021), 302–310.
78. M. Suzuki et H. Xue, *Linear intertwining periods and epsilon dichotomy for linear models* (2022), https://www.math.arizona.edu/~xuehang/intertwining_v1.pdf
79. M. Tadić, *Induced representations of $GL(n, A)$ for p -adic division algebras A* , J. Reine Angew. Math. **405** (1990), 48–77.
80. J. Tate, *Number theoretic background*, in *Automorphic forms, representations and L -functions*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, 3–26. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.
81. J. Tunnell, *Local ϵ -factors and characters of $GL(2)$* , Amer. J. Math. **105** (1983), n°6, 1277–1307.
82. H. Xue, *Epsilon dichotomy for linear models*, Algebra Number Theory **15** (2021), n°1, 173–215.
83. A. Zelevinski, *Induced representations of reductive p -adic groups. II. On irreducible representations of $GL(n)$* , Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (4) **13** (1980), n°2, 165–210.
84. E.-W. Zink, *More on embeddings of local fields in simple algebras*, J. Number Theory **77** (1999), n°1, 51–61.
85. J. Zou, *Supercuspidal representations of $GL_n(F)$ distinguished by a unitary involution*, Bull. Soc. Math. France **150** (2022), n°2, 393–458.
86. ———, *Supercuspidal representations of $GL_n(F)$ distinguished by an orthogonal involution*, arXiv:2011.07349v1 (2020).

VINCENT SÉCHERRE, Laboratoire de Mathématiques de Versailles, UVSQ, CNRS, Université Paris-Saclay, 78035, Versailles, France, Institut Universitaire de France • *E-mail* : `vincent.secherre@math.uvsq.fr`