

Tissu en courbes sur  $\mathcal{M}_{0,n+3}$  induit  
par les  $n + 3$  applications d'oublis

**Luc PIRIO**

10 juin 2022

# Plan

## I Tissus

Définition, exemples, etc

## II Tissu de Bol

Propriétés

Relation d'Abel du dilogarithme

Approche de Gelfand-MacPherson

## III Tissu $\mathcal{W}_{0,n+3}$ sur $\mathcal{M}_{0,n+3}$

Thèse de Damiano

Débunkage, formules

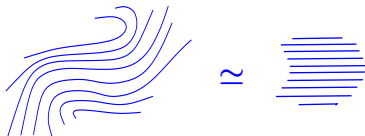
Algébrisation ( $n = 3$ )

## IV Tissu $\mathcal{W}_{dP_4}$



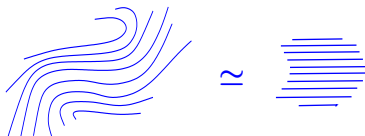
# I Tissus

- **Feuilletage** : famille localement triviale de sous-variétés



# I Tissus

- **Feuilletage** : famille localement triviale de sous-variétés



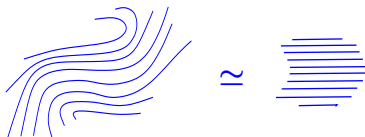
- Un ***d*-tissu** est une collection de *d* feuilletages 2 à 2 transverses

$$\mathcal{W}_d = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_d)$$

# I Tissus

**Feuilletage** : famille

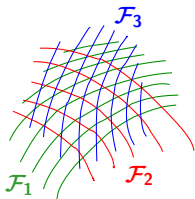
- localement triviale de sous-variétés



- Un  **$d$ -tissu** est une collection de  $d$  feuilletages 2 à 2 transverses

$$\mathcal{W}_d = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_d)$$

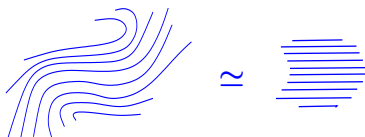
- **Ex. 1**



un 3-tissu plan

# I Tissus

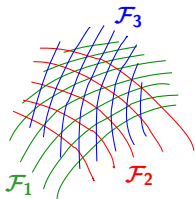
- **Feuilletage** : famille  
• localement triviale  
de sous-variétés



- Un  **$d$ -tissu** est une collection de  $d$  feuilletages 2 à 2 transverses

$$\mathcal{W}_d = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_d)$$

- **Ex. 1**



un 3-tissu plan

2  $\mathcal{W}(\underline{U}) = \mathcal{W}(U_1, \dots, U_d)$   $d$ -tissu sur  $\Omega \subset \mathbb{C}^n$

- Déf :  $W$  et  $\widetilde{W}$  sont **équivalents** si  $\exists$  un biholomorphisme  $\varphi$

$$\varphi^*(\widetilde{W}) = W$$



# Géométrie des tissus

- Déf :  $W$  et  $\widetilde{W}$  sont **équivalents** si  $\exists$  un biholomorphisme  $\varphi$

$$\varphi^*(\widetilde{W}) = W$$

- Problématique : classifier les tissus à équivalence près

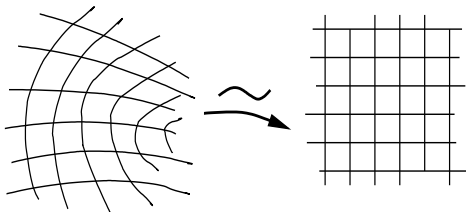
# Géométrie des tissus

- Déf :  $W$  et  $\widetilde{W}$  sont **équivalents** si  $\exists$  un biholomorphisme  $\varphi$

$$\varphi^*(\widetilde{W}) = W$$

- Problématique : classifier les tissus à équivalence près

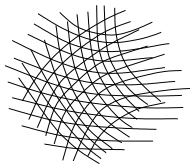
- Exemple :



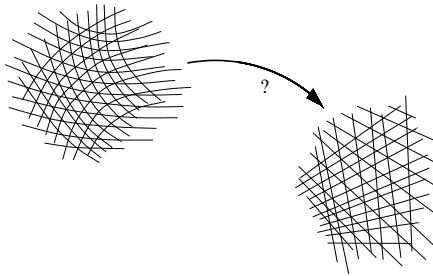
Un 2-tissu plan est trivial (localement)

# Géométrie des tissus

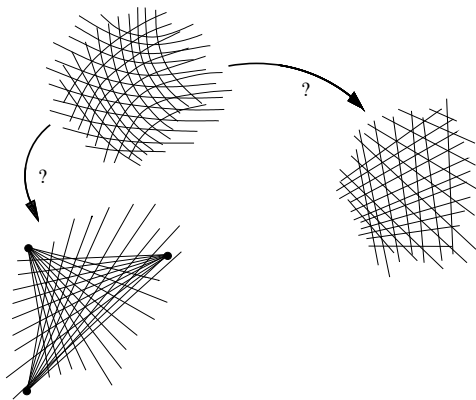
# Géométrie des tissus



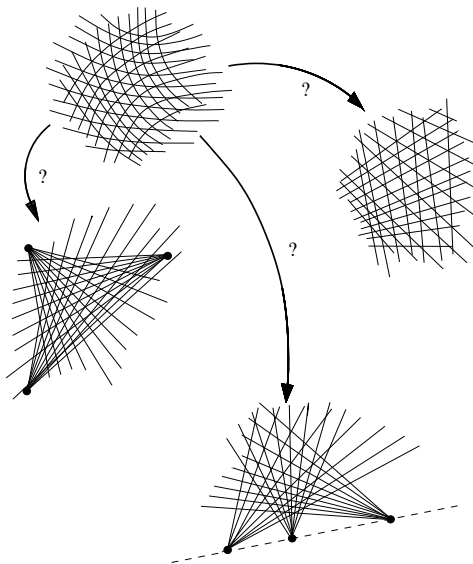
# Géométrie des tissus



# Géométrie des tissus



# Géométrie des tissus



# Tissus algébriques

- $C \subset \mathbb{P}^n$  : courbe algébrique de degré  $d$



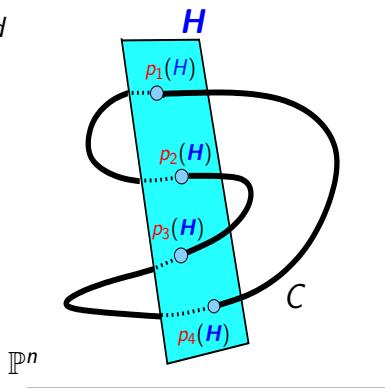
# Tissus algébriques

- $C \subset \mathbb{P}^n$  : courbe algébrique de degré  $d$
- $H \in \check{\mathbb{P}}^n$  : hyperplan générique

# Tissus algébriques

- $C \subset \mathbb{P}^n$  : courbe algébrique de degré  $d$
- $H \in \check{\mathbb{P}}^n$  : hyperplan générique

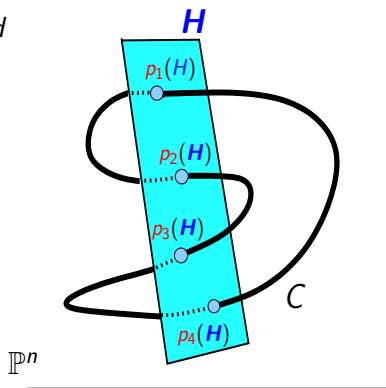
$$H \cdot C = p_1(H) + \cdots + p_d(H)$$



# Tissus algébriques

- $C \subset \mathbb{P}^n$  : courbe algébrique de degré  $d$
- $H \in \check{\mathbb{P}}^n$  : hyperplan générique

$$H \cdot C = p_1(H) + \cdots + p_d(H)$$

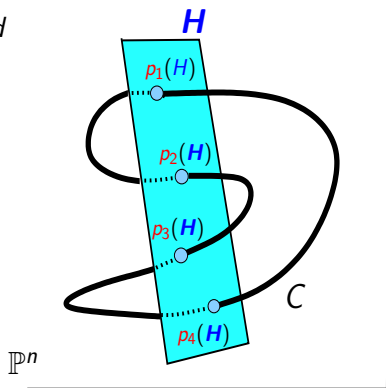


- $\rightsquigarrow$  Submersion locale  $p_i : (\check{\mathbb{P}}^n, H) \longrightarrow C \quad (i = 1, \dots, d)$

# Tissus algébriques

- $C \subset \mathbb{P}^n$  : courbe algébrique de degré  $d$
- $H \in \check{\mathbb{P}}^n$  : hyperplan générique

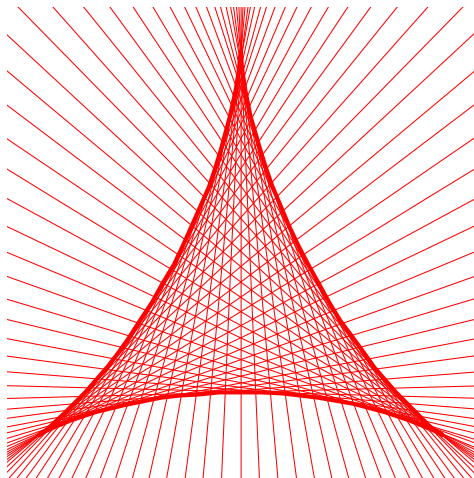
$$H \cdot C = p_1(H) + \cdots + p_d(H)$$



•  $\rightsquigarrow$  Submersion locale  $p_i : (\check{\mathbb{P}}^n, H) \rightarrow C \quad (i = 1, \dots, d)$

•  $\rightsquigarrow$  Localem<sup>t</sup>  $W_C = W(p_1, \dots, p_d)$  ( $d$ -tissu en hyperplans sur  $\check{\mathbb{P}}^n$ )

# Hypocycloïde à trois cusps



**3-tissu algébrique**

# Exemples de tissus I

1  $S \subset \mathbf{P}^3$  : surface cubique  $\rightsquigarrow$  27 droites  $D_1, \dots, D_{27} \subset S$

# Exemples de tissus I

- 1  $S \subset \mathbf{P}^3$  : surface cubique  $\rightsquigarrow$  27 droites  $D_1, \dots, D_{27} \subset S$
- Pour chaque droite  $D_i \subset S$   $\rightsquigarrow$  pinceau de coniques  $\mathcal{C}_i$  sur  $S$

# Exemples de tissus I

- 1  $S \subset \mathbf{P}^3$  : surface cubique  $\rightsquigarrow$  27 droites  $D_1, \dots, D_{27} \subset S$
- Pour chaque droite  $D_i \subset S$   $\rightsquigarrow$  pinceau de coniques  $\mathcal{C}_i$  sur  $S$
  - $\mathcal{W}_S = \mathcal{W}(\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{27})$  : 27-tissu en coniques sur  $S$



# Exemples de tissus I

- 1  $S \subset \mathbf{P}^3$  : surface cubique  $\rightsquigarrow$  27 droites  $D_1, \dots, D_{27} \subset S$
- Pour chaque droite  $D_i \subset S$   $\rightsquigarrow$  pinceau de coniques  $\mathcal{C}_i$  sur  $S$
  - $\mathcal{W}_S = \mathcal{W}(\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{27})$  : 27-tissu en coniques sur  $S$
  - Pour toute  $\tilde{S} \subset \mathbf{P}^3$  analytique non plane :  $\rightsquigarrow$  27-tissu  $\mathcal{W}_{\tilde{S}}$

# Exemples de tissus I

- 1  $S \subset \mathbf{P}^3$  : surface cubique  $\rightsquigarrow$  27 droites  $D_1, \dots, D_{27} \subset S$
- Pour chaque droite  $D_i \subset S$   $\rightsquigarrow$  pinceau de coniques  $\mathcal{C}_i$  sur  $S$
  - $\mathcal{W}_S = \mathcal{W}(\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{27})$  : 27-tissu en coniques sur  $S$
  - Pour toute  $\tilde{S} \subset \mathbf{P}^3$  analytique non plane :  $\rightsquigarrow$  27-tissu  $\mathcal{W}_{\tilde{S}}$   
[ Darboux 1880 ]

# Exemples de tissus I

1  $S \subset \mathbf{P}^3$  : surface cubique  $\rightsquigarrow$  27 droites  $D_1, \dots, D_{27} \subset S$

- Pour chaque droite  $D_i \subset S$   $\rightsquigarrow$  pinceau de coniques  $\mathcal{C}_i$  sur  $S$
- $\mathcal{W}_S = \mathcal{W}(\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{27})$  : 27-tissu en coniques sur  $S$
- Pour toute  $\tilde{S} \subset \mathbf{P}^3$  analytique non plane :  $\rightsquigarrow$  27-tissu  $\mathcal{W}_{\tilde{S}}$   
[ Darboux 1880 ]

2  $\Sigma = Q_1 \cap Q_2 \subset \mathbf{P}^4$  Surface de degré 4

- Il y a 10 pinceaux de coniques  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_{10}$  sur  $\Sigma$
- $\mathcal{W}_\Sigma = \mathcal{W}(\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_{10})$  10-tissu en coniques sur  $\Sigma$
- Généralisat<sup>o</sup> à toute surface analytique  $Z \subset \mathbf{P}^4$  : 10-tissu  $\mathcal{W}_Z$

## Exemples de tissus II

3  $X \subset \mathbf{P}^4$  Hypersurface cubique (lisse)

## Exemples de tissus II

3  $X \subset \mathbf{P}^4$  Hypersurface cubique (lisse)

- Par  $x \in X$  générique, passent 6 droites  $L_1(x), \dots, L_6(x) \subset X$

## Exemples de tissus II

3  $X \subset \mathbf{P}^4$  Hypersurface cubique (lisse)

- Par  $x \in X$  générique, passent 6 droites  $L_1(x), \dots, L_6(x) \subset X$
- $\mathcal{LW}_X \stackrel{\text{loc}^t}{=} \mathcal{W}(L_1, \dots, L_6)$  : 6-tissu en droites sur  $X$

## Exemples de tissus II

### 3 $X \subset \mathbf{P}^4$ Hypersurface cubique (lisse)

- Par  $x \in X$  générique, passent 6 droites  $L_1(x), \dots, L_6(x) \subset X$
- $\mathcal{LW}_X \stackrel{\text{loc}^t}{=} \mathcal{W}(L_1, \dots, L_6)$  : 6-tissu en droites sur  $X$
- $\mathbf{F}_1(X) = \{ D \in \mathbf{G}_1(\mathbf{P}^4) \mid D \subset X \}$  : surface de Fano

## Exemples de tissus II

3  $X \subset \mathbf{P}^4$  Hypersurface cubique (lisse)

- Par  $x \in X$  générique, passent 6 droites  $L_1(x), \dots, L_6(x) \subset X$
- $\mathcal{LW}_X \stackrel{\text{loc}^t}{=} \mathcal{W}(L_1, \dots, L_6)$  : 6-tissu en droites sur  $X$
- $\mathbf{F}_1(X) = \{ D \in \mathbf{G}_1(\mathbf{P}^4) \mid D \subset X \}$  : surface de Fano

4  $\mathcal{T}_X = \left\{ \text{Triangles } \triangle \subset X \right\}$  variété de dimension 3



## Exemples de tissus II

3  $X \subset \mathbf{P}^4$  Hypersurface cubique (lisse)

- Par  $x \in X$  générique, passent 6 droites  $L_1(x), \dots, L_6(x) \subset X$
- $\mathcal{LW}_X \stackrel{\text{loc}^t}{=} \mathcal{W}(L_1, \dots, L_6)$  : 6-tissu en droites sur  $X$
- $\mathbf{F}_1(X) = \{ D \in \mathbf{G}_1(\mathbf{P}^4) \mid D \subset X \}$  : surface de Fano

4  $\mathcal{T}_X = \left\{ \text{Triangles } \triangle \subset X \right\}$  variété de dimension 3

- $\mathbf{F}_1(X)^3 \supset \mathcal{T}_X$

## Exemples de tissus II

3  $X \subset \mathbf{P}^4$  Hypersurface cubique (lisse)

- Par  $x \in X$  générique, passent 6 droites  $L_1(x), \dots, L_6(x) \subset X$
- $\mathcal{LW}_X \stackrel{\text{loc}^t}{=} \mathcal{W}(L_1, \dots, L_6)$  : 6-tissu en droites sur  $X$
- $\mathbf{F}_1(X) = \{ D \in \mathbf{G}_1(\mathbf{P}^4) \mid D \subset X \}$  : surface de Fano

4  $\mathcal{T}_X = \left\{ \text{Triangles } \triangle \subset X \right\}$  variété de dimension 3

- $\mathbf{F}_1(X)^3 \supset \mathcal{T}_X \ni T = \sum_{s=1}^3 \ell_s$

## Exemples de tissus II

3  $X \subset \mathbf{P}^4$  Hypersurface cubique (lisse)

- Par  $x \in X$  générique, passent 6 droites  $L_1(x), \dots, L_6(x) \subset X$
- $\mathcal{LW}_X \stackrel{\text{loc}^t}{=} \mathcal{W}(L_1, \dots, L_6)$  : 6-tissu en droites sur  $X$
- $\mathbf{F}_1(X) = \{ D \in \mathbf{G}_1(\mathbf{P}^4) \mid D \subset X \}$  : surface de Fano

4  $\mathcal{T}_X = \left\{ \text{Triangles } \triangle \subset X \right\}$  variété de dimension 3

- $\mathbf{F}_1(X)^3 \supset \mathcal{T}_X \ni T = \sum_{s=1}^3 l_s \xrightarrow{P_i} l_i \in \mathbf{F}_1(X)$

## Exemples de tissus II

### 3 $X \subset \mathbf{P}^4$ Hypersurface cubique (lisse)

- Par  $x \in X$  générique, passent 6 droites  $L_1(x), \dots, L_6(x) \subset X$
- $\mathcal{LW}_X \stackrel{\text{loc}^t}{=} \mathcal{W}(L_1, \dots, L_6)$  : 6-tissu en droites sur  $X$
- $\mathbf{F}_1(X) = \{ D \in \mathbf{G}_1(\mathbf{P}^4) \mid D \subset X \}$  : surface de Fano

### 4 $\mathcal{T}_X = \left\{ \text{Triangles } \triangle \subset X \right\}$ variété de dimension 3

- $\mathbf{F}_1(X)^3 \supset \mathcal{T}_X \ni T = \sum_{s=1}^3 l_s \xrightarrow{P_i} l_i \in \mathbf{F}_1(X)$  (projection  $i$ -ème coté)

## Exemples de tissus II

### 3 $X \subset \mathbf{P}^4$    Hypersurface cubique (lisse)

- Par  $x \in X$  générique, passent 6 droites  $L_1(x), \dots, L_6(x) \subset X$
- $\mathcal{LW}_X \stackrel{\text{loc}^t}{=} \mathcal{W}(L_1, \dots, L_6)$  : 6-tissu en droites sur  $X$
- $\mathbf{F}_1(X) = \{ D \in \mathbf{G}_1(\mathbf{P}^4) \mid D \subset X \}$  : surface de Fano

### 4 $\mathcal{T}_X = \left\{ \text{Triangles } \triangle \subset X \right\}$    variété de dimension 3

- $\mathbf{F}_1(X)^3 \supset \mathcal{T}_X \ni T = \sum_{s=1}^3 \ell_s \xrightarrow{P_i} \ell_i \in \mathbf{F}_1(X)$      $\left( \begin{array}{l} \text{projection} \\ i\text{-ème coté} \end{array} \right)$
- [\[Blaschke-Walberer 1934\]](#) :     $\mathcal{TW}_X = \mathcal{W}(P_1, P_2, P_3)$   
3-tissu en courbes sur  $\mathcal{T}_X$  (gauche)

# Deux théorèmes

# Deux théorèmes

**Théorème [Hwang]** : Soit  $X, X' \subset \mathbf{P}^4$  deux hypercubiques lisses

$$f : (X, x) \xrightarrow{\sim} (X', x')$$

germe de biholom t. q

$$f_*(\mathcal{LW}_{X,x}) = \mathcal{LW}_{X',x'}$$



$f$  : germe en  $x$  de

$$F : X \xrightarrow{\sim} X'$$

(  $F$  est projective )

# Deux théorèmes

**Théorème [Hwang]** : Soit  $X, X' \subset \mathbf{P}^4$  deux hypercubiques lisses

$$f : (X, x) \xrightarrow{\sim} (X', x')$$

germe de biholom t. q

$$f_*(\mathcal{LW}_{X,x}) = \mathcal{LW}_{X',x'}$$

$f$  : germe en  $x$  de

$$F : X \xrightarrow{\sim} X'$$

(  $F$  est projective )



**Théorème [Blaschke-Walberer]** : Soit  $X \subset \mathbf{P}^4$  une hypercubique

$$\mathcal{TW}_{X,x}$$



permet de reconstruire  $X$



## Exemples III

- Tissu de Bol (1935) :  $\mathcal{B} = \mathcal{W}(f_1, \dots, f_5)$  5-tissu sur  $\mathcal{M}_{0,5}$

## Exemples III

- Tissu de Bol (1935) :  $\mathcal{B} = \mathcal{W}(f_1, \dots, f_5)$  5-tissu sur  $\mathcal{M}_{0,5}$

$f_i$  : applic<sup>o</sup> d'oubli  
du  $i$ -eme point :  $\mathcal{M}_{0,5} \xrightarrow{f_i} \mathcal{M}_{0,4} \simeq \mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

## Exemples III

- Tissu de Bol (1935) :  $\mathcal{B} = \mathcal{W}(f_1, \dots, f_5)$  5-tissu sur  $\mathcal{M}_{0,5}$

$f_i$  : applic<sup>o</sup> d'oubli  
du  $i$ -eme point :  $\mathcal{M}_{0,5} \xrightarrow{f_i} \mathcal{M}_{0,4} \simeq \mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

- $\mathcal{B} = \mathcal{W}\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$

## Exemples III

- Tissu de Bol (1935) :  $\mathcal{B} = \mathcal{W}(f_1, \dots, f_5)$  5-tissu sur  $\mathcal{M}_{0,5}$

$f_i$  : applic<sup>o</sup> d'oubli  
du  $i$ -eme point :  $\mathcal{M}_{0,5} \xrightarrow{f_i} \mathcal{M}_{0,4} \simeq \mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$

- $\mathcal{B} = \mathcal{W}\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$

- Tissu  $\mathcal{W}_{0,n+3}$  (Room 1934, Burau 1966, Damiano 1980) :

## Exemples III

- Tissu de Bol (1935) :  $\mathcal{B} = \mathcal{W}(f_1, \dots, f_5)$  5-tissu sur  $\mathcal{M}_{0,5}$   
 $f_i$  : applic<sup>o</sup> d'oubli du  $i$ -eme point :  $\mathcal{M}_{0,5} \xrightarrow{f_i} \mathcal{M}_{0,4} \simeq \mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$
- $\mathcal{B} = \mathcal{W}\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$
- Tissu  $\mathcal{W}_{0,n+3}$  (Room 1934, Burau 1966, Damiano 1980) :
  - ▶  $n + 3$  applications d'oubli d'un point :  $\mathcal{M}_{0,n+3} \xrightarrow{f_i} \mathcal{M}_{0,n+2} \quad i = 1, \dots, n+3$

## Exemples III

- Tissu de Bol (1935) :  $\mathcal{B} = \mathcal{W}(f_1, \dots, f_5)$  5-tissu sur  $\mathcal{M}_{0,5}$   
 $f_i$  : applic<sup>o</sup> d'oubli du  $i$ -eme point :  $\mathcal{M}_{0,5} \xrightarrow{f_i} \mathcal{M}_{0,4} \simeq \mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$
- $\mathcal{B} = \mathcal{W}\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$
- Tissu  $\mathcal{W}_{0,n+3}$  (Room 1934, Burau 1966, Damiano 1980) :
  - ▶  $n + 3$  applications d'oubli d'un point :  $\mathcal{M}_{0,n+3} \xrightarrow{f_i} \mathcal{M}_{0,n+2} \quad i = 1, \dots, n+3$
  - ▶  $\mathcal{W}_{0,n+3} = \mathcal{W}(f_1, \dots, f_{n+3})$   $(n + 3)$ -tissu en courbes sur  $\mathcal{M}_{0,n+3}$

## Tissus $\mathcal{W}_{0,n+3}$ : modèles projectifs

- Pour  $n \geq 2$  :  $p_1, \dots, p_{n+2} = n + 2$  points en PG dans  $\mathbf{P}^n$

## Tissus $\mathcal{W}_{0,n+3}$ : modèles projectifs

- Pour  $n \geq 2$  :  $p_1, \dots, p_{n+2} = n + 2$  points en PG dans  $\mathbf{P}^n$
- $n = 2$  :  $\mathcal{W}_{0,5} = \mathcal{B} = \mathcal{W}\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$



## Tissus $\mathcal{W}_{0,n+3}$ : modèles projectifs

- Pour  $n \geq 2$  :  $p_1, \dots, p_{n+2} = n + 2$  points en PG dans  $\mathbf{P}^n$
- $n = 2$  :  $\mathcal{W}_{0,5} = \mathcal{B} = \mathcal{W}\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$   
 $= \mathcal{W}\left(\mathcal{L}_{p_1}, \dots, \mathcal{L}_{p_4}, \mathcal{C}_{p_1, \dots, p_4}^2\right)$

## Tissus $\mathcal{W}_{0,n+3}$ : modèles projectifs

- Pour  $n \geq 2$  :  $p_1, \dots, p_{n+2} = n + 2$  points en PG dans  $\mathbf{P}^n$

- $n = 2$  :  $\mathcal{W}_{0,5} = \mathcal{B} = \mathcal{W}\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$   
 $= \mathcal{W}\left(\mathcal{L}_{p_1}, \dots, \mathcal{L}_{p_4}, \mathcal{C}_{p_1, \dots, p_4}^2\right)$

- $n = 3$  :  $\mathcal{W}_{0,6} = \mathcal{W}\left((x, y), (x, z), (y, z), \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right), \left(\frac{x-1}{z-1}, \frac{y-1}{z-1}\right), \left(\frac{z(x-1)}{x(z-1)}, \frac{z(y-1)}{y(z-1)}\right)\right)$   
 $= \mathcal{W}\left(\mathcal{L}_{p_1}, \dots, \mathcal{L}_{p_5}, \mathcal{C}_{p_1, \dots, p_5}^3\right)$

## Tissus $\mathcal{W}_{0,n+3}$ : modèles projectifs

- Pour  $n \geq 2$  :  $p_1, \dots, p_{n+2} = n + 2$  points en PG dans  $\mathbf{P}^n$
- $n = 2$  :  $\mathcal{W}_{0,5} = \mathcal{B} = \mathcal{W}\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$   
 $= \mathcal{W}\left(\mathcal{L}_{p_1}, \dots, \mathcal{L}_{p_4}, \mathcal{C}_{p_1, \dots, p_4}^2\right)$
- $n = 3$  :  $\mathcal{W}_{0,6} = \mathcal{W}\left((x, y), (x, z), (y, z), \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right), \left(\frac{x-1}{z-1}, \frac{y-1}{z-1}\right), \left(\frac{z(x-1)}{x(z-1)}, \frac{z(y-1)}{y(z-1)}\right)\right)$   
 $= \mathcal{W}\left(\mathcal{L}_{p_1}, \dots, \mathcal{L}_{p_5}, \mathcal{C}_{p_1, \dots, p_5}^3\right)$
- $n \geq 3$  :  $\mathcal{W}_{0,n+3} = \mathcal{W}\left(\mathcal{L}_{p_1}, \dots, \mathcal{L}_{p_{n+2}}, \mathcal{C}_{p_1, \dots, p_{n+2}}^n\right)$  sur  $\mathbf{P}^n$

# Relation d'Abel du dilogarithme

## Relation d'Abel du dilogarithme

- $\mathcal{W}_{0,5} = \mathcal{B} = \mathcal{W}\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$

## Relation d'Abel du dilogarithme

- $\mathcal{W}_{0,5} = \mathcal{B} = \mathcal{W}\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$
- Pour  $0 < x < y < 1$ , on a

$$(\mathcal{A}b) \quad R(x) - R(y) - R\left(\frac{x}{y}\right) - R\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + R\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0$$

# Relation d'Abel du dilogarithme

- $\mathcal{W}_{0,5} = \mathcal{B} = \mathcal{W}\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$
- Pour  $0 < x < y < 1$ , on a

$$(\mathcal{A}b) \quad \mathbf{R}(x) - \mathbf{R}(y) - \mathbf{R}\left(\frac{x}{y}\right) - \mathbf{R}\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \mathbf{R}\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0$$

où  $\mathbf{R}$  désigne le **dilogarithme de Rogers** ( $0 < u < 1$ ) :

$$\mathbf{R}(u) = \mathbf{Li}_2(u) + \frac{1}{2} \mathbf{Log}(u) \mathbf{Log}(1-u) - \pi^2/6$$

# Relation d'Abel du dilogarithme

- $\mathcal{W}_{0,5} = \mathcal{B} = \mathcal{W}\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$
- Pour  $0 < x < y < 1$ , on a

$$(\mathcal{A}b) \quad \mathbf{R}(x) - \mathbf{R}(y) - \mathbf{R}\left(\frac{x}{y}\right) - \mathbf{R}\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + \mathbf{R}\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0$$

où  $\mathbf{R}$  désigne le **dilogarithme de Rogers** ( $0 < u < 1$ ) :

$$\mathbf{R}(u) = \mathbf{Li}_2(u) + \frac{1}{2} \mathbf{Log}(u) \mathbf{Log}(1-u) - \pi^2/6$$

- $(\mathcal{A}b)$  relation importante, apparait dans de nombreux domaines :
  - géom hyperbolique,  $K$ -théorie, homologie de  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ , théorie des nombres (périodes), algèbres amassées, symétrie miroir (scattering diagram), etc.



# Sommes abéliennes

- $\mathcal{W}_{0,5} = \mathcal{B} = W\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$

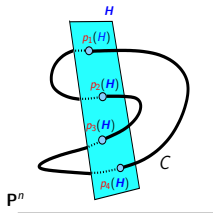
$$(\mathcal{A}b) \quad R(x) - R(y) - R\left(\frac{x}{y}\right) - R\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + R\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0$$

# Sommes abéliennes

- $\mathcal{W}_{0,5} = \mathcal{B} = \mathcal{W}\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$

$$(\mathcal{A}b) \quad R(x) - R(y) - R\left(\frac{x}{y}\right) - R\left(\frac{1-x}{1-y}\right) + R\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0$$

- $C \subset \mathbf{P}^n \rightsquigarrow \mathcal{W}_C = \mathcal{W}(p_1, \dots, p_d)$

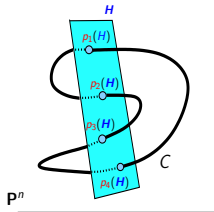


# Sommes abéliennes

- $\mathcal{W}_{0,5} = \mathcal{B} = \mathcal{W}\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$

$$(Ab) \quad R(x) - R(y) - R\left(\frac{x}{y}\right) - R\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + R\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0$$

- $C \subset \mathbf{P}^n \rightsquigarrow \mathcal{W}_C = \mathcal{W}(p_1, \dots, p_d)$



**Thm d'Abel :**  $\forall \omega \in \mathbf{H}^0(C, \omega_C^1)$ ,  $\text{Tr}(\omega) \stackrel{\text{loc}}{=} \sum_i p_i^*(\omega) \equiv 0$  i.e.

$$\int^{p_1(H)} \omega + \int^{p_2(H)} \omega + \dots + \int^{p_d(H)} \omega = 0$$

*“Les sommes abéliennes  
sont constantes”*

# Relations abéliennes

# Relations abéliennes

- $\mathcal{W}_d = \mathcal{W}(u_1, \dots, u_d)$      $u_j : \Omega \subset \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}$

# Relations abéliennes

- $\mathcal{W}_d = \mathcal{W}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d)$      $\mathbf{u}_i : \Omega \subset \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}$
- Relation Abélienne pour  $\mathcal{W}_d$  :  $d$ -uplet  $(\mathbf{F}_i)_{i=1}^d$  tel que

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{u}_1) + \mathbf{F}_2(\mathbf{u}_2) + \dots + \mathbf{F}_d(\mathbf{u}_d) = 0$$

# Relations abéliennes

- $\mathcal{W}_d = \mathcal{W}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d)$      $\mathbf{u}_i : \Omega \subset \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}$
- Relation Abélienne pour  $\mathcal{W}_d$  :  $d$ -uplet  $(\mathbf{F}_i)_{i=1}^d$  tel que

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{u}_1) + \mathbf{F}_2(\mathbf{u}_2) + \dots + \mathbf{F}_d(\mathbf{u}_d) = 0$$

- $AR(\mathcal{W}_d) = \left\{ (d\mathbf{F}_i)_{i=1}^d \mid \sum_i \mathbf{u}_i^*(d\mathbf{F}_i) = 0 \right\} \leftarrow \mathbf{C}\text{-ev}$

# Relations abéliennes

- $\mathcal{W}_d = \mathcal{W}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d)$      $\mathbf{u}_i : \Omega \subset \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}$
- Relation Abélienne pour  $\mathcal{W}_d$  :  $d$ -uplet  $(\mathbf{F}_i)_{i=1}^d$  tel que

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{u}_1) + \mathbf{F}_2(\mathbf{u}_2) + \dots + \mathbf{F}_d(\mathbf{u}_d) = 0$$

- $\mathbf{AR}(\mathcal{W}_d) = \left\{ (d\mathbf{F}_i)_{i=1}^d \mid \sum_i \mathbf{u}_i^*(d\mathbf{F}_i) = 0 \right\}$      $\leftarrow$   $\mathbf{C}$ -ev
- $\mathbf{rg}(\mathcal{W}_d) = \dim(\mathbf{AR}(\mathcal{W}_d)) \in \mathbb{N}$      $\leftarrow$  invariant



# Relations abéliennes

- $\mathcal{W}_d = \mathcal{W}(u_1, \dots, u_d)$      $u_i : \Omega \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$
- Relation Abélienne pour  $\mathcal{W}_d$  :  $d$ -uplet  $(F_i)_{i=1}^d$  tel que

$$F_1(u_1) + F_2(u_2) + \dots + F_d(u_d) = 0$$

- $AR(\mathcal{W}_d) = \left\{ (dF_i)_{i=1}^d \mid \sum_i u_i^*(dF_i) = 0 \right\}$      $\leftarrow$   $\mathbb{C}$ -ev
- $rg(\mathcal{W}_d) = \dim(AR(\mathcal{W}_d)) \in \mathbb{N}$      $\leftarrow$  invariant

**Prop (Bol)** : Pour un  $d$ -tissu plan, on a  $rg(\mathcal{W}_d) \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2}$

# Relations abéliennes

- $\mathcal{W}_d = \mathcal{W}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d)$      $\mathbf{u}_i : \Omega \subset \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}$
- Relation Abélienne pour  $\mathcal{W}_d$  :  $d$ -uplet  $(\mathbf{F}_i)_{i=1}^d$  tel que

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{u}_1) + \mathbf{F}_2(\mathbf{u}_2) + \dots + \mathbf{F}_d(\mathbf{u}_d) = 0$$

- $\mathbf{AR}(\mathcal{W}_d) = \left\{ (d\mathbf{F}_i)_{i=1}^d \mid \sum_i \mathbf{u}_i^*(d\mathbf{F}_i) = 0 \right\}$      $\leftarrow$   $\mathbf{C}$ -ev
- $\mathbf{rg}(\mathcal{W}_d) = \dim(\mathbf{AR}(\mathcal{W}_d)) \in \mathbb{N}$      $\leftarrow$  invariant

Prop (Bol) : Pour un  $d$ -tissu plan, on a  $\mathbf{rg}(\mathcal{W}_d) \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2}$

- Tissu de rang maximal : lorsque  $\mathbf{rg}(\mathcal{W}_d)$  est maximal

## Relations abéliennes : exemples

- Ex 1 :  $\mathcal{W}_C = \mathcal{W}(p_1, \dots, p_d)$  avec  $C \subset \mathbf{P}^2$  (cas algébrique)

# Relations abéliennes : exemples

- Ex 1 :  $\mathcal{W}_C = \mathcal{W}(p_1, \dots, p_d)$  avec  $C \subset \mathbf{P}^2$  (cas algébrique)

- ▶  $\text{Tr}$  induit un isomorphisme  $\mathbf{H}^0(C, \omega_C^1) \simeq \mathbf{AR}(\mathcal{W}_C)$

$$\omega \mapsto (p_i^*(\omega))_{i=1}^d$$

# Relations abéliennes : exemples

- Ex 1 :  $\mathcal{W}_C = \mathcal{W}(p_1, \dots, p_d)$  avec  $C \subset \mathbf{P}^2$  (cas algébrique)

- ▶ **Tr** induit un isomorphisme  $\mathbf{H}^0(C, \omega_C^1) \simeq \mathbf{AR}(\mathcal{W}_C)$

$$\omega \mapsto (p_i^*(\omega))_{i=1}^d$$

$\implies$

$$p_a(C) = \mathbf{h}^0(\omega_C^1) = \mathbf{rg}(\mathcal{W}_C)$$

# Relations abéliennes : exemples

- Ex 1 :  $\mathcal{W}_C = \mathcal{W}(p_1, \dots, p_d)$  avec  $C \subset \mathbf{P}^2$  (cas algébrique)

▶ Tr induit un isomorphisme  $\mathbf{H}^0(C, \omega_C^1) \simeq \mathbf{AR}(\mathcal{W}_C)$

$$\omega \mapsto (p_i^*(\omega))_{i=1}^d$$

$$\implies p_a(C) = \mathbf{h}^0(\omega_C^1) = \mathbf{rg}(\mathcal{W}_C)$$

$$\implies \mathcal{W}_C \text{ de rang max } (d-1)(d-2)/2 = \mathbf{rg}(\mathcal{W}_C)$$

# Relations abéliennes : exemples

- Ex 1 :  $\mathcal{W}_C = \mathcal{W}(p_1, \dots, p_d)$  avec  $C \subset \mathbf{P}^2$  (cas algébrique)

▶ Tr induit un isomorphisme  $\mathbf{H}^0(C, \omega_C^1) \simeq \mathbf{AR}(\mathcal{W}_C)$

$$\omega \mapsto (p_i^*(\omega))_{i=1}^d$$

$$\implies p_a(C) = \mathbf{h}^0(\omega_C^1) = \mathbf{rg}(\mathcal{W}_C)$$

$$\implies \mathcal{W}_C \text{ de rang max } (d-1)(d-2)/2 = \mathbf{rg}(\mathcal{W}_C)$$

- Ex 2 :  $\mathcal{B} = \mathcal{W}_{0,5} = \mathcal{W}\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$

# Relations abéliennes : exemples

- Ex 1 :  $\mathcal{W}_C = \mathcal{W}(p_1, \dots, p_d)$  avec  $C \subset \mathbf{P}^2$  (cas algébrique)

- ▶ Tr induit un isomorphisme  $\mathbf{H}^0(C, \omega_C^1) \simeq \mathbf{AR}(\mathcal{W}_C)$

$$\omega \mapsto (p_i^*(\omega))_{i=1}^d$$

$$\implies p_a(C) = \mathbf{h}^0(\omega_C^1) = \mathbf{rg}(\mathcal{W}_C)$$

$$\implies \mathcal{W}_C \text{ de rang max } (d-1)(d-2)/2 = \mathbf{rg}(\mathcal{W}_C)$$

- Ex 2 :  $\mathcal{B} = \mathcal{W}_{0,5} = \mathcal{W}\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$

- ▶  $\left( R(x) - R(y) - R\left(\frac{x}{y}\right) - R\left(\frac{1-x}{1-y}\right) + R\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0 \right) \in \mathbf{AR}(\mathcal{B})$



# Relations abéliennes : exemples

- Ex 1 :  $\mathcal{W}_C = \mathcal{W}(p_1, \dots, p_d)$  avec  $C \subset \mathbf{P}^2$  (cas algébrique)

▶ Tr induit un isomorphisme  $\mathbf{H}^0(C, \omega_C^1) \simeq \mathbf{AR}(\mathcal{W}_C)$

$$\omega \mapsto (p_i^*(\omega))_{i=1}^d$$

$$\implies p_a(C) = \mathbf{h}^0(\omega_C^1) = \mathbf{rg}(\mathcal{W}_C)$$

$$\implies \mathcal{W}_C \text{ de rang max } (d-1)(d-2)/2 = \mathbf{rg}(\mathcal{W}_C)$$

- Ex 2 :  $\mathcal{B} = \mathcal{W}_{0,5} = \mathcal{W}\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$

▶  $\left( \mathbf{R}(x) - \mathbf{R}(y) - \mathbf{R}\left(\frac{x}{y}\right) - \mathbf{R}\left(\frac{1-x}{1-y}\right) + \mathbf{R}\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0 \right) \in \mathbf{AR}(\mathcal{B})$

⚡

# Relations abéliennes : exemples

- Ex 1 :  $\mathcal{W}_C = \mathcal{W}(p_1, \dots, p_d)$  avec  $C \subset \mathbf{P}^2$  (cas algébrique)

- ▶  $\text{Tr}$  induit un isomorphisme  $\mathbf{H}^0(C, \omega_C^1) \simeq \mathbf{AR}(\mathcal{W}_C)$

$$\omega \mapsto (p_i^*(\omega))_{i=1}^d$$

$$\implies p_a(C) = \mathbf{h}^0(\omega_C^1) = \mathbf{rg}(\mathcal{W}_C)$$

$$\implies \mathcal{W}_C \text{ de rang max } (d-1)(d-2)/2 = \mathbf{rg}(\mathcal{W}_C)$$

- Ex 2 :  $\mathcal{B} = \mathcal{W}_{0,5} = \mathcal{W}\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$

- ▶  $\left( \mathbf{R}(x) - \mathbf{R}(y) - \mathbf{R}\left(\frac{x}{y}\right) - \mathbf{R}\left(\frac{1-x}{1-y}\right) + \mathbf{R}\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0 \right) \in \mathbf{AR}(\mathcal{B})$

- ▶  $\left( \mathbf{Log}(x) - \mathbf{Log}(y) + \mathbf{Log}\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \right)$

# Relations abéliennes : exemples

- Ex 1 :  $\mathcal{W}_C = \mathcal{W}(p_1, \dots, p_d)$  avec  $C \subset \mathbf{P}^2$  (cas algébrique)

- ▶  $\text{Tr}$  induit un isomorphisme  $\mathbf{H}^0(C, \omega_C^1) \simeq \mathbf{AR}(\mathcal{W}_C)$

$$\omega \mapsto (p_i^*(\omega))_{i=1}^d$$

$$\implies p_a(C) = \mathbf{h}^0(\omega_C^1) = \mathbf{rg}(\mathcal{W}_C)$$

$$\implies \mathcal{W}_C \text{ de rang max } (d-1)(d-2)/2 = \mathbf{rg}(\mathcal{W}_C)$$

- Ex 2 :  $\mathcal{B} = \mathcal{W}_{0,5} = \mathcal{W}(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)})$

- ▶  $(R(x) - R(y) - R(\frac{x}{y}) - R(\frac{1-x}{1-y}) + R(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}) = 0) \in \mathbf{AR}(\mathcal{B})$

- ▶  $(\text{Log}(x) - \text{Log}(y) + \text{Log}(\frac{x}{y}) = 0) \in \mathbf{AR}(\mathcal{B})$

# Relations abéliennes : exemples

- Ex 1 :  $\mathcal{W}_C = \mathcal{W}(p_1, \dots, p_d)$  avec  $C \subset \mathbf{P}^2$  (cas algébrique)

- ▶ Tr induit un isomorphisme  $\mathbf{H}^0(C, \omega_C^1) \simeq \mathbf{AR}(\mathcal{W}_C)$

$$\omega \mapsto (p_i^*(\omega))_{i=1}^d$$

$$\implies p_a(C) = \mathbf{h}^0(\omega_C^1) = \mathbf{rg}(\mathcal{W}_C)$$

$$\implies \mathcal{W}_C \text{ de rang max } (d-1)(d-2)/2 = \mathbf{rg}(\mathcal{W}_C)$$

- Ex 2 :  $\mathcal{B} = \mathcal{W}_{0,5} = \mathcal{W}\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$

- ▶  $\left( \mathbf{R}(x) - \mathbf{R}(y) - \mathbf{R}\left(\frac{x}{y}\right) - \mathbf{R}\left(\frac{1-x}{1-y}\right) + \mathbf{R}\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0 \right) \in \mathbf{AR}(\mathcal{B})$

- ▶  $\left( \mathbf{Log}(x) - \mathbf{Log}(y) + \mathbf{Log}\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \right) \in \mathbf{AR}(\mathcal{B})$

- ▶  $\langle \mathcal{Ab} \rangle^1 \oplus \mathbf{AR}_{\mathbf{Log}}(\mathcal{B})^5 = \mathbf{AR}(\mathcal{B})^6 \implies \mathcal{B} \text{ de rang max}$

# Tissu de Bol : propriétés

- $\mathcal{B} = \mathcal{W}_{0,5} = w\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$  5-tissu sur  $\mathcal{M}_{0,5}$

# Tissu de Bol : propriétés

- $\mathcal{B} = \mathcal{W}_{0,5} = w\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$  5-tissu sur  $\mathcal{M}_{0,5}$ 
  - ▶ [N-Lin]  $\mathcal{B}$  n'est pas linéarisable

# Tissu de Bol : propriétés

- $\mathcal{B} = \mathcal{W}_{0,5} = w\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$  5-tissu sur  $\mathcal{M}_{0,5}$

▶ [N-Lin]  $\mathcal{B}$  n'est pas linéarisable

▶ [Rang]  $\mathcal{B}$  est de rang maximal 6

$$AR(\mathcal{B}) = AR_{\text{Log}}(\mathcal{B}) \oplus \langle \mathcal{A}b \rangle$$

# Tissu de Bol : propriétés

- $\mathcal{B} = \mathcal{W}_{0,5} = w\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$  5-tissu sur  $\mathcal{M}_{0,5}$

▶ [N-Lin]  $\mathcal{B}$  n'est pas linéarisable

▶ [Rang]  $\mathcal{B}$  est de rang maximal 6

$$AR(\mathcal{B}) = AR_{\text{Log}}(\mathcal{B}) \oplus \langle \mathcal{A}b \rangle$$

▶ [Hexag]  $\mathcal{B}$  est hexagonal



# Tissu de Bol : propriétés

- $\mathcal{B} = \mathcal{W}_{0,5} = w\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$  5-tissu sur  $\mathcal{M}_{0,5}$

▶ [N-Lin]  $\mathcal{B}$  n'est pas linéarisable

▶ [Rang]  $\mathcal{B}$  est de rang maximal 6

$$AR(\mathcal{B}) = AR_{\text{Log}}(\mathcal{B}) \oplus \langle \mathcal{A}b \rangle$$

▶ [Hexag]  $\mathcal{B}$  est hexagonal

▶ [Caract] Étant donné  $\mathcal{W}_d$ , un tissu plan hexagonal :

- soit  $\mathcal{W}_d$  est équivalent à  $d$  pinces de droites
- soit  $\mathcal{W}_d \simeq \mathcal{B}$  ( et  $d = 5$  )

# Tissu de Bol : propriétés

- $\text{Aut}(\mathcal{M}_{0,5}) = \mathfrak{S}_5$
- $\mathcal{B} = \mathcal{W}_{0,5} = w\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$  5-tissu sur  $\mathcal{M}_{0,5}$ 
  - ▶ [N-Lin]  $\mathcal{B}$  n'est pas linéarisable
  - ▶ [Rang]  $\mathcal{B}$  est de rang maximal 6
$$\text{AR}(\mathcal{B}) = \text{AR}_{\text{Log}}(\mathcal{B}) \oplus \langle \mathcal{Ab} \rangle$$
  - ▶ [Hexag]  $\mathcal{B}$  est hexagonal
  - ▶ [Caract] Étant donné  $\mathcal{W}_d$ , un tissu plan hexagonal :
    - soit  $\mathcal{W}_d$  est équivalent à  $d$  pinceaux de droites
    - soit  $\mathcal{W}_d \simeq \mathcal{B}$  ( et  $d = 5$  )

# Tissu de Bol : propriétés

- $\text{Aut}(\mathcal{M}_{0,5}) = \mathfrak{S}_5$
- $\mathcal{B} = \mathcal{W}_{0,5} = w\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$  5-tissu sur  $\mathcal{M}_{0,5}$

▶ [N-Lin]  $\mathcal{B}$  n'est pas linéarisable

▶ [Rang]  $\mathcal{B}$  est de rang maximal 6

$$AR(\mathcal{B}) = \underbrace{AR_{\text{Log}}(\mathcal{B})}_{V_{[221]}} \oplus \underbrace{\langle \mathcal{A}b \rangle}_{V_{[1^5]}} \quad (\mathfrak{S}_5 - \text{mod})$$

▶ [Hexag]  $\mathcal{B}$  est hexagonal

- ▶ [Caract] Étant donné  $\mathcal{W}_d$ , un tissu plan hexagonal :
- soit  $\mathcal{W}_d$  est équivalent à  $d$  pinces de droites
  - soit  $\mathcal{W}_d \simeq \mathcal{B}$  ( et  $d = 5$  )

# Relation d'Abel, d'après Gelfand et MacPherson

- $(z_s)_{s=1}^{n+3} \in \mathbb{C}^{n+3} \xrightarrow{\pi_i} \mathbb{C}^{n+2} \quad ( \pi_i : \text{oubli de la } i\text{-ème coord} )$   
 $\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$   
 $[z_s] \in \mathcal{M}_{0,n+3} \xrightarrow{f_i} \mathcal{M}_{0,n+2}$

# Relation d'Abel, d'après Gelfand et MacPherson

- $(z_s)_{s=1}^{n+3} \in \mathbb{C}^{n+3} \xrightarrow{\pi_i} \mathbb{C}^{n+2}$  (  $\pi_i$  : oubli de la  $i$ -ème coord )  
↓                    ↓                    ↓  
 $[z_s] \in \mathcal{M}_{0,n+3} \xrightarrow{f_i} \mathcal{M}_{0,n+2}$
- $\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^{n+3}) \circlearrowleft \mathbf{SL}_{n+3}(\mathbb{R})$

# Relation d'Abel, d'après Gelfand et MacPherson

- $(z_s)_{s=1}^{n+3} \in \mathbb{C}^{n+3} \xrightarrow{\pi_i} \mathbb{C}^{n+2}$  (  $\pi_i$  : oubli de la  $i$ -ème coord )  
 $\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$   
 $[z_s] \in \mathcal{M}_{0,n+3} \xrightarrow{f_i} \mathcal{M}_{0,n+2}$
- $\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^{n+3}) \circlearrowleft \mathbf{SL}_{n+3}(\mathbb{R}) \supset \mathbf{H}_{n+2} \simeq (\mathbb{R}^*)^{n+2}$  (  $\mathbf{H}_{n+2}$  tore de Cartan )

# Relation d'Abel, d'après Gelfand et MacPherson

- $(z_s)_{s=1}^{n+3} \in \mathbb{C}^{n+3} \xrightarrow{\pi_i} \mathbb{C}^{n+2}$  (  $\pi_i$  : oubli de la  $i$ -ème coord )  
 $\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$   
 $[z_s] \in \mathcal{M}_{0,n+3} \xrightarrow{f_i} \mathcal{M}_{0,n+2}$
- $\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^{n+3}) \circlearrowleft \mathbf{SL}_{n+3}(\mathbb{R}) \supset \mathbf{H}_{n+2} \simeq (\mathbb{R}^*)^{n+2}$  (  $\mathbf{H}_{n+2}$  tore de Cartan )  
 $\nu_{n+2} : \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^{n+3}) \longrightarrow \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^{n+3}) / \mathbf{H}_{n+2} \simeq \mathcal{M}_{0,n+3}(\mathbb{R})$

# Relation d'Abel, d'après Gelfand et MacPherson

- $$\begin{array}{ccc}
 (z_s)_{s=1}^{n+3} \in \mathbb{C}^{n+3} & \xrightarrow{\pi_i} & \mathbb{C}^{n+2} & \text{ ( } \pi_i \text{ : oubli de la } i\text{-ème coord )} \\
 \downarrow & & \downarrow & \\
 [z_s] \in \mathcal{M}_{0,n+3} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{M}_{0,n+2} & 
 \end{array}$$

- $$\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^{n+3}) \circlearrowleft \mathbf{SL}_{n+3}(\mathbb{R}) \supset \mathbf{H}_{n+2} \simeq (\mathbb{R}^*)^{n+2} \text{ ( } \mathbf{H}_{n+2} \text{ tore de Cartan )}$$

$$\nu_{n+2} : \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^{n+3}) \longrightarrow \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^{n+3}) / \mathbf{H}_{n+2} \simeq \mathcal{M}_{0,n+3}(\mathbb{R})$$

- $$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^{n+3}) & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}_i^{n+2}) & \mathbb{R}_i^{n+2} = \mathbb{R}^{n+3} / \langle e_i \rangle \\
 \downarrow \nu_{n+2} & & \downarrow \nu_{n+1} & \\
 \mathcal{M}_{0,n+3} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{M}_{0,n+2} & \tilde{f}_i(\xi) = [\xi]
 \end{array}$$



# [GM] (esquisse)

$$\begin{array}{ccc} & \overset{a_i}{\curvearrowright} & \\ \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^{n+3}) & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}_i^{n+2}) \\ \nu=\nu_{n+2} \downarrow & & \downarrow \nu_{n+1}=\nu_{[i]} \\ \mathcal{M}_{0,n+3} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{M}_{0,n+2} \end{array}$$

$$i = 1, \dots, n+3$$

# [GM] (esquisse)

$$\begin{array}{ccc} & \overset{a_i}{\curvearrowright} & \\ \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^{n+3}) & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}_i^{n+2}) \\ \nu=\nu_{n+2} \downarrow & & \downarrow \nu_{n+1}=\nu_{[i]} \\ \mathcal{M}_{0,n+3} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{M}_{0,n+2} \end{array}$$

$$i = 1, \dots, n+3$$

- $H^k(\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^{n+3}), \mathbb{R})$

# [GM] (esquisse)

$$\begin{array}{ccc} & \overset{a_i}{\curvearrowright} & \\ \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^{n+3}) & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}_i^{n+2}) \\ \nu=\nu_{n+2} \downarrow & & \downarrow \nu_{n+1}=\nu_{[i]} \\ \mathcal{M}_{0,n+3} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{M}_{0,n+2} \end{array}$$

$$i = 1, \dots, n+3$$

- $H^k(\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^{n+3}), \mathbb{R}) \ni \mathbf{P}$

# [GM] (esquisse)

$$\begin{array}{ccc} & \overset{a_i}{\curvearrowright} & \\ \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^{n+3}) & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}_i^{n+2}) \\ \nu=\nu_{n+2} \downarrow & & \downarrow \nu_{n+1}=\nu_{[i]} \\ \mathcal{M}_{0,n+3} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{M}_{0,n+2} \end{array} \quad i = 1, \dots, n+3$$

- $\mathbf{H}^k(\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^{n+3}), \mathbb{R}) \ni \mathbf{P} = [\Omega_{\mathbf{P}}]$  avec  $\Omega_{\mathbf{P}}$  invariante sous  $\mathrm{SO}_{n+3}(\mathbb{R})$

# [GM] (esquisse)

$$\begin{array}{ccc}
 & \overset{a_i}{\curvearrowright} & \\
 \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^{n+3}) & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}_i^{n+2}) & \quad i = 1, \dots, n+3 \\
 \nu = \nu_{n+2} \downarrow & & \downarrow \nu_{n+1} = \nu_{[i]} & \\
 \mathcal{M}_{0,n+3} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{M}_{0,n+2} & 
 \end{array}$$

- $\mathbf{H}^k(\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^{n+3}), \mathbb{R}) \ni \mathbf{P} = [\Omega_{\mathbf{P}}]$  avec  $\Omega_{\mathbf{P}}$  invariante sous  $SO_{n+3}(\mathbb{R})$
- $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_{\mathbf{P}} = \nu_*(\Omega_{\mathbf{P}})$ 
  - ▶  $f$  sur fibres :  $\tilde{\Omega}(\nu(\xi)) = \int_{\mathbf{H}_{A_{n+2}} \cdot \xi} \Omega_{\mathbf{P}}$
  - ▶  $\tilde{\Omega} \in \Omega^{k-n-2}(\mathcal{M}_{0,n+3})$

# [GM] (esquisse)

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{a_i} & \\
 \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^{n+3}) & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}_i^{n+2}) \\
 \nu = \nu_{n+2} \downarrow & & \downarrow \nu_{n+1} = \nu_{[i]} \\
 \mathcal{M}_{0,n+3} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{M}_{0,n+2}
 \end{array}
 \quad i = 1, \dots, n+3$$

- $\mathbf{H}^k(\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^{n+3}), \mathbb{R}) \ni \mathbf{P} = [\Omega_{\mathbf{P}}]$  avec  $\Omega_{\mathbf{P}}$  invariante sous  $\mathrm{SO}_{n+3}(\mathbb{R})$
- $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_{\mathbf{P}} = \nu_*(\Omega_{\mathbf{P}})$ 
  - ▶  $f$  sur fibres :  $\tilde{\Omega}(\nu(\xi)) = \int_{\mathbf{H}_{A_{n+2}} \cdot \xi} \Omega_{\mathbf{P}}$
  - ▶  $\tilde{\Omega} \in \Omega^{k-n-2}(\mathcal{M}_{0,n+3})$
- $\Omega_{[i]} = \Omega|_{\mathbf{G}_2(\mathbb{R}_i^{n+2})} = a_i^*(\Omega)$

# [GM] (esquisse)

$$\begin{array}{ccc}
 & \overset{a_i}{\curvearrowright} & \\
 \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^{n+3}) & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}_i^{n+2}) & \quad i = 1, \dots, n+3 \\
 \nu = \nu_{n+2} \downarrow & & \downarrow \nu_{n+1} = \nu_{[i]} & \\
 \mathcal{M}_{0,n+3} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{M}_{0,n+2} & 
 \end{array}$$

- $\mathbf{H}^k(\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^{n+3}), \mathbb{R}) \ni \mathbf{P} = [\Omega_{\mathbf{P}}]$  avec  $\Omega_{\mathbf{P}}$  invariante sous  $\mathrm{SO}_{n+3}(\mathbb{R})$
- $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_{\mathbf{P}} = \nu_*(\Omega_{\mathbf{P}})$ 
  - ▶  $\int$  sur fibres :  $\tilde{\Omega}(\nu(\xi)) = \int_{\mathbf{H}_{A_{n+2}} \cdot \xi} \Omega_{\mathbf{P}}$
  - ▶  $\tilde{\Omega} \in \Omega^{k-n-2}(\mathcal{M}_{0,n+3})$
- $\Omega_{[i]} = \Omega|_{\mathbf{G}_2(\mathbb{R}_i^{n+2})} = a_i^*(\Omega)$ 
  - ▶  $\tilde{\Omega}_{[i]} = (\nu_{[i]})_* \Omega_{[i]}$
  - ▶  $\tilde{\Omega}_{[i]} \in \Omega^{k-n-1}(\mathcal{M}_{0,n+2})$

# [GM] (esquisse)

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{a_i} & \\
 \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^{n+3}) & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}_i^{n+2}) \\
 \nu = \nu_{n+2} \downarrow & & \downarrow \nu_{n+1} = \nu_{[i]} \\
 \mathcal{M}_{0,n+3} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{M}_{0,n+2}
 \end{array}
 \quad i = 1, \dots, n+3$$

- $\tilde{\Omega} = \nu_*(\Omega) \in \Omega_{\mathcal{M}_{0,n+3}}^{k-n-2} \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{\Omega}_{[i]} = (\nu_{[i]})_* \Omega_{[i]} \in \Omega_{\mathcal{M}_{0,n+2}}^{k-n-1}$



# [GM] (esquisse)

$$\begin{array}{ccc}
 & \overset{a_i}{\curvearrowright} & \\
 \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^{n+3}) & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}_i^{n+2}) & \quad i = 1, \dots, n+3 \\
 \nu = \nu_{n+2} \downarrow & & \downarrow \nu_{n+1} = \nu_{[i]} & \\
 \mathcal{M}_{0,n+3} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{M}_{0,n+2} & 
 \end{array}$$

- $\tilde{\Omega} = \nu_*(\Omega) \in \Omega_{\mathcal{M}_{0,n+3}}^{k-n-2} \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{\Omega}_{[i]} = (\nu_{[i]})_* \Omega_{[i]} \in \Omega_{\mathcal{M}_{0,n+2}}^{k-n-1}$
- $\overline{\mathbf{H} \cdot \xi} \simeq \overline{\Delta_2}^{n+3}$  via application moment  $\mu : \mathbf{G}_2(\mathbb{R}^{n+3}) \longrightarrow \overline{\Delta_2}^{n+3}$

# [GM] (esquisse)

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{a_i} & \\
 \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^{n+3}) & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}_i^{n+2}) \\
 \nu=\nu_{n+2} \downarrow & & \downarrow \nu_{n+1}=\nu_{[i]} \\
 \mathcal{M}_{0,n+3} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{M}_{0,n+2}
 \end{array} \quad i = 1, \dots, n+3$$

- $\tilde{\Omega} = \nu_*(\Omega) \in \Omega_{\mathcal{M}_{0,n+3}}^{k-n-2} \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{\Omega}_{[i]} = (\nu_{[i]})_* \Omega_{[i]} \in \Omega_{\mathcal{M}_{0,n+2}}^{k-n-1}$
- $\overline{\mathbf{H} \cdot \xi} \simeq \overline{\Delta}_2^{n+3}$  via application moment  $\mu : \mathbf{G}_2(\mathbb{R}^{n+3}) \longrightarrow \overline{\Delta}_2^{n+3}$
- $\partial \overline{\mathbf{H} \cdot \xi} = \sum_{i=1}^{n+3} (-1)^i a_{i*} \left( \overline{\Delta}_{2,(i)}^{n+2} \right) + (\dots)$  en homologie

# [GM] (esquisse)

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^{n+3}) & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}_i^{n+2}) \\
 \nu = \nu_{n+2} \downarrow & & \downarrow \nu_{n+1} = \nu_{[i]} \\
 \mathcal{M}_{0,n+3} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{M}_{0,n+2}
 \end{array}
 \quad i = 1, \dots, n+3$$

$\overset{a_i}{\curvearrowright}$

- $\tilde{\Omega} = \nu_*(\Omega) \in \Omega_{\mathcal{M}_{0,n+3}}^{k-n-2} \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{\Omega}_{[i]} = (\nu_{[i]})_* \Omega_{[i]} \in \Omega_{\mathcal{M}_{0,n+2}}^{k-n-1}$
- $\overline{\mathbf{H} \cdot \xi} \simeq \overline{\Delta}_2^{n+3}$  via application moment  $\mu : \mathbf{G}_2(\mathbb{R}^{n+3}) \longrightarrow \overline{\Delta}_2^{n+3}$
- $\partial \overline{\mathbf{H} \cdot \xi} = \sum_{i=1}^{n+3} (-1)^i a_{i*} \left( \overline{\Delta}_{2,(i)}^{n+2} \right) + (\dots)$  en homologie
- Stokes pour  $\nu_*$   $\implies \quad d\tilde{\Omega} = \sum_{i=1}^{n+3} (-1)^i f_{i*} \left( \tilde{\Omega}_{[i]} \right)$

# [GM] : relation d'Abel du dilog ( $n = 2$ )

$$\begin{array}{ccc} & \overset{a_i}{\curvearrowright} & \\ \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^5) & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}_i^4) \\ \nu=\nu_4 \downarrow & & \downarrow \nu_3=\nu_{[i]} \\ \mathcal{M}_{0,5} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{M}_{0,4} \end{array} \quad i = 1, \dots, 5$$

# [GM] : relation d'Abel du dilog ( $n = 2$ )

$$\begin{array}{ccc} & \overset{a_i}{\curvearrowright} & \\ \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^5) & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}_i^4) & \quad i = 1, \dots, 5 \\ \nu = \nu_4 \downarrow & & \downarrow \nu_3 = \nu_{[i]} & \\ \mathcal{M}_{0,5} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{M}_{0,4} & \end{array}$$

- $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1(\mathcal{T}_{\text{aut}}^2) \in \mathbf{H}^4(\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^5))$  : 1ère classe de Pontryagin

# [GM] : relation d'Abel du dilog ( $n = 2$ )

$$\begin{array}{ccc}
 & \overset{a_i}{\curvearrowright} & \\
 \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^5) & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}_i^4) & \quad i = 1, \dots, 5 \\
 \nu = \nu_4 \downarrow & & \downarrow \nu_3 = \nu_{[i]} & \\
 \mathcal{M}_{0,5} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{M}_{0,4} & 
 \end{array}$$

- $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1(\mathcal{T}_{\text{aut}}^2) \in \mathbf{H}^4(\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^5))$  : 1ère classe de Pontryagin
- $\Omega = 4$ -forme  $\text{SO}_5$ -invariante  $\rightsquigarrow \tilde{\Omega} = \nu_*(\Omega)$  0-forme sur  $\mathcal{M}_{0,5}$

# [GM] : relation d'Abel du dilog ( $n = 2$ )

$$\begin{array}{ccc}
 & \overset{a_i}{\curvearrowright} & \\
 \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^5) & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}_i^4) & \quad i = 1, \dots, 5 \\
 \nu = \nu_4 \downarrow & & \downarrow \nu_3 = \nu_{[i]} & \\
 \mathcal{M}_{0,5} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{M}_{0,4} & 
 \end{array}$$

- $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1(\mathcal{T}_{\text{aut}}^2) \in \mathbf{H}^4(\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^5))$  : 1ère classe de Pontryagin
- $\Omega = 4$ -forme  $\text{SO}_5$ -invariante  $\rightsquigarrow \tilde{\Omega} = \nu_*(\Omega)$  0-forme sur  $\mathcal{M}_{0,5}$
- $\Omega_{[i]}$  = forme volume  $\text{SO}_4$ -invariante sur  $\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^4)$

# [GM] : relation d'Abel du dilog ( $n = 2$ )

$$\begin{array}{ccc}
 & \overset{a_i}{\curvearrowright} & \\
 \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^5) & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}_i^4) & \quad i = 1, \dots, 5 \\
 \nu = \nu_4 \downarrow & & \downarrow \nu_3 = \nu_{[i]} & \\
 \mathcal{M}_{0,5} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{M}_{0,4} & 
 \end{array}$$

- $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1(\mathcal{T}_{\text{aut}}^2) \in \mathbf{H}^4(\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^5))$  : 1ère classe de Pontryagin
- $\Omega = 4$ -forme  $\text{SO}_5$ -invariante  $\rightsquigarrow \tilde{\Omega} = \nu_*(\Omega)$  0-forme sur  $\mathcal{M}_{0,5}$
- $\Omega_{[i]} =$  forme volume  $\text{SO}_4$ -invariante sur  $\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^4)$   
 $\rightsquigarrow \tilde{\Omega}_{[i]}$  1-forme sur  $\mathcal{M}_{0,4}$



# [GM] : relation d'Abel du dilog ( $n = 2$ )

$$\begin{array}{ccc}
 & \overset{a_i}{\curvearrowright} & \\
 \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^5) & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}_i^4) & \quad i = 1, \dots, 5 \\
 \nu = \nu_4 \downarrow & & \downarrow \nu_3 = \nu_{[i]} & \\
 \mathcal{M}_{0,5} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{M}_{0,4} & 
 \end{array}$$

- $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1(\mathcal{T}\text{aut}^2) \in \mathbf{H}^4(\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^5))$  : 1ère classe de Pontryagin
- $\Omega = 4$ -forme  $\text{SO}_5$ -invariante  $\rightsquigarrow \tilde{\Omega} = \nu_*(\Omega)$  0-forme sur  $\mathcal{M}_{0,5}$
- $\Omega_{[i]} =$  forme volume  $\text{SO}_4$ -invariante sur  $\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^4)$   
 $\rightsquigarrow \tilde{\Omega}_{[i]}$  1-forme sur  $\mathcal{M}_{0,4}$
- 1.  $d\tilde{\Omega} = \sum_{i=1}^5 (-1)^i f_i^*(\tilde{\Omega}_{[i]})$

# [GM] : relation d'Abel du dilog ( $n = 2$ )

$$\begin{array}{ccc}
 & \overset{a_i}{\curvearrowright} & \\
 \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^5) & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}_i^4) & \quad i = 1, \dots, 5 \\
 \nu = \nu_4 \downarrow & & \downarrow \nu_3 = \nu_{[i]} & \\
 \mathcal{M}_{0,5} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{M}_{0,4} & 
 \end{array}$$

- $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1(\mathcal{T}\text{aut}^2) \in \mathbf{H}^4(\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^5))$  : 1ère classe de Pontryagin
- $\Omega = 4$ -forme  $\text{SO}_5$ -invariante  $\rightsquigarrow \tilde{\Omega} = \nu_*(\Omega)$  0-forme sur  $\mathcal{M}_{0,5}$
- $\Omega_{[i]} =$  forme volume  $\text{SO}_4$ -invariante sur  $\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^4)$   
 $\rightsquigarrow \tilde{\Omega}_{[i]}$  1-forme sur  $\mathcal{M}_{0,4}$
- 1.  $d\tilde{\Omega} = \sum_{i=1}^5 (-1)^i f_i^*(\tilde{\Omega}_{[i]})$
  2.  $\tilde{\Omega} = 0$
  3.  $dR = \tilde{\Omega}_{[i]}$

# [GM] : relation d'Abel du dilog ( $n = 2$ )

$$\begin{array}{ccc}
 & \overset{a_i}{\curvearrowright} & \\
 \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^5) & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}_i^4) & \quad i = 1, \dots, 5 \\
 \nu = \nu_4 \downarrow & & \downarrow \nu_3 = \nu_{[i]} & \\
 \mathcal{M}_{0,5} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{M}_{0,4} & 
 \end{array}$$

- $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1(\mathcal{T}\text{aut}^2) \in \mathbf{H}^4(\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^5))$  : 1ère classe de Pontryagin
- $\Omega = 4$ -forme  $\text{SO}_5$ -invariante  $\rightsquigarrow \tilde{\Omega} = \nu_*(\Omega)$  0-forme sur  $\mathcal{M}_{0,5}$
- $\Omega_{[i]} =$  forme volume  $\text{SO}_4$ -invariante sur  $\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^4)$   
 $\rightsquigarrow \tilde{\Omega}_{[i]}$  1-forme sur  $\mathcal{M}_{0,4}$
- 1.  $d\tilde{\Omega} = \sum_{i=1}^5 (-1)^i f_i^*(\tilde{\Omega}_{[i]})$
  2.  $\tilde{\Omega} = 0$
  3.  $d\mathbf{R} = \tilde{\Omega}_{[i]}$ $\implies 0 = \sum_{i=1}^5 (-1)^i f_i^*(d\mathbf{R})$

# [Damiano] : relation abelienne d'Euler $\mathcal{E}_n$ ( $n \geq 2$ )

$$\begin{array}{ccc} & \overset{a_i}{\curvearrowright} & \\ \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^{n+3}) & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}_i^{n+2}) \\ \nu=\nu_{n+2} \downarrow & & \downarrow \nu_{n+1}=\nu_{[i]} \\ \mathcal{M}_{0,n+3} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{M}_{0,n+2} \end{array}$$

$$i = 1, \dots, n+3$$

# [Damiano] : relation abelienne d'Euler $\mathcal{E}_n$ ( $n \geq 2$ )

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^{n+3}) & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}_i^{n+2}) \\
 \nu = \nu_{n+2} \downarrow & & \downarrow \nu_{n+1} = \nu_{[i]} \\
 \mathcal{M}_{0,n+3} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{M}_{0,n+2}
 \end{array}
 \quad i = 1, \dots, n+3$$

$\overset{a_i}{\curvearrowright}$

- $\mathbf{P} = \mathbf{E}^n \in \mathbf{H}^{2n}(\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^{n+3}))$  avec  $\mathbf{E}$  = classe d'Euler de  $\mathcal{T}_{\text{aut}}^2$

# [Damiano] : relation abelienne d'Euler $\mathcal{E}_n$ ( $n \geq 2$ )

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^{n+3}) & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}_i^{n+2}) \\
 \nu=\nu_{n+2} \downarrow & & \downarrow \nu_{n+1}=\nu_{[i]} \\
 \mathcal{M}_{0,n+3} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{M}_{0,n+2}
 \end{array}
 \quad i = 1, \dots, n+3$$

- $\mathbf{P} = \mathbf{E}^n \in \mathbf{H}^{2n}(\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^{n+3}))$  avec  $\mathbf{E}$  = classe d'Euler de  $\mathcal{T}_{\text{aut}}^2$
- $\Omega = 2n$ -forme  $\text{SO}_{n+3}$ -invariante  $\rightsquigarrow \tilde{\Omega} \in \Omega_{\mathcal{M}_{0,n+3}}^{n-2}$
- $\Omega_{[i]} =$  forme vol  $\text{SO}_{n+2}$ -invariante  $\rightsquigarrow \tilde{\Omega}_{[i]} \in \Omega_{\mathcal{M}_{0,n+2}}^{n-1}$

# [Damiano] : relation abelienne d'Euler $\mathcal{E}_n$ ( $n \geq 2$ )

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^{n+3}) & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}_i^{n+2}) \\
 \nu = \nu_{n+2} \downarrow & & \downarrow \nu_{n+1} = \nu_{[i]} \\
 \mathcal{M}_{0,n+3} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{M}_{0,n+2}
 \end{array}
 \quad i = 1, \dots, n+3$$

- $\mathbf{P} = \mathbf{E}^n \in \mathbf{H}^{2n}(\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^{n+3}))$  avec  $\mathbf{E}$  = classe d'Euler de  $\mathcal{T}_{\text{aut}}^2$
- $\Omega = 2n$ -forme  $\text{SO}_{n+3}$ -invariante  $\rightsquigarrow \tilde{\Omega} \in \Omega_{\mathcal{M}_{0,n+3}}^{n-2}$
- $\Omega_{[i]} =$  forme vol  $\text{SO}_{n+2}$ -invariante  $\rightsquigarrow \tilde{\Omega}_{[i]} \in \Omega_{\mathcal{M}_{0,n+2}}^{n-1}$
- 1.  $d\tilde{\Omega} = \sum_{i=1}^{n+3} (-1)^i f_i^* (\tilde{\Omega}_{[i]})$

# [Damiano] : relation abelienne d'Euler $\mathcal{E}_n$ ( $n \geq 2$ )

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{a_i} & \\
 \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^{n+3}) & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}_i^{n+2}) \\
 \nu = \nu_{n+2} \downarrow & & \downarrow \nu_{n+1} = \nu_{[i]} \\
 \mathcal{M}_{0,n+3} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{M}_{0,n+2}
 \end{array}
 \quad i = 1, \dots, n+3$$

- $\mathbf{P} = \mathbf{E}^n \in \mathbf{H}^{2n}(\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^{n+3}))$  avec  $\mathbf{E}$  = classe d'Euler de  $\mathcal{T}_{\text{aut}}^2$
- $\Omega = 2n$ -forme  $\text{SO}_{n+3}$ -invariante  $\rightsquigarrow \tilde{\Omega} \in \Omega_{\mathcal{M}_{0,n+3}}^{n-2}$
- $\Omega_{[i]} =$  forme vol  $\text{SO}_{n+2}$ -invariante  $\rightsquigarrow \tilde{\Omega}_{[i]} \in \Omega_{\mathcal{M}_{0,n+2}}^{n-1}$
- 1.  $d\tilde{\Omega} = \sum_{i=1}^{n+3} (-1)^i f_i^* (\tilde{\Omega}_{[i]})$
  2.  $\tilde{\Omega} = 0$
  3.  $0 \neq \tilde{\Omega}_{[i]}$



# [Damiano] : relation abelienne d'Euler $\mathcal{E}_n$ ( $n \geq 2$ )

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{a_i} & \\
 \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^{n+3}) & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}_i^{n+2}) \\
 \nu = \nu_{n+2} \downarrow & & \downarrow \nu_{n+1} = \nu_{[i]} \\
 \mathcal{M}_{0,n+3} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{M}_{0,n+2}
 \end{array}
 \quad i = 1, \dots, n+3$$

- $\mathbf{P} = \mathbf{E}^n \in \mathbf{H}^{2n}(\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^{n+3}))$  avec  $\mathbf{E}$  = classe d'Euler de  $\mathcal{T}_{\text{aut}}^2$
- $\Omega = 2n$ -forme  $\text{SO}_{n+3}$ -invariante  $\rightsquigarrow \tilde{\Omega} \in \Omega_{\mathcal{M}_{0,n+3}}^{n-2}$
- $\Omega_{[i]} =$  forme vol  $\text{SO}_{n+2}$ -invariante  $\rightsquigarrow \tilde{\Omega}_{[i]} \in \Omega_{\mathcal{M}_{0,n+2}}^{n-1}$
- 1.  $d\tilde{\Omega} = \sum_{i=1}^{n+3} (-1)^i f_i^*(\tilde{\Omega}_{[i]}) \implies 0 = \sum_{i=1}^{n+3} (-1)^i f_i^*(\tilde{\Omega}_{[i]})$
  2.  $\tilde{\Omega} = 0$
  3.  $0 \neq \tilde{\Omega}_{[i]}$

# [Damiano] : relation abelienne d'Euler $\mathcal{E}_n$ ( $n \geq 2$ )

$$\begin{array}{ccc}
 & \overset{a_i}{\curvearrowright} & \\
 \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}^{n+3}) & \xrightarrow{\tilde{f}_i} & \mathbf{G}_2^o(\mathbb{R}_i^{n+2}) & \quad i = 1, \dots, n+3 \\
 \nu = \nu_{n+2} \downarrow & & \downarrow \nu_{n+1} = \nu_{[i]} & \\
 \mathcal{M}_{0,n+3} & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{M}_{0,n+2} & 
 \end{array}$$

- $\mathbf{P} = \mathbf{E}^n \in \mathbf{H}^{2n}(\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^{n+3}))$  avec  $\mathbf{E}$  = classe d'Euler de  $\mathcal{T}_{\text{aut}}^2$
- $\Omega = 2n$ -forme  $\text{SO}_{n+3}$ -invariante  $\rightsquigarrow \tilde{\Omega} \in \Omega_{\mathcal{M}_{0,n+3}}^{n-2}$   
 $\Omega_{[i]} =$  forme vol  $\text{SO}_{n+2}$ -invariante  $\rightsquigarrow \tilde{\Omega}_{[i]} \in \Omega_{\mathcal{M}_{0,n+2}}^{n-1}$
- 1.  $d\tilde{\Omega} = \sum_{i=1}^{n+3} (-1)^i f_i^*(\tilde{\Omega}_{[i]}) \implies 0 = \sum_{i=1}^{n+3} (-1)^i f_i^*(\tilde{\Omega}_{[i]})$
  2.  $\tilde{\Omega} = 0$
  3.  $0 \neq \tilde{\Omega}_{[i]}$
- RA d'Euler  $\mathcal{E}_n = \left( (-1)^i f_i^*(\tilde{\Omega}_{[i]}) \right)_{i=1}^{n+3} \in \mathbf{AR}^{(n-1)}(\mathcal{W}_{0,n+3})$

## Relations d'Euler $\mathcal{E}_n(\sigma)$

# Relations d'Euler $\mathcal{E}_n(\sigma)$

- $\mathcal{M}_{0,n+3}(\mathbb{R}) = \bigsqcup_{\sigma \in \frac{\mathfrak{S}_{n+3}}{D_{0,n+3}}} \underbrace{\sigma \cdot \mathcal{M}_{0,n+3}^{>0}(\mathbb{R})}_{\mathcal{M}_{0,n+3}^\sigma} \quad \left( \# \left( \frac{\mathfrak{S}_{n+3}}{D_{0,n+3}} \right) = \frac{(n+2)!}{2} \right)$

# Relations d'Euler $\mathcal{E}_n(\sigma)$

- $\mathcal{M}_{0,n+3}(\mathbb{R}) = \bigsqcup_{\sigma \in \frac{\mathfrak{S}_{n+3}}{D_{0,n+3}}} \underbrace{\sigma \cdot \mathcal{M}_{0,n+3}^{>0}(\mathbb{R})}_{\mathcal{M}_{0,n+3}^\sigma} \quad \left( \# \left( \frac{\mathfrak{S}_{n+3}}{D_{0,n+3}} \right) = \frac{(n+2)!}{2} \right)$
- $\mathcal{M}_{0,n+3}^{>0}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{l} n \text{ points 2 à 2 distincts sur} \\ \mathbb{S}^1 \text{ cycliquement numérotés} \end{array} \right\} / \mathfrak{so}_2(\mathbb{R})$

# Relations d'Euler $\mathcal{E}_n(\sigma)$

- $\mathcal{M}_{0,n+3}(\mathbb{R}) = \bigsqcup_{\sigma \in \frac{\mathfrak{S}_{n+3}}{D_{0,n+3}}} \underbrace{\sigma \cdot \mathcal{M}_{0,n+3}^{>0}(\mathbb{R})}_{\mathcal{M}_{0,n+3}^\sigma} \quad \left( \# \left( \frac{\mathfrak{S}_{n+3}}{D_{0,n+3}} \right) = \frac{(n+2)!}{2} \right)$

- $\mathcal{M}_{0,n+3}^{>0}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{l} n \text{ points } 2 \text{ à } 2 \text{ distincts sur} \\ \mathbb{S}^1 \text{ cycliquement numérotés} \end{array} \right\} / \mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$

$$= \left\{ \left[ \begin{array}{c} \tilde{x}_i \\ \tilde{y}_i \end{array} \right]_{i=1}^{n+3} \in (\mathbb{P}^1)^{n+3} \mid \begin{array}{l} \tilde{x}_i, \tilde{y}_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, n+3 \\ \left| \begin{array}{cc} \tilde{x}_i & \tilde{x}_j \\ \tilde{y}_i & \tilde{y}_j \end{array} \right| > 0 \quad \forall 1 \leq i < j \leq n+3 \end{array} \right\}$$

$$= \mathbf{G}_2^{>0}(\mathbb{R}^{n+3}) / \mathbf{H}_{>0} \quad \mathbf{SL}_{n+3} \supset \mathbf{H}_{>0} \simeq (\mathbb{R}_{>0})^{n+2}$$

# Relations d'Euler $\mathcal{E}_n(\sigma)$

- $\mathcal{M}_{0,n+3}(\mathbb{R}) = \bigsqcup_{\sigma \in \frac{\mathfrak{S}_{n+3}}{D_{0,n+3}}} \underbrace{\sigma \cdot \mathcal{M}_{0,n+3}^{>0}(\mathbb{R})}_{\mathcal{M}_{0,n+3}^\sigma} \quad \left( \# \left( \frac{\mathfrak{S}_{n+3}}{D_{0,n+3}} \right) = \frac{(n+2)!}{2} \right)$

- $\mathcal{M}_{0,n+3}^{>0}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{l} n \text{ points } 2 \text{ à } 2 \text{ distincts sur} \\ \mathbb{S}^1 \text{ cycliquement numérotés} \end{array} \right\} / \mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$

$$= \left\{ \left[ \begin{array}{c} \tilde{x}_i \\ \tilde{y}_i \end{array} \right]_{i=1}^{n+3} \in (\mathbb{P}^1)^{n+3} \mid \begin{array}{l} \tilde{x}_i, \tilde{y}_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, n+3 \\ \left| \begin{array}{cc} \tilde{x}_i & \tilde{x}_j \\ \tilde{y}_i & \tilde{y}_j \end{array} \right| > 0 \quad \forall 1 \leq i < j \leq n+3 \end{array} \right\}$$

$$= \mathbf{G}_2^{>0}(\mathbb{R}^{n+3}) / \mathbf{H}_{>0} \quad \mathbf{SL}_{n+3} \supset \mathbf{H}_{>0} \simeq (\mathbb{R}_{>0})^{n+2}$$

- $\frac{(n+2)!}{2}$  tissus en courbes  $\mathcal{W}_{0,n+3}^\sigma = \mathcal{W}_{0,n+3} \Big|_{\mathcal{M}_{0,n+3}^\sigma}$

$$\frac{(n+2)!}{2} \text{ RA d'Euler } \mathcal{E}_n(\sigma) \in \mathbf{AR}^{(n-1)}(\mathcal{W}_{0,n+3}^\sigma)$$

# Tissus en courbes



# Tissus en courbes

- $\mathcal{W}_d = \mathcal{W}(U_1, \dots, U_d)$        $U_i = (u_{i,s})_{s=1}^{n-1} : D \subset \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^{n-1}$

# Tissus en courbes

- $\mathcal{W}_d = \mathcal{W}(U_1, \dots, U_d) \quad U_i = (u_{i,s})_{s=1}^{n-1} : D \subset \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^{n-1}$
  - $\Omega_{U_i} = du_{i,1} \wedge \dots \wedge du_{i,n-1} \in U_i^*(\Omega^{n-1}(\mathbf{C}^{n-1})) \subset \Omega^{n-1}(D)$
- Rq :**  $F_i(U_i) \Omega_{U_i} = U_i^*(F_i(x_1, \dots, x_{n-1}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1})$

# Tissus en courbes

- $\mathcal{W}_d = \mathcal{W}(\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_d)$        $\mathbf{U}_i = (u_{i,s})_{s=1}^{n-1} : D \subset \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^{n-1}$
- $\Omega_{\mathbf{U}_i} = du_{i,1} \wedge \dots \wedge du_{i,n-1} \in \mathbf{U}_i^*(\Omega^{n-1}(\mathbf{C}^{n-1})) \subset \Omega^{n-1}(D)$   
**Rq** :  $F_i(\mathbf{U}_i) \Omega_{\mathbf{U}_i} = \mathbf{U}_i^*(F_i(x_1, \dots, x_{n-1}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1})$
- $(n-1)$ -RA :  $d$ -uplet  $(F_i)_{i=1}^d$  de fonctions holomorphes dans

$$AR^{(n-1)}(\mathcal{W}_d) = \left\{ (F_i)_{i=1}^d \mid \sum_{i=1}^d F_i(\mathbf{U}_i) \Omega_{\mathbf{U}_i} = 0 \text{ sur } D \right\}$$

# Tissus en courbes

- $\mathcal{W}_d = \mathcal{W}(\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_d) \quad \mathbf{U}_i = (u_{i,s})_{s=1}^{n-1} : D \subset \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^{n-1}$
- $\Omega_{\mathbf{U}_i} = du_{i,1} \wedge \dots \wedge du_{i,n-1} \in \mathbf{U}_i^* \left( \Omega^{n-1}(\mathbf{C}^{n-1}) \right) \subset \Omega^{n-1}(D)$   
**Rq** :  $F_i(\mathbf{U}_i) \Omega_{\mathbf{U}_i} = \mathbf{U}_i^* \left( F_i(x_1, \dots, x_{n-1}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} \right)$
- $(n-1)$ -RA :  $d$ -uplet  $(F_i)_{i=1}^d$  de fonctions holomorphes dans

$$\mathbf{AR}^{(n-1)}(\mathcal{W}_d) = \left\{ (F_i)_{i=1}^d \mid \sum_{i=1}^d F_i(\mathbf{U}_i) \Omega_{\mathbf{U}_i} = 0 \text{ sur } D \right\}$$

$$\mathbf{rg}^{(n-1)}(\mathcal{W}_d) = \dim \left( \mathbf{AR}^{(n-1)}(\mathcal{W}_d) \right)$$

# Tissus en courbes

- $\mathcal{W}_d = \mathcal{W}(\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_d) \quad \mathbf{U}_i = (u_{i,s})_{s=1}^{n-1} : D \subset \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^{n-1}$

- $\Omega_{\mathbf{U}_i} = du_{i,1} \wedge \dots \wedge du_{i,n-1} \in \mathbf{U}_i^*(\Omega^{n-1}(\mathbf{C}^{n-1})) \subset \Omega^{n-1}(D)$

**Rq** :  $F_i(\mathbf{U}_i) \Omega_{\mathbf{U}_i} = \mathbf{U}_i^*(F_i(x_1, \dots, x_{n-1}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1})$

- $(n-1)$ -RA :  $d$ -uplet  $(F_i)_{i=1}^d$  de fonctions holomorphes dans

$$\mathbf{AR}^{(n-1)}(\mathcal{W}_d) = \left\{ (F_i)_{i=1}^d \mid \sum_{i=1}^d F_i(\mathbf{U}_i) \Omega_{\mathbf{U}_i} = 0 \text{ sur } D \right\}$$

$$\mathbf{rg}^{(n-1)}(\mathcal{W}_d) = \dim(\mathbf{AR}^{(n-1)}(\mathcal{W}_d))$$

- Prop [Damiano] :  $\mathbf{rg}^{(n-1)}(\mathcal{W}_d) \leq \sum_{\sigma=0}^{d-n-1} \binom{n+2-\sigma}{\sigma} (d-n-\sigma)$

# Tissus en courbes

- $\mathcal{W}_d = \mathcal{W}(\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_d) \quad \mathbf{U}_i = (u_{i,s})_{s=1}^{n-1} : D \subset \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^{n-1}$

- $\Omega_{\mathbf{U}_i} = du_{i,1} \wedge \dots \wedge du_{i,n-1} \in \mathbf{U}_i^*(\Omega^{n-1}(\mathbf{C}^{n-1})) \subset \Omega^{n-1}(D)$

**Rq** :  $F_i(\mathbf{U}_i) \Omega_{\mathbf{U}_i} = \mathbf{U}_i^*(F_i(x_1, \dots, x_{n-1}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1})$

- $(n-1)$ -RA :  $d$ -uplet  $(F_i)_{i=1}^d$  de fonctions holomorphes dans

$$\mathbf{AR}^{(n-1)}(\mathcal{W}_d) = \left\{ (F_i)_{i=1}^d \mid \sum_{i=1}^d F_i(\mathbf{U}_i) \Omega_{\mathbf{U}_i} = 0 \text{ sur } D \right\}$$

$$\mathbf{rg}^{(n-1)}(\mathcal{W}_d) = \dim(\mathbf{AR}^{(n-1)}(\mathcal{W}_d))$$

- **Prop** [Damiano] :  $\mathbf{rg}^{(n-1)}(\mathcal{W}_d) \leq \sum_{\sigma=0}^{d-n-1} \binom{n+2-\sigma}{\sigma} (d-n-\sigma)$

$$d = n + 3 : \quad \mathbf{rg}^{(n-1)}(\mathcal{W}_{n+3}) \leq (n+1)(n+2)/2$$



- $p_1 = [1 : 0 : \cdots : 0], \dots, p_{n+1} = [0 : \cdots : 0 : 1], p_{n+2} = [1 : \cdots : 1]$



- $p_1 = [1 : 0 : \cdots : 0], \dots, p_{n+1} = [0 : \cdots : 0 : 1], p_{n+2} = [1 : \cdots : 1]$
- $\mathcal{W}_{0,n+3} = \mathcal{W}(\mathcal{L}_{p_1}, \dots, \mathcal{L}_{p_{n+1}}, \mathcal{L}_{p_{n+2}}, \mathcal{C}_{p_i}^n)$      $\text{rg}^{(n-1)}(\mathcal{W}_{0,n+3}) \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

- $p_1 = [1 : 0 : \dots : 0], \dots, p_{n+1} = [0 : \dots : 0 : 1], p_{n+2} = [1 : \dots : 1]$
- $\mathcal{W}_{0,n+3} = \mathcal{W}(\mathcal{L}_{p_1}, \dots, \mathcal{L}_{p_{n+1}}, \mathcal{L}_{p_{n+2}}, \mathcal{C}_{p_i}^n) \quad \text{rg}^{(n-1)}(\mathcal{W}_{0,n+3}) \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2}$   
 $\cup$   
 $\mathcal{LW}_{n+1} = \mathcal{W}(\mathcal{L}_{p_1}, \dots, \mathcal{L}_{p_{n+1}}) \quad \text{rg}^{(n-1)}(\mathcal{LW}_{n+1}) \leq 1$

- $p_1 = [1 : 0 : \dots : 0], \dots, p_{n+1} = [0 : \dots : 0 : 1], p_{n+2} = [1 : \dots : 1]$
- $\mathcal{W}_{0,n+3} = \mathcal{W}(\mathcal{L}_{p_1}, \dots, \mathcal{L}_{p_{n+1}}, \mathcal{L}_{p_{n+2}}, \mathcal{C}_{p_i}^n)$       $\text{rg}^{(n-1)}(\mathcal{W}_{0,n+3}) \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
- $\mathcal{LW}_{n+1} = \mathcal{W}(\mathcal{L}_{p_1}, \dots, \mathcal{L}_{p_{n+1}})$       $\text{rg}^{(n-1)}(\mathcal{LW}_{n+1}) \leq 1$
- $AR^{(n-1)}(\mathcal{LW}_{n+1}) = \langle Ar_{n+2,n+3} \rangle$       $\text{rg}^{(n-1)}(\mathcal{LW}_p) = 1$

- $p_1 = [1 : 0 : \cdots : 0], \dots, p_{n+1} = [0 : \cdots : 0 : 1], p_{n+2} = [1 : \cdots : 1]$
- $\mathcal{W}_{0,n+3} = \mathcal{W}(\mathcal{L}_{p_1}, \dots, \mathcal{L}_{p_{n+1}}, \mathcal{L}_{p_{n+2}}, \mathcal{C}_{p_i}^n)$      $\text{rg}^{(n-1)}(\mathcal{W}_{0,n+3}) \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
- $\mathcal{LW}_{n+1} = \mathcal{W}(\mathcal{L}_{p_1}, \dots, \mathcal{L}_{p_{n+1}})$      $\text{rg}^{(n-1)}(\mathcal{LW}_{n+1}) \leq 1$
- $\text{AR}^{(n-1)}(\mathcal{LW}_{n+1}) = \langle \text{Ar}_{n+2,n+3} \rangle$      $\text{rg}^{(n-1)}(\mathcal{LW}_p) = 1$
- $\{ \sigma \cdot \mathcal{LW}_p \mid \sigma \in \mathfrak{S}_{n+3} \} = \{ (n+1) - \text{sous-tissus de } \mathcal{W}_{0,n+3} \}$

- $p_1 = [1 : 0 : \cdots : 0], \dots, p_{n+1} = [0 : \cdots : 0 : 1], p_{n+2} = [1 : \cdots : 1]$
- $\mathcal{W}_{0,n+3} = \mathcal{W}(\mathcal{L}_{p_1}, \dots, \mathcal{L}_{p_{n+1}}, \mathcal{L}_{p_{n+2}}, \mathcal{C}_{p_i}^n)$      $\text{rg}^{(n-1)}(\mathcal{W}_{0,n+3}) \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
- $\mathcal{LW}_{n+1} = \mathcal{W}(\mathcal{L}_{p_1}, \dots, \mathcal{L}_{p_{n+1}})$      $\text{rg}^{(n-1)}(\mathcal{LW}_{n+1}) \leq 1$
- $AR^{(n-1)}(\mathcal{LW}_{n+1}) = \langle Ar_{n+2,n+3} \rangle$      $\text{rg}^{(n-1)}(\mathcal{LW}_p) = 1$
- $\{ \sigma \cdot \mathcal{LW}_p \mid \sigma \in \mathfrak{S}_{n+3} \} = \{ (n+1) - \text{sous-tissus de } \mathcal{W}_{0,n+3} \}$
- Pour tout  $\mathcal{W}_{\widehat{kl}} \subset \mathcal{W}_{0,n+3}$  :     $AR^{(n-1)}(\mathcal{W}_{\widehat{kl}}) = \langle Ar_{\widehat{kl}} \rangle$

- $p_1 = [1 : 0 : \cdots : 0], \dots, p_{n+1} = [0 : \cdots : 0 : 1], p_{n+2} = [1 : \cdots : 1]$
- $\mathcal{W}_{0,n+3} = \mathcal{W}(\mathcal{L}_{p_1}, \dots, \mathcal{L}_{p_{n+1}}, \mathcal{L}_{p_{n+2}}, \mathcal{C}_{p_i}^n)$      $\text{rg}^{(n-1)}(\mathcal{W}_{0,n+3}) \leq \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
- $\mathcal{LW}_{n+1} = \mathcal{W}(\mathcal{L}_{p_1}, \dots, \mathcal{L}_{p_{n+1}})$      $\text{rg}^{(n-1)}(\mathcal{LW}_{n+1}) \leq 1$
- $AR^{(n-1)}(\mathcal{LW}_{n+1}) = \langle Ar_{n+2,n+3} \rangle$      $\text{rg}^{(n-1)}(\mathcal{LW}_p) = 1$
- $\{ \sigma \cdot \mathcal{LW}_p \mid \sigma \in \mathfrak{S}_{n+3} \} = \{ (n+1) - \text{sous-tissus de } \mathcal{W}_{0,n+3} \}$
- Pour tout  $\mathcal{W}_{\widehat{k\ell}} \subset \mathcal{W}_{0,n+3}$  :  $AR^{(n-1)}(\mathcal{W}_{\widehat{k\ell}}) = \langle Ar_{\widehat{k\ell}} \rangle$
- $AR_{\text{Comb}}^{(n-1)}(\mathcal{W}_{0,n+3}) = \langle Ar_{\widehat{k\ell}} \mid k < \ell \rangle \subset AR^{(n-1)}(\mathcal{W}_{0,n+3})$

# Tissu de Bol : propriétés

- $\mathcal{W}_{0,5}$  5-tissu sur  $\mathcal{M}_{0,5}$   $\left( \mathcal{W}_{0,5} = \mathcal{B} = \mathcal{W}\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) \right)$   
invariant sous l'action de  $\mathbf{Aut}(\mathcal{M}_{0,5}) = \mathfrak{S}_5$

▶ [N-Lin]  $\mathcal{B}$  n'est pas linéarisable

▶ [Rang]  $\mathcal{B}$  est de rang maximal 6

$$AR(\mathcal{B}) = AR_{\text{Log}}(\mathcal{B}) \oplus \langle \mathcal{Ab} \rangle$$

$[221] \qquad [1^5] \qquad (\mathfrak{S}_5 - \text{mod})$

▶ [Hexag]  $\mathcal{B}$  est hexagonal

- ▶ [Caract] Étant donné  $\mathcal{W}_d$ , un tissu plan hexagonal :
- soit  $\mathcal{W}_d$  est équivalent à  $d$  pinceaux de droites
  - soit  $\mathcal{W}_d \simeq \mathcal{B}$  ( et  $d = 5$  )

## Tissu $\mathcal{W}_{0,n+3}$ : propriétés (d'après Damiano)

- $\mathcal{W}_{0,n+3}$  :  $(n+3)$ -tissu en courbes rationnelles sur  $\mathcal{M}_{0,n+3}$   
invariant sous l'action de  $\mathbf{Aut}(\mathcal{M}_{0,n+3}) = \mathfrak{S}_{n+3}$



# Tissu $\mathcal{W}_{0,n+3}$ : propriétés (d'après Damiano)

- $\mathcal{W}_{0,n+3}$  :  $(n+3)$ -tissu en courbes rationnelles sur  $\mathcal{M}_{0,n+3}$   
invariant sous l'action de  $\mathbf{Aut}(\mathcal{M}_{0,n+3}) = \mathfrak{S}_{n+3}$ 
  - ▶ **[N-Lin]**  $\mathcal{W}_{0,n+3}$  n'est pas linéarisable

# Tissu $\mathcal{W}_{0,n+3}$ : propriétés (d'après Damiano)

- $\mathcal{W}_{0,n+3}$  :  $(n+3)$ -tissu en courbes rationnelles sur  $\mathcal{M}_{0,n+3}$   
invariant sous l'action de  $\mathbf{Aut}(\mathcal{M}_{0,n+3}) = \mathfrak{S}_{n+3}$

▶ [N-Lin]  $\mathcal{W}_{0,n+3}$  n'est pas linéarisable

▶ [Rang]  $\mathcal{W}_{0,n+3}$  est de rang maximal  $(n+1)(n+2)/2$

$$AR^{(n-1)}(\mathcal{W}_{0,n+3}) = AR_{\mathbf{Comb}}^{(n-1)}(\mathcal{W}_{0,n+3}) \oplus \langle \mathcal{E}_n \rangle$$

$[221^{n-1}]$                        $[1^{n+3}]$     ( $\mathfrak{S}_{n+3}\text{-mod}$ )

# Tissu $\mathcal{W}_{0,n+3}$ : propriétés (d'après Damiano)

- $\mathcal{W}_{0,n+3}$  :  $(n+3)$ -tissu en courbes rationnelles sur  $\mathcal{M}_{0,n+3}$   
invariant sous l'action de  $\mathbf{Aut}(\mathcal{M}_{0,n+3}) = \mathfrak{S}_{n+3}$

▶ [N-Lin]  $\mathcal{W}_{0,n+3}$  n'est pas linéarisable

▶ [Rang]  $\mathcal{W}_{0,n+3}$  est de rang maximal  $(n+1)(n+2)/2$

$$AR^{(n-1)}(\mathcal{W}_{0,n+3}) = AR_{\mathbf{Comb}}^{(n-1)}(\mathcal{W}_{0,n+3}) \oplus \langle \mathcal{E}_n \rangle$$

$[221^{n-1}]$                        $[1^{n+3}]$     ( $\mathfrak{S}_{n+3}\text{-mod}$ )

▶ [Octa]  $\mathcal{W}_{0,n+3}$  est octaédral

# Tissu $\mathcal{W}_{0,n+3}$ : propriétés (d'après Damiano)

- $\mathcal{W}_{0,n+3}$  :  $(n+3)$ -tissu en courbes rationnelles sur  $\mathcal{M}_{0,n+3}$   
invariant sous l'action de  $\mathbf{Aut}(\mathcal{M}_{0,n+3}) = \mathfrak{S}_{n+3}$ 
  - ▶ [N-Lin]  $\mathcal{W}_{0,n+3}$  n'est pas linéarisable
  - ▶ [Rang]  $\mathcal{W}_{0,n+3}$  est de rang maximal  $(n+1)(n+2)/2$   
$$AR^{(n-1)}(\mathcal{W}_{0,n+3}) = AR_{\mathbf{Comb}}^{(n-1)}(\mathcal{W}_{0,n+3}) \oplus \langle \mathcal{E}_n \rangle$$

$[221^{n-1}]$                        $[1^{n+3}]$     ( $\mathfrak{S}_{n+3}\text{-mod}$ )
  - ▶ [Octa]  $\mathcal{W}_{0,n+3}$  est octaédral
  - ▶ [Caract] Étant donné  $\mathcal{W}_d$ , un  $d$ -tissu en courbes octaédral :
    - soit  $\mathcal{W}_d$  est équivalent à  $(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_d)$
    - soit  $\mathcal{W}_d \simeq \mathcal{W}_{0,n+3}$  ( et  $d = n+3$  )

# Tissu $\mathcal{W}_{0,n+3}$ : propriétés (d'après Damiano)

- $\mathcal{W}_{0,n+3}$  :  $(n+3)$ -tissu en courbes rationnelles sur  $\mathcal{M}_{0,n+3}$   
invariant sous l'action de  $\mathbf{Aut}(\mathcal{M}_{0,n+3}) = \mathfrak{S}_{n+3}$

▶ [N-Lin]  $\mathcal{W}_{0,n+3}$  n'est pas linéarisable

▶ [Rang]  $\mathcal{W}_{0,n+3}$  est de rang maximal  $(n+1)(n+2)/2$

$$AR^{(n-1)}(\mathcal{W}_{0,n+3}) = AR_{\mathbf{Comb}}^{(n-1)}(\mathcal{W}_{0,n+3}) \oplus \langle \mathcal{E}_n \rangle$$

$[221^{n-1}]$                        $[1^{n+3}]$     ( $\mathfrak{S}_{n+3}\text{-mod}$ )

▶ [Octa]  $\mathcal{W}_{0,n+3}$  est octaédral

- ▶ [Caract] Étant donné  $\mathcal{W}_d$ , un  $d$ -tissu en courbes octaédral :
- soit  $\mathcal{W}_d$  est équivalent à  $(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_d)$
  - soit  $\mathcal{W}_d \simeq \mathcal{W}_{0,n+3}$  ( et  $d = n+3$  )

# Tissu $\mathcal{W}_{0,n+3}$ : propriétés (d'après Damiano)

- $\mathcal{W}_{0,n+3}$  :  $(n+3)$ -tissu en courbes rationnelles sur  $\mathcal{M}_{0,n+3}$   
invariant sous l'action de  $\mathbf{Aut}(\mathcal{M}_{0,n+3}) = \mathfrak{S}_{n+3}$

▶ [N-Lin]  $\mathcal{W}_{0,n+3}$  n'est pas linéarisable **Faux si  $n$  impair !**

▶ [Rang]  $\mathcal{W}_{0,n+3}$  est de rang maximal  $(n+1)(n+2)/2$

$$\mathbf{AR}^{(n-1)}(\mathcal{W}_{0,n+3}) = \mathbf{AR}_{\mathbf{Comb}}^{(n-1)}(\mathcal{W}_{0,n+3}) \oplus \langle \mathcal{E}_n \rangle$$

$[221^{n-1}]$                        $[1^{n+3}]$     ( $\mathfrak{S}_{n+3}\text{-mod}$ )

▶ [Octa]  $\mathcal{W}_{0,n+3}$  est octaédral

▶ [Caract] Étant donné  $\mathcal{W}_d$ , un  $d$ -tissu en courbes octaédral :

- soit  $\mathcal{W}_d$  est équivalent à  $(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_d)$
- soit  $\mathcal{W}_d \simeq \mathcal{W}_{0,n+3}$  ( et  $d = n+3$  )

# Tissu $\mathcal{W}_{0,n+3}$ : propriétés (d'après Damiano)

- $\mathcal{W}_{0,n+3}$  :  $(n+3)$ -tissu en courbes rationnelles sur  $\mathcal{M}_{0,n+3}$   
invariant sous l'action de  $\mathbf{Aut}(\mathcal{M}_{0,n+3}) = \mathfrak{S}_{n+3}$

► [N-Lin]  $\mathcal{W}_{0,n+3}$  n'est pas linéarisable **Faux si  $n$  impair !**

► [Rang]  $\mathcal{W}_{0,n+3}$  est de rang maximal  $(n+1)(n+2)/2$

**Idem !** 
$$\mathbf{AR}^{(n-1)}(\mathcal{W}_{0,n+3}) = \mathbf{AR}_{\mathbf{Comb}}^{(n-1)}(\mathcal{W}_{0,n+3}) \oplus \langle \mathcal{E}_n \rangle$$
$$\qquad \qquad \qquad [221^{n-1}] \qquad \qquad [1^{n+3}] \quad (\mathfrak{S}_{n+3}\text{-mod})$$

► [Octa]  $\mathcal{W}_{0,n+3}$  est octaédral

► [Caract] Étant donné  $\mathcal{W}_d$ , un  $d$ -tissu en courbes octaédral :  
– soit  $\mathcal{W}_d$  est équivalent à  $(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{n+3})$   
– soit  $\mathcal{W}_d \simeq \mathcal{W}_{0,n+3}$  ( et  $d = n+3$  )

## Tissu $\mathcal{W}_{0,n+3}$ : linéarisabilité (Room, Bureau)

- $\mathcal{W}_{0,n+3} = \mathcal{W}(\mathcal{L}_{p_1}, \dots, \mathcal{L}_{p_{n+1}}, \mathcal{L}_{p_{n+2}}, \mathcal{C}_{p_i}^n)$  sur  $\mathbf{P}^n$



# Tissu $\mathcal{W}_{0,n+3}$ : linéarisabilité (Room, Bureau)

- $\mathcal{W}_{0,n+3} = \mathcal{W}(\mathcal{L}_{p_1}, \dots, \mathcal{L}_{p_{n+1}}, \mathcal{L}_{p_{n+2}}, \mathcal{C}_{p_i}^n)$  sur  $\mathbf{P}^n$
- Système linéaire (  $\mathbf{H} = [\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)] \in \mathbf{Pic}(\mathbf{P}^n)$ ,  $\mathbf{P} = p_1 + \dots + p_{n+2}$  )

$$\mathcal{L}_n = \left| \delta_n \mathbf{H} - \nu_n \mathbf{P} \right| = \left\{ \begin{array}{l} \text{hyp de degré } \delta_n \text{ ds } \mathbf{P}^n \text{ s'annulant} \\ \text{à l'ordre } \nu_n \text{ en } p_i \text{ pour tout } i \end{array} \right\} \subset |\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(\delta_n)|$$

# Tissu $\mathcal{W}_{0,n+3}$ : linéarisabilité (Room, Bureau)

- $\mathcal{W}_{0,n+3} = \mathcal{W}(\mathcal{L}_{p_1}, \dots, \mathcal{L}_{p_{n+1}}, \mathcal{L}_{p_{n+2}}, \mathcal{C}_{p_i}^n)$  sur  $\mathbf{P}^n$
- Système linéaire (  $\mathbf{H} = [\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)] \in \mathbf{Pic}(\mathbf{P}^n)$ ,  $\mathbf{P} = p_1 + \dots + p_{n+2}$  )

$$\mathcal{L}_n = \left| \delta_n \mathbf{H} - \nu_n \mathbf{P} \right| = \left\{ \begin{array}{l} \text{hyp de degré } \delta_n \text{ ds } \mathbf{P}^n \text{ s'annulant} \\ \text{à l'ordre } \nu_n \text{ en } p_i \text{ pour tout } i \end{array} \right\} \subset |\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(\delta_n)|$$

$$\text{avec } (\delta_n, \nu_n) = \begin{cases} (n+1, n-1) & \text{si } n \text{ est pair} \\ \left(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}\right) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

# Tissu $\mathcal{W}_{0,n+3}$ : linéarisabilité (Room, Bureau)

- $\mathcal{W}_{0,n+3} = \mathcal{W}(\mathcal{L}_{p_1}, \dots, \mathcal{L}_{p_{n+1}}, \mathcal{L}_{p_{n+2}}, \mathcal{C}_{p_i}^n)$  sur  $\mathbf{P}^n$
- Système linéaire ( $\mathbf{H} = [\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)] \in \mathbf{Pic}(\mathbf{P}^n)$ ,  $\mathbf{P} = p_1 + \dots + p_{n+2}$ )

$$\mathcal{L}_n = \left| \delta_n \mathbf{H} - \nu_n \mathbf{P} \right| = \left\{ \begin{array}{l} \text{hyp de degré } \delta_n \text{ ds } \mathbf{P}^n \text{ s'annulant} \\ \text{à l'ordre } \nu_n \text{ en } p_i \text{ pour tout } i \end{array} \right\} \subset |\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(\delta_n)|$$

$$\text{avec } (\delta_n, \nu_n) = \begin{cases} (n+1, n-1) & \text{si } n \text{ est pair} \\ \left(\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}\right) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

- [Room, Bureau] 1.  $\varphi_{\mathcal{L}_n} : \mathbf{P}^n \dashrightarrow \mathbf{P}^{N_n}$  birationnelle sur  $V_n = \mathbf{Im}(\mathbf{P}^n)$ 
  2.  $(\varphi_{\mathcal{L}_n})_* (\mathcal{W}_{0,n+3})$  est un tissu en **coniques** si  $n$  est pair  
en **droites** si  $n$  est impair

## Tissu $\mathcal{W}_{0,n+3}$ : linéarisabilité (Room, Bureau)

- $n = 2$  :  $\varphi_{\mathcal{L}_2} = \varphi_{|3H - \sum_{i=1}^4 p_i|} : \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^5$

$$V_2 = \text{Im}(\varphi_{\mathcal{L}_2}) = \mathbf{dP}_5 \subset \mathbf{P}^5$$

$$(\varphi_{\mathcal{L}_2})_*(\mathcal{W}_{0,5}) = 5\text{-tissu en coniques } \mathcal{W}_{\mathbf{dP}_5} \text{ sur } \mathbf{dP}_5$$

# Tissu $\mathcal{W}_{0,n+3}$ : linéarisabilité (Room, Bureau)

- $n = 2$  :  $\varphi_{\mathcal{L}_2} = \varphi|_{3H - \sum_{i=1}^4 p_i} : \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^5$

$$V_2 = \text{Im}(\varphi_{\mathcal{L}_2}) = \mathbf{dP}_5 \subset \mathbf{P}^5$$

$(\varphi_{\mathcal{L}_2})_*(\mathcal{W}_{0,5}) = 5\text{-tissu en coniques } \mathcal{W}_{\mathbf{dP}_5} \text{ sur } \mathbf{dP}_5$

- $n = 3$  :  $\varphi_{\mathcal{L}_3} = \varphi|_{2H - \sum_{i=1}^5 p_i} : \mathbf{P}^3 \dashrightarrow \mathbf{P}^4$

# Tissu $\mathcal{W}_{0,n+3}$ : linéarisabilité (Room, Bureau)

- $n = 2$  :  $\varphi_{\mathcal{L}_2} = \varphi|_{3H - \sum_{i=1}^4 p_i} : \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^5$

$$V_2 = \text{Im}(\varphi_{\mathcal{L}_2}) = \mathbf{dP}_5 \subset \mathbf{P}^5$$

$$(\varphi_{\mathcal{L}_2})_*(\mathcal{W}_{0,5}) = 5\text{-tissu en coniques } \mathcal{W}_{\mathbf{dP}_5} \text{ sur } \mathbf{dP}_5$$

- $n = 3$  :  $\varphi_{\mathcal{L}_3} = \varphi|_{2H - \sum_{i=1}^5 p_i} : \mathbf{P}^3 \dashrightarrow \mathbf{P}^4$

$$V_3 = \varphi_{\mathcal{L}_3}(\mathbf{P}^3) \subset \mathbf{P}^4 \text{ hypersurface}$$

# Tissu $\mathcal{W}_{0,n+3}$ : linéarisabilité (Room, Bureau)

- $n = 2$  :  $\varphi_{\mathcal{L}_2} = \varphi|_{3H - \sum_{i=1}^4 p_i} : \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^5$

$$V_2 = \text{Im}(\varphi_{\mathcal{L}_2}) = \mathbf{dP}_5 \subset \mathbf{P}^5$$

$$(\varphi_{\mathcal{L}_2})_*(\mathcal{W}_{0,5}) = 5\text{-tissu en coniques } \mathcal{W}_{\mathbf{dP}_5} \text{ sur } \mathbf{dP}_5$$

- $n = 3$  :  $\varphi_{\mathcal{L}_3} = \varphi|_{2H - \sum_{i=1}^5 p_i} : \mathbf{P}^3 \dashrightarrow \mathbf{P}^4$

$$V_3 = \varphi_{\mathcal{L}_3}(\mathbf{P}^3) \subset \mathbf{P}^4 \text{ hypersurface}$$

$$(\varphi_{\mathcal{L}_3})_*(\mathcal{W}_{0,6}) = 6\text{-tissu en droites sur } V_3$$

# Tissu $\mathcal{W}_{0,n+3}$ : linéarisabilité (Room, Bureau)

- $n = 2$  :  $\varphi_{\mathcal{L}_2} = \varphi|_{3H - \sum_{i=1}^4 p_i} : \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^5$

$$V_2 = \text{Im}(\varphi_{\mathcal{L}_2}) = \mathbf{dP}_5 \subset \mathbf{P}^5$$

$$(\varphi_{\mathcal{L}_2})_*(\mathcal{W}_{0,5}) = 5\text{-tissu en coniques } \mathcal{W}_{\mathbf{dP}_5} \text{ sur } \mathbf{dP}_5$$

- $n = 3$  :  $\varphi_{\mathcal{L}_3} = \varphi|_{2H - \sum_{i=1}^5 p_i} : \mathbf{P}^3 \dashrightarrow \mathbf{P}^4$

$$V_3 = \varphi_{\mathcal{L}_3}(\mathbf{P}^3) \subset \mathbf{P}^4 \text{ hypersurface}$$

$$(\varphi_{\mathcal{L}_3})_*(\mathcal{W}_{0,6}) = 6\text{-tissu en droites sur } V_3$$

$$V_3 = \mathbf{S} \text{ est la } \mathbf{cubique de Segre} \quad (\#\text{Sing}(\mathbf{S}) = 10)$$



# Tissu $\mathcal{W}_{0,n+3}$ : linéarisabilité (Room, Bureau)

- $n = 2$  :  $\varphi_{\mathcal{L}_2} = \varphi|_{3H - \sum_{i=1}^4 p_i} : \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^5$

$$V_2 = \text{Im}(\varphi_{\mathcal{L}_2}) = \mathbf{dP}_5 \subset \mathbf{P}^5$$

$$(\varphi_{\mathcal{L}_2})_*(\mathcal{W}_{0,5}) = 5\text{-tissu en coniques } \mathcal{W}_{\mathbf{dP}_5} \text{ sur } \mathbf{dP}_5$$

- $n = 3$  :  $\varphi_{\mathcal{L}_3} = \varphi|_{2H - \sum_{i=1}^5 p_i} : \mathbf{P}^3 \dashrightarrow \mathbf{P}^4$

$$V_3 = \varphi_{\mathcal{L}_2}(\mathbf{P}^3) \subset \mathbf{P}^4 \text{ hypersurface}$$

$$(\varphi_{\mathcal{L}_3})_*(\mathcal{W}_{0,6}) = 6\text{-tissu en droites sur } V_3$$

$$V_3 = \mathbf{S} \text{ est la } \mathbf{cubique de Segre} \quad (\#\text{Sing}(\mathbf{S}) = 10)$$

$$(\varphi_{\mathcal{L}_3})_*(\mathcal{W}_{0,6}) = 6\text{-tissu en droites } \mathcal{LW}_{\mathbf{S}} \text{ sur } \mathbf{S}$$

# Tissus $\mathcal{LW}_X$ : relations abéliennes

- $X \subset \mathbf{P}^4$  hypersurface cubique lisse

# Tissus $\mathcal{LW}_X$ : relations abéliennes

- $X \subset \mathbf{P}^4$  hypersurface cubique lisse
- $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1(X) = \{ \text{droites } D \subset X \} \subset \mathbf{G}_1(\mathbf{P}^4)$  : surface de Fano de  $X$

# Tissus $\mathcal{LW}_X$ : relations abéliennes

- $X \subset \mathbf{P}^4$  hypersurface cubique lisse
- $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1(X) = \{ \text{droites } D \subset X \} \subset \mathbf{G}_1(\mathbf{P}^4)$  : surface de Fano de  $X$
- $\mathcal{LW}_X = \mathcal{W}(L_1, \dots, L_6)$  avec  $L_i : (X, x) \rightarrow \mathbf{F} \quad i = 1, \dots, 6$

# Tissus $\mathcal{LW}_X$ : relations abéliennes

- $X \subset \mathbf{P}^4$  hypersurface cubique lisse
- $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1(X) = \{ \text{droites } D \subset X \} \subset \mathbf{G}_1(\mathbf{P}^4)$  : surface de Fano de  $X$
- $\mathcal{LW}_X = \mathcal{W}(L_1, \dots, L_6)$  avec  $L_i : (X, x) \rightarrow \mathbf{F} \quad i = 1, \dots, 6$
- **Faits** :
  - $\mathbf{F}$  surface irréductible lisse
  - $h^0(\Omega_{\mathbf{F}}^1) = 5$ ,  $h^0(\Omega_{\mathbf{F}}^2) = 10$

# Tissus $\mathcal{LW}_X$ : relations abéliennes

- $X \subset \mathbf{P}^4$  hypersurface cubique lisse
- $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1(X) = \{ \text{droites } D \subset X \} \subset \mathbf{G}_1(\mathbf{P}^4)$  : surface de Fano de  $X$
- $\mathcal{LW}_X = \mathcal{W}(L_1, \dots, L_6)$  avec  $L_i : (X, x) \rightarrow \mathbf{F} \quad i = 1, \dots, 6$
- **Faits** :
  - $\mathbf{F}$  surface irréductible lisse
  - $h^0(\Omega_{\mathbf{F}}^1) = 5$ ,  $h^0(\Omega_{\mathbf{F}}^2) = 10$
  - $K_{\mathbf{F}} = \mathcal{O}_{\mathbf{F}}(1) \quad ( \mathbf{F} \hookrightarrow \mathbf{G}_1(\mathbf{P}^4) \xrightarrow{\text{Plücker}} \mathbf{P}^9 )$

# Tissus $\mathcal{LW}_X$ : relations abéliennes

- $X \subset \mathbf{P}^4$  hypersurface cubique lisse
- $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1(X) = \{ \text{droites } D \subset X \} \subset \mathbf{G}_1(\mathbf{P}^4)$  : surface de Fano de  $X$
- $\mathcal{LW}_X = \mathcal{W}(L_1, \dots, L_6)$  avec  $L_i : (X, x) \rightarrow \mathbf{F} \quad i = 1, \dots, 6$
- **Faits** :
  - $\mathbf{F}$  surface irréductible lisse
  - $h^0(\Omega_{\mathbf{F}}^1) = 5$ ,  $h^0(\Omega_{\mathbf{F}}^2) = 10$
  - $K_{\mathbf{F}} = \mathcal{O}_{\mathbf{F}}(1) \quad ( \mathbf{F} \hookrightarrow \mathbf{G}_1(\mathbf{P}^4) \xrightarrow{\text{Plücker}} \mathbf{P}^9 )$
  - $k = 1, 2$ ,  $\omega \in \mathbf{H}^0(\Omega_{\mathbf{F}}^k)$ ,  $\text{Tr}(\omega) = \sum_{i=1}^6 L_i^*(\omega) = 0$

# Tissus $\mathcal{LW}_X$ : relations abéliennes

- $X \subset \mathbf{P}^4$  hypersurface cubique lisse
- $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1(X) = \{ \text{droites } D \subset X \} \subset \mathbf{G}_1(\mathbf{P}^4)$  : surface de Fano de  $X$
- $\mathcal{LW}_X = \mathcal{W}(L_1, \dots, L_6)$  avec  $L_i : (X, x) \rightarrow \mathbf{F} \quad i = 1, \dots, 6$
- **Faits** :
  - $\mathbf{F}$  surface irréductible lisse
  - $h^0(\Omega_{\mathbf{F}}^1) = 5, h^0(\Omega_{\mathbf{F}}^2) = 10$
  - $K_{\mathbf{F}} = \mathcal{O}_{\mathbf{F}}(1) \quad (\mathbf{F} \hookrightarrow \mathbf{G}_1(\mathbf{P}^4) \xrightarrow{\text{Plücker}} \mathbf{P}^9)$
  - $k = 1, 2, \omega \in \mathbf{H}^0(\Omega_{\mathbf{F}}^k), \text{Tr}(\omega) = \sum_{i=1}^6 L_i^*(\omega) = 0$
  - $\mathbf{H}^0(\Omega_{\mathbf{F}}^2) \hookrightarrow \mathbf{AR}^{(2)}(\mathcal{LW}_X)$   
 $\omega \mapsto (L_i^*(\omega))_{i=1}^6$



## Tissus $\mathcal{LW}_X$ : relations abéliennes

- $H^0(\Omega_{\mathbb{F}}^2) \hookrightarrow AR^{(2)}(\mathcal{LW}_X)$ ,  $\omega \mapsto (L_i^*(\omega))_{i=1}^6$

## Tissus $\mathcal{LW}_X$ : relations abéliennes

- $H^0(\Omega_{\mathbb{F}}^2) \hookrightarrow AR^{(2)}(\mathcal{LW}_X)$ ,  $\omega \mapsto (L_i^*(\omega))_{i=1}^6$
- On a  $10 = h^0(\Omega_{\mathbb{F}}^2) \leq rg^{(2)}(\mathcal{LW}_X) \stackrel{[D]}{\leq} 10$

# Tissus $\mathcal{LW}_X$ : relations abéliennes

- $H^0(\Omega_{\mathbb{F}}^2) \hookrightarrow AR^{(2)}(\mathcal{LW}_X)$ ,  $\omega \mapsto (L_i^*(\omega))_{i=1}^6$
- On a  $10 = h^0(\Omega_{\mathbb{F}}^2) \leq rg^{(2)}(\mathcal{LW}_X) \stackrel{[D]}{\leq} 10$

Théorème ♡ : Soit  $X \subset \mathbf{P}^4$  une hypercubique lisse

1. La trace induit un isom  $H^0(\Omega_{\mathbb{F}}^2) \xrightarrow{\sim} AR^{(2)}(\mathcal{LW}_X)$
2. Le tissu  $\mathcal{LW}_X$  est de 2-rang maximal

# Tissus $\mathcal{LW}_X$ : relations abéliennes

- $H^0(\Omega_{\mathbb{F}}^2) \hookrightarrow AR^{(2)}(\mathcal{LW}_X)$ ,  $\omega \mapsto (L_i^*(\omega))_{i=1}^6$
- On a  $10 = h^0(\Omega_{\mathbb{F}}^2) \leq rg^{(2)}(\mathcal{LW}_X) \stackrel{[D]}{\leq} 10$

**Théorème** ♡ : Soit  $X \subset \mathbf{P}^4$  une hypercubique lisse

1. La trace induit un isom  $H^0(\Omega_{\mathbb{F}}^2) \xrightarrow{\sim} AR^{(2)}(\mathcal{LW}_X)$
2. Le tissu  $\mathcal{LW}_X$  est de 2-rang maximal

- $\text{Sing}(\mathbf{S}) \neq \emptyset$ ,  $\mathbf{F}_1(\mathbf{S}) = \left( \bigcup_{i=1}^6 \mathbf{D}_i \right) \cup \left( \bigcup_{s=1}^{15} \mathbf{\Pi}_s \right)$  avec  $\begin{cases} \mathbf{D}_i \simeq \mathbf{dP}_5 \\ \mathbf{\Pi}_s \simeq \mathbf{P}^2 \end{cases}$

# Tissus $\mathcal{LW}_X$ : relations abéliennes

- $\mathbf{H}^0(\Omega_{\mathbb{F}}^2) \hookrightarrow \mathbf{AR}^{(2)}(\mathcal{LW}_X)$ ,  $\omega \mapsto (L_i^*(\omega))_{i=1}^6$
- On a  $10 = h^0(\Omega_{\mathbb{F}}^2) \leq \mathbf{rg}^{(2)}(\mathcal{LW}_X) \stackrel{[D]}{\leq} 10$

**Théorème** ♡ : Soit  $X \subset \mathbf{P}^4$  une hypercubique lisse

1. La trace induit un isom  $\mathbf{H}^0(\Omega_{\mathbb{F}}^2) \xrightarrow{\sim} \mathbf{AR}^{(2)}(\mathcal{LW}_X)$
2. Le tissu  $\mathcal{LW}_X$  est de 2-rang maximal

- $\text{Sing}(\mathbf{S}) \neq \emptyset$ ,  $\mathbf{F}_1(\mathbf{S}) = \left( \bigcup_{i=1}^6 \mathbf{D}_i \right) \cup \left( \bigcup_{s=1}^{15} \mathbf{\Pi}_s \right)$  avec  $\begin{cases} \mathbf{D}_i \simeq \mathbf{dP}_5 \\ \mathbf{\Pi}_s \simeq \mathbf{P}^2 \end{cases}$
- Le **Thm** ♡ s'applique à  $\mathbf{S} \implies \begin{cases} \varphi_3 : \mathcal{W}_{0,6} \simeq \mathcal{LW}_S \\ \varphi_{3*} : \mathbf{AR}(\mathcal{W}_{0,6}) \simeq \mathbf{H}^0(\omega_{\mathbf{F}_1(\mathbf{S})}^2) \end{cases}$

# Tissu $\mathcal{LW}_S$ : relations abéliennes

# Tissu $\mathcal{LW}_S$ : relations abéliennes

- $AR(\mathcal{LW}_S) \simeq H^0(\omega_{F_1(S)}^2)$  se montre  $\left\{ \begin{array}{l} \text{par déformation } \mathbf{S} \sim X \\ \text{directement } \omega_{F_1(S)}^2 = \mathcal{O}_{F_1(S)}(1) \end{array} \right.$

# Tissu $\mathcal{LW}_S$ : relations abéliennes

- $AR(\mathcal{LW}_S) \simeq \mathbf{H}^0(\omega_{\mathbf{F}_1(S)}^2)$  se montre  $\left\{ \begin{array}{l} \text{par déformation } \mathbf{S} \sim X \\ \text{directement } \omega_{\mathbf{F}_1(S)}^2 = \mathcal{O}_{\mathbf{F}_1(S)}(1) \end{array} \right.$
- Preuve directe donne :



# Tissu $\mathcal{LW}_S$ : relations abéliennes

- $AR(\mathcal{LW}_S) \simeq H^0(\omega_{F_1(S)}^2)$  se montre  $\begin{cases} \text{par déformation } \mathbf{S} \sim X \\ \text{directement } \omega_{F_1(S)}^2 = \mathcal{O}_{F_1(S)}(1) \end{cases}$
- Preuve directe donne :

$$1. AR^{(2)}(\mathcal{W}_{0,n+3}) = AR_{\text{Comb}}^{(2)}(\mathcal{W}_{0,n+3})$$

# Tissu $\mathcal{LW}_S$ : relations abéliennes

- $AR(\mathcal{LW}_S) \simeq H^0(\omega_{F_1(S)}^2)$  se montre  $\begin{cases} \text{par déformation } \mathbf{S} \sim X \\ \text{directement } \omega_{F_1(S)}^2 = \mathcal{O}_{F_1(S)}(1) \end{cases}$

- Preuve directe donne :

1.  $AR^{(2)}(\mathcal{W}_{0,n+3}) = AR_{\text{Comb}}^{(2)}(\mathcal{W}_{0,n+3})$

2.  $AR^{(2)}(\mathcal{W}_{0,n+3}) = \mathbf{V}_{[3111]} \quad \mathfrak{S}_6\text{-module irréductible}$

# Tissu $\mathcal{LW}_S$ : relations abéliennes

- $AR(\mathcal{LW}_S) \simeq H^0(\omega_{F_1(S)}^2)$  se montre  $\begin{cases} \text{par déformation } S \sim X \\ \text{directement } \omega_{F_1(S)}^2 = \mathcal{O}_{F_1(S)}(1) \end{cases}$

- Preuve directe donne :

1.  $AR^{(2)}(\mathcal{W}_{0,n+3}) = AR_{\text{Comb}}^{(2)}(\mathcal{W}_{0,n+3})$

2.  $AR^{(2)}(\mathcal{W}_{0,n+3}) = V_{[3111]} \quad \mathfrak{S}_6\text{-module irréductible}$

3.  $\mathcal{E}_3 \in AR_{\text{Comb}}^{(2)}(\mathcal{W}_{0,n+3})$  donc  $\mathcal{E}_3$  est rationnelle

# Tissu $\mathcal{LW}_S$ : relations abéliennes

- $AR(\mathcal{LW}_S) \simeq H^0(\omega_{F_1(S)}^2)$  se montre  $\begin{cases} \text{par déformation } S \sim X \\ \text{directement } \omega_{F_1(S)}^2 = \mathcal{O}_{F_1(S)}(1) \end{cases}$
- Preuve directe donne :
  1.  $AR^{(2)}(\mathcal{W}_{0,n+3}) = AR_{\text{Comb}}^{(2)}(\mathcal{W}_{0,n+3})$
  2.  $AR^{(2)}(\mathcal{W}_{0,n+3}) = V_{[3111]} \quad \mathfrak{S}_6\text{-module irréductible}$
  3.  $\mathcal{E}_3 \in AR_{\text{Comb}}^{(2)}(\mathcal{W}_{0,n+3})$  donc  $\mathcal{E}_3$  est rationnelle
- Totalement à l'encontre des énoncés de Damiano ds le cas  $n = 3$ !

# Tissu $\mathcal{W}_{0,n+3}$ : propriétés pour $n$ impair [P]

- $\mathcal{W}_{0,n+3}$  :  $(n+3)$ -tissu en courbes rationnelles sur  $\mathcal{M}_{0,n+3}$   
invariant sous l'action de  $\mathbf{Aut}(\mathcal{M}_{0,n+3}) = \mathfrak{S}_{n+3}$

▶ [N-Lin]  $\mathcal{W}_{0,n+3}$  est linéarisable

▶ [Rang]  $\mathcal{W}_{0,n+3}$  est de rang maximal  $(n+1)(n+2)/2$

$$\mathbf{AR}^{(n-1)}(\mathcal{W}_{0,n+3}) = \mathbf{AR}_{\mathbf{Comb}}^{(n-1)}(\mathcal{W}_{0,n+3}) \ni \mathcal{E}_n$$

[31<sup>n</sup>]      ( $\mathfrak{S}_{n+3}$  – module irréductible)

▶ [Octa]  $\mathcal{W}_{0,n+3}$  est octaédral

▶ [Caract] Étant donné  $\mathcal{W}_d$ , un  $d$ -tissu en courbes octaédral :

– soit  $\mathcal{W}_d$  est équivalent à  $(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{n+3})$

– soit  $\mathcal{W}_d \simeq \mathcal{W}_{0,n+3}$  ( et  $d = n+3$  )

## Tissu $\mathcal{W}_{0,n+3}$ : formules pour $n$ pair [P]

- $n=2$  :
  - $\mathcal{W}_{0,5} = \mathbf{W}\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$
  - $(\mathcal{E}_2) : 0 = d\mathbf{R}(x) - d\mathbf{R}(y) - \dots + d\mathbf{R}\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$
  - $d\mathbf{R}(u) = \left(\frac{\log(1-u)}{u} - \frac{\log(u)}{1-u}\right) du$

## Tissu $\mathcal{W}_{0,n+3}$ : formules pour $n$ pair [P]

- $n = 2$  :
  - $\mathcal{W}_{0,5} = \mathbf{W}\left(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}, \frac{1-\mathbf{x}}{1-\mathbf{y}}, \frac{\mathbf{x}(1-\mathbf{y})}{\mathbf{y}(1-\mathbf{x})}\right)$
  - $(\mathcal{E}_2) : 0 = d\mathbf{R}(\mathbf{x}) - d\mathbf{R}(\mathbf{y}) - \dots + d\mathbf{R}\left(\frac{\mathbf{x}(1-\mathbf{y})}{\mathbf{y}(1-\mathbf{x})}\right)$
  - $d\mathbf{R}(u) = \left(\frac{\log(1-u)}{u} - \frac{\log(u)}{1-u}\right) du$
- $n = 4$  :
  - $\mathcal{W}_{0,7} = \mathbf{W}\left(\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_7\right) \quad \mathbf{U}_1 = (x_2, x_3, x_4), \text{ etc}$
  - $(\mathcal{E}_4) : 0 = \sum_{i=1}^7 (-1)^i e_4(\mathbf{U}_i) \Omega_{\mathbf{U}_i}^3$
  - $e_4(\mathbf{U}_1) = e_4(x_2, x_3, x_4) = ?$

# Formule pour $e_4(x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{aligned} e_4(x_2, x_3, x_4) = & \frac{x_2^2 \ln |x_2|}{x_3 x_4 (x_2 - 1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} \\ & - \frac{x_3^2 \ln |x_3|}{x_2 x_4 (x_2 - x_3)(x_3 - 1)(x_3 - x_4)} \\ & + \frac{x_4^2 \ln |x_4|}{x_2 x_3 (x_4 - 1)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)} \\ & - \frac{(x_2 - 1)^2 \ln |x_2 - 1|}{x_2 (x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - 1)(x_4 - 1)} \\ & - \frac{(x_2 - x_3)^2 \ln |x_2 - x_3|}{x_2 x_3 (x_2 - 1)(x_2 - x_4)(x_3 - 1)(x_3 - x_4)} \\ & + \frac{(x_2 - x_4)^2 \ln |x_2 - x_4|}{x_2 x_4 (x_2 - 1)(x_4 - 1)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)} \\ & + \frac{(x_3 - 1)^2 \ln |x_3 - 1|}{x_3 (x_2 - 1)(x_4 - 1)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)} \\ & - \frac{(x_3 - x_4)^2 \ln |x_3 - x_4|}{x_3 x_4 (x_4 - 1)(x_3 - 1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} \\ & - \frac{(x_4 - 1)^2 \ln |x_4 - 1|}{x_4 (x_2 - 1)(x_3 - 1)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)} \end{aligned}$$



# Tissu de Bol $\mathcal{B} = \mathcal{W}\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$ ( $= \mathcal{W}_{0,5}$ )

[Proj]  $\mathcal{B}$  est équivalent au 5-tissu en coniques sur  $\mathbf{dP}_5 \subset \mathbf{P}^5$

[N-Lin]  $\mathcal{B}$  n'est pas linéarisable

[Rang]  $\mathcal{B}$  est de rang maximal 6

–  $\mathbf{AR}(\mathcal{B}) = \langle \mathcal{A}\mathbf{b} \rangle \oplus \mathbf{AR}_{\text{Log}}(\mathcal{B})$

–  $\mathcal{A}\mathbf{b}$  engendre  $\mathbf{AR}_{\text{Log}}(\mathcal{B})$  par résidu/monodromie

[Hexag]  $\mathcal{B}$  est hexagonal et cela le caractérise

[GM] 1.  $\mathcal{B}$  est le quotient du tissu  $\mathbf{H}_{A_4}$ -équiv  $\mathcal{W}(\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^5) \xrightarrow{\tilde{f}_i} \mathbf{G}_2(\mathbb{R}_i^4))$

2. Construction cohomologico-géométrique de  $\mathcal{A}\mathbf{b}$

[Clust]  $\mathcal{B}$  est équivalent au  $\mathcal{X}$ -tissu cluster de type  $A_2$

$$\mathcal{X}\mathcal{W}_{A_2} = \mathcal{W}\left(x, y, \frac{1+x}{y}, \frac{1+y}{x}, \frac{1+x+y}{xy}\right)$$

# Tissu de Bol $\mathcal{B} = \mathcal{W}\left(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right)$ ( $= \mathcal{W}_{0,5}$ )

[Proj]  $\mathcal{B}$  est équivalent au 5-tissu en coniques sur  $\mathbf{dP}_5 \subset \mathbf{P}^5$

[N-Lin]  $\mathcal{B}$  n'est pas linéarisable  $\mathbf{dP}_5 = \mathbf{Bl}_{p_1, \dots, p_4}(\mathbf{P}^2)$

[Rang]  $\mathcal{B}$  est de rang maximal 6

–  $\mathbf{AR}(\mathcal{B}) = \langle \mathcal{A}\mathbf{b} \rangle \oplus \mathbf{AR}_{\text{Log}}(\mathcal{B})$

–  $\mathcal{A}\mathbf{b}$  engendre  $\mathbf{AR}_{\text{Log}}(\mathcal{B})$  par résidu/monodromie

[Hexag]  $\mathcal{B}$  est hexagonal et cela le caractérise

[GM] 1.  $\mathcal{B}$  est le quotient du tissu  $\mathbf{H}_{A_4}$ -équiv  $\mathcal{W}(\mathbf{G}_2(\mathbb{R}^5) \xrightarrow{\tilde{f}_i} \mathbf{G}_2(\mathbb{R}_i^4))$

2. Construction cohomologico-géométrique de  $\mathcal{A}\mathbf{b}$

[Clust]  $\mathcal{B}$  est équivalent au  $\mathcal{X}$ -tissu cluster de type  $A_2$

$$\mathcal{X}\mathcal{W}_{A_2} = \mathcal{W}\left(x, y, \frac{1+x}{y}, \frac{1+y}{x}, \frac{1+x+y}{xy}\right)$$

Tissu de  $d\mathbf{P}_4 = \mathbf{BI}_{p_1, \dots, p_5}(\mathbf{P}^2) \subset \mathbf{P}^4$

Tissu de  $\mathbf{dP}_4 = \mathbf{Bl}_{p_1, \dots, p_5}(\mathbf{P}^2) \subset \mathbf{P}^4$

[Proj]  $\mathcal{W}_{\mathbf{dP}_4}$  10-tissu en coniques sur  $\mathbf{dP}_4$

# Tissu de $\mathbf{dP}_4 = \mathbf{Bl}_{p_1, \dots, p_5}(\mathbf{P}^2) \subset \mathbf{P}^4$

[Proj]  $\mathcal{W}_{\mathbf{dP}_4}$  10-tissu en coniques sur  $\mathbf{dP}_4$

[N-Lin]  $\mathcal{W}_{\mathbf{dP}_4}$  n'est pas linéarisable

# Tissu de $\mathbf{dP}_4 = \mathbf{Bl}_{p_1, \dots, p_5}(\mathbf{P}^2) \subset \mathbf{P}^4$

[Proj]  $\mathcal{W}_{\mathbf{dP}_4}$  10-tissu en coniques sur  $\mathbf{dP}_4$

[N-Lin]  $\mathcal{W}_{\mathbf{dP}_4}$  n'est pas linéarisable

[Rang]  $\mathcal{W}_{\mathbf{dP}_4}$  est de rang maximal 36

- $\mathbf{AR}(\mathcal{W}_{\mathbf{dP}_4}) = \mathbf{AR}_{\text{Log}}(\mathcal{W}_{\mathbf{dP}_4}) \oplus \mathbf{AR}_{\text{Dilog}}(\mathcal{W}_{\mathbf{dP}_4}) \oplus \langle \mathcal{T} \rangle^{w=3}$
- $\mathcal{T}$  engendre  $\mathbf{AR}_{\text{Dilog}}(\mathcal{W}_{\mathbf{dP}_4})$  par résidu/monodromie

# Tissu de $dP_4 = \text{Bl}_{p_1, \dots, p_5}(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^4$

[Proj]  $\mathcal{W}_{dP_4}$  10-tissu en coniques sur  $dP_4$

[N-Lin]  $\mathcal{W}_{dP_4}$  n'est pas linéarisable

[Rang]  $\mathcal{W}_{dP_4}$  est de rang maximal 36

- $\mathbf{AR}(\mathcal{W}_{dP_4}) = \mathbf{AR}_{\text{Log}}(\mathcal{W}_{dP_4}) \oplus \mathbf{AR}_{\text{Dilog}}(\mathcal{W}_{dP_4}) \oplus \langle \mathcal{T} \rangle^{w=3}$
- $\mathcal{T}$  engendre  $\mathbf{AR}_{\text{Dilog}}(\mathcal{W}_{dP_4})$  par résidu/monodromie

[Hexag]  $\mathcal{W}_{dP_4}$  est caractérisé par le matroïde formé par ses sous-3-tissus hexagonaux

# Tissu de $dP_4 = \text{Bl}_{p_1, \dots, p_5}(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^4$

[Proj]  $\mathcal{W}_{dP_4}$  10-tissu en coniques sur  $dP_4$

[N-Lin]  $\mathcal{W}_{dP_4}$  n'est pas linéarisable

[Rang]  $\mathcal{W}_{dP_4}$  est de rang maximal 36

–  $\text{AR}(\mathcal{W}_{dP_4}) = \text{AR}_{\text{Log}}(\mathcal{W}_{dP_4}) \oplus \text{AR}_{\text{Dilog}}(\mathcal{W}_{dP_4}) \oplus \langle \mathcal{T} \rangle^{w=3}$

–  $\mathcal{T}$  engendre  $\text{AR}_{\text{Dilog}}(\mathcal{W}_{dP_4})$  par résidu/monodromie

[Hexag]  $\mathcal{W}_{dP_4}$  est caractérisé par le matroïde formé par ses sous-3-tissus hexagonaux

- [GM] 1.  $\mathcal{W}_{dP_4}$  est le quotient du tissu  $\mathbf{H}_{D_5}$ -équiv  $\mathcal{W}(\mathbb{S}_5 \xrightarrow{\varphi_i} \mathbb{S}_4(i))$   
2. Construction cohomologico-géométrique de  $\mathcal{T}$  (?)



# Tissu de $dP_4 = \text{Bl}_{p_1, \dots, p_5}(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^4$

[Proj]  $\mathcal{W}_{dP_4}$  10-tissu en coniques sur  $dP_4$

[N-Lin]  $\mathcal{W}_{dP_4}$  n'est pas linéarisable

[Rang]  $\mathcal{W}_{dP_4}$  est de rang maximal 36

- $\text{AR}(\mathcal{W}_{dP_4}) = \text{AR}_{\text{Log}}(\mathcal{W}_{dP_4}) \oplus \text{AR}_{\text{Dilog}}(\mathcal{W}_{dP_4}) \oplus \langle \mathcal{T} \rangle^{w=3}$
- $\mathcal{T}$  engendre  $\text{AR}_{\text{Dilog}}(\mathcal{W}_{dP_4})$  par résidu/monodromie

[Hexag]  $\mathcal{W}_{dP_4}$  est caractérisé par le matroïde formé par ses sous-3-tissus hexagonaux

- [GM] 1.  $\mathcal{W}_{dP_4}$  est le quotient du tissu  $\mathbf{H}_{D_5}$ -équiv  $\mathcal{W}(\mathbb{S}_5 \xrightarrow{\varphi_i} \mathbb{S}_4(i))$   
2. Construction cohomologico-géométrique de  $\mathcal{T}$  (?)

[Clust]  $\mathcal{W}_{dP_4}$  est un  $\mathcal{X}$ -tissu cluster de type  $D_4$