

Licence de mathématique  
Université Paris-Saclay

MA202 – Algèbre linéaire

N. Perrin & P.-G. Plamondon

Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines

Année 2020-2021

# Table des matières

|                                                                            |           |
|----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>I. Ensembles et applications</b>                                        | <b>4</b>  |
| <b>1. Ensembles, notations et conventions</b>                              | <b>5</b>  |
| 1.1. Premières définitions et premiers exemples . . . . .                  | 5         |
| 1.2. Constructions en théorie des ensembles . . . . .                      | 6         |
| 1.2.1. Union . . . . .                                                     | 7         |
| 1.2.2. Intersection . . . . .                                              | 8         |
| 1.2.3. Différence et complémentaire . . . . .                              | 8         |
| 1.2.4. Ensemble des parties . . . . .                                      | 9         |
| 1.2.5. Produit cartésien . . . . .                                         | 9         |
| <b>2. Applications</b>                                                     | <b>11</b> |
| 2.1. Premières définitions et premiers exemples . . . . .                  | 11        |
| 2.2. Applications injectives, surjectives et bijectives . . . . .          | 12        |
| 2.3. Applications et opérations sur les ensembles . . . . .                | 14        |
| <b>II. Algèbre linéaire</b>                                                | <b>15</b> |
| <b>3. Systèmes linéaires</b>                                               | <b>16</b> |
| 3.1. Un exemple (pas vraiment d'actualité...) . . . . .                    | 16        |
| 3.2. Définition . . . . .                                                  | 18        |
| 3.3. Matrices, opérations sur les lignes . . . . .                         | 20        |
| 3.4. Algorithme de Gauß . . . . .                                          | 22        |
| 3.5. Système homogène et inhomogène . . . . .                              | 28        |
| <b>4. Espaces vectoriels</b>                                               | <b>35</b> |
| 4.1. Définitions et premiers exemples . . . . .                            | 35        |
| 4.2. Sous-espaces vectoriels . . . . .                                     | 37        |
| <b>5. Combinaisons linéaires, familles libres et familles génératrices</b> | <b>39</b> |
| 5.1. Combinaison linéaire et familles génératrices . . . . .               | 39        |
| 5.2. Indépendance linéaire . . . . .                                       | 41        |
| <b>6. Bases et dimension</b>                                               | <b>46</b> |
| 6.1. Bases, définition et premiers exemples . . . . .                      | 46        |

|                                                                      |           |
|----------------------------------------------------------------------|-----------|
| 6.2. Existence . . . . .                                             | 47        |
| 6.3. Dimension . . . . .                                             | 50        |
| <b>7. Applications linéaires</b>                                     | <b>52</b> |
| 7.1. Définition et premiers exemples . . . . .                       | 52        |
| 7.2. Applications linéaires et sous-espaces vectoriels . . . . .     | 54        |
| 7.3. Applications linéaires et bases . . . . .                       | 55        |
| 7.4. L'espace vectoriel $\text{Hom}(V, W)$ . . . . .                 | 58        |
| 7.5. Applications linéaires et dimension . . . . .                   | 58        |
| <b>8. Matrices et applications linéaires</b>                         | <b>61</b> |
| 8.1. Opérations sur les matrices . . . . .                           | 61        |
| 8.2. Base canonique des matrices . . . . .                           | 64        |
| 8.3. Matrices inversibles, inverse d'une matrice . . . . .           | 64        |
| 8.4. Matrices et algorithme de Gauß . . . . .                        | 65        |
| 8.5. Matrice d'une application linéaire . . . . .                    | 68        |
| 8.6. Changement de base . . . . .                                    | 71        |
| <b>9. Somme directe</b>                                              | <b>73</b> |
| 9.1. Somme rappels . . . . .                                         | 73        |
| 9.2. Somme directe . . . . .                                         | 73        |
| 9.3. Somme directe de plus de deux sous-espaces vectoriels . . . . . | 75        |
| 9.4. Supplémentaire . . . . .                                        | 76        |
| 9.5. Projections . . . . .                                           | 78        |
| 9.6. Symétries . . . . .                                             | 79        |

Première partie .

Ensembles et applications

# 1. Ensembles, notations et conventions

## 1.1. Premières définitions et premiers exemples

La théorie des ensembles est une partie non triviale des mathématiques. Elle est fortement reliée à la logique et forme le socle de base de tout raisonnement mathématique. Nous n'allons pas étudier la théorie des ensembles ni la logique dans ce texte mais nous rappelons quelques notations importantes, quelques axiomes de bases ainsi que quelques résultats utiles dans toutes les mathématiques voire dès que l'on a affaire à un raisonnement logique.

Pour les raisons évoquées ci-dessus, notre définition d'ensemble reste assez vague mais suffisamment "évidente" pour être acceptée par tous.

**Définition 1.1.1** Un **ensemble**  $E$  est une collection d'objets appelés **éléments**.

**Axiome 1.1.2 (Égalité de deux ensembles)** Deux ensembles sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes éléments.

**Remarque 1.1.3** Cet axiome semble trivial, cependant il est très utile dans la pratique. En effet, pour montrer que deux ensembles  $M$  et  $N$  sont égaux, on montre une **double inclusion** : tout élément de  $M$  est contenu dans  $N$  et tout élément de  $N$  est contenu dans  $M$ . C'est le moyen le plus simple et le plus sûr pour montrer que deux ensembles sont égaux.

**Notation 1.1.4** Nous utiliserons les notations suivantes.

- (i) **les crochets ensemblistes** :  $\{ \}$ . Par exemple  $M = \{0; 1; 2\}$  signifie que  $M$  est la collection des objets 0, 1 et 2.
- (ii) **est élément de** :  $\in$ . Par exemple, on a  $1 \in \{0; 1; 2\}$ .
- (iii) **n'est pas élément de** :  $\notin$ . Par exemple  $3 \notin \{0; 1; 2\}$ .
- (iv) **pour tout** :  $\forall$ . Par exemple  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a  $n \geq 0$  se lit *pour tout  $n$  entier naturel, on a que  $n$  est supérieur ou égal à 0*.
- (v) **il existe** :  $\exists$ . Par exemple  $\exists n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 5$  se lit *il existe un entier naturel  $n$  tel que  $n$  est supérieur ou égal à 5*.

- (vi) **alors** :  $\Rightarrow$ . Par exemple  $n \geq 1 \Rightarrow n \geq 0$  se lit *si  $n$  est supérieur ou égal à 1, alors  $n$  est supérieur ou égal à 0*.
- (vii) **tel que** :  $,$  ou  $|$ . Par exemple  $(\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 5)$  ou  $(\exists n \in \mathbb{N} \mid n \geq 5)$  se lit *il existe un entier naturel  $n$  tel que  $n$  est supérieur ou égal à 5*.

**Remarque 1.1.5** En symboles, l'axiome d'égalité des ensembles s'écrit de la manière suivante : on a  $M = N$  si et seulement si

$$(x \in M \Rightarrow x \in N) \text{ et } (x \in N \Rightarrow x \in M).$$

**Définition 1.1.6** Soit  $M$  un ensemble.

- (i) Un **sous-ensemble**  $N$  de  $M$  est un ensemble tel que tout élément de  $N$  est aussi un élément de  $M$ . En symboles :  $x \in N \Rightarrow x \in M$ .  
On écrit alors  $N \subset M$  ou  $N \subseteq M$ .
- (ii) Un sous-ensemble **propre** est un sous-ensemble  $N \subset M$  de  $M$  tel que  $N \neq M$ .  
On écrit alors  $N \subsetneq M$ .

**Exemple 1.1.7** On a les inclusions suivantes :

- (i)  $\{0; 1; 2\} \subseteq \{0; 1; 2\}$   
(ii)  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ .  
(iii)  $\{1; 2\} \subsetneq \{0; 1; 2\}$ .

**Remarque 1.1.8** En symboles l'affirmation  $N \subsetneq M$  s'écrit

$$(\forall x \in N, x \in M) \text{ et } (\exists x \in M, x \notin N).$$

**Remarque 1.1.9** Attention, un ensemble “ne distingue pas les éléments égaux”. Ainsi, on a  $\{0; 1; 2\} = \{2; 0; 1\} = \{0; 0; 1; 2; 2; 2\}$ .

## 1.2. Constructions en théorie des ensembles

**Axiome 1.2.1** Soit  $P$  une propriété et  $M$  un ensemble, alors il existe un sous-ensemble  $N \subset M$  de  $M$  formé de tous les éléments de  $M$  qui vérifient la propriété  $P$ .

**Notation 1.2.2** On peut définir un nouveau symbole : **qui vérifie la propriété** ou encore **tel que** :  $|$ . Par exemple  $\{0; 1; 2\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 2\}$  se lit : *l'ensemble contenant les éléments 0, 1 et 2 est égal à l'ensemble des entiers naturels  $n$  tels que  $n$  est inférieur ou égal à 2*.

Nous pouvons maintenant montrer notre premier théorème...

**Proposition 1.2.3** S'il existe un ensemble, alors il existe un **ensemble vide** : un ensemble ne contenant aucun élément. On le note  $\emptyset$ .

*Preuve.* Soit  $M$  un ensemble. Par hypothèse, nous savons qu'il en existe au moins un. Considérons alors, grâce à l'axiome 1.2.1, le sous-ensemble  $N \subset M$  de  $M$  suivant :  $N = \{x \in M \mid x \neq x\}$ . L'ensemble  $N$  ne peut contenir aucun élément, il est donc vide et on a  $N = \emptyset$ . ■

**Remarque 1.2.4** L'ensemble vide est contenu dans tout ensemble : pour tout ensemble  $M$ , on a  $\emptyset \subset M$ .

On pourrait penser que les assertions précédentes et la théorie des ensembles en général sont inutiles car évidentes. Il faut cependant se méfier des évidences. Par exemple, on a le résultat suivant.

**Proposition 1.2.5** Il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles.

*Preuve.* Si un tel ensemble existe, notons le  $M$ . Par l'axiome 1.2.1, on peut considérer le sous-ensemble  $N = \{x \in M \mid x \notin x\}$ . C'est un ensemble et donc un élément de  $M$ . On peut donc se demander si  $N$  est un élément de  $N$ . S'il c'est le cas, c'est-à-dire si  $N \in N$ , cela voudrait dire que l'affirmation  $N \notin N$  est fausse mais par définition de  $N$  on obtient que  $N$  n'est pas dans  $N$  donc  $N \notin N$ , une contradiction. Si par contre il n'y est pas, ou encore si  $N \notin N$ , alors  $N$  vérifie la condition pour être dans  $N$  donc  $N \in N$ , encore une contradiction... Nous venons de montrer par l'absurde que l'ensemble des ensembles n'existe pas. ■

## 1.2.1. Union

**Axiome 1.2.6 (Axiome d'union)**

- (i) Soient  $M$  et  $N$  deux ensembles, alors il existe un ensemble, noté  $M \cup N$ , qui contient exactement tous les éléments de  $M$  et  $N$ . Cet ensemble est appelé **union** de  $M$  et  $N$ . On a

$$M \cup N = \{x \mid x \in M \text{ ou } x \in N\}.$$

- (ii) Plus généralement, si  $I$  est un ensemble (dit ensemble d'indices) et si  $(M_i)_{i \in I}$  est une famille d'ensembles indexés par  $I$ , alors il existe un ensemble

$$\bigcup_{i \in I} M_i,$$

l'**union des ensembles**  $(M_i)_{i \in I}$  qui contient exactement les éléments de  $M_i$  pour tout  $i \in I$ . En symboles :

$$\bigcup_{i \in I} M_i = \{x \mid \text{il existe } i \in I \text{ tel que } x \in M_i\}.$$

À partir de l'axiome d'union et le l'axiome 1.2.1, on peut fabriquer de nouveaux ensembles.

### 1.2.2. Intersection

#### Proposition 1.2.7 (Intersection)

1. Soient  $M$  et  $N$  deux ensembles, il existe alors un ensemble, noté  $M \cap N$  et appelé **intersection** de  $M$  et  $N$  qui contient exactement les éléments qui sont dans  $M$  et dans  $N$ . En symboles :

$$M \cap N = \{x \in M \cup N \mid x \in M \text{ et } x \in N\}.$$

2. Plus généralement, si  $I$  est un ensemble d'indices et si  $(M_i)_{i \in I}$  est une famille d'ensembles, alors il existe un ensemble, noté

$$\bigcap_{i \in I} M_i$$

et appelé **intersection** des  $(M_i)_{i \in I}$ , qui contient exactement les éléments qui sont dans chacun des  $M_i$  pour tout  $i \in I$ . En symboles :

$$\bigcap_{i \in I} M_i = \left\{ x \in \bigcup_{i \in I} M_i \mid \text{pour tout } i \in I \text{ on a } x \in M_i \right\}.$$

**Proposition 1.2.8** Soient  $M$ ,  $N$  et  $O$  trois ensembles. On a alors

- (i)  $M \cup M = M$  et  $M \cap M = M$ .
- (ii)  $M \cup N = N \cup M$  et  $M \cap N = N \cap M$ .
- (iii)  $M \cup (N \cup O) = (M \cup N) \cup O$  et  $M \cap (N \cap O) = (M \cap N) \cap O$

*Preuve.* Voir feuille d'exercices. ■

**Proposition 1.2.9** Soient  $M$ ,  $N$  et  $O$  trois ensembles. On a alors

- (i)  $M \cap (N \cup O) = (M \cap N) \cup (M \cap O)$ .
- (ii)  $M \cup (N \cap O) = (M \cup N) \cap (M \cup O)$ .

*Preuve.* Voir feuille d'exercices. ■

### 1.2.3. Différence et complémentaire

**Définition 1.2.10** Soient  $M$  et  $N$  deux ensembles. La **différence** de  $M$  et de  $N$ , notée  $M \setminus N$  est l'ensemble des éléments de  $M$  qui ne sont pas dans  $N$ . En symboles :

$$M \setminus N = \{x \in M \mid x \notin N\}.$$

**Remarque 1.2.11** Il n'est pas nécessaire que  $N$  soit contenu dans  $M$  pour que la différence soit bien définie. Par exemple, si  $M = \mathbb{Z}$  et  $N = \mathbb{R}_{<0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ , alors  $M \setminus N = \mathbb{N}$ .

**Remarque 1.2.12** La différence est parfois aussi appelée **complémentaire** de  $M$  dans  $N$  dans certains ouvrages. Nous réserverons le terme de complémentaire au cas où  $N$  est un sous-ensemble de  $M$  c'est-à-dire où  $N \subset M$ .

**Proposition 1.2.13** Soient  $M$ ,  $N$  et  $O$  trois ensembles. On a alors

- (i)  $M \setminus (N \cup O) = (M \setminus N) \cap (M \setminus O)$ .
- (ii)  $M \setminus (N \cap O) = (M \setminus N) \cup (M \setminus O)$ .

*Preuve.* Voir feuille d'exercices. ■

## 1.2.4. Ensemble des parties

**Axiome 1.2.14** Soit  $M$  un ensemble, alors il existe un ensemble, noté  $\mathcal{P}(M)$  et appelé **ensemble des parties** de  $M$ , dont les éléments sont exactement tous les sous-ensembles de  $M$ .

**Exemple 1.2.15** Voici quelques exemples d'ensembles des parties.

- (i)  $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ .
- (ii)  $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset; \{\emptyset\}\}$ .
- (iii)  $\mathcal{P}(\{0; 1; 2\}) = \{\emptyset; \{0\}; \{1\}; \{2\}; \{0; 1\}; \{0; 2\}; \{1; 2\}; \{0; 1; 2\}\}$ .

**Remarque 1.2.16** On peut remarquer que le nombre d'éléments de l'ensemble des parties d'un ensemble fini est toujours une puissance de 2 (ci-dessus  $1 = 2^0$ ,  $2 = 2^1$  et  $8 = 2^3$ ). Ceci n'est pas un hasard.

## 1.2.5. Produit cartésien

**Définition 1.2.17** Soient  $M$  et  $N$  deux ensembles.

- (i) Une **paire ordonnée** d'éléments de  $M$  et  $N$  est la donnée d'un premier élément  $x \in M$  et d'un second élément  $y \in N$ . On note alors la paire par  $(x, y)$ .
- (ii) L'ensemble de toutes les paires ordonnées d'éléments de  $M$  et  $N$  est appelé **produit cartésien** de  $M$  et  $N$  et est noté  $M \times N$ . En symboles :

$$M \times N = \{(x, y) \mid x \in M, y \in N\}.$$

**Remarque 1.2.18** On a  $(x, y) = (z, t)$  si et seulement si  $(x = z \text{ et } y = t)$ .

**Exemple 1.2.19** Soit  $M = \{0; 1; 2\}$  et  $N = \{A, B\}$  alors on a

$$M \times N = \{(0, A); (0, B); (1, A); (1, B); (2, A); (2, B)\}.$$

**Exemple 1.2.20** Voici un exemple que nous allons utiliser très souvent : un  $n$ -uplet de réels (c'est-à-dire une liste ordonnée de  $n$  réels) est un élément de  $\mathbb{R}^n$ . On le note  $a = (a_i)_{i \in [1, n]}$  et on utilise les notations en ligne ou en colonne suivantes :

$$a = (a_1, \dots, a_n) \text{ ou } a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

## 2. Applications

### 2.1. Premières définitions et premiers exemples

**Définition 2.1.1** Soient  $M$  et  $N$  deux ensembles. Une **application**  $f$  de  $M$  dans  $N$  est une relation entre  $M$  et  $N$  qui à chaque élément  $x \in M$  de l'ensemble de départ  $M$  associe un unique élément, noté  $f(x)$  de l'ensemble d'arrivée  $N$ . On dit aussi que  $f$  va de  $M$  dans  $N$ . En symboles, on écrit :

$$\begin{aligned} f : M &\rightarrow N \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

#### Exemple 2.1.2

- (i) Soit  $M$  un ensemble, il existe toujours l'**application identité** de  $M$ , notée  $\text{Id}_M$ , qui va de  $M$  dans  $M$  telle que  $\text{Id}_M(x) = x$  pour tout  $x \in M$ . En symboles :  $\text{Id}_M : M \rightarrow M, x \mapsto x$ .
- (ii) La fonction suivante est une application :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ .

**Définition 2.1.3** Soient  $f : M \rightarrow N$  et  $g : N \rightarrow O$  deux applications. L'application **composée** de  $f$  et  $g$  est l'application, notée  $g \circ f : M \rightarrow O$ , définie par  $x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$ .

**Définition 2.1.4** Soit  $f : M \rightarrow N$  une application et soient  $X \subset M$  et  $Y \subset N$  des sous-ensembles de  $M$  et  $N$ . L'**image** de  $X$  par  $f$  est le sous-ensemble noté  $f(X)$  de  $N$  défini par

$$f(X) = \{y \in N \mid \exists x \in X \text{ tel que } y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

L'**image inverse** ou l'**image réciproque** de  $Y$  par  $f$  est le sous-ensemble noté  $f^{-1}(Y)$  de  $M$  défini par

$$f^{-1}(Y) = \{x \in M \mid f(x) \in Y\}.$$

Lorsque  $Y = \{y\}$  ne contient qu'un élément, on écrira  $f^{-1}(y)$  à la place de  $f^{-1}(\{y\})$ .

**Exemple 2.1.5** Soit  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  l'application définie par  $x \mapsto x^2$ . Alors, on a  $f(\{-1; 1\}) = \{1\}$  et  $f^{-1}(1) = \{-1; 1\}$ .

## 2.2. Applications injectives, surjectives et bijectives

**Définition 2.2.1** Soit  $f : M \rightarrow N$  une application.

- (i) L'application  $f$  est dite **injective** si, pour tout  $x \in M$  et tout  $x' \in M$ , on a l'implication  $(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$ .
- (ii) L'application  $f$  est dite **surjective** si  $f(M) = N$ .
- (iii) L'application  $f$  est dite **bijjective** si  $f$  est injective et surjective.

**Remarque 2.2.2** Deux versions équivalentes :

- (i) Par contraposée, une application  $f : M \rightarrow N$  est injective si et seulement si pour tout  $x \in M$  et tout  $x' \in M$ , l'implication suivante est vérifiée :  $(x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$ .
- (ii) On a toujours  $f(M) \subset N$  donc  $f$  est surjective si et seulement si  $N \subset f(M)$  ou encore si et seulement si, pour tout  $y \in N$ , il existe  $x \in M$  tel que  $f(x) = y$ .

**Exemple 2.2.3** Les preuves des exemples suivants sont laissées en exercice.

- (i) L'application identité  $\text{Id}_M : M \rightarrow M$  est toujours bijective.
- (ii) L'application  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  définie par  $f(n) = n$  est injective mais non surjective.
- (iii) L'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \sin(x)$  n'est ni injective ni surjective.
- (iv) L'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  définie par  $f(x) = \sin(x)$  n'est pas injective mais est surjective.
- (v) L'application  $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \sin(x)$  est injective mais n'est pas surjective.
- (vi) L'application  $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  définie par  $f(x) = \sin(x)$  est bijective.

**Remarque 2.2.4** L'exemple précédent (les quatre dernières applications) montrent qu'ensembles de départ et ensembles d'arrivée sont très importants pour les notions d'applications injectives, surjectives et bijectives.

**Proposition 2.2.5** Soit  $f : M \rightarrow N$  une application. L'application  $f$  est bijective si et seulement s'il existe une application  $g : N \rightarrow M$  telle que  $g \circ f = \text{Id}_M$  et  $f \circ g = \text{Id}_N$ .

Lorsque  $f$  est bijective, l'application  $g$  ci-dessus est unique.

*Preuve.* Si  $f$  est bijective, alors elle est surjective et pour tout  $y \in N$ , il existe un élément  $x \in M$  tel que  $f(x) = y$ . Cet élément  $x \in M$  est unique car si  $x' \in M$  est tel que  $f(x') = y$ , alors  $f(x) = f(x')$  et comme  $f$  est injective, on a  $x = x'$ . À chaque  $y \in N$ , on peut donc associer de manière unique un élément  $x = g(y)$  de  $M$ . Ceci définit une application  $g : N \rightarrow M$  et on a  $f(g(y)) = f(x) = y$  et  $g(f(x)) = g(y) = x$ .

L'application  $g$  ainsi définie est unique. En effet, si  $h : N \rightarrow M$  est une autre application telle que  $h \circ f = \text{Id}_M$  et  $f \circ h = \text{Id}_N$ , alors on a pour tout  $y \in M$  les

égalités suivantes :  $f(g(y)) = y = f(h(y))$  et comme  $f$  est injective, on a  $g(y) = h(y)$  pour tout  $y \in N$ . Les applications  $g$  et  $h$  sont donc les mêmes :  $h = g$ .

Réciproquement, s'il existe une application  $g : N \rightarrow M$  telle que  $g \circ f = \text{Id}_M$  et  $f \circ g = \text{Id}_N$ . Si  $x, x' \in M$  sont tels que  $f(x) = f(x')$ , alors on a  $x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'$  donc  $x = x'$  et  $f$  est injective. Si  $y \in N$ , alors on a  $y = f(g(y))$  et en posant  $x = g(y) \in M$ , on a bien  $y = f(x) \in f(M)$  et  $f$  est surjective. ■

**Définition 2.2.6** Soit  $f : M \rightarrow N$  une application bijective, l'unique application  $g : N \rightarrow M$  telle que  $g \circ f = \text{Id}_M$  et  $f \circ g = \text{Id}_N$  est appelée **application réciproque** ou parfois **inverse** et est notée  $f^{-1} : N \rightarrow M$ .

**Remarque 2.2.7** Attention, ne pas confondre. La notation  $f^{-1}$  pour l'application réciproque (et l'appellation inverse encore plus) est trompeuse. Il ne faut pas confondre cette notation avec les deux suivantes :

- (i) L'image inverse d'un sous-ensemble  $Y \subset N$  notée  $f^{-1}(Y)$ . Différence : l'application réciproque  $f^{-1}$  n'existe que si  $f$  est bijective. L'image inverse existe toujours même si  $f$  n'est pas bijective.
- (ii) L'inverse  $x^{-1} = \frac{1}{x}$  d'un réel par exemple. Ainsi l'application cotangente notée  $\cotan : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par

$$x \mapsto \frac{1}{\tan(x)} = \tan^{-1}(x) \text{ (notation à éviter!)}$$

alors que l'application réciproque de l'application tangente (rappelons que  $\tan : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$  est bijective) est l'application  $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  qui pourrait aussi se noter  $\tan^{-1}$ . Pour éviter les confusions, on essaiera de ne jamais utiliser la notation  $\tan^{-1}$  et de lui préférer  $\cotan$  et  $\arctan$  pour ne pas les confondre.

**Proposition 2.2.8** Soient  $f : M \rightarrow N$  et  $g : N \rightarrow O$  deux applications. On a alors,

- (i) si  $f$  et  $g$  sont injectives, alors  $g \circ f$  est injective.
- (ii) si  $f$  et  $g$  sont surjectives, alors  $g \circ f$  est surjective.
- (iii) si  $f$  et  $g$  sont bijectives, alors  $g \circ f$  est bijective.

*Preuve.* 1. Soient  $x, y \in M$ , tels que  $g \circ f(x) = g \circ f(y)$ , alors on a  $g(f(x)) = g(f(y))$  et comme  $g$  est injective, on obtient  $f(x) = f(y)$ . Comme  $f$  est injective, on en déduit l'égalité  $x = y$ . On a montré que  $g \circ f$  est injective.

2. Soit  $z \in O$ . Comme  $g$  est surjective, il existe  $y \in N$  tel que  $g(y) = z$ . Comme  $f$  est surjective, il existe  $x \in M$  tel que  $f(x) = y$ . On a alors les égalités  $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ , donc  $g \circ f$  est surjective.

3. Découle de 1. et 2. et de la définition de bijective. ■

**Proposition 2.2.9** Soit  $f : M \rightarrow N$  une application avec  $M$  et  $N$  non vides.

- (i) L'application  $f$  est injective si et seulement s'il existe une application  $g : N \rightarrow M$  telle que  $g \circ f = \text{Id}_M$ .
- (ii) L'application  $f$  est surjective si et seulement s'il existe une application  $h : N \rightarrow M$  telle que  $f \circ h = \text{Id}_N$ .
- (iii) Si  $f$  est bijective, alors les applications  $g$  et  $h$  ci-dessus sont toutes les deux égales à l'application réciproque  $f^{-1}$ .

*Preuve.* Voir feuille d'exercices. ■

**Définition 2.2.10** Soit  $f : M \rightarrow N$  une application, le **graphe** de  $f$  est le sous-ensemble, noté  $\Gamma(f) \subset M \times N$  de  $M \times N$  défini par

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in M \times N \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in M\}.$$

**Définition 2.2.11** Soient  $M$  et  $N$  deux ensembles, l'**ensemble des applications** de  $M$  vers  $N$  est noté  $N^M$ .

## 2.3. Applications et opérations sur les ensembles

**Proposition 2.3.1** Soient  $f : M \rightarrow N$  une application,  $M_1, M_2 \subset M$  des sous-ensembles de  $M$  et  $N_1, N_2 \subset N$  des sous-ensembles de  $N$ .

- (i) On a  $(M_1 \subset M_2 \Rightarrow f(M_1) \subset f(M_2))$  et  $(N_1 \subset N_2 \Rightarrow f^{-1}(N_1) \subset f^{-1}(N_2))$ .
- (ii) On a  $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$  et  $f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$ .
- (iii) On a  $f(M_1 \cap M_2) \subset f(M_1) \cap f(M_2)$  et  $f^{-1}(N_1 \cap N_2) = f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)$ .
- (iv) On a  $f(M_1) \setminus f(M_2) \subset f(M_1 \setminus M_2)$  et  $f^{-1}(N_1 \setminus N_2) = f^{-1}(N_1) \setminus f^{-1}(N_2)$ .

*Preuve.* Voir feuille d'exercices. ■

Deuxième partie .

Algèbre linéaire

## 3. Systèmes linéaires

Les systèmes linéaires sont à peu près partout (voir l'exemple ci-dessous) et ils sont tellement simples à résoudre que même lorsqu'ils ne sont pas là, on essaie de s'y ramener car sinon, on ne sait pas résoudre les problèmes. Ça s'appelle la linéarisation et c'est utilisé dans toutes les sciences, expérimentales et non expérimentales. C'est un grand principe du mathématicien et du scientifique en général : si on ne sait pas résoudre un problème, on peut toujours essayer de le transformer en un problème qu'on sait résoudre !

### 3.1. Un exemple (pas vraiment d'actualité...)

Un téléphérique pratique les tarifs suivants :

- montée seule 22,50 €,
- descente seule 15 €,
- aller-retour 30 €.

Pendant la journée, on a encaissé 19650 € alors que 680 personnes sont montées et 520 sont descendues.

**Problème 3.1.1** Comment savoir combien de billets de chaque sorte ont été vendus ?

Pour résoudre ce problème, on note  $m$  le nombre de montées seules,  $d$  le nombre de descentes seules et  $a$  le nombre d'aller-retours. Le nombre total de montées est  $m + a$  donc on a l'équation

$$m + a = 680$$

et le nombre total de descentes est  $d + a$  d'où l'équation

$$d + a = 520.$$

Finalement, le chiffre d'affaires de la journée est donc de  $22,5m + 15d + 30a$  et on obtient une dernière équation

$$22,5m + 15d + 30a = 19650.$$

Notre problème se modélise donc par un système de trois équations :

$$(\star) \quad \begin{cases} m + a = 680 \\ d + a = 520 \\ 22,5m + 15d + 30a = 19650 \end{cases}$$

Il existe des techniques diverses pour résoudre ce genre de système. Une technique consisterait à écrire  $m$  et  $d$  en fonction de  $a$  grâce aux deux premières équations, on obtient  $m = 680 - a$  et  $d = 520 - a$  puis d'injecter ce qu'on a trouvé dans la dernière équation afin d'obtenir une équation qui ne dépend que de la variable  $a$  :  $22,5(680 - a) + 15(520 - a) + 30a = 19650$  et résoudre. Cette technique s'appelle **méthode par substitution**. Elle est tout à fait efficace, cependant si le nombre de variables grandit, il peut être plus compliqué de la mettre en œuvre car les variables se baladent des deux côtés des équations.

Dans ce chapitre et cet exemple, on va voir une méthode de résolution systématique : un algorithme (c'est très à la mode actuellement) dit de Gauß (1777-1855). Cette technique est tellement automatique qu'elle permettra de ne même plus écrire les variables ! Un gain de temps non négligeable s'il y en a beaucoup <sup>1</sup>.

Voici un exemple de cet algorithme appliqué à notre exemple. On va faire bien attention à toujours laisser la variable  $m$  tout à gauche, la variable  $d$  au milieu et la variable  $a$  à la fin, même si ces variables n'apparaissent pas. Le système devient :

$$\begin{cases} m & & + & a & = & 680 \\ & d & + & a & = & 520 \\ 22,5m & + & 15d & + & 30a & = & 19650 \end{cases}$$

Ensuite, le principe est de faire des opérations sur les lignes pour éliminer les variables. On commence par éliminer la variable  $m$  des deux dernières équations en utilisant la première. On ne change pas la ligne 2 (car la variable  $m$  n'y est pas) et on remplace la dernière ligne par elle-même moins 22,5 fois la première ligne. On obtient

$$\begin{cases} m & & + & a & = & 680 \\ & d & + & a & = & 520 \\ (22,5 - 22,5)m & + & (15 - 0)d & + & (30 - 22,5)a & = & 19650 - 22,5 \times 680 \end{cases}$$

En effectuant les calculs dans la dernière équation, on obtient

$$\begin{cases} m & + & a & = & 680 \\ & d & + & a & = & 520 \\ & 15d & + & 7,5a & = & 4350 \end{cases}$$

---

1. comme par exemple dans l'algorithme pagerank de google dont les variables sont les nombres de liens vers une page web donnée...

Et maintenant ? On recommence en éliminant  $d$  de la dernière équation en remplaçant la dernière équation par elle-même moins 15 fois la deuxième. On obtient

$$\begin{cases} m & + & a & = & 680 \\ & d & + & a & = & 520 \\ (15 - 15)d & + & (7,5 - 15)a & = & 4350 - 15 \times 520 \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} m & + & a & = & 680 \\ & d & + & a & = & 520 \\ & & -7,5a & = & -3450 \end{cases}$$

En divisant la dernière équation par  $-7,5$ , on obtient la valeur de  $a$  :

$$\begin{cases} m & + & a & = & 680 \\ & d & + & a & = & 520 \\ & & a & = & 460 \end{cases}$$

On élimine ensuite  $a$  des deux premières équations en utilisant la dernière. On remplace donc la première équation par elle-même moins la dernière et la seconde par elle-même moins la dernière. On obtient :

$$\begin{cases} m & & = & 220 \\ & d & = & 60 \\ & & a & = & 460 \end{cases}$$

Le système est résolu. On a  $m = 220$ ,  $d = 60$  et  $a = 460$ .

## 3.2. Définition

**Définition 3.2.1** Un **système linéaire** est une famille d'équations de la forme suivante (ici on a  $m$  équations) :

$$(\star) \begin{cases} a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + \cdots + a_{1,n}X_n = b_1 \\ a_{2,1}X_1 + a_{2,2}X_2 + \cdots + a_{2,n}X_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}X_1 + a_{m,2}X_2 + \cdots + a_{m,n}X_n = b_m \end{cases}$$

où  $X_1, \dots, X_n$  sont des **variables** ou encore **inconnues** et où les  $a_{i,j}$  et les  $b_j$  sont des scalaires, c'est-à-dire des nombres réels.

Le système est dit **homogène** si tous les coefficients  $b_j$  sont nuls, c'est-à-dire si  $b_j = 0$  pour tout  $j$  entre 1 et  $m$ . Sinon, il est dit **inhomogène**.

**Remarque 3.2.2** Le système ci-dessus est linéaire car les variables apparaissent toutes à la puissance 1 et il n'y a aucun produit entre les variables. C'est un point très important. S'il n'est pas vérifié, la résolution devient plus difficile, voire impossible <sup>2</sup>...

**Définition 3.2.3** Considérons le système  $(\star)$  suivant :

$$(\star) \quad \begin{cases} a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + \cdots + a_{1,n}X_n = b_1 \\ a_{2,1}X_1 + a_{2,2}X_2 + \cdots + a_{2,n}X_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}X_1 + a_{m,2}X_2 + \cdots + a_{m,n}X_n = b_m. \end{cases}$$

- (i) La **matrice des coefficients** du système  $(\star)$  est le tableau de nombres réels  $A$  suivant :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

- (ii) La **matrice des seconds membres** est le tableau  $b$  suivant :

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Le système est alors écrit sous forme plus compacte de la manière suivante :  $AX = b$ .

- (iii) La **matrice totale** ou **matrice étendue** du système  $(\star)$  est le tableau suivant obtenu par concaténation des matrices  $A$  et  $b$  :

$$[A|b] = \left( \begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right)$$

**Définition 3.2.4** Considérons le système  $(\star)$  suivant :

$$(\star) \quad \begin{cases} a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + \cdots + a_{1,n}X_n = b_1 \\ a_{2,1}X_1 + a_{2,2}X_2 + \cdots + a_{2,n}X_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}X_1 + a_{m,2}X_2 + \cdots + a_{m,n}X_n = b_m. \end{cases}$$

- (i) Une famille

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

---

2. Par exemple, on ne sait pas résoudre en général une équation, en une seule variable  $X$ , de la forme  $aX^5 + bX^4 + cX^3 + dX^2 + eX + f = 0$ .

de nombres réels  $v_i$  est appelée **solution du système**  $(\star)$ , si on a les égalités suivantes :

$$\begin{cases} a_{1,1}v_1 + a_{1,2}v_2 + \cdots + a_{1,n}v_n = b_1 \\ a_{2,1}v_1 + a_{2,2}v_2 + \cdots + a_{2,n}v_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}v_1 + a_{m,2}v_2 + \cdots + a_{m,n}v_n = b_m. \end{cases}$$

- (ii) **L'ensemble des solutions** du système  $(\star)$  est noté  $S(A, b)$  et est défini par  $S(A, b) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \text{ est une solution de } (\star)\}$ .
- (iii) Le système est appelé **résoluble** si  $S(A, b) \neq \emptyset$ , c'est-à-dire s'il y a des solutions.
- (iv) Le système est appelé **irrésoluble** si  $S(A, b) = \emptyset$ , c'est-à-dire s'il n'y a pas de solution.

### 3.3. Matrices, opérations sur les lignes

**Définition 3.3.1** Soient  $m$  et  $n$  deux entiers naturels.

- (i) Une **matrice** est un tableau de nombre réels. Lorsque le nombre de lignes est  $m$  et le nombre de colonnes est  $n$ , on dit que la matrice est de **taille**  $m \times n$ . On représente une telle matrice  $A$  de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

- (ii) L'ensemble des matrices de taille  $m \times n$  est noté  $M_{m,n}(\mathbb{R})$ .
- (iii) Une matrice dont tous les coefficients sont nuls est appelée **matrice nulle** et notée  $0$ .

On va maintenant définir des opérations sur les lignes d'une matrice qui seront les opérations autorisées dans l'algorithme de résolution des systèmes linéaires.

**Remarque 3.3.2** Pour résoudre un système, on travaille en général avec la matrice totale  $B = [A|b]$  du système qui contient la matrice  $A$  du système et le second membre  $b$ .

**Définition 3.3.3** Soit  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  une matrice de taille  $m \times n$ . On définit trois types d'opérations sur les lignes de cette matrice. On note  $L_1, \dots, L_n$  les lignes de cette matrice.

- (i) **Addition de  $a$ -fois une ligne** : soit  $a \in \mathbb{R}$ , on remplace la ligne  $i$  (donc la ligne  $L_i$ ) par elle-même plus  $a$ -fois la ligne  $j$ . Cette opération s'écrit souvent sous la forme  $L_i \rightarrow L_i + aL_j$ .

- (ii) **Multiplication de la ligne par  $b$**  : soit  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , on remplace la ligne  $i$  (donc la ligne  $L_i$ ) par  $b$ -fois elle-même. Cette opération s'écrit souvent sous la forme  $L_i \rightarrow bL_i$ .
- (iii) **Échange de lignes** : on peut changer l'ordre des lignes. Par exemple si on échange les lignes  $i$  et  $j$ , on notera  $L_i \leftrightarrow L_j$ .

**Exemple 3.3.4** Voici un exemple de telles opérations. On part de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on décrit une suite de telles opérations qui permet d'obtenir une matrice plus simple. Les opérations sont les suivantes :

- (i) échange des lignes 1 et 2 :  $L_1 \leftrightarrow L_2$ ,
- (ii) ligne 1 remplacée par  $\frac{1}{2}$  fois elle-même :  $L_1 \rightarrow \frac{1}{2}L_1$ ,
- (iii) ligne 3 remplacée par elle-même moins la ligne 1 :  $L_3 \rightarrow L_3 - L_1$ ,
- (iv) ligne 2 remplacée par  $\frac{1}{2}$  fois elle-même :  $L_2 \rightarrow \frac{1}{2}L_2$ ,
- (v) ligne 3 remplacée par elle-même plus la ligne 2 :  $L_3 \rightarrow L_3 + L_2$ ,
- (vi) ligne 1 remplacée par elle-même moins 2 fois la ligne 2 :  $L_1 \rightarrow L_1 - 2L_2$ .

On obtient ainsi la suite de matrices suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow (L_1 \leftrightarrow L_2) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (L_2 \rightarrow \frac{1}{2}L_2) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow (L_3 \rightarrow L_3 - L_1) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (L_2 \rightarrow \frac{1}{2}L_2) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow (L_3 \rightarrow L_3 + L_2) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (L_1 \rightarrow L_1 - 2L_2) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Remarque 3.3.5** Les opérations sur les lignes ci-dessus sont réversibles : il existe des opérations qui permettent de revenir en sens inverse.

- (i) L'opération inverse de  $L_i \rightarrow L_i + aL_j$  est l'opération  $L_i \rightarrow L_i - aL_j$ .
- (ii) L'opération inverse de  $L_i \rightarrow bL_i$  est l'opération  $L_i \rightarrow \frac{1}{b}L_i$  (il est ici très important de supposer  $b \neq 0$ ).
- (iii) L'opération inverse de  $L_i \leftrightarrow L_j$  est elle-même  $L_i \leftrightarrow L_j$ .

L'intérêt de faire des opérations sur les lignes réside dans le résultat suivant.

**Proposition 3.3.6** L'ensemble des solutions d'un système ne change pas lorsque l'on fait des opérations sur les lignes comme ci-dessus.

*Preuve.* Commençons par l'opération  $L_i \rightarrow L_i + aL_j$ . On passe d'un système avec les lignes  $L_1, \dots, L_n$  à un système avec les mêmes lignes sauf la ligne  $i$  qui devient  $L_i + aL_j$ . Il faut montrer que les deux systèmes ont les mêmes solutions, c'est-à-dire que leurs lignes sont des égalités en même temps. Si on a une solution du premier système alors toutes les lignes sont des égalités donc en particulier les lignes  $L_i$  et  $L_j$  et donc la ligne  $L_i + aL_j$  est aussi une égalité. Si on a une solution du second système alors toutes les lignes sauf peut-être  $L_i$  sont des égalités et la ligne  $L_i + aL_j$  est aussi une égalité. Mais comme  $L_j$  est une égalité, on a que  $L_i = (L_i + aL_j) - aL_j$  est aussi une égalité.

Pour l'opération  $L_i \rightarrow bL_i$  avec  $b \neq 0$ . On voit que  $L_i$  est une égalité si et seulement si  $bL_i$  en est une, donc les deux systèmes ont les mêmes solutions.

Finalement, pour l'opération d'échange des lignes, c'est encore plus facile : les lignes ne changent pas. ■

### 3.4. Algorithme de Gauß

Nous allons généraliser et décrire de manière systématique la méthode de résolution utilisée dans les exemples précédents. Pour ceci nous commençons par décrire la forme finale de la matrice : l'objectif de l'algorithme ou encore le moment où l'on s'arrête. Cette forme est la suivante :

| 1 |     |   | $j_1$ |   |     | $j_2$ |   |     | $j_3$ |   |   | $j_r$ |     |     | $n$ |   |     |     |     |   |       |   |   |
|---|-----|---|-------|---|-----|-------|---|-----|-------|---|---|-------|-----|-----|-----|---|-----|-----|-----|---|-------|---|---|
| 0 | ... | 0 | 1     | ★ | ... | ★     | 0 | ★   | ...   | ★ | 0 | ★     | ... | ★   | 0   | ★ | ... | ★   | 1   |   |       |   |   |
|   |     |   |       |   |     | 1     | ★ | ... | ★     | 0 | ★ | ...   | ★   | ... | 0   | ⋮ | ⋮   | 2   |     |   |       |   |   |
|   |     |   |       |   |     |       |   |     |       |   |   | 1     | ★   | ... | ★   | 0 | ★   | ... | ★   | 0 | ⋮     | ⋮ | 3 |
|   |     |   |       |   |     |       |   |     |       |   |   | 0     |     |     |     |   |     |     |     |   | 0     | ⋮ | ⋮ |
|   |     |   | ⋮     | ⋮ | ⋮   | ⋮     | ⋮ | ⋮   | ⋮     | ⋮ | ⋮ |       |     |     |     |   |     | ⋮   | ⋮   | ⋮ | ⋮     |   |   |
|   |     |   | 0     | ⋮ | ⋮   | 0     | ⋮ | ⋮   | 0     | ⋮ | ⋮ |       |     |     |     |   |     | 0   | ⋮   | ⋮ | ⋮     |   |   |
|   |     |   | 1     | ★ | ... | ★     | 1 | ★   | ...   | ★ | 1 |       |     |     |     |   |     | ★   | ... | ★ | $r$   |   |   |
| 0 |     |   |       |   |     |       |   |     |       |   |   |       |     |     |     |   |     |     |     |   | $r+1$ |   |   |
|   |     |   |       |   |     |       |   |     |       |   |   |       |     |     |     |   |     | ⋮   |     |   |       |   |   |
|   |     |   |       |   |     |       |   |     |       |   |   |       |     |     |     |   |     | $m$ |     |   |       |   |   |

où les étoiles désignent des réels quelconques. Ici les pivots sont les suivants :  $\text{Pivot}(B) = \{j_1, \dots, j_r\}$  (cf. ci-dessous).

Voici sa définition formelle.

**Définition 3.4.1** Soient  $m$  et  $n$  deux entiers naturels.

- (i) Une matrice  $B = (b_{i,j}) \in M_{m,n}(K)$  est sous **forme échelonnée réduite** si  $B = 0$  ou s'il existe un entier  $1 \leq r \leq \min(m, n)$  et des indices  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n$  (indices de colonnes), tels que l'on ait
  - a) pour  $1 \leq k \leq r$ , on a  $b_{k,j} = 0$  si  $j < j_k$  (les premières  $j_k - 1$  entrées de la  $k$ -ième ligne sont nulles).
  - b) Pour  $1 \leq k \leq r$ , on a  $b_{i,j_k} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$  (le  $k$ -ième coefficient de la colonne  $j_k$  vaut 1 tous les autres sont nuls).
  - c) Pour  $r + 1 \leq k \leq m$ , on a  $b_{k,j} = 0$  pour tout  $1 \leq j \leq n$  (les lignes de  $r + 1$  à  $m$  sont nulles).
- (ii) Les indices  $j_1, \dots, j_r$  sont les **pivots** de la matrice  $B$ . L'ensemble des pivots est noté  $\text{Pivot}(B) = \{j_1, \dots, j_r\}$ . Lorsque  $B = 0$ , on pose  $\text{Pivot}(B) = \emptyset$ .
- (iii) L'entier  $r$  est appelé **rang** de la matrice  $B$ .

**Exemple 3.4.2** La matrice suivante

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & b_{1,3} & b_{1,4} & 0 & b_{1,6} & 0 & 0 & b_{1,9} & b_{1,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_{2,6} & 0 & 0 & b_{2,9} & b_{2,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b_{3,9} & b_{3,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_{4,9} & b_{4,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est sous forme échelonnée réduite. Son rang vaut 4 :  $r = 4$  et ses pivots sont  $\text{Pivot}(B) = \{2, 5, 7, 8\}$ .

L'algorithme de Gauß ramène toute matrice à une matrice échelonnée réduite.

**Proposition 3.4.3 (Algorithme de Gauß)** Soit  $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(K)$  une matrice de taille  $m \times n$ . Alors il existe des opérations sur les lignes de cette matrice qui permettent de la transformer en une matrice  $B$  échelonnée réduite.

**Définition 3.4.4** Une telle matrice  $B$  obtenue à partir d'une matrice  $A$  par l'algorithme de Gauß est appelée **forme échelonnée réduite de  $A$** .

*Preuve.* Si  $A = 0$ , on a terminé. On a  $r = 0$  et  $\text{Pivot}(A) = \emptyset$ .

Supposons que  $A$  est non nulle :  $A \neq 0$ . On va fabriquer une suite de matrices  $A^{(0)}, A^{(1)}, \dots$  qui fournira en fin d'algorithme la matrice échelonnée réduite recherchée. On pose  $A^{(0)} = (a_{i,j}^{(0)}) = A$ . On trouve le premier pivot  $j_1 \in [1, n]$  de la manière suivante :

$$j_1 = \min\{s \in [1, n] \mid \text{il existe un } p \in [1, m] \text{ tel que } a_{p,s}^{(0)} \neq 0\}.$$

En français dans le texte : *on cherche l'indice  $j_1$  de la première colonne non nulle.*

On définit maintenant un entier  $p \in [1, m]$  de la manière suivante :

$$p = \min\{l \in [1, m] \mid a_{l,j_1}^{(0)} \neq 0\}.$$

En français dans le texte : *on cherche le premier terme non nul de la colonne  $j_1$ , on appelle  $p$  son indice.*

On effectue maintenant les opérations suivantes sur la matrice  $A^{(0)}$  :

- on échange les lignes 1 et  $p$  :  $L_1 \leftrightarrow L_p$ ,
- on divise la ligne 1 par  $a_{p,j_1}$  (qui est non nul par construction).

On obtient alors une matrice  $C^{(0)} = (c_{i,j})_{i \in [1,m], j \in [1,n]} \in$  dont la première ligne est de la forme

$$\text{Première ligne de } C^{(0)} : (\underbrace{0 \cdots 0}_{j_1 - 1 \text{ termes}}, 1, \star, \cdots, \star)$$

où les étoiles représentent des réels quelconques. Sur  $C^{(0)}$ , on effectue les opérations suivantes :

- on fait  $L_2 \rightarrow L_2 - c_{2,j_1} L_1$ ,
- on fait  $L_3 \rightarrow L_3 - c_{3,j_1} L_1$ ,
- ...
- on fait  $L_i \rightarrow L_i - c_{i,j_1} L_1$ ,
- ...
- on fait  $L_m \rightarrow L_m - c_{m,j_1} L_1$ .

On appelle  $A^{(1)}$  la matrice obtenue. On remarque que les  $j_1 - 1$  premières colonnes de  $A^{(1)}$  sont nulles et que sa  $j_1$ -ième colonne est de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

On continue par récurrence. On suppose que l'on a obtenu des matrices  $A^{(1)}, \dots, A^{(k-1)} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  et des entiers  $j_1 < \dots < j_{k-1}$  qui sont telles que  $A^{(i)}$  est sous-forme échelonnée réduite jusqu'à sa colonne  $j_i$ . On construit alors  $A^{(k)}$  pour  $k \geq 2$  de la manière suivante. On pose

$$j_k = \min\{s \in [j_{k-1} + 1, n] \mid \text{il existe } p \in [k, m] \text{ tel que } a_{p,s}^{(k-1)} \neq 0\}.$$

En français dans le texte : *on cherche, dans les  $m - k + 1$  dernières lignes, la première colonne d'indice plus grand que  $j_{k-1}$  qui n'est pas nulle. On note  $j_k$  son indice.*

Si un tel indice  $j_k$  n'existe pas, alors toutes les lignes après la ligne  $k - 1$  sont nulles et on a terminé. L'algorithme s'arrête.

Supposons que  $j_k$  existe. On définit alors  $p \in [k, m]$  par

$$p = \min\{l \in [k, m] \mid a_{l,j_k}^{(k-1)} \neq 0\}.$$

En français dans le texte : *on cherche, dans les  $m - k + 1$  dernières lignes et dans la colonne  $j_k$  (qui n'est pas nulle), le premier coefficient non nul. On appelle  $p$  son indice de ligne.*

On effectue maintenant les opérations suivantes sur la matrice  $A^{(k-1)} = (a_{i,j}^k)_{i \in [1,m], j \in [1,n]}$  :

- on échange les lignes  $k$  et  $p$  :  $L_k \leftrightarrow L_p$ ,
- on divise la ligne  $k$  par  $a_{p,j_k}^{(k)}$  (qui est non nul par construction).

On obtient alors une matrice  $C^{(k)} = (c_{i,j}^{(k)})_{i \in [1,m], j \in [1,n]} \in$  dont la  $k$ -ième ligne est de la forme

$$k\text{-ième ligne de } C^{(0)} : (\underbrace{0 \cdots 0}_{j_k - 1 \text{ termes}}, 1, \star, \cdots, \star)$$

où les étoiles représentent des réels quelconques. Sur  $C^{(k)}$ , on effectue les opérations suivantes :

- on fait  $L_1 \rightarrow L_1 - c_{1,j_k} L_k$ ,
- ...
- on fait  $L_{k-1} \rightarrow L_{k-1} - c_{k-1,j_k} L_k$ ,
- on fait  $L_{k+1} \rightarrow L_{k+1} - c_{k+1,j_k} L_k$ ,
- ...
- on fait  $L_m \rightarrow L_m - c_{m,j_k} L_k$ .

On appelle  $A^{(k)}$  la matrice obtenue. On remarque que les  $j_k$  premières colonnes de  $A^{(k)}$  sont sous forme échelonnée réduite.

On continue et on voit qu'au bout d'au plus  $k = \min(m, n)$  étapes, l'algorithme doit se terminer car on a traité toutes les colonnes. ■

**Exemple 3.4.5** On reprend l'exemple 3.3.4,

$$\begin{aligned} A^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} &\mapsto C^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \\ &\mapsto C^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Corollaire 3.4.6** Pour résoudre un système  $AX = b$ , c'est-à-dire trouver l'ensemble de ses solutions, il suffit de résoudre le système associé à une forme échelonnée réduite de la matrice  $B = [A|b]$ .

**Exemple 3.4.7** Considérons le système

$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ x + 2y + 4z = 5 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

Sa matrice  $A$  et son second membre  $b$  sont

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alors que sa matrice totale  $B$  est

$$B = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

On applique l'algorithme de Gauss à  $B$ , on obtient la suite de matrices suivantes où l'on a effectué dans l'ordre les opérations :  $L_2 \rightarrow L_2 - L_1$  puis  $L_2 \mapsto \frac{1}{2}L_2$  puis  $L_3 \rightarrow L_3 - L_2$  puis  $L_2 \mapsto \frac{1}{2}L_2$  puis  $L_3 \rightarrow L_3 - L_2$  puis  $L_2 \rightarrow L_2 - L_3$  et  $L_1 - 2L_3$  :

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) &\mapsto \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \mapsto \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \mapsto \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ &\mapsto \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \mapsto \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

On voit que la seule solution du système est  $(x, y, z) = (3, 1, 0)$ . On obtient

$$S(A, b) = \{(3, 1, 0)\}.$$

Le système n'a qu'une solution.

**Exemple 3.4.8** Considérons le système

$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ x + 2y + 4z = 5 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

Sa matrice  $A$  et son second membre  $b$  sont

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

alors que sa matrice totale  $B$  est

$$B = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

On applique l'algorithme de Gauß à  $B$ , on obtient la suite de matrices suivantes où l'on a effectué dans l'ordre les opérations :  $L_2 \rightarrow L_2 - L_1$  puis  $L_2 \rightarrow \frac{1}{2}L_2$  puis  $L_3 \rightarrow L_3 - L_2$  puis  $L_2 \mapsto \frac{1}{2}L_2$  puis  $L_3 \rightarrow L_3 - L_2$  puis  $L_1 \rightarrow L_1 - 2L_2$  puis  $L_2 \rightarrow L_2 - L_3$  et enfin  $L_1 \rightarrow L_1 - 3L_3$  :

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) &\mapsto \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \mapsto \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \mapsto \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\mapsto \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mapsto \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

On voit que  $(x, y, z)$  n'est jamais solution, en effet la dernière équation s'écrit  $0 = 1$  ce qui est impossible. L'ensemble des solutions est donc

$$S(A, b) = \emptyset.$$

On voit qu'il y a pas de solution, le système est irrésoluble.

**Exemple 3.4.9** Considérons le système

$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ x + 2y + 4z = 5 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Sa matrice  $A$  et son second membre  $b$  sont

$$A = \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \text{ et } b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alors que sa matrice totale  $B$  est

$$B = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

On applique l'algorithme de Gauß à  $B$ , on obtient la suite de matrices suivantes où l'on a effectué dans l'ordre les opérations :  $L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1$  puis  $L_2 \mapsto \frac{1}{2}L_2$  puis  $L_3 \rightarrow L_3 - L_2$  puis  $L_2 \mapsto \frac{1}{2}L_2$  puis  $L_3 \rightarrow L_3 - L_2$  et enfin  $L_1 \rightarrow L_1 - 2L_2$  :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \mapsto \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \mapsto \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \mapsto \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

On voit que  $(x, y, z)$  est solution du système si et seulement si on a  $y + z = 1$  et  $x + 2z = 3$  ou encore si et seulement si  $x = 3 - 2z$  et  $y = 1 - z$ . L'ensemble des solutions est donc

$$S(A, b) = \{(3 - 2z, 1 - z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

On voit qu'il y a une infinité de solutions.

Les exemples précédents montrent que l'on peut décrire les solutions du système à partir d'une forme réduite de sa matrice totale. Nous allons étudier ce lien plus en détail au prochain paragraphe.

### 3.5. Système homogène et inhomogène

**Définition 3.5.1** Considérons le système linéaire

$$(\star) \quad \begin{cases} a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + \cdots + a_{1,n}X_n = b_1 \\ a_{2,1}X_1 + a_{2,2}X_2 + \cdots + a_{2,n}X_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}X_1 + a_{m,2}X_2 + \cdots + a_{m,n}X_n = b_m \end{cases}$$

et soient  $A$  sa matrice,  $b$  son second membre et  $B = [A|b]$  sa matrice totale. La matrice  $A$  est de taille  $m \times n$  et  $B$  est de taille  $m \times (n + 1)$ . Le système s'écrit  $AX = b$ .

**Le système homogène associé** au système  $(\star)$  est le système

$$(\star\star) \quad \begin{cases} a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + \cdots + a_{1,n}X_n = 0 \\ a_{2,1}X_1 + a_{2,2}X_2 + \cdots + a_{2,n}X_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}X_1 + a_{m,2}X_2 + \cdots + a_{m,n}X_n = 0 \end{cases}$$

où on remplace  $b$  par la matrice colonne nulle. La matrice du système  $(\star\star)$  est toujours  $A$  mais son second membre est nul 0 et la matrice totale est  $[A|0]$ . Le système s'écrit  $AX = 0$ .

Il y a un lien fort entre solutions du système  $(\star)$  et du système homogène  $(\star\star)$  associé.

**Proposition 3.5.2** Soit

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

une solution du système  $(\star)$ . Alors toute solution  $v'$  du système  $(\star)$  est de la forme

$$v' = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

où

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

est une solution du système homogène  $(\star\star)$ .

**Définition 3.5.3** Soient  $v \in \mathbb{R}^n$  et  $w \in \mathbb{R}^n$  deux  $n$ -uplets de réels aussi appelés **vecteurs** de  $\mathbb{R}^n$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ et } w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

**La somme** des vecteurs  $v$  et  $w$  est le vecteur  $v' = v + w$  obtenu de la manière suivante :

$$v' = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

La proposition précédente peut donc se réécrire sous la forme plus compacte suivante.

**Proposition 3.5.4** Soit  $v \in \mathbb{R}^n$  une solution du système  $(\star)$ . Alors toute solution  $v'$  du système  $(\star)$  est de la forme  $v' = v + w$  où  $w$  est une solution du système homogène  $(\star\star)$ .

*Preuve.* Il faut montrer deux choses :

- (i) si  $w$  est une solution de  $(\star\star)$ , alors  $v + w$  est une solution de  $(\star)$  et
- (ii) si  $v'$  est une solution de  $(\star)$ , alors il existe  $w$  solution de  $(\star\star)$  telle que  $v' = v + w$ .

Soit  $w$  une solution de  $(\star\star)$  et  $v' = v + w$ . On a alors  $v'_i = v_i + w_i$  pour tout  $i \in [1, n]$ . On sait que les équations suivantes sont satisfaites (car  $v$  est solution de  $(\star)$  et  $w$  solution de  $(\star\star)$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}v_1 + a_{1,2}v_2 + \cdots + a_{1,n}v_n = b_1 \\ a_{2,1}v_1 + a_{2,2}v_2 + \cdots + a_{2,n}v_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}v_1 + a_{m,2}v_2 + \cdots + a_{m,n}v_n = b_m \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}w_1 + a_{1,2}w_2 + \cdots + a_{1,n}w_n = 0 \\ a_{2,1}w_1 + a_{2,2}w_2 + \cdots + a_{2,n}w_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}w_1 + a_{m,2}w_2 + \cdots + a_{m,n}w_n = 0 \end{array} \right.$$

En faisant la somme de chaque lignes, on obtient

$$\begin{cases} a_{1,1}(v_1 + w_1) + a_{1,2}(v_2 + w_2) + \cdots + a_{1,n}(v_n + w_n) = b_1 \\ a_{2,1}(v_1 + w_1) + a_{2,2}(v_2 + w_2) + \cdots + a_{2,n}(v_n + w_n) = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}(v_1 + w_1) + a_{m,2}(v_2 + w_2) + \cdots + a_{m,n}(v_n + w_n) = b_m \end{cases}$$

ce qui montre que  $v' = v + w$  est bien solution de  $(\star)$ .

Supposons maintenant que  $v'$  est solution de  $(\star)$  et définissons  $w$  par  $w = v' - v$  c'est-à-dire

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_1 - v_1 \\ \vdots \\ v'_n - v_n \end{pmatrix}.$$

On sait que les équations suivantes sont satisfaites (car  $v'$  et  $v$  sont solutions de  $(\star)$ ) :

$$\begin{cases} a_{1,1}v'_1 + a_{1,2}v'_2 + \cdots + a_{1,n}v'_n = b_1 \\ a_{2,1}v'_1 + a_{2,2}v'_2 + \cdots + a_{2,n}v'_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}v'_1 + a_{m,2}v'_2 + \cdots + a_{m,n}v'_n = b_m \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{1,1}v_1 + a_{1,2}v_2 + \cdots + a_{1,n}v_n = b_1 \\ a_{2,1}v_1 + a_{2,2}v_2 + \cdots + a_{2,n}v_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}v_1 + a_{m,2}v_2 + \cdots + a_{m,n}v_n = b_m \end{cases}$$

En faisant la différence de chaque lignes, on obtient

$$\begin{cases} a_{1,1}(v'_1 - v_1) + a_{1,2}(v'_2 - v_2) + \cdots + a_{1,n}(v'_n - v_n) = b_1 - b_1 = 0 \\ a_{2,1}(v'_1 - v_1) + a_{2,2}(v'_2 - v_2) + \cdots + a_{2,n}(v'_n - v_n) = b_2 - b_2 = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}(v'_1 - v_1) + a_{m,2}(v'_2 - v_2) + \cdots + a_{m,n}(v'_n - v_n) = b_m - b_m = 0 \end{cases}$$

ce qui montre que  $w = v' - v$  est solution de  $(\star\star)$ . On vérifie aisément que  $v' = v + w$  donc  $v'$  vérifie la condition voulue. ■

**Remarque 3.5.5** Soit  $v \in S(A, b)$  une solution du système  $(\star)$ , on peut résumer la proposition précédente par une égalité entre ensembles de solutions :

$$S(A, b) = v + S(A, 0).$$

où la notation du terme de droite signifie

$$v + S(A, 0) = \{v + w \mid w \in S(A, 0)\}.$$

Les solutions du système homogène jouent donc un rôle très important, ce qui explique la définition suivante, qui reviendra très souvent en mathématique...

**Définition 3.5.6** Soit  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  une matrice. L'ensemble  $S(A, 0)$  des solutions du système homogène  $AX = 0$  est appelé **noyau** de la matrice  $A$  et noté  $\text{Ker}(A)$ . En symboles :  $\text{Ker}(A) = S(A, 0)$ .

[illegible]

Soit

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

une solution de  $(\star\star)$ . Les coordonnées  $v_{j_1}, \dots, v_{j_r}$  de  $v$  sont **liées** alors que les autres coordonnées  $v_i$  avec  $i \notin \{j_1, \dots, j_r\}$  sont **libres**. Ceci signifie que les coordonnées libres peuvent prendre n'importe quelle valeur alors que les coordonnées  $v_{j_1}, \dots, v_{j_r}$  sont déterminées par les formules

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{j_1} = - \sum_{i=j_1+1, i \notin \{j_2, \dots, j_r\}}^n m_{1,i} v_i \\ \vdots \\ v_{j_k} = - \sum_{i=j_k+1, i \notin \{j_{k+1}, \dots, j_r\}}^n m_{k,i} v_i \\ \vdots \\ v_{j_r} = - \sum_{i=j_r+1}^n m_{r,i} v_i. \end{array} \right.$$

L'entier  $r$  est appelé **rang du système**. La **dimension** de l'ensemble des solutions est le nombre de paramètres libres et vaut  $n - r$ .

*Preuve.* Il suffit de résoudre les équations du système échelonné réduit. Sur chaque ligne  $k$  de 1 à  $r$ , on garde la variable  $v_{j_k}$  à gauche et on fait passer à droite les autres variables. On obtient les formules ci-dessus. ■

**Définition 3.5.10** Soit  $(\star\star)$  un système homogène de matrice totale  $B = [A|0]$  et soit  $M$  une forme échelonnée réduite de  $B$ . Soit  $\text{Pivot}(M) = \{j_1, \dots, j_r\}$  l'ensemble des pivots de  $M$ .

- (i) Les variables  $X_{j_1}, \dots, X_{j_r}$  du système sont dites **liées** alors que les autres variables  $X_i$  avec  $i \notin \{j_1, \dots, j_r\}$  sont dites **libres**.
- (ii) Le **rang** du système est  $r$  et la **dimension** de l'ensemble des solutions est le nombre de variables libres et vaut  $n - r$ .

**Remarque 3.5.11** D'après la proposition précédente, pour obtenir une solution du système, il suffit de choisir des valeurs pour les variables libres, grâce à la forme échelonnée réduite, on en déduit les valeurs des variables liées.

**Exemple 3.5.12** Considérons le système homogène suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lll} x & +2z & = 0 \\ x & +2y & +4z = 0 \\ & y & +z = 0 \end{array} \right.$$

On peut remarquer que c'est le système homogène associé aux exemples 3.4.8 et 3.4.9. Sa matrice  $A$  est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Son second membre est nul et sa matrice totale  $B$  est

$$B = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

On applique l'algorithme de Gauß à  $B$ , on obtient la suite de matrices suivantes où l'on a effectué dans l'ordre les opérations :  $L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1$  puis  $L_2 \mapsto \frac{1}{2}L_2$  puis  $L_3 \rightarrow L_3 - L_2$  puis  $L_2 \mapsto \frac{1}{2}L_2$  puis  $L_3 \rightarrow L_3 - L_2$  et enfin  $L_1 \rightarrow L_1 - 2L_2$  :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \mapsto \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \mapsto \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \mapsto \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Le résultat précédent nous dit que le rang  $r$  est  $r = 2$ , les pivots sont  $\{j_1, j_2\} = \{1, 2\}$ . La dimension de l'ensemble des solutions est  $n - r = 3 - 2 = 1$ . Les solutions doivent donc dépendre d'une variable libre, la troisième variable (la seule qui n'est pas liée, c'est-à-dire dont l'indice n'est pas dans l'ensemble des pivots).

On retrouve ces données dans l'ensemble des solutions : un vecteur  $(x, y, z)$  est solution du système si et seulement si on a  $y + z = 0$  et  $x + 2z = 0$  ou encore si et seulement si  $x = -2z$  et  $y = -z$ . L'ensemble des solutions est donc

$$\text{Ker}(A) = S(A, 0) = \{(-2z, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

On voit qu'il y a une infinité de solutions dépendant d'un paramètre :  $z$ .

On obtient finalement les solutions d'un système quelconque.

**Proposition 3.5.13** Considérons un système linéaire

$$(\star) \begin{cases} a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + \cdots + a_{1,n}X_n = b_1 \\ a_{2,1}X_1 + a_{2,2}X_2 + \cdots + a_{2,n}X_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}X_1 + a_{m,2}X_2 + \cdots + a_{m,n}X_n = b_m \end{cases}$$

et soient  $A$  sa matrice,  $b$  son second membre et  $B = [A|b]$  sa matrice totale. La matrice  $A$  est de taille  $m \times n$  et  $B$  est de taille  $m \times (n + 1)$ .

Soit  $M$  une forme réduite de  $B$  et soient  $\text{Pivot}(M) = \{j_1, \dots, j_r\}$  ses pivots.

- (i) Le système  $(\star)$  a une solution si et seulement si le dernier pivot  $j_r$  n'est pas égal à  $n + 1 : j_r < n + 1$ .

(ii) Si  $j_r < n + 1$ , soit

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

une solution de  $(\star)$ . Les coordonnées  $v_{j_1}, \dots, v_{j_r}$  de  $v$  sont **liées** alors que les autres coordonnées  $v_i$  avec  $i \notin \{j_1, \dots, j_r\}$  sont **libres**. Ceci signifie que les coordonnées libres peuvent prendre n'importe quelle valeur alors que les coordonnées  $v_{j_1}, \dots, v_{j_r}$  sont déterminées par les formules

$$\begin{cases} v_{j_1} = m_{1,n+1} - \sum_{i=j_1+1, i \notin \{j_2, \dots, j_r\}}^n m_{1,i} v_i \\ \vdots \\ v_{j_k} = m_{k,n+1} - \sum_{i=j_k+1, i \notin \{j_{k+1}, \dots, j_r\}}^n m_{k,i} v_i \\ \vdots \\ v_{j_r} = m_{r,n+1} - \sum_{i=j_r+1}^n m_{r,i} v_i. \end{cases}$$

Le **rang** du système est  $r$  et la **dimension** de l'ensemble des solutions est le nombre de paramètre libres et vaut  $n - r$ .

*Preuve.* Si  $j_r = n + 1$ , alors la dernière équation s'écrit  $0 = 1$  ce qui est impossible. Il n'y a pas de solution. Sinon, il suffit de résoudre les équations du système échelonné réduit. Sur chaque ligne  $k$  de 1 à  $r$ , on garde la variable  $v_{j_k}$  à gauche et on fait passer à droite les autres variables. On obtient les formules ci-dessus. ■

**Remarque 3.5.14** On retrouve le fait, voir proposition 3.5.2, que toute solution du système  $(\star)$  s'écrit comme somme d'une solution particulière plus une solution du système homogène  $(\star\star)$ . Dans l'énoncé précédent, il y a une solution particulière facile à décrire, la solution

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

avec  $v_i = 0$  pour tout  $i \notin \{j_1, \dots, j_r\}$  et  $v_{j_1} = m_{1,n+1}, \dots, v_{j_r} = m_{r,n+1}$ .

**Exemple 3.5.15** On peut reprendre les exemples 3.4.8 et 3.4.9 et on voit que dans le premier cas, le pivot est sur la dernière colonne : il n'y a pas de solution alors que dans le second, ce n'est pas le cas et on obtient un ensemble de solutions dépendant d'un paramètre.

## 4. Espaces vectoriels

### 4.1. Définitions et premiers exemples

**Définition 4.1.1** Un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel aussi appelé **espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$**  est la donnée d'un ensemble  $V$  (l'ensemble des **vecteurs**) et de deux applications  $+: V \times V \rightarrow V$  (**l'addition** des vecteurs) et  $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$  (**la multiplication scalaire**) satisfaisant les propriétés suivantes :

- (i) il existe un vecteur  $0_V$  (souvent noté simplement  $0$ ), appelé **vecteur nul**, qui vérifie  $v + 0_V = 0_V + v = v$  pour tout  $v \in V$ ,
- (ii) pour tout vecteur  $v$ , il existe un vecteur, noté  $-v$ , appelé **opposé** de  $v$  tel que  $v + (-v) = (-v) + v = 0_V$ ,
- (iii) pour tous vecteurs  $u, v \in V$ , on a  $u + v = v + u$ ,
- (iv) pour tous vecteurs  $u, v, w \in V$ , on a  $(u + v) + w = u + (v + w)$ ,
- (v) pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$  et tout  $v \in V$ , on a  $(xy) \cdot v = x \cdot (y \cdot v)$ ,
- (vi) pour tout  $v \in V$ , on a  $1 \cdot v = v$ ,
- (vii) pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tous  $u, v \in V$ , on a  $x \cdot (u + v) = x \cdot u + x \cdot v$ .
- (viii) pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$  et tout  $v \in V$ , on a  $(x + y) \cdot v = x \cdot v + y \cdot v$ .

Les éléments de  $V$  sont appelés **vecteurs** et les éléments de  $\mathbb{R}$  sont appelés **scalaires**. L'élément  $0_V \in V$  est le **vecteur nul**.

**Remarque 4.1.2 (Règles de calcul I)** Soit  $V$  un espace vectoriel, les axiomes ci-dessus imposent des règles de calcul naturelles.

- (i) Le vecteur nul  $0_V$  est unique. En effet, si  $0'_V$  est un autre vecteur tel que  $0'_V + v = v + 0'_V = v$  pour tout  $v \in V$ , alors on a  $0'_V = 0'_V + 0_V = 0_V$ .
- (ii) Soit  $v \in V$ , on a  $0 \cdot v = 0_V$ . En effet, posons  $w = 0 \cdot v$ , on a  $w = 0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v = w + w$ . En ajoutant  $(-w)$ , on obtient

$$0_V = (-w) + w = (-w) + (w + w) = (-w + w) + w = w.$$

- (iii) Soit  $v \in V$ , l'opposé  $(-v)$  de  $v$  est unique. En effet, si  $w$  est un autre vecteur tel que  $v + w = w + v = 0$ , alors on a

$$w = w + 0 = w + (v + (-v)) = (w + v) + (-v) = 0 + (-v) = (-v).$$

(iv) On a  $(-1) \cdot v = (-v)$  est l'opposé de  $v$ . En effet, on a

$$(-1) \cdot v + v = ((-1) + 1) \cdot v = 0 \cdot v = 0$$

et comme l'opposé est unique, on doit avoir que  $(-1) \cdot v$  est l'opposé de  $v$ .

**Remarque 4.1.3 (Règles de calcul II)** Soit  $v \in V$  et  $x \in \mathbb{R}$  tels que  $x \cdot v = 0_V$ .

- (i) Si  $x \neq 0$ , alors  $v = 0_V$ . En effet, si on multiplie par  $\frac{1}{x}$ , on obtient  $v = (\frac{1}{x} \times x) \cdot v = \frac{1}{x}(x \cdot v) = \frac{1}{x} \cdot 0_V = 0_V$ .
- (ii) Si  $v \neq 0$ , alors on a  $x = 0$ . En effet, si  $x \neq 0$ , alors on peut multiplier par  $\frac{1}{x}$  et on obtient  $v = (\frac{1}{x} \times x) \cdot v = \frac{1}{x}(x \cdot v) = \frac{1}{x} \cdot 0_V = 0_V$  ce qui n'est pas le cas.
- (iii) Finalement, si  $x \cdot v = 0_V$ , alors  $x = 0$  ou  $v = 0_V$ .

**Notation 4.1.4** Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, on pose

- (i)  $u - v = u + (-1) \cdot v$  pour tous  $u, v \in V$ ,
- (ii)  $xv = x \cdot v$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $v \in V$ .

**Exemple 4.1.5** Voici quelques-uns des espaces vectoriels les plus classiques.

- (i) **Un espace vectoriel nul** est un espace vectoriel qui ne contient que le vecteur nul :  $V = \{0_V\}$  sur  $\mathbb{R}$  (il existe une seule possibilité pour définir les applications  $+$  et  $\cdot$  pour cet espace). On le note en général simplement  $V = 0$ .
- (ii) L'espace vectoriel  $V = \mathbb{R}$  : l'addition et la multiplication scalaire sont simplement données par l'addition et la multiplication des réels.
- (iii) Soit  $V = \mathbb{R}^n$  le produit cartésien de  $\mathbb{R}$  avec lui-même  $n$  fois. Les éléments de  $\mathbb{R}^n$  sont écrits comme des vecteurs colonnes :  $v \in \mathbb{R}^n$  est de la forme

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

avec  $v_i \in \mathbb{R}$ . On définit l'addition  $+: V \times V \rightarrow V$  comme au chapitre précédent par :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$$

et la multiplication scalaire  $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$  par

$$x \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xv_1 \\ \vdots \\ xv_n \end{pmatrix}$$

Il est alors facile de vérifier que  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot) = (V, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (voir feuille d'exercices).

- (iv) Soit  $I$  un ensemble, alors l'ensemble  $\mathbb{R}^I = \{\text{applications } f : I \rightarrow \mathbb{R}\}$  est un espace vectoriel avec l'addition et la multiplication scalaire définies comme suit : pour  $f, g \in V$  et  $x \in \mathbb{R}$ , alors les applications  $f + g$  et  $x \cdot f$  sont les applications suivantes :

$$(f + g)(i) = f(i) + g(i) \text{ et } (x \cdot f)(i) = xf(i)$$

pour tout  $i \in I$ .

- (v) L'ensemble  $V = \mathbb{C}$  des nombres complexes est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel pour l'addition et la multiplication scalaire habituelle (cf. feuille d'exercices).

**Lemme 4.1.6** Soient  $V$  et  $W$  deux  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels, alors le produit cartésien  $V \times W$  est aussi un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel pour l'addition et la multiplication scalaire suivantes :

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \text{ et } x \cdot (v, w) = (x \cdot v, x \cdot w).$$

*Preuve.* Exercice! ■

**Définition 4.1.7** Soient  $V$  et  $W$  deux  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels. Le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $V \times W$  avec addition et multiplication scalaire définies dans le lemme précédent est appelé **somme directe externe** de  $V$  et  $W$ .

## 4.2. Sous-espaces vectoriels

**Définition 4.2.1** Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, un **sous-espace vectoriel**  $W$  de  $V$  est un sous-ensemble  $W \subset V$  de  $V$  vérifiant les conditions suivantes :

- (i)  $0_V \in W$
- (ii) pour tous  $v, w \in W$ , on a  $v + w \in W$
- (iii) pour tout  $v \in W$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $x \cdot v \in W$ .

**Remarque 4.2.2** Un sous-espace vectoriel est donc un sous-ensemble qui contient le vecteur nul et pour lequel les opérations  $+$  :  $W \times W \rightarrow W$  et  $\cdot$  :  $\mathbb{R} \times W \rightarrow W$  sont encore définies.

**Lemme 4.2.3** Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et soit  $W \subset V$  un sous-espace vectoriel de  $V$ . Alors les applications  $+$  et  $\cdot$  font de  $W$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. □

*Preuve.* Exercice. ■

**Exemple 4.2.4** Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

- (i) Le sous-ensemble  $W = \{0_V\} \subset V$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ . Pour simplifier les notations, on note souvent  $\{0_V\}$  par  $0_V$  ou même simplement  $0$ .

- (ii) Soit  $v \in V$ , alors le sous-ensemble  $W = \langle v \rangle = \{xv \in V \mid x \in \mathbb{R}\}$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  (exercice). Pour  $v = 0_V$ , on a  $\langle v \rangle = 0_V$ . Pour  $v \neq 0_V$  le sous-espace  $\langle v \rangle$  est appelé **droite** de  $V$ .
- (iii) Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle, alors le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^I$  (l'ensemble des applications de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ ) formé des applications continues, noté  $C^0(I, \mathbb{R})$ , en symboles

$$C^0(I) = \{f \in \mathbb{R}^I \mid f \text{ est continue sur } I\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^I$ .

**Lemme 4.2.5** Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et soient  $W_1$  et  $W_2$  deux sous-espaces vectoriels de  $V$ . Alors l'intersection  $W_1 \cap W_2$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ .  $\square$

*Preuve.* Exercice. ■

**Définition 4.2.6** Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et soient  $W_1$  et  $W_2$  deux sous-espaces vectoriels. La **somme** de  $W_1$  et de  $W_2$  est le sous-ensemble, noté  $W_1 + W_2$ , suivant :

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \in V \mid w_1 \in W_1 \text{ et } w_2 \in W_2\}.$$

**Lemme 4.2.7** Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et soient  $W_1$  et  $W_2$  deux sous-espaces vectoriels de  $V$ . Alors la somme  $W_1 + W_2$  est aussi un sous-espace vectoriel de  $V$ .  $\square$

*Preuve.* Exercice. ■

## 5. Combinaisons linéaires, familles libres et familles génératrices

### 5.1. Combinaison linéaire et familles génératrices

**Définition 5.1.1** Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et soient  $v_1, \dots, v_m \in V$  des vecteurs. Un vecteur  $v \in V$  est dit **combinaison linéaire** de  $v_1, \dots, v_m$  s'il existe des scalaires  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$  tels que l'on ait

$$v = \sum_{i=1}^m x_i v_i = x_1 v_1 + \dots + x_m v_m.$$

**Exemple 5.1.2** Soit  $V$  un espace vectoriel

- (i) Le vecteur nul  $0_V$  est toujours combinaison linéaire de n'importe quelle famille de vecteurs  $v_1, \dots, v_m \in V$ . En effet, il suffit de prendre les scalaires  $x_1 = \dots = x_m = 0$  et on a bien  $0_V = \sum_i 0 \cdot v_i = \sum_i x_i v_i$ .
- (ii) Soient  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$  les vecteurs suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et soit

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors  $v = 2 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = 3 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3$ . Donc  $v$  est combinaison linéaire des vecteurs  $v_1, v_2, v_3$ . Cet exemple montre que les scalaires ne sont pas nécessairement uniques.

- (iii) Soient  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$  les vecteurs suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et soit

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On voit que toute combinaison linéaire de  $v_1$  et  $v_2$  est de la forme  $x_1v_1 + x_2v_2$  et vaut donc

$$x_1v_1 + x_2v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On voit que  $v$  n'est pas combinaison linéaire de  $v_1$  et  $v_2$ .

**Définition 5.1.3** Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et soit  $M \subset V$  un sous-ensemble. Le **sous-espace engendré** par  $M$  est le sous-ensemble, noté  $\langle M \rangle$  de  $V$  défini par

$$\langle M \rangle := \{v \in V \mid v \text{ est une combinaison linéaire de vecteurs de } M\}.$$

Par convention, on pose  $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$ . Si  $M = \{v_1, \dots, v_m\}$  est un ensemble fini, on note  $\langle v_1, \dots, v_m \rangle = \langle \{v_1, \dots, v_m\} \rangle$ .

**Lemme 5.1.4** Le sous-espace  $\langle M \rangle$  engendré par  $M$  est un sous-espace vectoriel.  $\square$

*Preuve.* Le vecteur nul  $0_V$  est toujours combinaison linéaire donc  $0_V \in \langle M \rangle$ . Soient  $v, w \in \langle M \rangle$ . Il existe alors des vecteurs  $v_1, \dots, v_m \in M$  et  $w_1, \dots, w_l \in M$  et des scalaires  $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_l \in \mathbb{R}$  tels que

$$v = \sum_{i=1}^m x_i v_i \text{ et } w = \sum_{j=1}^l y_j w_j.$$

On a alors

$$v + w = \sum_{i=1}^m x_i v_i + \sum_{j=1}^l y_j w_j$$

i.e.  $v + w \in \langle M \rangle$ . Par ailleurs, pour  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$xv = x \sum_{i=1}^m x_i v_i = \sum_{i=1}^m (xx_i) v_i$$

i.e.  $xv \in \langle M \rangle$ . ■

**Définition 5.1.5** Soit  $W \subset V$  un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $V$ . Un sous-ensemble  $M \subset W$  est dit **générateur** et est appelé **famille génératrice** de  $W$  si  $\langle M \rangle = W$ .

**Définition 5.1.6** Une famille génératrice de l'espace  $V$  tout entier est simplement appelée famille génératrice.

**Exemple 5.1.7** Soit  $V = \mathbb{R}^3$  et soient Soient  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$  les vecteurs suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (i) L'ensemble  $M = \{v_1, v_2\}$  n'est pas générateur, ou encore ne forme pas une famille génératrice. En effet, on a vu à l'exemple 5.1.2.(ii) que  $v_3$  n'est pas combinaison linéaire de  $v_1$  et  $v_2$  donc  $v_3 \notin \langle M \rangle$ .
- (ii) Prenons par contre  $N = \{v_1, v_2, v_3\}$  et montrons que  $N$  est une famille génératrice. Pour cela, il faut montrer que l'on a  $V = \mathbb{R}^3 = \langle N \rangle$ . Comme  $\langle N \rangle \subset V$ , il suffit de montrer l'inclusion inverse  $V \subset \langle N \rangle$ . Soit donc  $v \in V$  un vecteur quelconque, on a

$$v \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, on a

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = v.$$

On a donc bien  $v \in \langle N \rangle$  et donc  $V = \langle N \rangle$ .

- (iii) Si on ajoute un vecteur  $v_4$  à la famille  $N$ , on obtient une famille  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  qui est toujours génératrice : il suffit d'utiliser les trois premiers vecteurs pour obtenir n'importe quel vecteur de  $V$  par combinaison linéaire.

**Exemple 5.1.8** Soit  $V = \mathbb{C}$  comme  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, alors la famille  $\{1, i\}$  est génératrice. En effet, tout nombre complexe  $z \in \mathbb{C}$  s'écrit  $z = x + iy$ .

**Définition 5.1.9** Un espace vectoriel  $V$  est dit **finiment engendré** ou encore **de dimension finie** s'il existe un ensemble fini  $M \subset V$  tel que  $V = \langle M \rangle$ .

## 5.2. Indépendance linéaire

**Définition 5.2.1** Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

- (i) Une famille de vecteurs  $(v_1, \dots, v_n)$  de  $V$  est dite **linéairement dépendante** ou encore **famille liée** s'il existe des scalaires  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  **qui ne sont pas tous nuls** (i.e.  $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ ) tels que

$$x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = \sum_{i=1}^n x_i v_i = 0.$$

- (ii) Une famille de vecteurs  $(v_1, \dots, v_n)$  de  $V$  qui n'est pas linéairement dépendante est dite **linéairement indépendante** ou encore **famille libre**.

**Remarque 5.2.2** Par convention, la famille vide  $\emptyset$  ne contenant aucun vecteur est libre.

**Exemple 5.2.3** Soit  $V$  un espace vectoriel.

- (i) Soit  $v \in V$ , la famille  $\{v\}$  composée du seul vecteur  $v$  est liée (ou linéairement dépendante) si et seulement si  $v = 0_V$ . En effet, si elle est linéairement dépendante, alors il existe un scalaire  $x \in \mathbb{R}$  avec  $x \neq 0$  tel que  $xv = 0_V$ . Par les règles de calcul, on obtient  $v = 0$ . Réciproquement, si  $v = 0_V$ , alors il existe un scalaire  $x \in \mathbb{R}$  non nul,  $x = 1$  par exemple, tel que  $xv = 1 \cdot 0_V = 0_V$ .
- (ii) La contraposée de l'exemple précédent nous dit que la famille  $\{v\}$  formée du seul vecteur  $v$  est libre (ou linéairement indépendante) si et seulement si  $v \neq 0_V$ .
- (iii) Soit  $v \in V$ , alors la famille  $(v, v)$  qui contient deux fois le même vecteur  $v$  est linéairement dépendante. En effet, on peut prendre les scalaires  $x_1 = 1$  et  $x_2 = -1$  qui sont non nuls et on a  $x_1v + x_2v = v - v = 0_V$ .
- (iv) Soient  $v_1, v_2 \in V$ , la famille  $(v_1, v_2)$  est liée (ou linéairement dépendante) si et seulement s'il existe des scalaires  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  non tous les deux nuls tels que  $x_1v_1 + x_2v_2 = 0$ .
- (v) Si  $v_1 \neq 0$  et  $v_2 \neq 0$ , la famille  $(v_1, v_2)$  est liée (ou linéairement dépendante) si et seulement si  $\langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle$  (Exercice).
- (vi) Soient  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$  les vecteurs suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors la famille  $(v_1, v_2, v_3)$  est liée car on a la relation  $1 \cdot v_1 + (-1) \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = 0$ .

La proposition suivante retraduit la définition de famille linéairement indépendante et est très utile dans la pratique.

**Proposition 5.2.4** Soit  $V$  un espace vectoriel et soit  $(v_1, \dots, v_n)$  une famille de vecteurs. Cette famille est libre si et seulement si les seuls scalaires  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  tels que

$$x_1v_1 + \dots + x_nv_n = \sum_{i=1}^n x_i v_i = 0_V$$

sont  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ .

*Preuve.* La famille est liée exactement s'il existe des scalaires non tous nuls tels que la relation ci-dessus est vérifiée. Elle est donc libre si les seuls scalaires possibles sont nuls. ■

Dans l'exemple suivant, on voit que tester si une famille est libre ou liée, c'est résoudre un système homogène !

**Exemple 5.2.5** Soit  $V = \mathbb{R}^3$

(i) Soit  $(v_1, v_2, v_3)$  la famille formée des vecteurs suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cette famille est libre si les seuls scalaires  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  tels que  $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0$  sont les scalaires  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . Quand on écrit cette équation, on obtient

$$0_V = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Les scalaires  $x_1, x_2, x_3$  sont donc les solutions du système homogène

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Il s'agit de savoir si ce système a  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  comme unique solution ou s'il y en a d'autres. On peut utiliser l'algorithme de Gauß pour le résoudre. On obtient la matrice échelonnée réduite suivante

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

ce qui montre que la seule solution est  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . La famille est libre.

(ii) Soit maintenant  $(v_1, v_2, v_3)$  la famille formée des vecteurs suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cette famille est libre si les seuls scalaires  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  tels que  $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = 0$  sont les scalaires  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . Quand on écrit cette équation, on obtient

$$0_V = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Les scalaires  $x_1, x_2, x_3$  sont donc les solutions du système homogène

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Il s'agit de savoir si ce système a  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  comme unique solution ou s'il y en a d'autres. On peut utiliser l'algorithme de Gauß pour le résoudre. On obtient la matrice échelonnée réduite suivante

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

ce qui montre que l'on a une infinité de solutions  $(x_1, x_2, x_3)$  données par  $x_1 = -x_3$  et  $x_2 = 2x_3$ . En prenant  $x_3 = 1$ , on obtient par exemple la solution  $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 2, 1)$ . On peut vérifier que l'on a bien  $-v_1 + 2v_2 + v_3 = 0$ . La famille est donc liée.

**Exemple 5.2.6** Dans l'espace vectoriel  $V = \mathbb{C}$ , la famille  $(1, i)$  est linéairement indépendante. En effet, si on a  $z = x + iy = 0$ , alors  $x = y = 0$ .

**Lemme 5.2.7** Soit  $(v_1, \dots, v_n)$  une famille libre, alors toute sous-famille  $(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$  von  $(v_1, \dots, v_n)$  est encore une famille libre.  $\square$

*Preuve.* Soient  $x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \in \mathbb{R}$  des scalaires tels que

$$x_{i_1}v_{i_1} + \dots + x_{i_k}v_{i_k} = \sum_{j=1}^k x_{i_j}v_{i_j} = 0.$$

En posant  $x_i = 0$  pour les autres scalaire  $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$ , on obtient

$$x_1v_1 + \dots + x_nv_n = \sum_{j=1}^n x_jv_j = 0.$$

Comme  $(v_1, \dots, v_n)$  est libre, la seule possibilité est que l'on ait  $x_1 = \dots = x_n = 0$  so dass  $x_{i_1} = \dots = x_{i_k} = 0$  et donc  $(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$  est libre.  $\blacksquare$

**Lemme 5.2.8** Soit  $V$  un espace vectoriel, soit  $(v_1, \dots, v_m)$  une famille libre et soit  $v \in V$ . Si la famille  $(v_1, \dots, v_m, v)$  obtenue en ajoutant  $v$  est liée, alors on a  $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ .  $\square$

*Preuve.* Comme  $(v_1, \dots, v_m, v)$  est liée, il existe des scalaires  $x_1, \dots, x_m, x \in \mathbb{R}$ , non tous nuls tels que

$$x_1v_1 + \dots + x_mv_m + xv = 0.$$

Si on a  $x = 0$ , alors on a une relation  $x_1v_1 + \dots + x_mv_m = 0$  avec  $x_1, \dots, x_m$  non tous nuls ce qui implique que la famille  $(v_1, \dots, v_m)$  est liée, une contradiction. On doit donc avoir  $x \neq 0$  et en passant  $xv$  de l'autre côté de l'équation et en divisant par  $x$ , on obtient

$$x = \frac{x_1}{x}v_1 + \dots + \frac{x_m}{x}v_m \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle,$$

ce qui démontre le résultat.  $\blacksquare$

**Corollaire 5.2.9** Soit  $V$  un espace vectoriel et  $(v_1, \dots, v_m)$  une famille libre. Soit  $v \in V$  tel que  $v \notin \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ , alors la famille  $(v_1, \dots, v_m, v)$  est libre.

**Proposition 5.2.10** Soit  $V$  un espace vectoriel et soit  $v_1, \dots, v_m \in V$  une famille de vecteurs. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) la famille  $(v_1, \dots, v_m)$  est libre,
- (ii) tout vecteur  $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$  s'écrit, de manière unique, comme une combinaison linéaire  $v = x_1 v_1 + \dots + x_m v_m$ .

*Preuve.* (*i.*  $\Rightarrow$  *ii.*) Comme  $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$  est dans le sous-espace engendré par la famille  $v_1, \dots, v_m$ , il existe toujours une écriture  $v = x_1 v_1 + \dots + x_m v_m$ . Il faut montrer que cette écriture est unique. Soient  $v = x_1 v_1 + \dots + x_m v_m$  et  $v = x'_1 v_1 + \dots + x'_m v_m$  deux telles écritures. En faisant la différence, on obtient  $(x_1 - x'_1)v_1 + \dots + (x_m - x'_m)v_m = 0$ . Comme  $(v_1, \dots, v_m)$  est libre, on doit avoir  $x_i - x'_i = 0$  pour tout  $i$  c'est-à-dire  $x_1 = x'_1, \dots, x_m = x'_m$ . Les deux écritures sont égales.

(*ii.*  $\Rightarrow$  *i.*) Montrons que la famille est libre. Soient donc  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$  des scalaires tels que  $x_1 v_1 + \dots + x_m v_m = 0_V$ . On a une autre écriture du vecteur  $v = 0_V$  donnée par  $0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_m = 0_V$ . Ces deux écritures doivent être les mêmes c'est-à-dire  $x_1 = 0, \dots, x_m = 0$ . La famille est libre. ■

## 6. Bases et dimension

### 6.1. Bases, definition et premiers exemples

**Définition 6.1.1** Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Une famille  $(v_1, \dots, v_n)$  de vecteurs de  $V$  est appelée **base** de  $V$  si elle est libre et génératrice.

**Exemple 6.1.2** Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

- (i) Si  $V = 0$ , la seule base de l'espace vectoriel nul est  $\emptyset$ , l'ensemble vide.
- (ii) Plus intéressant, soit  $V = \mathbb{R}^n$  et pour tout  $i \in [1, n]$ , on définit le vecteur  $e_i \in V$  par

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

où le 1 est sur la  $i$ -ème ligne. Alors la famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $V = \mathbb{R}^n$  appelée **base canonique de  $\mathbb{R}^n$** . Montrons que cette famille est libre et génératrice. Si  $v \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur, il s'écrit

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

et on a  $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ . La famille est donc génératrice. Supposons maintenant qu'il existe des scalaires  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  tels que  $x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = 0$ . On obtient

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0_V = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc  $x_1 = \dots = x_n = 0$  et la famille est libre.

- (iii) Si  $V = \mathbb{C}$  alors on a vu que la famille  $(1, i)$  est libre et génératrice, c'est donc une base.

**Proposition 6.1.3** Une famille de vecteurs  $(v_1, \dots, v_n)$  d'un espace vectoriel  $V$  est une base si et seulement si tout vecteur  $v \in V$  admet une et une seule écriture comme combinaison linéaire

$$v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$$

avec  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  des scalaires.

*Preuve.* Le fait que tout vecteur  $v \in V$  admet une écriture comme combinaison linéaire

$$v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$$

est équivalent au fait que  $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$  c'est-à-dire au fait que  $(v_1, \dots, v_n)$  est génératrice. D'après la Proposition 5.2.10, cette écriture est unique si et seulement si la famille est libre. ■

## 6.2. Existence

**Définition 6.2.1** Soit  $V$  un espace vectoriel et soit  $(v_1, \dots, v_n)$  une famille de vecteurs.

- (i) On dit que la famille  $(v_1, \dots, v_n)$  est **libre maximale** si c'est une famille libre et que toute famille  $(v_1, \dots, v_n, v)$  strictement plus grosse est liée.
- (ii) On dit que la famille  $(v_1, \dots, v_n)$  est **génératrice minimale** si c'est une famille génératrice et que toute famille  $(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$  avec  $k < n$  strictement plus petite n'est plus génératrice.

**Théorème 6.2.2** Tout espace vectoriel finiment engendré admet une base finie. Plus précisément, soit  $(v_1, \dots, v_n)$  une famille de vecteurs de  $V$ , les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) la famille  $(v_1, \dots, v_n)$  est une base,
- (ii) la famille  $(v_1, \dots, v_n)$  est libre maximale,
- (iii) la famille  $(v_1, \dots, v_n)$  est génératrice minimale. □

*Preuve.* Si ces trois conditions sont équivalentes, alors pour obtenir une base, il suffit de prendre  $(v_1, \dots, v_n)$  une famille génératrice de taille minimale (c'est-à-dire dont le nombre d'éléments est minimal) car alors elle sera génératrice minimale et sera donc une base.

Montrons l'équivalence des trois conditions.

Si  $(v_1, \dots, v_n)$  est liée, alors on regarde les familles de plus en plus grosses suivantes :

$$\emptyset \subsetneq (v_1) \subsetneq (v_1, v_2) \subsetneq \dots \subsetneq (v_1, \dots, v_n).$$

On sait que  $\emptyset$  est libre et que  $(v_1, \dots, v_n)$  est liée. Il existe donc un indice  $k < n$  tel que  $(v_1, \dots, v_k)$  est libre et  $(v_1, \dots, v_{k+1})$  est liée. D'après le lemme 5.2.8.1. on a que  $v_{k+1} \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle$  et donc  $(v_1, \dots, \widehat{v}_k, \dots, v_n) = (v_1, \dots, v_k, v_{k+2}, \dots, v_n)$  est aussi génératrice ce qui contredit la minimalité.

( $i \Rightarrow ii$ ) Supposons que  $(v_1, \dots, v_n)$  est une base et montrons que c'est une famille libre maximale. Comme  $(v_1, \dots, v_n)$  est une base, elle est libre. Si  $(v_1, \dots, v_n)$  n'était pas maximale, alors il existerait un vecteur  $v \in V$  tel que la famille  $(v_1, \dots, v_n, v)$  soit libre. Mais  $(v_1, \dots, v_n)$  est une base donc génératrice. En particulier, on a  $v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$  et il existe donc des scalaires  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  tels que

$$v = \sum_{i=1}^n x_i v_i \text{ c'est-à-dire } -v + \sum_{i=1}^n x_i v_i = 0.$$

Comme  $-1, x_1, \dots, x_n$  sont non tous nuls, on voit que la famille  $(v_1, \dots, v_n, v)$  est liée, une contradiction.

( $ii \Rightarrow i$ ) Si  $(v_1, \dots, v_n)$  est une famille libre maximale, pour montrer que c'est une base, il suffit de montrer qu'elle est génératrice. Soit donc  $v \in V$ , on veut montrer que  $v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ . Comme  $(v_1, \dots, v_n)$  est libre maximale, la famille  $(v_1, \dots, v_n, v)$  est liée. Le lemme 5.2.8.1. nous dit alors que  $v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ , ce qu'on voulait montrer.

( $i \Rightarrow iii$ ) Supposons que  $(v_1, \dots, v_n)$  est une base et montrons que c'est une famille génératrice minimale. Comme  $(v_1, \dots, v_n)$  est une base, c'est une famille génératrice. Si  $(v_1, \dots, v_n)$  n'était pas minimale, il existerait un vecteur  $v_k$  tel que  $(v_1, \dots, \widehat{v}_k, \dots, v_n)$  est génératrice. On aurait donc  $v_k \in \langle v_1, \dots, \widehat{v}_k, \dots, v_n \rangle$  et donc qu'il existe des scalaires  $(x_1, \dots, \widehat{x}_k, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$  tels que

$$v_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n x_i v_i \text{ c'est-à-dire } -v_k + \sum_{i=1, i \neq k}^n x_i v_i = 0.$$

Comme  $-1, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$  sont non tous nuls, on obtient que  $(v_1, \dots, v_n)$  est liée, une contradiction car c'est une base.

( $iii \Rightarrow i$ ) Supposons que  $(v_1, \dots, v_n)$  est une famille génératrice minimale. Pour montrer que c'est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre. Si  $(v_1, \dots, v_n)$  était liée, alors il existerait des scalaires  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^n x_i v_i = 0.$$

Soit  $k$  un indice pour lequel  $x_k \neq 0$ , on a alors

$$v_k = - \sum_{i=1, i \neq k}^n \frac{x_i}{x_k} v_i,$$

donc  $v_k \in \langle v_1, \dots, \widehat{v}_k, \dots, v_n \rangle$  et donc  $\langle v_1, \dots, \widehat{v}_k, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$  ce qui contredit la minimalité de  $(v_1, \dots, v_n)$ . La famille est donc libre. ■

**Théorème 6.2.3 (Théorème de la base incomplète)** Soit  $V$  un espace vectoriel, soit  $(v_1, \dots, v_r)$  une famille libre et soit  $(w_1, \dots, w_m)$  une famille génératrice. Alors, on peut compléter la famille  $(v_1, \dots, v_r)$  avec des éléments de la famille  $(w_1, \dots, w_m)$  afin d'obtenir une base de  $V$ .

En d'autres termes, il existe des indices distincts  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$  tels que la famille  $(v_1, \dots, v_r, w_{i_1}, \dots, w_{i_k})$  soit une base de  $V$ .  $\square$

*Preuve.* En ajoutant suffisamment de vecteurs de  $(w_1, \dots, w_m)$  à la famille  $(v_1, \dots, v_r)$  on obtient une famille génératrice : par exemple, si on ajoute tous les vecteurs  $(w_1, \dots, w_m)$  on obtient une famille génératrice.

Soit  $(w_{i_1}, \dots, w_{i_k})$  un nombre minimal de vecteurs à ajouter à  $(v_1, \dots, v_r)$  nécessaires pour obtenir une famille génératrice. On va montrer que  $(v_1, \dots, v_r, w_{i_1}, \dots, w_{i_k})$  est une base. Par hypothèse, cette famille est génératrice. Il faut donc montrer qu'elle est libre. Si ce n'est pas le cas, alors il existe des scalaires  $x_1, \dots, x_r, y_{i_1}, \dots, y_{i_k} \in \mathbb{R}$ , non tous nuls tels que

$$\sum_{j=1}^r x_j v_j + \sum_{j=1}^k y_{i_j} w_{i_j} = 0.$$

Si  $y_{i_1} = \dots = y_{i_k} = 0$ , alors on a  $x_1 v_1 + \dots + x_r v_r = 0$  avec les  $x_i$  non tous nuls et  $(v_1, \dots, v_r)$  serait liée. C'est impossible. Il existe donc un indice  $j_0$  tel que  $y_{i_{j_0}} \neq 0$ . En passant  $y_{i_{j_0}} w_{i_{j_0}}$  de l'autre côté de l'égalité et en divisant par  $y_{i_{j_0}}$ , on obtient alors

$$w_{i_{j_0}} = - \sum_{j=1}^r x_j v_j - \sum_{j=1, j \neq j_0}^k y_{i_j} w_{i_j}$$

et donc on a  $w_{i_{j_0}} \in \langle v_1, \dots, v_r, w_{i_1}, \dots, \widehat{w_{i_{j_0}}}, \dots, w_{i_k} \rangle$ . On en déduit que la famille  $\langle v_1, \dots, v_r, w_{i_1}, \dots, \widehat{w_{i_{j_0}}}, \dots, w_{i_k} \rangle$  est génératrice ce qui contredit la minimalité de  $(v_1, \dots, v_r, w_{i_1}, \dots, w_{i_k})$ . La famille  $(v_1, \dots, v_r, w_{i_1}, \dots, w_{i_k})$  est donc libre et génératrice, c'est une base.  $\blacksquare$

**Théorème 6.2.4** Soit  $V$  un espace vectoriel, soit  $(v_1, \dots, v_r)$  une famille libre et soit  $(w_1, \dots, w_m)$  une famille génératrice.

Alors  $r \leq m$  et il existe  $w_{i_1}, \dots, w_{i_{m-r}}$  tels que  $(v_1, \dots, v_r, w_{i_1}, \dots, w_{i_{m-r}})$  est une famille génératrice.  $\square$

*Preuve.* On procède par récurrence sur  $r$ . Si  $r = 0$ , alors  $r \leq m$  et  $(w_1, \dots, w_m)$  est génératrice.

Supposons que l'on a montré le résultat pour  $r - 1$ , c'est-à-dire que  $r - 1 \leq m$  et qu'il existe  $w_{i_1}, \dots, w_{i_{m-r+1}}$  tels que  $(v_1, \dots, v_{r-1}, w_{i_1}, \dots, w_{i_{m-r+1}})$  est génératrice. On a donc  $v_r \in \langle v_1, \dots, v_{r-1}, w_{i_1}, \dots, w_{i_{m-r+1}} \rangle$  donc il existe des scalaires  $x_1, \dots, x_{r-1}, y_{i_1}, \dots, y_{i_{m-r+1}} \in \mathbb{R}$  tels que

$$v_r = x_1 v_1 + \dots + x_{r-1} v_{r-1} + y_{i_1} w_{i_1} + \dots + y_{i_{m-r+1}} w_{i_{m-r+1}}.$$

Si  $y_{i_1} = \cdots = y_{i_{m-r+1}} = 0$ , on a alors  $v_r = x_1 v_1 + \cdots = x_{r-1} v_{r-1}$  et la famille  $(v_1, \cdots, v_r)$  est liée. C'est impossible. Il existe donc au moins un  $y_{i_j}$  pour  $j \in [1, m - r + 1]$  non nul. En particulier, on a  $m \geq r$ . Quitte à changer l'ordre, on peut supposer que  $y_{i_{m-r+1}} \neq 0$ . On obtient alors

$$-y_{i_{m-r+1}} w_{j_{m-r+1}} = x_1 v_1 + \cdots x_{r-1} v_{r-1} - v_r + y_{i_1} w_{i_1} + \cdots + y_{i_{m-r}} w_{i_{m-r}}.$$

On a donc  $w_{i_{m-r+1}} \in \langle v_1, \cdots, v_r, w_{i_1}, \cdots, w_{i_{m-r}} \rangle$ . Ainsi tous les vecteurs de la famille génératrice  $(v_1, \cdots, v_{r-1}, w_{i_1}, \cdots, w_{i_{m-r}}, w_{i_{m-r+1}})$  sont dans l'espace engendré  $\langle v_1, \cdots, v_r, w_{i_1}, \cdots, w_{i_{m-r}} \rangle$ . La famille  $(v_1, \cdots, v_r, w_{i_1}, \cdots, w_{i_{m-r}})$  est donc génératrice. ■

**Corollaire 6.2.5** Soit  $V$  un espace vectoriel, soit  $(v_1, \cdots, v_r)$  une famille libre, soit  $(w_1, \cdots, w_m)$  une famille génératrice et soit  $(e_1, \cdots, e_n)$  une base. Alors on a  $r \leq n \leq m$ .

*Preuve.* Comme une base est génératrice, on a par le théorème précédente  $r \leq n$ , mais comme c'est aussi une famille libre, on a aussi  $n \leq m$ . ■

**Corollaire 6.2.6** Soit  $V$  un espace vectoriel finiment engendré, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.

*Preuve.* Soient  $(v_1, \cdots, v_n)$  et  $(e_1, \cdots, e_m)$  deux bases, alors comme ce sont à la fois des familles libres et génératrices, on a  $n \leq m$  et  $m \leq n$  donc  $m = n$ . ■

## 6.3. Dimension

**Définition 6.3.1** Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel finiment engendré. Le nombre d'éléments dans une base est appelé **dimension** de  $V$  et est noté  $\dim V = \dim(V)$ . On a alors  $\dim V < \infty$ , on dit que  $V$  est de **dimension finie**.

Si  $V$  n'est pas finiment engendré, on dira qu'il est de **dimension infinie**, on écrit alors  $\dim V = \infty$ .

**Théorème 6.3.2** Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie  $n = \dim V < \infty$ .

(i) Toute famille libre ayant  $n = \dim V$  éléments est une base.

(ii) Toute famille génératrice ayant  $n = \dim V$  éléments est une base. □

*Preuve.* (i). Soit  $(e_1, \cdots, e_n)$  une base. et soit  $(v_1, \cdots, v_n)$  une famille libre. On peut compléter  $(v_1, \cdots, v_n)$  avec des vecteurs de  $(e_1, \cdots, e_n)$  en une base. Mais une base ayant toujours  $n$  vecteurs, on ne peut ajouter de vecteur et la famille  $(v_1, \cdots, v_n)$  était déjà une base.

(ii) Soit  $(v_1, \cdots, v_n)$  une famille génératrice. On considère la famille libre vide :  $\emptyset$ . On peut la compléter avec des vecteurs de  $(v_1, \cdots, v_n)$  en une base. Cette base est une sous-famille de  $(v_1, \cdots, v_n)$  mais comme c'est une base, elle a  $n$  éléments. C'est donc la famille  $(v_1, \cdots, v_n)$  tout entière qui était donc déjà une base. ■

**Corollaire 6.3.3** Soit  $W \subset V$  un sous-espace vectoriel de  $V$ . Alors on a  $\dim W \leq \dim V$ . De plus on a  $\dim W = \dim V$  si et seulement si  $W = V$ .

*Preuve.* Soit  $n = \dim V$  et  $r = \dim W$ . Soit  $(e_1, \dots, e_r)$  une base de  $W$ . Alors  $(e_1, \dots, e_r)$  est une famille libre et donc aussi une famille libre de  $V$ . On a donc  $r \leq n$ .

Si  $W = V$ , alors on a  $\dim W = \dim V = n$ . Réciproquement, si  $\dim W = \dim V$ , alors il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $W$ . Cette famille est libre dans  $W$  et donc aussi dans  $V$  mais comme elle a  $n = \dim V$  éléments, c'est une base de  $V$ . Elle est donc aussi génératrice pour  $V$  et on obtient  $W = \langle e_1, \dots, e_n \rangle = V$ . ■

Nous terminons ce paragraphe par un résultat sur les espaces vectoriels de dimension infinie.

**Théorème 6.3.4** Tout espace vectoriel (même de dimension infinie) a une base. □

**Remarque 6.3.5** Ce résultat suppose que l'axiome du choix est vrai.

# 7. Applications linéaires

## 7.1. Définition et premiers exemples

**Définition 7.1.1** Soient  $V$  et  $W$  deux  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels. Une application  $f : V \rightarrow W$  est dite **linéaire** ou encore  **$\mathbb{R}$ -linéaire** si elle vérifie :

- $f(v + v') = f(v) + f(v')$  pour tout  $v, v' \in V$  et
- $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et tout  $v \in V$ .

Une application linéaire est par fois aussi appelée **morphisme** ou **homomorphisme**. Lorsque  $W = V$ , une application linéaire s'appelle alors **endomorphisme**.

**Définition 7.1.2** Soient  $V$  et  $W$  deux  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels. L'ensemble des applications linéaires est noté

$$\begin{aligned}\text{Hom}(V, W) &= \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ est une application linéaire} \} \\ \text{End}(V) &= \text{Hom}(V, V).\end{aligned}$$

**Lemme 7.1.3** Soit  $f : V \rightarrow W$  une application linéaire, alors on a  $f(0) = 0$ . □

*Preuve.* On a  $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$  et donc en enlevant  $f(0)$  des deux cotés, on obtient , on obtient  $f(0) = 0$ . ■

**Exemple 7.1.4** Soit  $V$  un espace vectoriel.

- (i) L'application identité  $\text{Id}_V : V \rightarrow V$  définie par  $\text{Id}_V(v) = v$  est linéaire.
- (ii) L'application nulle  $f : V \rightarrow W$  définie par  $f(v) = 0$  pour tout  $v \in V$  est une application linéaire (exercice).
- (iii) La projection sur le premier facteur  $p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $p_1(x, y) = x$  est une application linéaire. En effet, on a  $p_1((x, y) + (x', y')) = p_1(x + x', y + y') = x + x' = p_1(x, y) + p_1(x', y')$  et on a  $p_1(\lambda(x, y)) = p_1(\lambda x, \lambda y) = \lambda x = \lambda p_1(x)$ .
- (iv) La projection sur le second facteur  $p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $p_2(x, y) = y$  est aussi une application linéaire (exercice).
- (v) L'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par  $f(x, y) = x^2 + y^2$  n'est pas linéaire. En effet, on a  $f(1, 0) = 1$  mais  $f((1, 0) + (1, 0)) = f(2, 0) = 4 \neq 2 = 1 + 1 = f(1, 0) + f(1, 0)$ .

- (vi) L'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y) = (y, x)$  est une application linéaire. En effet, on a  $f((x, y) + (x', y')) = f(x + x', y + y') = (y + y', x + x') = (y, x) + (y', x') = f(x, y) + f(x', y')$ . De plus, on a  $f(\lambda(x, y)) = f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda y, \lambda x) = \lambda(y, x) = \lambda f(x, y)$ . Dans le plan, c'est la symétrie par rapport à la droite d'équation  $y = x$ .
- (vii) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  un scalaire. L'application  $f_\lambda : V \rightarrow V$ , définie par  $f_\lambda(v) = \lambda v$  est linéaire. Cette application est appelée **homothétie de facteur**  $\lambda$ . En effet, on a  $f_\lambda(v + v') = \lambda(v + v') = \lambda v + \lambda v' = f_\lambda(v) + f_\lambda(v')$  et  $f_\lambda(\mu v) = \lambda(\mu v) = \mu(\lambda v) = \mu f_\lambda(v)$ .

**Lemme 7.1.5** Soient  $V$  et  $W$  deux  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels. Une application  $f : V \rightarrow W$  est linéaire si et seulement si on a

$$f(x_1 v_1 + x_2 v_2) = x_1 f(v_1) + x_2 f(v_2)$$

pour tout  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  et tout  $v_1, v_2 \in V$ . □

*Preuve.* Exercice. ■

**Lemme 7.1.6** Soient  $f : V \rightarrow W$  et  $g : W \rightarrow U$  deux applications linéaires. Alors la composée  $g \circ f$  est encore une application linéaire. □

*Preuve.* Soient  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  deux scalaires et soient  $v_1, v_2 \in V$  deux vecteurs. On a

$$\begin{aligned} g \circ f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= g(f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)) = g(\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)) \\ &= \lambda_1 g(f(v_1)) + \lambda_2 g(f(v_2)) = \lambda_1 g \circ f(v_1) + \lambda_2 g \circ f(v_2). \end{aligned}$$

D'après le lemme précédent (Lemme 7.1.5), on a que  $g \circ f$  est linéaire. ■

**Définition 7.1.7** Soit  $f : V \rightarrow W$  une application linéaire.

- (i) Lorsque  $f$  est bijective, on dit que  $f$  est un **isomorphisme** de  $V$  vers  $W$ .
- (ii) Lorsque  $W = V$  et que  $f$  est bijective, on dit que  $f$  est un **automorphisme** de  $V$ .
- (iii) L'ensemble des isomorphismes de  $V$  vers  $W$  est noté

$$\text{Isom}(V, W) = \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ est une application linéaire bijective} \}.$$

- (iv) L'ensemble des automorphismes de  $V$  est noté

$$\text{Aut}(V) = \{f : V \rightarrow V \mid f \text{ est une application linéaire bijective} \}.$$

- (v) S'il existe un isomorphisme  $f : V \rightarrow W$  entre deux espaces vectoriels  $V$  et  $W$ , on dit que  $V$  et  $W$  sont **isomorphes** ou que  $V$  est **isomorphe** à  $W$ . On écrit alors  $V \simeq W$ .

**Lemme 7.1.8** Soit  $f : V \rightarrow W$  un isomorphisme (une application linéaire bijective). Alors la bijection réciproque  $f^{-1} : W \rightarrow V$  est encore une application linéaire (et donc encore un isomorphisme).  $\square$

*Preuve.* Soient  $w_1, w_2 \in W$  deux vecteurs et soient  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  deux scalaires. Comme  $f$  est bijective, il existe  $v_1, v_2 \in V$  tels que  $f(v_1) = w_1$  et  $f(v_2) = w_2$ . On a alors  $f^{-1}(w_1) = v_1$  et  $f^{-1}(w_2) = v_2$ . Montrons que  $f^{-1}(\lambda w_1 + \lambda w_2) = \lambda_1 f^{-1}(w_1) + \lambda_2 f^{-1}(w_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ . Pour cela, il suffit de montrer que  $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$ . Mais comme  $f$  est linéaire, on a  $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$ , c'est ce qu'on voulait.  $\blacksquare$

## 7.2. Applications linéaires et sous-espaces vectoriels

**Définition 7.2.1** Soit  $f : V \rightarrow W$  une application linéaire. Le **noyau** de  $f$  est l'ensemble  $\text{Ker}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ .

**Remarque 7.2.2** Nous avons défini le noyau d'une matrice et celui d'une application linéaire. Nous verrons que ces définitions sont cohérentes et forment les deux faces d'une même pièce.

**Proposition 7.2.3** Soit  $f : V \rightarrow W$  une application linéaire. Le noyau  $\text{Ker}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ .

*Preuve.* Soient  $v, v' \in \text{Ker}(f)$  et soient  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a  $f(v+v') = f(v) + f(v') = 0 + 0 = 0$  donc  $v + v' \in \text{Ker}(f)$ . On a aussi  $f(\lambda v) = \lambda f(v) = 0$  donc  $\lambda v \in \text{Ker}(f)$ .  $\blacksquare$

**Proposition 7.2.4** Soit  $f : V \rightarrow W$  une application linéaire. Alors  $f$  est injective si et seulement si  $\text{Ker}(f)$  est le sous-espace vectoriel nul :  $\text{Ker}(f) = \{0\} = 0$ .

*Preuve.* Supposons que  $f$  est injective et soit  $v \in \text{Ker}(f)$ . Alors, on a  $f(v) = 0 = f(0)$  donc comme  $f$  est injective, on a  $v = 0$  et  $\text{Ker}(f) = \{0\}$ .

Réciproquement, supposons que  $\text{Ker}(f) = \{0\}$  et soient  $v, v' \in V$  tels que  $f(v) = f(v')$ . Alors, on a  $f(v - v') = f(v) - f(v') = 0$  donc  $v - v' \in \text{Ker}(f)$  et  $v - v' = 0$  donc  $v = v'$  et  $f$  est injective.  $\blacksquare$

**Remarque 7.2.5** Le noyau de  $f$  est l'image réciproque du sous-espace vectoriel nul :  $\text{Ker}(f) = f^{-1}(0)$ . Dans la proposition suivante, on va voir de manière beaucoup plus générale que les images et les images réciproques de sous-espaces vectoriels sont encore des sous-espaces vectoriels.

**Proposition 7.2.6** Soit  $f : V \rightarrow W$  une application linéaire et soient  $V' \subset V$  et  $W' \subset W$  des sous-espaces vectoriels.

- (i) Alors  $f(V')$  est un sous-espace vectoriel de  $W$ .

(ii) Alors  $f^{-1}(W')$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ .

*Preuve.* 1. Soient  $w, w' \in f(V')$  des vecteurs et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  un scalaire. Par définition de  $f(V')$ , il existe des vecteurs  $v, v' \in V'$  tels que  $f(v) = w$  et  $f(v') = w'$ . On a alors  $w + w' = f(v) + f(v') = f(v + v')$ . Comme  $V'$  est un sous-espace vectoriel et que  $v, v' \in V'$ , on a  $v + v' \in V'$  et donc  $w + w' = f(v + v') \in f(V')$ . On a aussi  $\lambda w = \lambda f(v) = f(\lambda v)$ . Comme  $V'$  est un sous-espace vectoriel, on a  $\lambda v \in V'$  donc  $\lambda w = f(\lambda v) \in f(V')$ .

2. Soient  $v, v' \in f^{-1}(W')$  et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  un scalaire. Par définition de  $f^{-1}(W')$ , on a  $f(v) \in W'$  et  $f(v') \in W'$ . On a donc  $f(v + v') = f(v) + f(v') \in W'$  et  $f(\lambda v) = \lambda f(v) \in W'$  car  $W'$  est un sous-espace vectoriel. ■

**Lemme 7.2.7** Soit  $f : V \rightarrow W$  une application linéaire et soit  $v_1, \dots, v_n$  une famille de vecteurs de  $V$ . Alors on a  $f(\langle v_1, \dots, v_n \rangle) = \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle$ . □

*Preuve.* Soit  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ . On a alors  $f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) \in \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle$ .

Réciproquement, soit  $\lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) \in \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle$ . On a alors  $\lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \in f(\langle v_1, \dots, v_n \rangle)$ . ■

## 7.3. Applications linéaires et bases

**Proposition 7.3.1** Soient  $V$  et  $W$  des espaces vectoriels et soit  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  une base de  $V$ .

(i) Deux applications linéaires  $f : V \rightarrow W$  et  $g : V \rightarrow W$  sont égales si et seulement si elles sont égales sur les éléments de  $\mathcal{B}$ . En d'autres termes on a l'équivalence

$$(f = g) \Leftrightarrow (f(v_i) = g(v_i) \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n).$$

(ii) Soient  $w_1, \dots, w_n$  des vecteurs de  $W$ . Alors il existe une et une seule application linéaire  $f : V \rightarrow W$  telle que  $f(v_i) = w_i$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ .

*Preuve.* 1. Si  $f = g$ , alors on a  $f(v_i) = g(v_i)$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ . Réciproquement, supposons que  $f(v_i) = g(v_i)$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ . Soit  $v \in V$  un vecteur quelconque. Comme  $\mathcal{B}$  est génératrice, il existe des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ . On a alors

$$\begin{aligned} f(v) &= f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) \\ &= \lambda_1 g(v_1) + \dots + \lambda_n g(v_n) = g(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = g(v). \end{aligned}$$

2. Si une telle fonction  $f$  existe, elle est unique par le point 1. Montrons qu'elle existe. Soit  $v \in V$ , comme  $\mathcal{B}$  est une base, il existe des éléments  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  uniques (les coordonnées de  $v$  dans la base  $\mathcal{B}$  tels que  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ . Posons

$$f(v) = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n.$$

Montrons que  $f$  est linéaire et vérifie  $f(v_i) = w_i$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ .

Pour  $k \in [1, n]$ , les coordonnées  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  de  $v_k$  dans la base  $\mathcal{B}$  valent  $\lambda_k = 1$  et  $\lambda_i = 0$  pour  $i \neq k$ . Ainsi  $f(v_k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i = w_k$ .

Montrons maintenant que  $f$  est linéaire. Soient  $v$  et  $v' \in V$  et soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  et  $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$  les coordonnées de  $v$  et  $v'$  dans  $\mathcal{B}$ . On a  $v + v' = (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) + (\lambda'_1 v_1 + \dots + \lambda'_n v_n) = (\lambda_1 + \lambda'_1)v_1 + \dots + (\lambda_n + \lambda'_n)v_n$  donc les coordonnées de  $v + v'$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont  $(\lambda_1 + \lambda'_1), \dots, (\lambda_n + \lambda'_n)$ . On obtient

$$\begin{aligned} f(v + v') &= (\lambda_1 + \lambda'_1)w_1 + \dots + (\lambda_n + \lambda'_n)w_n \\ &= (\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n) + (\lambda'_1 w_1 + \dots + \lambda'_n w_n) = f(v) + f(v'). \end{aligned}$$

Soit  $\mu \in \mathbb{R}$ , on a  $\lambda v = \mu(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = (\mu\lambda_1)v_1 + \dots + (\mu\lambda_n)v_n$  donc les coordonnées de  $\mu v$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont  $\mu\lambda_1, \dots, \mu\lambda_n$ . On obtient

$$\begin{aligned} f(\mu v) &= (\mu\lambda_1)w_1 + \dots + (\mu\lambda_n)w_n \\ &= \mu(\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n) = \mu f(v). \end{aligned}$$

L'application  $f$  est bien linéaire. ■

**Proposition 7.3.2** Soit  $f : V \rightarrow W$  une application linéaire et soit  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  une base de  $V$ .

- (i)  $f$  est injective si et seulement si la famille  $(f(v_1), \dots, f(v_n))$  est libre.
- (ii)  $f$  est surjective si et seulement si la famille  $(f(v_1), \dots, f(v_n))$  est génératrice.
- (iii)  $f$  est bijective si et seulement si la famille  $(f(v_1), \dots, f(v_n))$  est une base.

*Preuve.* 1. Supposons que  $f$  est injective et soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que  $\lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) = 0$ . On a alors  $0 = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)$  donc  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in \text{Ker}(f)$ . Comme  $f$  est injective, on obtient  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$  et comme  $\mathcal{B}$  est une base, on a  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ . La famille  $(f(v_1), \dots, f(v_n))$  est libre.

Réciproquement, supposons que la famille  $(f(v_1), \dots, f(v_n))$  est libre et soit  $v \in \text{Ker}(f)$ . D'après la Proposition 7.2.4, il suffit de montrer que  $v = 0$ . Écrivons  $v$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ . On a alors  $0 = f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)$ . Comme la famille  $(f(v_1), \dots, f(v_n))$  est libre, on obtient  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$  et donc  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ .

2. Supposons que  $f$  est surjective et montrons que la famille  $(f(v_1), \dots, f(v_n))$  est génératrice. Soit  $w \in W$ . Comme  $f$  est surjective, il existe  $v \in V$  tel que  $w = f(v)$ .

On écrit maintenant  $v$  dans la bases  $\mathcal{B}$ . Il existe donc des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ . On obtient

$$\begin{aligned} w &= f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \\ &= \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) \in \langle f(v_1), \dots, f(v_n) \rangle. \end{aligned}$$

La famille  $(f(v_1), \dots, f(v_n))$  est donc génératrice.

Réciproquement, supposons que la famille  $(f(v_1), \dots, f(v_n))$  est génératrice et montrons que  $f$  est surjective. Soit  $w \in W$ . Comme la famille  $(f(v_1), \dots, f(v_n))$  est génératrice, il existe des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que  $w = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)$ . On a donc  $w = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)$  et  $w \in f(V)$ . L'application  $f$  est donc surjective.

3. Découle de 1. et 2. ■

On a vu au cours de la preuve de la Proposition 7.3.1 que les coordonnées des vecteurs vérifient les conditions suivantes : *les coordonnées d'une somme de deux vecteurs sont égales à la somme des coordonnées de chacun des vecteurs et que les coordonnées d'un multiple d'un vecteurs sont égal au même multiple des coordonnées*. Nous allons formaliser ce résultat.

**Proposition 7.3.3** Soit  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  une base d'un espace vectoriel  $V$ .

(i) Alors l'application  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow V$  définie par

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

est une application linéaire bijective (donc un isomorphisme).

(ii) On a donc un isomorphisme  $V \simeq \mathbb{R}^n$ .

(iii) La bijection réciproque  $f^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  est l'application linéaire qui à un vecteur  $v$  associe les coordonnées de  $v$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

*Preuve.* 1. On a

$$\begin{aligned} f\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) &= f\begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n + \mu y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i v_i + \mu y_i v_i) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n x_i v_i + \mu \sum_{i=1}^n y_i v_i = \lambda f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \mu f\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 7.1.5, l'application  $f$  est linéaire.

Montrons qu'elle est injective. Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \text{Ker}(f)$ , alors on a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$$

et comme  $(v_1, \dots, v_n)$  est libre, on a doit avoir  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0) = 0_{K^n}$  donc  $f$  est injective. L'image de  $f$  est l'ensemble des combinaisons linéaires de  $v_1, \dots, v_n$ . C'est donc  $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$  et comme  $(v_1, \dots, v_n)$  est génératrice, on a que  $f$  est surjective. L'application  $f$  est donc linéaire bijective. C'est un isomorphisme.

2. Découle de 1.

3. Soit  $v \in V$  et soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ses coordonnées dans la base  $(v_1, \dots, v_n)$ . On a  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ . De plus, comme  $f$  est bijective et que  $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ , on a que  $f^{-1}(v) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  est donnée par les coordonnées de  $v$  dans la base  $(v_1, \dots, v_n)$ . ■

## 7.4. L'espace vectoriel $\text{Hom}(V, W)$

Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels. L'ensemble des applications linéaires de  $V$  dans  $W$  est encore un espace vectoriel. En effet, on peut définir la somme  $+: \text{Hom}(V, W) \times \text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(V, W)$  et la multiplication scalaire  $\cdot: K \times \text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(V, W)$  de la manière suivante :

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v) \text{ pour } f, g \in \text{Hom}(V, W),$$

$$(\lambda \cdot f)(v) = \lambda f(v) \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R}, f \in \text{Hom}(V, W).$$

**Lemme 7.4.1** Ceci définit sur  $(\text{Hom}(V, W), +, \cdot)$  une structure d'espace vectoriel. □

*Preuve.* Exercice. ■

## 7.5. Applications linéaires et dimension

**Lemme 7.5.1** Soit  $f: V \rightarrow W$  une application linéaire et soit  $(v_1, \dots, v_n)$  une famille de vecteurs. Si  $(f(v_1), \dots, f(v_n))$  est libre, alors  $(v_1, \dots, v_n)$  est libre. □

*Preuve.* Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des scalaires tels que  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ . On a alors  $\lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = f(0) = 0$ . Mais comme  $(f(v_1), \dots, f(v_n))$  est libre, on a  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$  et  $(v_1, \dots, v_n)$  est libre. ■

**Lemme 7.5.2** Soit  $f: V \rightarrow W$  une application linéaire, alors on a  $\dim f(V) \leq \dim V$ . □

*Preuve.* Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base. Alors  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est génératrice de  $f(V)$  et donc par le Théorème 6.2.5, toute base de  $f(V)$  a moins d'éléments donc  $\dim f(V) \leq n = \dim V$ . ■

**Corollaire 7.5.3** Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels isomorphes (donc  $V \simeq W$ ) alors on a  $\dim V = \dim W$ .

*Preuve.* Soit  $f : V \rightarrow W$  un isomorphisme. C'est une application surjective donc  $W = f(V)$  et par le lemme précédent, on a  $\dim W = \dim f(V) \leq \dim V$ . Comme  $f^{-1} : W \rightarrow V$  est aussi linéaire, le même raisonnement donne  $\dim V \leq \dim W$ . ■

**Lemme 7.5.4** Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels tels que  $\dim V = \dim W < \infty$ , alors  $V$  et  $W$  sont isomorphes (on a donc  $V \simeq W$ ). □

*Preuve.* Soit  $n = \dim V = \dim W$ . Par la Proposition 7.3.3, il existe un isomorphisme  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow V$  et donc aussi un isomorphisme  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow W$ . La composée  $g \circ f^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow W$  est un isomorphisme. ■

**Définition 7.5.5** Soit  $f : V \rightarrow W$  une application linéaire. L'image de  $f$  est notée  $\text{Im}(f)$ . En symboles :  $\text{Im}(f) = f(V)$ .

**Théorème 7.5.6 (Théorème du rang)** Soit  $f : V \rightarrow W$  une application linéaire. Alors on a

$$\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = \dim V.$$

*Preuve.* Soit  $(w_1, \dots, w_r)$  une base de  $f(V)$ . Pour tout  $i \in [1, r]$ , on a  $w_i \in f(V)$  et donc il existe  $v_i \in V$  tel que  $f(v_i) = w_i$ . Soit  $(e_1, \dots, e_k)$  une base de  $\text{Ker}(f)$ . Nous allons montrer que  $(e_1, \dots, e_k, v_1, \dots, v_r)$  est une base de  $V$ . Ceci terminera la preuve car alors on aura

$$\dim V = k + r = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f).$$

Commençons par montrer que cette famille est génératrice. Soit  $v \in V$ , alors on a  $f(v) \in f(V) = \text{Im}(f)$  donc il existe des scalaires  $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}$  tels que

$$f(v) = \sum_{i=1}^r x_i w_i = \sum_{i=1}^r x_i f(v_i) = f\left(\sum_{i=1}^r x_i v_i\right).$$

On a donc  $v - \sum_{i=1}^r x_i v_i \in \text{Ker}(f)$  et il existe des scalaires  $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R}$  tels que

$$v - \sum_{i=1}^r x_i v_i = \sum_{j=1}^k y_j e_j.$$

On a donc

$$v = \sum_{i=1}^r x_i v_i + \sum_{j=1}^k y_j e_j$$

et  $v$  est combinaison linéaire des vecteurs  $(e_1, \dots, e_k, v_1, \dots, v_r)$ . Cette famille est donc génératrice.

Montrons maintenant qu'elle est libre. Soient  $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}$  et  $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R}$  des scalaires tels que

$$\sum_{i=1}^r x_i v_i + \sum_{j=1}^k y_j e_j = 0.$$

On a donc

$$0 = f\left(\sum_{i=1}^r x_i v_i + \sum_{j=1}^k y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^r x_i f(v_i) + \sum_{j=1}^k y_j f(e_j) = \sum_{i=1}^r x_i w_i.$$

Comme la famille  $(w_1, \dots, w_r)$  est libre, on doit avoir  $x_i = 0$  pour tout  $i \in [1, r]$ . On obtient

$$\sum_{j=1}^k y_j e_j = 0$$

et comme la famille  $(v_1, \dots, v_k)$  est libre, on doit avoir  $y_j = 0$  pour tout  $j \in [1, k]$ . On a donc que la famille  $(e_1, \dots, e_k, v_1, \dots, v_r)$  est libre et c'est donc une base.

Encore une fois, en résumé, on obtient  $\dim V = k + r = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f)$ . ■

**Définition 7.5.7** Soit  $f : V \rightarrow W$  une application linéaire. **Le rang de  $f$** , noté  $\text{Rg}(f)$ , est  $\text{Rg}(f) = \dim \text{Im}(f)$ .

**Corollaire 7.5.8** Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriel tels que  $\dim V = \dim W < \infty$  et soit  $f : V \rightarrow W$  une application linéaire. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est injective,
2.  $f$  est surjective,
3.  $f$  est bijective.

*Preuve.* (1.  $\Rightarrow$  2.) Si  $f$  est injective, alors on a  $\text{Ker}(f) = \{0\}$  donc  $\dim \text{Ker}(f) = 0$  ce qui donne par le théorème du rang  $\dim f(V) = \dim V = \dim W$ . Par le Corollaire 6.3.3, on a  $f(V) = W$  donc  $f$  est surjective.

(2.  $\Rightarrow$  3.) Supposons que  $f$  est surjective. Pour montrer qu'elle est bijective, il suffit de montrer qu'elle est injective et donc, comme c'est une application linéaire, que  $\text{Ker}(f) = \{0\}$ . Comme  $f$  est surjective, on a  $f(V) = W$  donc  $\dim f(V) = \dim W = \dim V$ . Par le théorème du rang, on obtient  $\dim \text{Ker}(f) = 0$  donc  $\text{Ker}(f) = \{0\}$ .

(3.  $\Rightarrow$  1.) Découle des définitions. ■

# 8. Matrices et applications linéaires

## 8.1. Opérations sur les matrices

Pour rappel, la définition d'une matrice que nous avons déjà utilisée pour résoudre les systèmes grâce à l'algorithme de Gauß.

**Définition 8.1.1** Soient  $m$  et  $n$  des entiers naturels.

- (i) **Une matrice  $A$  de taille  $m \times n$**  (à coefficients réels) est un tableau de nombres réels  $(a_{i,j})_{i \in [1,n], j \in [1,m]}$ . On la représente de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

- (ii) L'ensemble des matrices de taille  $m \times n$  à coefficients réels est noté  $M_{m,n}(\mathbb{R})$ .

- (iii) La matrice de taille  $m \times 1$

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}$$

est la  $j$ -ième colonne de  $A$ .

- (iv) La matrice de taille  $1 \times n$

$$(a_{i,1}, a_{i,2}, \cdots, a_{i,n})$$

est la  $i$ -ième ligne de  $A$ .

**Notation 8.1.2** Soient  $m$  et  $n$  des entiers naturels.

(i) Pour désigner la matrice  $A$  suivante

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

de manière plus compacte, on écrit aussi  $A = (a_{i,j})_{i \in [1,m], j \in [1,n]}$  ou encore  $A = (a_{i,j})$  lorsque la taille de la matrice est claire.

(ii) On écrit  $M_n(\mathbb{R})$  plutôt que  $M_{n,n}(\mathbb{R})$ . Une matrice ayant le même nombre de lignes et de colonnes est appelée **matrice carrée**.

La matrice  $A = (a_{i,j})$  dont tous les coefficients sont nuls :  $a_{i,j} = 0$  pour tous  $i, j$  est appelée **matrice nulle**. On écrit  $A = 0$ .

**Définition 8.1.3** Soient  $A = (a_{i,j})$  et  $B = (b_{i,j})$  dans  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  deux matrices de même taille. **La somme**  $A + B$  de  $A$  et  $B$  est la matrice de même taille définie par

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \cdots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \cdots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & a_{m,2} + b_{m,2} & \cdots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{pmatrix}.$$

L'application  $M_{m,n}(\mathbb{R}) \times M_{m,n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{m,n}(\mathbb{R})$ ,  $(A, B) \mapsto A + B$  est appelée **addition matricielle**.

**Définition 8.1.4** Soit  $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  une matrice et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  un réel. **La multiplication scalaire** de  $A$  et  $\lambda$  est définie par

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \cdots & \lambda a_{1,n} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \cdots & \lambda a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m,1} & \lambda a_{m,2} & \cdots & \lambda a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

L'application  $\mathbb{R} \times M_{m,n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{m,n}(\mathbb{R})$ ,  $(\lambda, A) \mapsto \lambda A$  est appelée **la multiplication scalaire des matrices**.

**Lemme 8.1.5** Le triplet  $(M_{m,n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$  est un espace vectoriel dont le vecteur nul est la matrice nulle. □

*Preuve.* Exercice. ■

**Définition 8.1.6** Soient  $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  et  $B = (b_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ . **Le produit** ou encore **la multiplication**  $AB$  de  $A$  et  $B$  est la matrice  $AB = (c_{i,j}) \in M_{m,p}(\mathbb{R})$  définie par

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,n}b_{n,j}.$$

L'application  $M_{m,n}(\mathbb{R}) \times M_{n,p}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{m,p}(\mathbb{R})$ ,  $(A, B) \mapsto AB$  est appelé **multiplication matricielle**.

**Exemple 8.1.7** On a les produits suivants

(i) Le produit est non commutatif :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En particulier on voit que la multiplication matricielle n'est pas commutative :  $AB \neq BA$  en général.

(ii) La matrice identité

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

En particulier la matrice

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est très facile à multiplier. Il faut remarquer qu'il est aussi très facile de résoudre un système associé à cette matrice et qu'elle joue un rôle important pour la résolution des systèmes : c'est la seule matrice échelonnée réduite qu'on obtient lorsqu'il y a exactement une solution !

On a les formules suivantes pour le produit matriciel.

**Proposition 8.1.8** Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $A, A' \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ,  $B, B' \in M_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $C \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ .

Associativité scalaire On a  $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$  et  $\lambda(AB) = (\lambda A)B$ .

Linéarité à gauche On a  $(\lambda A + \mu A')B = \lambda AB + \mu A'B$

linéarité à droite On a  $A(\lambda B + \mu B') = \lambda AB + \mu AB'$

Associativité On a  $(AB)C = A(BC)$ .

*Preuve.* Exercice. ■

## 8.2. Base canonique des matrices

Il existe des matrices particulièrement simples qui forment la base canonique des matrices et joue le rôle de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 8.2.1** Soient  $k \in [1, m]$  et  $l \in [1, n]$  deux entiers. On définit la matrice  $E_{k,l} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  par  $E_{k,l} = (e_{i,j})$  avec

$$e_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = k \text{ et } j = l, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Lemme 8.2.2** La famille de vecteurs  $(E_{k,l})_{k \in [1,m], l \in [1,n]}$  forme une base de  $M_{m,n}(\mathbb{R})$ .  $\square$

*Preuve.* Soient  $(\lambda_{k,l})_{k \in [1,m], l \in [1,n]}$  des scalaires tels que

$$\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \lambda_{k,l} E_{k,l} = 0.$$

On obtient en termes de matrices

$$(\lambda_{i,j}) = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,n} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \cdots & \lambda_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m,1} & \lambda_{m,2} & \cdots & \lambda_{m,n} \end{pmatrix} = 0.$$

On a donc  $\lambda_{i,j} = 0$  pour tout  $i$  et tout  $j$  et la famille est libre.

Soit  $A = (a_{i,j})$  une matrice. Le calcul précédent nous montre que l'on a

$$A = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{k,l} E_{k,l}$$

et la famille est donc génératrice. ■

**Corollaire 8.2.3** On a  $\dim M_{m,n}(\mathbb{R}) = mn$ .

## 8.3. Matrices inversibles, inverse d'une matrice

**Définition 8.3.1** Soit  $n$  un entier naturel. La **matrice identité de taille  $n$**  est la matrice carrée  $I_n \in M_n(\mathbb{R})$  définie par  $I_n = (a_{i,j})_{i,j \in [1,n]}$  avec

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Proposition 8.3.2** La matrice identité est un élément **neutre** pour la multiplication :

- (i) On a  $AI_n = A$  pour toute matrice  $A \in M_{m,n}$ .
- (ii) On a  $I_n B = B$  pour toute matrice  $B \in M_{n,p}$ .

*Preuve.* Exercice. ■

**Définition 8.3.3** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice carrée.

- (i) La matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  est dite **inversible** s'il existe une matrice  $B \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $AB = BA = I_n$ .
- (ii) Une matrice  $B \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $AB = BA = I_n$ , si elle existe est appelée **inverse** de  $A$ .

**Proposition 8.3.4** Soient  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  deux matrices inversible. Alors  $AB$  est inversible et son inverse est  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

*Preuve.* On calcule  $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_n A^{-1} = AA^{-1} = I_n$  et  $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_n B = B^{-1}B = I_n$  ce qui prouve bien que  $AB$  est inversible d'inverse  $B^{-1}A^{-1}$ . ■

## 8.4. Matrices et algorithme de Gauß

Nous allons montrer que les opérations sur les lignes qui interviennent dans l'algorithme de Gauß correspondent à la multiplication par des matrices.

**Définition 8.4.1** Soit  $n$  un entier.

- (i) Soient  $1 \leq p, q \leq n$  des entiers avec  $p \neq q$  et soit  $a \in \mathbb{R}_R$ . On définit la matrice  $T_{p,q}^{(n)}(a) = T_{p,q}(a) = (t_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$  de la manière suivante :

$$t_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ a & \text{si } (i, j) = (p, q), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (ii) Soit  $1 \leq p \leq n$  et soit  $b \in \mathbb{R}_R \setminus \{0\}$ . On définit la matrice  $D_p^{(n)}(b) = D_p(b) = (d_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$  de la manière suivante :

$$d_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \neq p, \\ b & \text{si } i = j = p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(iii) Soient  $1 \leq p, q \leq n$ . On définit la matrice  $E_{p,q}^{(n)} = E_{p,q} = (e_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$  de la manière suivante

$$e_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } q \neq i = j \neq p, \\ 1 & \text{si } (i,j) = (p,q), \\ 1 & \text{si } (i,j) = (q,p), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les matrices de la forme  $T_{p,q}^{(n)}(a)$ ,  $D_p^{(n)}(b)$  et  $E_{p,q}^{(n)}$  sont appelées respectivement **matrices élémentaires de type I, II ou III**.

**Remarque 8.4.2** On a les égalités  $E_{p,q} = E_{q,p} = P_{\tau_{p,q}}$  et  $E_{p,p} = I_n$ .

**Exemple 8.4.3** On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} T_{2,3}^{(4)}(a) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & T_{3,2}^{(4)}(a) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ D_1^{(4)}(b) &= \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & D_3^{(4)}(b) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ E_{2,3}^{(4)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & E_{1,4}^{(4)}(a) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Lemme 8.4.4** Les matrices  $T_{p,q}^{(n)}(a)$ ,  $D_p^{(n)}(b)$  et  $E_{p,q}^{(n)}$  sont inversibles. □

*Preuve.* En effet, on a

$$\begin{aligned} T_{p,q}^{(n)}(a)T_{p,q}^{(n)}(-a) &= I_n = T_{p,q}^{(n)}(-a)T_{p,q}^{(n)}(a) \\ D_p^{(n)}(b)D_p^{(n)}(b^{-1}) &= I_n = D_p^{(n)}(b^{-1})D_p^{(n)}(b) \\ E_{p,q}^{(n)}E_{p,q}^{(n)} &= I_n \end{aligned}$$

**Lemme 8.4.5 (Opérations sur les lignes)** Soient  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ,  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}^\times$ .

- (I) Le produit  $T_{p,q}^{(n)}(a)A$  est obtenu à partir de  $A$  en ajoutant  $a$  fois la  $q$ -ième ligne de  $A$  à la  $p$ -ième ligne de  $A$ .
- (II) Le produit  $D_p^{(n)}(b)A$  est obtenu à partir de  $A$  en multipliant la ligne  $p$  par  $b$ .
- (III) Le produit  $E_{p,q}^{(n)}A$  est obtenu à partir de  $A$  en échangeant les lignes  $p$  et  $q$ . □

*Preuve.* Exercice. ■

**Lemme 8.4.6** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice échelonnée réduite. Alors  $A$  est inversible si et seulement si son rang vaut  $n$ .  $\square$

*Preuve.* Si le rang de  $A$  vaut  $n$ , alors  $A = I_n$  et  $A^{-1} = I_n$  est son inverse. Si le rang de  $A$  est strictement inférieur à  $n$ , alors  $A$  a une ligne nulle et tous les produits  $AB$  auront cette même ligne nulle. On ne pourra donc jamais obtenir  $AB = I_n$  et  $A$  n'est pas inversible.  $\blacksquare$

**Lemme 8.4.7** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et soit  $B \in M_n(\mathbb{R})$  telles que  $B$  est inversible. Alors on a

$$A \text{ est inversible} \Leftrightarrow BA \text{ est inversible} \Leftrightarrow AB \text{ est inversible.}$$

*Preuve.* Si  $A$  est inversible, alors il existe  $A^{-1}$ . On a  $(AB)B^{-1}A^{-1} = I_n$  et  $(BA)A^{-1}B^{-1} = I_n$  donc  $AB$  est inversible d'inverse  $B^{-1}A^{-1}$  et  $BA$  est inversible d'inverse  $A^{-1}B^{-1}$ .

Si  $BA$  est inversible d'inverse  $(BA)^{-1}$ , alors  $(BA)^{-1}BA = I_n$  donc  $A$  est inversible.

Si  $AB$  est inversible d'inverse  $(AB)^{-1}$ , alors  $AB(AB)^{-1} = I_n$  donc  $A$  est inversible.  $\blacksquare$

**Théorème 8.4.8** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice carrée.

- (i) La matrice  $A$  est inversible si et seulement si la matrice échelonnée réduite obtenue à partir de  $A$  par l'algorithme de Gauß est la matrice  $I_n$ .
- (ii) L'inverse de  $A$  est obtenu de la manière suivante :
  - a) on définit  $M = (A|I_n)$  qui est une matrice avec  $n$  lignes et  $2n$  colonnes.
  - b) On applique l'algorithme de Gauß à  $M$
  - c) On obtient une matrice de la forme  $(I_n|A^{-1})$  et les  $n$  dernières colonnes de la matrice obtenue forment la matrice inverse  $A^{-1}$ .  $\square$

*Preuve.* Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice. On effectue l'algorithme de Gauß sur la matrice  $M = (A|I_n)$ . On multiplie donc la matrice  $M$  à gauche par une matrice  $B$  inversible. On obtient la matrice  $(BA|BI_n) = (BA|B)$ . De plus la matrice  $BA$  est échelonnée réduite. Elle est inversible si et seulement si c'est la matrice identité. La matrice  $A$  est inversible si et seulement si  $BA$  est inversible donc si et seulement si  $BA = I_n$  ce qui prouve 1.

De plus si  $A$  est inversible, après l'algorithme de Gauß la matrice  $M = (A|I_n)$  devient  $(BA|B)$  avec  $BA = I_n$  donc  $B = A^{-1}$  et on a bien  $(BA|B) = (I_n|A^{-1})$ .  $\blacksquare$

## 8.5. Matrice d'une application linéaire

**Proposition 8.5.1** Soit  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  une matrice. Alors l'application  $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  définie par  $X \mapsto AX$  est une application linéaire.

*Preuve.* Soient  $X, X' \in \mathbb{R}^n = M_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a  $f_A(X + \lambda X') = A(X + \lambda X') = AX + \lambda AX' = f_A(X) + \lambda f_A(X')$  par la proposition précédente donc  $f_A$  est linéaire. ■

**Remarque 8.5.2** Nous verrons que toute application linéaire  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est de la forme précédente  $f = f_A$  pour une certaine matrice  $A$  : la matrice de  $f$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$ .

**Proposition 8.5.3** Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice carrée et soit  $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'application linéaire associée définie par  $f_A(X) = AX$ . On a alors

$$f_A \text{ est bijective} \Leftrightarrow A \text{ est inversible.}$$

*Preuve.* ( $\Leftarrow$ ) Supposons que  $A$  est inversible et soit  $A^{-1}$  son inverse. On montre que  $f_{A^{-1}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est l'application réciproque de  $f_A$  qui sera donc bijective. On a  $f_A \circ f_{A^{-1}}(X) = f_A(A^{-1}X) = AA^{-1}X = I_n X = X$  et  $f_{A^{-1}} \circ f_A(X) = f_{A^{-1}}(AX) = A^{-1}AX = I_n X = X$ .

( $\Rightarrow$ ) Voir Corollaire 8.5.8 ■

Nous avons vu à la Proposition 7.3.1 qu'une application linéaire est complètement déterminée par l'image d'une base. Nous allons utiliser cette propriété pour remplacer la donnée d'une application linéaire par la donnée d'une matrice. Ceci peut s'avérer très utile pour les manipulation pratique (par exemple le traitement informatique des applications linéaires).

**Définition 8.5.4** Soit  $f : V \rightarrow W$  une application linéaire. Soit  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  une base de  $V$  et soit  $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$  une base de  $W$ . On construit une matrice appelée **matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$**  et notée  $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$  de la manière suivante :

- (i) Pour chaque vecteur  $v_j$  de la base  $\mathcal{B}$ , on écrit  $f(v_j)$  dans la base  $\mathcal{C}$  :

$$f(v_j) = a_{1,j}w_1 + \dots + a_{m,j}w_m.$$

- (ii) On place les coordonnées du vecteur  $f(v_j)$  dans la  $j$ -ième colonne de la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$  :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

- (iii) Lorsque la base de départ  $\mathcal{B}$  et la base d'arrivée  $\mathcal{C}$  sont les mêmes, on écrit seulement l'une des deux, en symboles :  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) := \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ .

**Exemple 8.5.5** On donne deux exemples.

- (i) Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la projection sur les deux premières coordonnées. Elle est définie par  $f(x, y, z) = (x, y)$  et est linéaire. On détermine sa matrice dans les bases canoniques  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$  et  $\mathcal{C} = (w_1, w_2)$  données par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$f(v_1) = f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.w_1 + 0.w_2,$$

$$f(v_2) = f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.w_1 + 1.w_2, \quad \text{et}$$

$$f(v_3) = f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.w_1 + 0.w_2.$$

On écrit les coordonnées de ces vecteurs dans les colonnes de la matrice :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (ii) Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la symétrie par rapport à la droite d'équation  $y = x$ . Elle est définie par  $f(x, y) = (y, x)$  et est linéaire. On détermine sa matrice dans les bases  $\mathcal{B} = (v_1, v_2) = \mathcal{C} = (w_1, w_2)$  avec

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$f(v_1) = f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.w_1 + 1.w_2 \quad \text{et}$$

$$f(v_2) = f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.w_1 + 0.w_2.$$

On écrit les coordonnées de ces deux vecteurs dans les colonnes de la matrice :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (iii) Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application identité. Elle est définie par  $f(x, y) = (x, y)$  et est linéaire. On détermine sa matrice dans les bases  $\mathcal{B} = (v_1, v_2) = (w_1, w_2) = \mathcal{C}$  avec

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$f(v_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.w_1 + 0.w_2 \text{ et}$$

$$f(v_2) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.w_1 + 1.w_2.$$

On écrit les coordonnées de ces deux vecteurs dans les colonnes de la matrice :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Plus généralement on a l'exemple suivant.

**Proposition 8.5.6** Soit  $\mathcal{B}_{\text{can}} = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

- (i) Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application linéaire et soit  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ , alors on a  $f_A = f$  où  $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est l'application définie par  $f_A(X) = AX$ .
- (ii) En particulier, on a  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_{\mathbb{R}^n}) = I_n$ .

*Preuve.* (i) Il suffit de montrer que l'on a  $f(e_i) = f_A(e_i)$  pour tout  $i \in [1, n]$ . Mais  $f_A(e_i) = Ae_i$  est la  $i$ -ème colonne de  $A$  et  $f(e_i)$  aussi ce qui prouve le résultat.

(ii) Il s'agit de décrire la matrice dont les vecteurs colonnes sont les éléments de la base canonique. Le résultat en découle. ■

**Proposition 8.5.7** Soit  $V, W$  et  $U$  trois espaces vectoriels et  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ ,  $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$  et  $\mathcal{D} = (u_1, \dots, u_r)$  des bases de  $V, W$  et  $U$ . Alors on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f).$$

*Preuve.* Soit  $A = (a_{i,j}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$  et  $B = (b_{k,l}) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(g)$ . On a donc  $f(v_i) = a_{1,i}w_1 + \dots + a_{m,i}w_m$  et donc  $(g \circ f)(v_i) = g(f(v_i)) = g(a_{1,i}w_1 + \dots + a_{m,i}w_m) = a_{1,i}g(w_1) + \dots + a_{m,i}g(w_m) = a_{1,i}(b_{1,1}u_1 + \dots + b_{r,1}u_r) + \dots + a_{m,i}(b_{1,m}u_1 + \dots + b_{r,m}u_m) = (b_{1,1}a_{1,i} + b_{1,2}a_{2,i} + \dots + b_{1,m}a_{m,i})u_1 + \dots + (b_{r,1}a_{1,i} + b_{r,2}a_{2,i} + \dots + b_{r,m}a_{m,i})u_r$ . Ainsi la colonne  $i$  de la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}(g \circ f)$  est donnée par  $(b_{1,1}a_{1,i} + b_{1,2}a_{2,i} + \dots + b_{1,m}a_{m,i}, \dots, (b_{r,1}a_{1,i} + b_{r,2}a_{2,i} + \dots + b_{r,m}a_{m,i}))$  ce qui est bien la colonne  $i$  de la matrice  $BA$ . ■

Nous pouvons maintenant terminer la preuve de la Proposition 8.5.3.

**Corollaire 8.5.8** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice carrée et soit  $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'application linéaire associée définie par  $f_A(X) = AX$ . On a alors

$$f_A \text{ est bijective} \Leftrightarrow A \text{ est inversible.}$$

*Preuve.* Nous avons déjà montré à la Proposition 8.5.3 l'implication  $(\Leftarrow)$  montrons la réciproque. L'application  $f_A$  est linéaire et bijective donc sa réciproque  $f_A^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est aussi linéaire. Soit  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_A^{-1})$ . Alors par les propositions précédentes, on a  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_A)$  et donc  $AA^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ f^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_{\mathbb{R}^n}) = I_n$  et  $A^{-1}A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1})\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1} \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_{\mathbb{R}^n}) = I_n$  ce qui montre le résultat. ■

**Proposition 8.5.9** Soit  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels et  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  et  $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$  des bases de  $V$  et  $W$ .

(i) L'application

$$\text{Hom}(V, W) \rightarrow M_{m,n}(\mathbb{R}), f \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$$

est une application linéaire et est bijective.

(ii) On a donc un isomorphisme  $\text{Hom}(V, W) \simeq M_{m,n}(\mathbb{R})$ .

*Preuve.* (i) Soient  $f : V \rightarrow W$  et  $f' : V \rightarrow W$  sont deux applications linéaires et soient  $(a_{i,j}) = A = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$  et  $(a'_{i,j}) = A' = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f')$  leurs matrices dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ . On a alors  $(f + f')(v_i) = f(v_i) + f'(v_i) = (a_{1,i}w_1 + \dots + a_{m,i}w_m) + (a'_{1,i}w_1 + \dots + a'_{m,i}w_m) = (a_{1,i} + a'_{1,i})w_1 + \dots + (a_{m,i} + a'_{m,i})w_m$ . Ainsi la colonne  $i$  de  $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f + f')$  est la somme des colonnes  $i$  des matrices  $A$  et  $A'$  donc  $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f + f') = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f')$ .

Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a aussi  $(\lambda f)(v_i) = \lambda f(v_i) = \lambda(a_{1,i}w_1 + \dots + a_{m,i}w_m) = (\lambda a_{1,i})w_1 + \dots + (\lambda a_{m,i})w_m$ . Ainsi la colonne  $i$  de  $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda f)$  est égale à la colonne  $i$  de la matrice  $A$  multipliée par  $\lambda$  donc  $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\lambda f) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ . L'application est donc bien linéaire.

Pour montrer qu'elle est bijective, il suffit de construire une application réciproque. Soit  $(a_{i,j} = A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  une matrice. On définit une application linéaire  $F_A : V \rightarrow W$  de la manière suivante. Pour définir l'application  $F_A$  il suffit de donner l'image d'une base. On donne l'image de la base  $\mathcal{B}$  en posant  $F_A(v_i) = a_{1,i}w_1 + \dots + a_{m,i}w_m$ . On voit alors que par définition de la matrice d'une application linéaire, on a  $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(F_A) = A$  et que si  $f \in \text{Hom}(V, W)$ , on a  $F_{\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)} = f$ . Ceci montre que ces deux applications sont réciproque l'une de l'autre et termine la preuve.

(ii) Découle de (i). ■

## 8.6. Changement de base

Soit  $f : V \rightarrow W$  une application linéaire et soient  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  des bases de  $V$  et  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  des bases de  $W$ . On cherche à comprendre le lien entre les matrices  $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$  und  $\text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$ .

**Théorème 8.6.1** Soit  $f : V \rightarrow W$  une application linéaire, soient  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  des bases de  $V$  et soient  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  des bases de  $W$ . Alors, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}(\text{Id}_W) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_V).$$

*Preuve.* Posons  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ ,  $\mathcal{B}' = (v'_1, \dots, v'_n)$ ,  $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$  et  $\mathcal{C}' = (w'_1, \dots, w'_m)$ . Posons également  $(a_{i,j}) = A = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}(\text{Id}_W)$ ,  $(b_{i,j}) = B = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$  et  $(c_{i,j}) = C = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_V)$ .

On cherche à calculer  $f(v'_i)$  dans la base  $\mathcal{C}' = (w'_1, \dots, w'_m)$ . On commence par écrire  $v'_i$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On a  $v'_i = \text{Id}_V(v'_i)$  donc la  $i$ -ème colonne de  $C$  donne :  $v'_i = c_{1,i}v_1 + \dots + c_{n,i}v_n = \sum_{k=1}^n c_{k,i}v_k$ .

On calcule ensuite  $f(v'_i)$  :

$$f(v'_i) = f\left(\sum_{k=1}^n c_{k,i}v_k\right) = \sum_{k=1}^n c_{k,i}f(v_k).$$

En utilisant la matrice  $B$ , on a  $f(v_k) = \sum_{j=1}^m b_{j,k}w_j$  ce qui donne

$$f(v'_i) = \sum_{k=1}^n c_{k,i} \sum_{j=1}^m b_{j,k}w_j = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m c_{k,i}b_{j,k}w_j.$$

On termine en exprimant  $w_j$  dans la base  $\mathcal{C}' = (w'_1, \dots, w'_m)$ . Comme  $w_j = \text{Id}_W(w_j)$ , la  $j$ -ème colonne de la matrice  $A$  donne  $w_j = \sum_{r=1}^m a_{r,j}w'_r$ . On obtient donc

$$f(v'_i) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m c_{k,i}b_{j,k}w_j = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m c_{k,i}b_{j,k} \sum_{r=1}^m a_{r,j}w'_r.$$

Ainsi le coefficient  $i, r$  de la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f)$  est

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^m c_{k,i}b_{j,k}a_{r,j}.$$

Il est facile de vérifier que c'est le coefficient  $(i, r)$  du produit  $ABC$ . ■

## 9. Somme directe

### 9.1. Somme rappels

Rappelons la définition de la somme de sous-espaces vectoriels.

**Définition 9.1.1** Soit  $V$  un espace vectoriel.

- (i) Soient  $U$  et  $W$  des sous-espaces vectoriels de  $V$ . **La somme de  $U$  et  $W$**  est le sous-espace vectoriel de  $V$  défini par

$$U + W = \{v \in V \mid v = u + w \text{ avec } u \in U \text{ et } w \in W\}.$$

- (ii) Soit  $(U_i)_{i \in [1, n]}$  une famille de sous-espaces vectoriels de  $V$ . **La somme des  $(U_i)_{i \in [1, n]}$**  est le sous-espace vectoriel de  $V$  défini par

$$\sum_{i \in I} U_i = \left\{ v \in V \mid v = \sum_{i=1}^n u_i \text{ avec } u_i \in U_i \right\}.$$

**Exemple 9.1.2** Soit  $V = \mathbb{R}^3$  et soient

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Soit  $U = \langle e_1 \rangle$  et  $W = \langle e_2 \rangle$ . Alors on a  $v_1, v_2 \in U + W$  mais  $v_3 \notin U + W$ .  
(ii) Soit  $U = \langle e_1, e_2 \rangle$  et  $W = \langle v_1 \rangle$ , alors on a  $U + W = U$ .  
(iii) Soit  $U = \langle e_1, e_2 \rangle$  et  $W = \langle v_3 \rangle$ , alors on a  $U + W = V = \mathbb{R}^3$ .

### 9.2. Somme directe

**Définition 9.2.1** Soient  $U$  et  $W$  deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel  $V$ .

- (i) On dit que  $U$  et  $W$  sont en **somme directe** si  $U \cap W = \{0\}$ .  
(ii) Si  $U$  et  $W$  sont en somme directe, on écrit la somme  $U + W$  sous la forme  $U + W = U \oplus W$ .

**Lemme 9.2.2** Soient  $U$  et  $W$  deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel  $V$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Les sous-espaces  $U$  et  $W$  sont en somme directe.
- (ii) Pour tout  $v \in U + W$ , il existe une écriture unique  $v = u + w$  avec  $u \in U$  et  $w \in W$ .
- (iii) Pour  $u \in U$  et  $w \in W$ , si on a  $u + w = 0$ , alors  $u = 0 = w$ . □

*Preuve.* (1.  $\Rightarrow$  2.) Supposons que  $U$  et  $W$  sont en somme directe i.e.  $U \cap W = 0$ . Soient  $u + w = v = u' + w'$  deux écritures de  $v$  avec  $u, u' \in U$  et  $w, w' \in W$ . On a alors  $u - u' = w' - w$  et ce vecteur est à la fois dans  $U$  et dans  $W$ . Il doit donc être nul. On obtient  $u = u'$  et  $w = w'$ .

(2.  $\Rightarrow$  3.) Supposons que tout vecteur  $v \in U + W$  a une unique écriture sous la forme  $v = u + w$  avec  $u \in U$  et  $w \in W$ . Soient maintenant  $u \in U$  et  $w \in W$  tels que  $u + w = 0$ . On a  $0 \in U + W$  et  $0$  a une autre écriture de cette forme : pour  $u' = 0 \in U$  et  $w' = 0 \in W$ , on a aussi  $u + w = 0 = u' + w'$ . Comme cette écriture est unique par hypothèse, on doit avoir  $u = u'$  et  $w = w'$  donc  $u = 0$  et  $w = 0$ .

(3.  $\Rightarrow$  1.) Supposons que pour tout  $u \in U$  et tout  $w \in W$  tels que  $u + w = 0$ , on ait  $u = w = 0$ . Soit maintenant  $v \in U \cap W$ . Posons  $u = v \in U$  et  $w = -v \in W$ . On a alors  $u + w = 0$  avec  $u \in U$  et  $w \in W$  et par hypothèse, on obtient  $u = w = 0$  donc  $v = 0$ . ■

**Exemple 9.2.3** Dans l'exemple 9.1.2, les espaces  $U$  et  $W$  sont en somme directe dans les cas 1 et 3.

**Théorème 9.2.4** Soient  $U$  et  $W$  deux sous-espaces vectoriels du même espace vectoriel  $V$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1. Les sous-espaces  $U$  et  $W$  sont en sommes directe.
- 2. On a  $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ . □

*Preuve.* (1.  $\Rightarrow$  2.) Soit  $(u_1, \dots, u_m)$  une base de  $U$  et soit  $(w_1, \dots, w_r)$  une base de  $W$ . On a donc  $m = \dim U$  et  $r = \dim W$ . Montrons que  $(u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_r)$  est une base de  $U + W = U \oplus W$ . Comme tout vecteur de  $U + W$  est somme d'un vecteur de  $U$  et d'un vecteur de  $W$  cette famille est génératrice. Montrons qu'elle est libre. Soient  $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_r$  des scalaires tels que

$$x_1 u_1 + \dots + x_m u_m + y_1 w_1 + \dots + y_r w_r = 0.$$

Comme la somme est directe, on a

$$x_1 u_1 + \dots + x_m u_m = 0 \text{ et } y_1 w_1 + \dots + y_r w_r = 0.$$

Mais les deux familles  $(u_1, \dots, u_m)$  et  $(w_1, \dots, w_r)$  sont libres (ce sont des bases de  $U$  et  $W$ ), donc on a  $x_i = 0 = y_j$  pour tout  $i \in [1, m]$  et  $j \in [1, r]$ . La famille  $(u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_r)$  est donc une base de  $U + W$  qui est de dimension  $m + r = \dim U + \dim W$ .

(2.  $\Rightarrow$  1.) Soit  $(u_1, \dots, u_m)$  une base de  $U$  et soit  $(w_1, \dots, w_r)$  une base de  $W$ . On a donc  $m = \dim U$  et  $r = \dim W$ . Par hypothèse, on a  $m + r = \dim(U + W)$ . Comme ci-dessus, la famille  $(u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_r)$  est génératrice de  $U + W$  et a  $\dim(U + W)$  éléments. C'est donc une base de  $U + W$ . Nous allons utiliser ce fait pour terminer la preuve.

Soient  $u \in U$  et  $w \in W$  tels que  $u + w = 0$ . Il existe alors des scalaires  $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_r$  tels que

$$u = x_1 u_1 + \dots + x_m u_m \text{ et } w = y_1 w_1 + \dots + y_r w_r.$$

Par ailleurs, on a

$$0 = u + w = x_1 u_1 + \dots + x_m u_m + y_1 w_1 + \dots + y_r w_r.$$

Comme la famille  $(u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_r)$  est une base, on obtient  $x_1 = \dots = x_m = y_1 = \dots = y_r = 0$  i.e.  $u = 0$  et  $w = 0$  ce qui termine la preuve. ■

### 9.3. Somme directe de plus de deux sous-espaces vectoriels

**Définition 9.3.1** Soit  $(U_i)_{i \in I}$  une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $V$ . Les sous-espaces sont dits en **somme direct**, si tout vecteur  $v \in \sum_{i \in I} U_i$  a une unique écriture sous la forme

$$v = \sum_{i \in I} u_i \text{ avec } u_i \in U_i \text{ pour tout } i \in I.$$

Dans ce cas on écrit

$$\sum_{i \in I} U_i = \bigoplus_{i \in I} U_i.$$

**Théorème 9.3.2** Soit  $(U_i)_{i \in I}$  une famille de sous-espaces vectoriels de  $V$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Les sous-espaces vectoriels  $(U_i)_{i \in I}$  sont en somme directe.
- (ii) Si pour  $u_i \in U_i$  pour tout  $i \in I$ , on a  $\sum_{i \in I} u_i = 0$ , alors  $u_i = 0$  pour tout  $i \in I$ .
- (iii) Pour tout  $j \in I$ , on a  $U_j \cap \sum_{i \in I, i \neq j} U_i = 0$ . □

*Preuve.* (1.  $\Rightarrow$  2.) Pour tout  $i \in I$ , soit  $u_i \in U_i$ . Supposons que l'on a  $\sum_{i \in I} u_i = 0$ . Définissons les vecteurs  $(u'_i)_{i \in I}$  par  $u'_i = 0 \in U_i$  pour tout  $i \in I$ . Alors on a deux écritures  $\sum_{i \in I} u_i = 0 = \sum_{i \in I} u'_i$  du même vecteur  $0$ . Comme les sous-espaces sont en somme directe, ces deux écritures sont les mêmes donc  $u_i = u'_i = 0$  pour tout  $i \in I$ .

(2.  $\Rightarrow$  3.) Soit  $v \in U_j \cap \sum_{i \in I, i \neq j} U_i$ . On a donc des éléments  $u_i \in U_i$  pour tout  $i \neq j$  tels que  $\sum_{i \in I, i \neq j} u_i = v$ . Posons  $u_j = -v \in U_j$ . On a alors

$$\sum_{i \in I} u_i = 0.$$

Par hypothèse, ceci impose que  $u_i = 0$  pour tout  $i \in I$  et en particulier on a  $v = -u_j = 0$ .

(3.  $\Rightarrow$  1.) Soient  $u_i, u'_i \in U_i$  pour tout  $i \in I$  tels que

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u'_i,$$

deux écritures du même vecteur. Soit  $j \in I$ , on a

$$u_j - u'_j = \sum_{i \in I, i \neq j} u'_i - \sum_{i \in I, i \neq j} u_i.$$

Ce vecteur est dans l'intersection  $U_j \cap \sum_{i \in I, i \neq j} U_i = 0$ . Donc  $u_j - u'_j = 0$  et donc  $u_j = u'_j$ . Ceci est vrai pour tout  $j \in J$ , donc on a  $u_i = u'_i$  pour tout  $i \in I$ . ■

## 9.4. Supplémentaire

**Définition 9.4.1** Soit  $U$  un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel  $V$ . Un sous-espace vectoriel  $W$  de  $V$  est dit **supplémentaire de  $U$  dans  $V$** , si on a  $V = U \oplus W$ .

**Exemple 9.4.2** (i) L'espace  $V$  est un supplémentaire de  $0$  dans  $V$  et l'espace  $0$  est un supplémentaire de  $V$  dans  $V$ .

(ii) Soient  $U$  et  $W$  tels que  $U \oplus W = V$ , alors  $W$  est un supplémentaire de  $U$  dans  $V$  et  $U$  est un supplémentaire de  $W$  dans  $V$ .

(iii) Soit  $V = \mathbb{R}^2$  et soient  $v_1, v_2, v_3 \in V$  définis par :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit  $U = \langle v_1 \rangle$ . Alors  $W_2 = \langle v_2 \rangle$  et  $W_3 = \langle v_3 \rangle$  sont deux supplémentaires (différents) de  $U$  dans  $V$ .

**Lemme 9.4.3** Soit  $U$  un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $V$ . Alors il existe toujours un supplémentaire  $W$  de  $U$  dans  $V$ . □

*Preuve.* Soit  $(u_1, \dots, u_m)$  une base de  $U$  et soit  $(v_1, \dots, v_n)$  une base de  $V$ . La famille  $(u_1, \dots, u_m)$  est libre dans  $V$  et la famille  $(v_1, \dots, v_n)$  est génératrice de  $V$ . On peut donc compléter la famille  $(u_1, \dots, u_m)$  avec des éléments de  $(v_1, \dots, v_n)$  pour obtenir une base  $(u_1, \dots, u_m, v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$  de  $V$ . On pose alors  $W = \langle v_{i_1}, \dots, v_{i_k} \rangle$ . Montrons que  $W$  est un supplémentaire de  $U$  dans  $V$ .

Comme la famille  $(u_1, \dots, u_m, v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$  est génératrice de  $V$ , on a  $V = U + W$ . De plus, on a  $\dim U = m$ ,  $\dim W = k$  et  $\dim V = m + k$ . On a donc  $\dim V = \dim U + \dim W$  et la somme est directe. ■

**Théorème 9.4.4 (Formule de Graßmann)** Soient  $U$  et  $W$  des sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel  $V$ . Alors on a la formule

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W.$$

*Preuve.* Soit  $R$  un supplémentaire de  $U \cap W$  dans  $U + W$  et soient  $U'$  et  $W'$  des supplémentaires de  $U \cap W$  dans  $U$  et dans  $W$ . On a

$$U + W = R \oplus (U \cap W), \quad U = (U \cap W) \oplus U' \quad \text{et} \quad W = (U \cap W) \oplus W'.$$

On a donc  $\dim(U + W) = \dim R + \dim(U \cap W)$ ,  $\dim U = \dim U' + \dim(U \cap W)$  et  $\dim W = \dim W' + \dim(U \cap W)$ . On obtient  $\dim(U + W) + \dim(U \cap W) - (\dim U + \dim W) = \dim R - (\dim U' + \dim W')$ . Nous aurons besoin du lemme suivant.

**Lemme 9.4.5** On a  $U' + W' = U' \oplus W'$  et  $U' \oplus W'$  est un supplémentaire de  $U \cap W$  dans  $U + W$ . □

*Preuve.* Soit  $v \in U' \cap W'$ , on a  $v \in U \cap W$  et  $v \in U'$ . Comme  $U' \cap (U \cap W) = 0$ , on obtient  $v = 0$ . La somme  $U' + W'$  est directe.

Remarquons que  $U \cap W$  et  $U' \oplus W'$  sont des sous-espaces de  $U + W$  donc on a  $(U' \oplus W') + (U \cap W) \subset U + W$ . Montrons l'inclusion réciproque. Soit  $v \in U + W$ . Il existe  $u \in U$  et  $w \in W$  tels que  $v = u + w$ . Comme on a  $U = U' \oplus (U \cap W)$  et  $W = W' \oplus (U \cap W)$ , il existe  $u' \in U'$  et  $v' \in U \cap W$  tels que  $u = u' + v'$  et il existe  $w' \in W'$  et  $v'' \in U \cap W$  tels que  $w = w' + v''$ . On a donc

$$v = u + w = u' + v' + w' + v'' = u' + w' + (v' + v''),$$

avec  $u' \in U'$ ,  $w' \in W'$  et  $v' + v'' \in U \cap W$ . On a donc  $v \in (U' \oplus W') + (U \cap W)$  ce qui montre l'égalité  $(U' \oplus W') + (U \cap W) = U + W$ . Montrons que la somme est directe. Soit  $v \in (U' \oplus W') \cap (U \cap W)$ . Il existe  $u' \in U'$  et  $w' \in W'$  tels que  $v = u' + w' \in U \cap W$ . Comme  $u' \in U' \subset U$  et  $v \in U$ , on a  $w' = v - u' \in U$  donc  $w' \in W' \cap U \subset U \cap W$  et  $w' \in W'$  donc  $w' = 0$ . De la même manière, on obtient  $u' = 0$  et donc  $v = u' + w' = 0$ . ■

D'après le lemme précédent, on a  $\dim U' + \dim W' = \dim(U' \oplus W') = \dim(U + W) - \dim(U \cap W) = \dim R$ . En remplaçant  $\dim R$  dans la formule  $\dim(U + W) + \dim(U \cap W) - (\dim U + \dim W) = \dim R - (\dim U' + \dim W')$  ci-dessus, on obtient  $\dim(U + W) + \dim(U \cap W) - (\dim U + \dim W) = 0$ . ■

## 9.5. Projections

**Définition 9.5.1** Soient  $U$  et  $W$  des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $V$  tels que  $V = U \oplus W$ . **La projection de  $V$  sur  $U$  parallèlement à  $W$**  est l'application  $p_{U,W} : V \rightarrow V$  définie de la manière suivante : soit  $v \in V$ . Il existe une unique écriture  $v = u + w$  avec  $u \in U$  et  $w \in W$ . On pose  $p_{U,W}(v) = u$ .

**Lemme 9.5.2** La projection  $p_{U,W}$  est une application linéaire. □

*Preuve.* Exercice. ■

**Théorème 9.5.3** Soit  $p_{U,W}$  la projection sur  $U$  parallèlement à  $W$ .

- (i) On a  $p_{U,W}^2 = p_{U,W} \circ p_{U,W} = p_{U,W}$ .
- (ii) On a  $\text{Imp}_{U,W} = U$  et pour  $u \in U$ , on a  $p_{U,W}(u) = u$ .
- (iii) On a  $\text{Kerp}_{U,W} = W$ . □

*Preuve.* 1. Soit  $v \in V$ . On écrit  $v = u + w$  avec  $u \in U$  et  $w \in W$ . On a  $p_{U,W}(v) = u$ . De plus  $u = u + 0$  est l'écriture de  $u$  comme somme d'un élément de  $U$  et d'un élément de  $W$  donc  $p_{U,W}(u) = u$ . On a donc  $p_{U,W}^2(v) = p_{U,W}(v)$  pour tout  $v \in V$ .

2. Par définition, on a  $\text{Imp}_{U,W} \subset U$ . Soit  $u \in U$ , on vient de voir qu'on a dans ce cas  $u = p_{U,W}(u)$  donc  $u \in \text{Imp}_{U,W}$ .

3. Soit  $w \in W$ , alors  $w = 0 + w$  est l'écriture de  $w$  comme somme d'un élément de  $U$  et d'un élément de  $W$  donc  $p_{U,W}(w) = 0$  et  $w \in \text{Kerp}_{U,W}$ . Soit  $v \in \text{Kerp}_{U,W}$  et soit  $v = u + w$  l'écriture de  $v$  comme somme d'un élément de  $U$  et d'un élément de  $W$ . On a  $0 = p_{U,W}(v) = u$  donc  $v = w \in W$ . ■

**Théorème 9.5.4** Soit  $p : V \rightarrow V$  une application linéaire telle que  $p^2 = p$ . Posons  $U = \text{Imp}$  et  $W = \text{Kerp}$ .

- (i) Alors  $U$  et  $W$  sont des sous-espaces vectoriels tels que  $V = U \oplus W$ .
- (ii) On a  $p = p_{U,W}$ . □

*Preuve.* (1). Montrons que  $V = U \oplus W$ . Soit  $v \in U \cap W$ . Alors  $v \in \text{Imp}$  donc il existe  $v' \in V$  tel que  $v = p(v')$ . Mais on a aussi  $v = p(v') = p^2(v') = p(v)$ . Comme  $v \in W = \text{Kerp}$ , on a donc  $v = p(v) = 0$ . On a donc bien  $U + W = U \oplus W$  les sous-espaces sont en somme directe. Soit  $v \in V$ . Posons  $u = p(v) \in \text{Imp} = U$  et posons  $w = v - p(v)$ . On a  $p(w) = p(v - p(v)) = p(v) - p^2(v) = p(v) - p(v) = 0$ . Donc  $w \in \text{Kerp} = W$ . On a donc  $v = p(v) + (v - p(v)) = u + w \in U + W$  donc  $V = U \oplus W$ .

(2). Soit  $u \in U = \text{Imp}$ . Montrons que  $p(u) = u$ . Comme  $u \in \text{Imp}$ , il existe  $v \in V$  tel que  $u = p(v)$ . On a alors  $u = p(v) = p^2(v) = p(p(v)) = p(u)$ .

Montrons maintenant que  $p = p_{U,W}$ . Soit  $v \in V$ . Comme  $V = U \oplus W$ , il existe une écriture  $v = u + w$  avec  $u \in U$  et  $w \in W$ . Par définition, on a  $p_{U,W}(v) = u$ . Par ailleurs, on a  $p(v) = p(u + w) = p(u) + p(w) = p(u) = u$  donc  $p(v) = p_{U,W}(v)$  pour tout  $v \in V$  donc  $p = p_{U,W}$ . ■

**Corollaire 9.5.5** Soit  $p : V \rightarrow V$  une application linéaire. Alors  $p$  est une projection si et seulement s'il existe une base  $\mathcal{B}$  telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

*Preuve.* Supposons que  $p$  est une projection, alors  $p = p_{U,W}$  avec  $V = U \oplus W$ . Soit  $(u_1, \dots, u_r)$  une base de  $U$  et  $(w_1, \dots, w_s)$  une base de  $W$ . Alors  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s)$  est une base de  $V$  et la matrice de  $p$  dans cette base est donnée par la matrice de l'énoncé. Réciproquement, si  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$  est comme ci-dessus, alors comme  $A^2 = A$ , on a  $p^2 = p$  et  $p$  est une projection. ■

## 9.6. Symétries

**Définition 9.6.1** Soient  $U$  et  $W$  des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $V$  tels que  $V = U \oplus W$ . **La symétrie par rapport à  $U$  parallèlement à  $W$**  est l'application  $s_{U,W} : V \rightarrow V$  définie de la manière suivante : soit  $v \in V$ . Il existe une unique écriture  $v = u + w$  avec  $u \in U$  et  $w \in W$ . On pose  $s_{U,W}(v) = u - w$ .

**Lemme 9.6.2** La projection  $s_{U,W}$  est une application linéaire. □

*Preuve.* Exercice. ■

**Théorème 9.6.3** Soit  $s_{U,W}$  la projection sur  $U$  parallèlement à  $W$ .

- (i) On a  $s_{U,W}^2 = \text{Id}_V$ . En particulier  $s_{U,W}$  est un isomorphisme.
- (ii) Pour  $u \in U$ , on a  $s_{U,W}(u) = u$  et pour  $w \in W$ , on a  $s_{U,W}(w) = -w$ . □

*Preuve.* 1. Soit  $v \in V$ . On écrit  $v = u + w$  avec  $u \in U$  et  $w \in W$ . On a  $s_{U,W}(v) = u - w$ . De plus  $u - w = u + (-w)$  est l'écriture de  $u - w$  comme somme d'un élément de  $U$  et d'un élément de  $W$  donc  $s_{U,W}(u - w) = u + w$ . On a donc  $s_{U,W}^2(v) = s_{U,W}(u - w) = u + w = v$  pour tout  $v \in V$ .

2. Il suffit d'appliquer la définition. ■

**Théorème 9.6.4** Soit  $s : V \rightarrow V$  une application linéaire telle que  $s^2 = \text{Id}_V$ . Posons  $U = \{v \in V \mid s(v) = v\}$  et  $W = \{v \in V \mid s(v) = -v\}$ .

- (i) Alors  $U$  et  $W$  sont des sous-espaces vectoriels tels que  $V = U \oplus W$ . et  
(ii) On a  $s = s_{U,W}$ . □

*Preuve.* (1). Soient  $u, u' \in U$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a  $s(u) = u$  et  $s(u') = u'$ . On obtient  $s(\lambda u + u') = \lambda s(u) + s(u') = \lambda u + u'$  donc  $\lambda u + u' \in U$  qui est bien un sous-espace vectoriel. De même, pour  $w, w' \in W$ , on a  $s(w) = -w$  et  $s(w') = -w'$ . On obtient  $s(\lambda w + w') = \lambda s(w) + s(w') = -\lambda w - w'$  donc  $\lambda w + w' \in W$  qui est bien un sous-espace vectoriel.

Montrons que  $V = U \oplus W$ . Soit  $v \in U \cap W$ . Alors  $s(v) = v$  et  $s(v) = -v$  donc  $v = -v$  et  $v = 0$ . On a donc bien  $U + W = U \oplus W$  les sous-espaces sont en somme directe. Soit  $v \in V$ . Posons  $u = \frac{1}{2}(v + s(v))$  et  $w = \frac{1}{2}(v - s(v))$ . On a  $s(u) = \frac{1}{2}(s(v) + s^2(v)) = \frac{1}{2}(s(v) + v) = u$  donc  $u \in U$ . On a  $s(w) = \frac{1}{2}(s(v) - s^2(v)) = \frac{1}{2}(s(v) - v) = -w$  donc  $w \in W$ . On a donc  $v = \frac{1}{2}(v + s(v)) + \frac{1}{2}(v - s(v)) = u + w \in U + W$  donc  $V = U \oplus W$ .

(2). Soit  $v \in V$ , comme  $V = U \oplus W$ , il existe une écriture  $v = u + w$  avec  $u \in U$  et  $w \in W$ . Par définition, on a  $s_{U,W}(v) = u - w$ . Par ailleurs, on a  $s(v) = s(u + w) = s(u) + s(w) = u - w$  donc  $s(v) = s_{U,W}(v)$  pour tout  $v \in V$  donc  $s = s_{U,W}$ . ■

**Corollaire 9.6.5** Soit  $s : V \rightarrow V$  une application linéaire. Alors  $s$  est une symétrie si et seulement s'il existe une base  $\mathcal{B}$  telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

*Preuve.* Supposons que  $s$  est une symétrie, alors  $s = s_{U,W}$  avec  $V = U \oplus W$ . Soit  $(u_1, \dots, u_r)$  une base de  $U$  et  $(w_1, \dots, w_s)$  une base de  $W$ . Alors  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s)$  est une base de  $V$  et la matrice de  $p$  dans cette base est donnée par la matrice de l'énoncé. Réciproquement, si  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$  est comme ci-dessus, alors comme  $A^2 = I_n$ , on a  $s^2 = \text{Id}_V$  et  $s$  est une symétrie. ■

# Index

- application, 11
  - application identité, 11
  - application réciproque, 13
  - bijective, 12
  - composée, 11
  - ensemble d'arrivée, 11
  - ensemble de départ, 11
  - ensemble des applications, 14
  - graphe, 14
  - image, 11
  - image inverse, 11
  - image réciproque, 11
  - injective, 12
  - inverse, 13
  - surjective, 12
- application linéaire, 52
  - $\text{End}(V)$ , 52
  - $\text{Hom}(V, W)$ , 52
  - $\text{Im}(f)$ , 59
  - $\text{Ker}(f)$ , 54
  - automorphisme, 53
  - endomorphisme, 52
  - homothétie, 53
  - image, 59
  - isomorphisme, 53
  - morphisme, 52
  - noyau, 54
  - rang, 60
- double inclusion, 5
- ensemble, 5
  - élément, 5
  - complémentaire, 9
  - différence, 8
  - ensemble des parties, 9
  - ensemble vide, 7
- intersection, 8
- paire ordonnée, 9
- produit cartésien, 9
- sous-ensemble, 6
- sous-ensemble propre, 6
- union, 7
- espace vectoriel, 35
  - addition, 35
  - base, 46
  - base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , 46
  - combinaison linéaire, 39
  - dépendance linéaire, 41
  - de dimension finie, 41
  - dimension, 50
  - dimension finie, 50
  - dimension infinie, 50
  - droite, 38
  - espace vectoriel nul, 36
  - famille génératrice, 40
  - famille génératrice minimale, 47
  - famille liée, 41
  - famille libre, 41
  - famille libre maximale, 47
  - finiment engendré, 41
  - indépendance linéaire, 41
  - isomorphe, 53
  - multiplication scalaire, 35
  - opposé, 35
  - somme de sous-espaces, 38
  - somme directe externe, 37
  - sous-espace engendré, 40
  - sous-espace vectoriel, 37
  - vecteur, 35
  - vecteur nul, 35
- Espace vectoriels
  - Somme, 71

- matrice, 20, 61
  - échange de lignes, 21
  - échelonnée réduite, 23
  - addition de  $a$ -fois une ligne, 20
  - addition matricielle, 62
  - forme échelonnée réduite, 23
  - inverse, 65
  - matrice carrée, 62
  - matrice d'une application linéaire, 66
  - matrice identité, 64
  - matrice inversible, 65
  - matrice nulle, 20
  - multiplication, 63
  - multiplication d'une ligne par  $b$ , 21
  - multiplication matricielle, 63
  - noyau, 30
  - pivots, 23
  - produit, 63
  - rang, 23
  - somme, 62
  - taille, 20
- matrices
  - multiplication scalaire, 62
- Projection, 76
- Somme directe, 71, 73
- Supplémentaire, 74
- Symétrie, 77
- système linéaire, 18
  - coordonnée libre, 32
  - coordonnées liées, 32
  - dimension, 32
  - ensemble des solutions, 20
  - homogène, 18
  - inconnue, 18
  - inhomogène, 18
  - irrésoluble, 20
  - matrice étendue, 19
  - matrice des coefficients, 19
  - matrice des seconds membres, 19
  - matrice totale, 19
  - résoluble, 20
- rang, 32
- solution, 20
- système homogène associé, 28
- variable, 18
- vecteur, 29
  - somme, 29