

Simulation informatique et analyse numérique

C. Chalons

Université Versailles-Saint Quentin

Congrès MATH.en.JEANS, Avril 2014

Point de départ

Mon métier

- Mathématicien Appliqué : modélisation, analyse numérique, simulation numérique
- Discipline peu ou pas encore vue au lycée et a fortiori au collège

Point de départ

- un phénomène physique qu'on souhaite étudier, comprendre, prédire, optimiser... **en le simulant**
- ce phénomène peut provenir de différents domaines d'application : finance, économie, physique, chimie...
- il sera décrit par des équations mathématiques, que l'on cherchera à résoudre, **d'une façon ou d'une autre !**

Plan de l'exposé

1) C'est quoi

- la simulation numérique ?
- l'analyse numérique ?

2) Quelques exemples de la vie de tous les jours !

- la météo
- le trafic routier et piétonnier
- l'aéronautique, l'automobile
- le nucléaire

3) Comment ça marche en pratique ?

4) Interdisciplinarité et conclusions

La simulation informatique (ou numérique), c'est quoi ?

- **C'est le fait d'exécuter**

- un programme informatique (un "logiciel"),
- sur un ordinateur,
- avec l'objectif de simuler un phénomène physique réel

- Le "logiciel" va résoudre de manière approchée les équations correspondantes et donner par exemple $x = 2.99$ au lieu de $x = 3$ pour l'équation

$$x^2 = 9, \quad x > 0$$

- **En d'autres termes**, faire de la simulation numérique c'est faire calculer un ordinateur pour qu'il vous dise ce qu'il s'est passé, ce qu'il se passe, ou ce qu'il se passera dans une situation réelle

La simulation informatique (ou numérique), c'est quoi ?

Dans simulation numérique il y a

- **Simulation**

- le fait de reproduire un phénomène

- **Numérique/Informatique**

- le fait d'utiliser un ordinateur

La simulation informatique est présente dans la vie de tous les jours !

L'analyse numérique, c'est quoi ?

Dans analyse numérique il y a

- **Analyse**

- le fait d'analyser ce que l'on fait

- **Numérique**

- le fait d'utiliser un ordinateur

L'analyse numérique, c'est quoi ?

C'est une discipline des mathématiques qui vise à s'assurer que ce qu'on demande de faire à l'ordinateur est

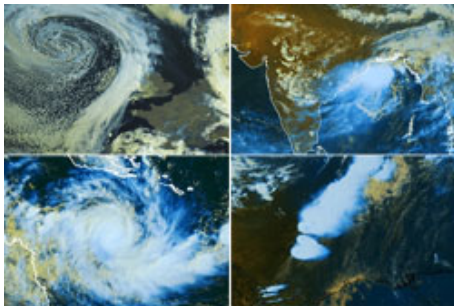
- "cohérent" avec le phénomène physique que l'on cherche à simuler,
- "performant"

Exemple : les prévisions météorologiques

L'analyse numérique "ne se voit pas", mais c'est elle qui permet de s'assurer que les logiciels de simulation construits fonctionneront correctement !

Les prévisions météorologiques

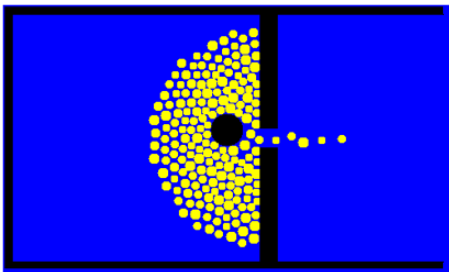
Les prévisions météorologiques sont basées sur la simulation informatique pour prédire l'état de l'atmosphère à un temps ultérieur. Malgré l'utilisation de modèles de plus en plus sophistiqués et d'ordinateurs de plus en plus puissants, la prévision reste difficile au delà d'un certain nombre de jours.



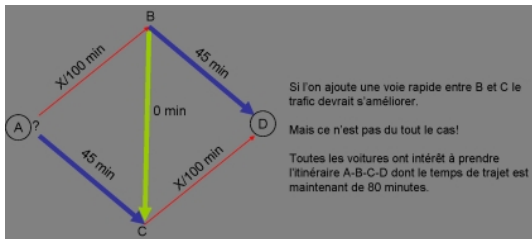
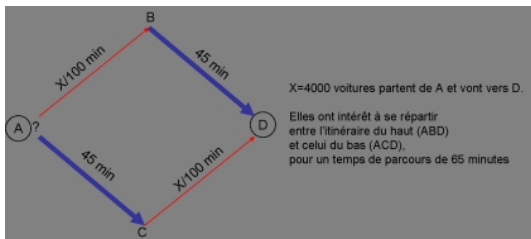
Le paradoxe de Braess en trafic routier et piétonnier

Le **paradoxe de Braess** montre que dans certaines circonstances

- ajouter une voie de circulation automobile peut réorganiser la circulation automobile dans un état qui en dégrade les conditions pour tous (trafic routier)
- ajouter un obstacle (dans une pièce, un stade, une station de métro...) peut réduire son temps d'évacuation (mouvement de foule).



Le paradoxe de Braess en trafic routier et piétonnier



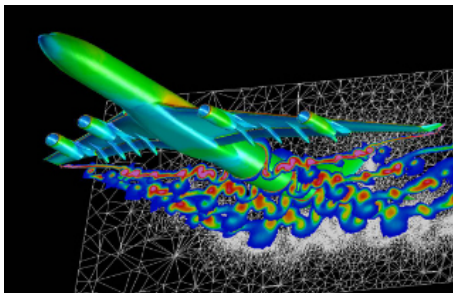
La simulation aéronautique

La simulation en aéronautique est venue compléter les tests en soufflerie dès les années 80. De plus en plus de configurations sont validées sur ordinateur afin d'optimiser les choix de conception des appareils



La simulation aéronautique

La simulation en aéronautique est venue compléter les tests en soufflerie dès les années 80. De plus en plus de configurations sont validées sur ordinateur afin d'optimiser les choix de conception des appareils



La simulation automobile

La pénétration de la voiture dans l'air provoque des frottements qui ralentissent le mouvement, de façon plus ou moins importante selon son design. **On peut donc limiter ces effets en optimisant la forme du véhicule**

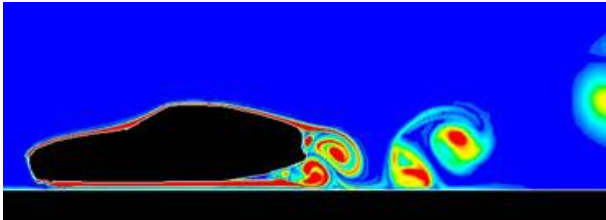
Objectifs

- éviter de faire de multiples prototypes (qui diffèrent parfois très peu)
- réduire les coûts
- gagner du temps



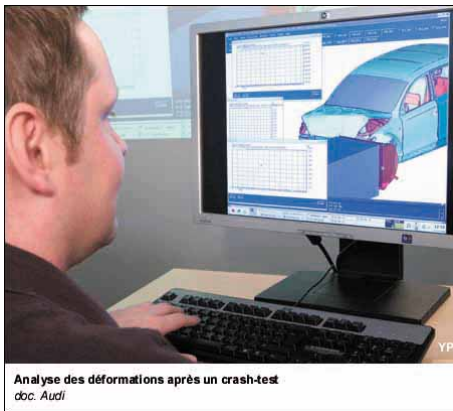
Sillage d'un véhicule automobile

Cette figure montre les structures turbulentes qui apparaissent dans le sillage du véhicule. Ces tourbillons jouent sur les performances du véhicule.



Simulation d'un crash-test

Les crash-tests automobiles sont coûteux et longs à mettre en place, et détruisent des voitures. Ils sont de plus en plus remplacés par des simulations informatiques qui sont plus flexibles mais également plus précises.



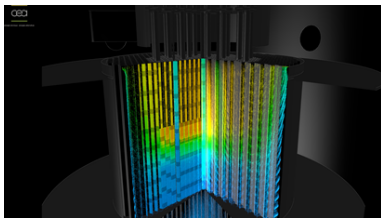
Formule 1

La figure ci-dessous montre la première Formule 1 entièrement conçue par ordinateur. L'équipe Virgin Racing s'est engagée pour la première fois au championnat du monde de Formule 1 en 2010. L'écurie a décidé de faire totalement confiance à la simulation informatique sans jamais faire d'essais en soufflerie.



La simulation des réacteurs nucléaires

La simulation numérique joue un rôle très important dans les recherches sur l'énergie nucléaire et la sûreté des réacteurs



Comment ça marche en pratique ?

Les différentes étapes de la simulation numérique d'un phénomène physique réel (complexe ou non) sont presque toujours les mêmes

- le problème physique et les équations à résoudre
- l'analyse mathématique du problème
(notions d'existence, d'unicité, de stabilité, de problème bien posé)
- la construction de l'algorithme
- l'analyse numérique de l'algorithme
(notions de stabilité, de consistance, de convergence et de précision)
- la programmation sur ordinateur, et enfin, la simulation !

Comment ça marche en pratique ?

Les différentes étapes de la simulation numérique d'un phénomène physique réel (complexe ou non) sont presque toujours les mêmes

- le problème physique et les équations à résoudre
- l'analyse mathématique du problème
(notions d'existence, d'unicité, de stabilité, de problème bien posé)
- la construction de l'algorithme
- l'analyse numérique de l'algorithme
(notions de stabilité, de consistance, de convergence et de précision)
- la programmation sur ordinateur, et enfin, la simulation !

Le problème physique et les équations à résoudre

Un premier exemple : le système de Lotka-Volterra ou système proie-prédateur

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ y'(t) = \gamma x(t)y(t) - \delta y(t) \end{cases} \quad t > 0,$$

$x(t)$: densité des proies (lièvres ou petits poissons)

$y(t)$: densité des prédateurs (lynx ou gros poissons)

α : taux de reproduction des proies

δ : taux de mortalité des prédateurs

$\beta y(t)$: taux de mortalité des proies

$\gamma x(t)$: taux de reproduction des prédateurs

$x(0)$ et $y(0)$ sont données.

Remarque : la capacité de ce modèle à reproduire la réalité a été validée expérimentalement

En général, on ne sait pas calculer $x(t)$ et $y(t)$!

Le problème physique et les équations à résoudre

Mais on sait dire des choses selon la valeur des paramètres du modèle...

- ▶ Si $x(0) > 0$ et $y(0) > 0$, $x(t)$ et $y(t)$ existent bien et sont positifs
- ▶ Il peut ne jamais y avoir d'extinction
- ▶ Il existe même des solutions périodiques

Mais encore une fois

En général, on ne sait pas calculer $x(t)$ et $y(t)$!

Il faut donc concevoir un algorithme et faire de l'analyse numérique !

Remarque : Cela est encore plus vrai si le modèle est enrichi par la prise en compte de chasseurs/pêcheurs par exemple.

Remarque : Pour fixer les paramètres, il faut aller discuter avec les spécialistes

Le problème physique et les équations à résoudre

Un deuxième exemple : le système de Saint-Venant ou système des eaux peu profondes

En 1D il s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x hu = 0 \\ \partial_t hu + \partial_x (hu^2 + gh^2/2) = -ghz'(x) \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*},$$

$h = h(t, x)$: hauteur d'eau

$u = u(t, x)$: vitesse

$z = z(x)$: topographie ($z'(x) = 0$ pour un fond plat)



Le problème physique et les équations à résoudre

Un troisième exemple : le modèle LWR en trafic routier (Lighthill-Whitham-Richards)

En 1D il s'écrit

$$\left\{ \partial_t \rho + \partial_x \rho v = 0 \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}, \right.$$

$\rho = \rho(t, x)$: densité de véhicules

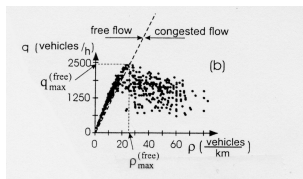
$v = v(\rho)$: vitesse

avec par exemple

$$v(\rho) = V_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{R}\right)$$

R : densité **maximale** de véhicules

$V_{\max}$: vitesse **maximale**



Comment ça marche en pratique ?

Les différentes étapes de la simulation numérique d'un phénomène physique réel (complexe ou non) sont presque toujours les mêmes

- le problème physique et les équations à résoudre
- l'analyse mathématique du problème
(notions d'existence, d'unicité, de stabilité, de problème bien posé)
- la construction de l'algorithme
- l'analyse numérique de l'algorithme
(notions de stabilité, de consistance, de convergence et de précision)
- la programmation sur ordinateur, et enfin, la simulation !

L'analyse mathématique du problème

Dans cette partie, on se pose les questions suivantes

- Est-ce que les équations admettent bien une solution ?

Exemple : $x^2 = -9$ versus $x^2 = 9$

- Si oui, est-ce que la solution est bien unique ?

Exemple : les prévisions météorologiques

- Si oui, est-ce que la solution est stable ?

On peut alors aboutir à la démonstration de théorèmes compliqués

Si la réponse à toutes ces questions est oui, on dit que le problème est
bien posé au sens de Hadamard

Comment ça marche en pratique ?

Les différentes étapes de la simulation numérique d'un phénomène physique réel (complexe ou non) sont presque toujours les mêmes

- le problème physique et les équations à résoudre
- l'analyse mathématique du problème
(notions d'existence, d'unicité, de stabilité, de problème bien posé)
- la construction de l'algorithme
- l'analyse numérique de l'algorithme
(notions de stabilité, de consistance, de convergence et de précision)
- la programmation sur ordinateur, et enfin, la simulation !

La construction et l'analyse numérique de l'algorithme

Dans cette partie, on cherche tout d'abord à construire un algorithme pour approcher la solution

Puis on se pose les questions suivantes

- Est-ce que l'algorithme est bien consistant avec nos équations ?
- Est-ce qu'il est bien stable ?
- Est-ce qu'il est convergent ?

Enfin, on peut se demander

- si l'algorithme est précis et peu coûteux

On peut alors aboutir à la démonstration de théorèmes compliqués

Comment ça marche en pratique ?

Les différentes étapes de la simulation numérique d'un phénomène physique réel (complexe ou non) sont presque toujours les mêmes

- le problème physique et les équations à résoudre
- l'analyse mathématique du problème
(notions d'existence, d'unicité, de stabilité, de problème bien posé)
- la construction de l'algorithme
- l'analyse numérique de l'algorithme
(notions de stabilité, de consistance, de convergence et de précision)
- la programmation sur ordinateur, et enfin, la simulation !

La programmation sur ordinateur et la simulation

On commence par créer ce qu'on peut appeler un **logiciel** qui va exécuter notre algorithme

c'est la programmation !

Puis on utilise notre logiciel et on analyse les résultats qu'il nous donne en lien avec le phénomène physique que l'on cherche à représenter

c'est la simulation !

Un exemple concret

Objectif Calculer $\sqrt{5}$, c'est-à-dire la solution positive de

$$x^2 = 5$$

Algorithme Calculer les éléments de la suite

$$\begin{cases} x_0 > 0 \text{ donné} \\ x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{5}{x_n} \right) \end{cases}$$

C'est l'ordinateur qui va faire les calculs !

Un exemple concret

Analyse numérique

- On sait démontrer que la suite est décroissante et minorée par $\sqrt{5}$, et donc convergente vers $\sqrt{5}$, i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{5}$$

pour tout $x_0 > 0$

- On sait démontrer qu'on a l'estimation d'erreur suivante

$$|x_{n+1} - \sqrt{5}| \leq \frac{1}{4}|x_n - \sqrt{5}|^2, \quad \forall n \geq 1$$

Un exemple concret

Programmation

Si on utilise le logiciel libre Scilab, cela ressemble à

```
function[x] = newton(x0)
```

```
    x = x0
```

```
    for i = 1 : 1 : 15
```

```
        x = 0.5 * (x + 5/x)
```

```
    end
```

```
endfunction
```

Un exemple concret

Valeurs obtenues

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 1000 \\ x_1 = 500.0024999999999998 \\ x_2 = 250.006249975000117 \\ x_3 = 125.013124737507312 \\ x_4 = 62.526560269016123 \\ x_5 = 31.3032631431566095 \\ x_6 = 15.7314954499403452 \\ x_7 = 8.02466459386895714 \\ x_8 = 4.32387179752744544 \\ x_9 = 2.74012140403924809 \\ x_{10} = 2.2824290358878674 \\ x_{11} = 2.23653882406304927 \\ x_{12} = 2.23606802706219465 \\ x_{13} = 2.23606797749979025 \\ x_{14} = 2.2360679774997898 \\ x_{15} = 2.2360679774997898 \end{array} \right.$$

L'interdisciplinarité

La simulation informatique et l'analyse numérique sont particulièrement enrichissantes intellectuellement car elles donnent des compétences **pluridisciplinaires** en

- physique (ou biologie, chimie, neutronique, finance...)
- mathématiques
- informatique

et humainement car elles permettent de cotoyer des personnes d'horizons parfois très divers

Last but not least, on a besoin de matheux dans les centres de R&D, dans les entreprises, mais aussi dans les PME

Avis aux amateurs !

Quelques vidéos plus concrètes

<http://www.universcience.tv/video-seismes-et-tsunamis-945.html>

<https://www.youtube.com/watch?v=ALDMtayozaY>

<https://www.youtube.com/watch?v=CseDTUXqyTg>

<https://www.youtube.com/watch?v=pDTGUABxT6E>

<https://www.youtube.com/watch?v=bYOHij9BMwE>