Novembre 2021

GDT 2021-2022 DE L'ÉQUIPE AG DU LMV

⋆

"ALGÈBRES AMASSÉES"
(PROGRAMME)

Remarques :

1. Les références sont également des liens hypertextes. N'hésitez pas à cliquer !
2. Si un passage ci-dessous vous semble incorrect ou pas assez clair, n'hésitez pas à nous le mentionner.

1. RESSOURCES GÉNÉRALES

— Ressource générale très complète : le **Cluster Algebra Portal** (maintenu par S. Fomin) ;

— Les **articles initiaux** de Fomin et Zelevinsky sont de bonnes références :

- **[FZ-1]** *Cluster algebras. I. Foundations* . JAMS **15** (2002),p. 497–529.
- **[FZ-2]** *Cluster algebras. II. Finite type classification.* Invent. Math. **154** (2003), p. 63–121.
- **[BFZ-3]** *Cluster algebras. III. Upper bounds and double Bruhat cells.* Duke **126** (2005).
- **[FZ-4]** *Cluster algebras. IV. Coefficients.* Compos. Math. **143** (2007), p. 112–164.

— Version préliminaire d'un **livre**, en plusieurs parties sur arXiv.

[FWZ] : S. Fomin, L. Williams, A. Zelevinsky. Introduction to cluster algebras.
chap. 1-3 : 1 Total positivity 1 – 2 Mutations of quivers and matrices – 3 Clusters and seeds
chap. 4-5 : 4 New patterns from old – 5 Finite type classification
chap. 6 : 6 Cluster structures in commutative rings
chap. 7 : 7 Plabic graphs

— **[W-IHP] : L. Williams**. Introduction to cluster algebras.
Page web consacré à une série de cours donnée par L. Williams en 2014 à l'IHP.
Les vidéos des cours sont disponibles **ici**.

— ?

2. PROGRAMME (version préliminaire)

Ci-dessous, on donne une description du programme tel qu'on l'a discuté mardi 16/11. Celui-ci est encore préliminaire et se découpe en deux grands blocs.

Le 1er bloc est composé des parties I & II et consiste une introduction générale cohérente et (essentiellement) self-contained à la théorie de algèbres amassées. Le second bloc est formé des parties III,IV et V qui sont plutôt indépendantes entre elles et concernent des aspects plus récents et avancés de la théorie.

Il a semblé plus raisonnable d'envisager de ne traiter en entier que le 1er bloc. Les thèmes intéressants mais peut-être plus difficiles à exposer des parties III, IV et V seront considérés ultérieurement au cours de l'année, si le temps le permet. Cependant pour que chacun puisse se faire une idée même vague de ce dont il s'agit, quelques lignes d'explications ainsi que des références ont été incluses ci-dessous pour chacune de ces thématiques.

⋆

Le but général relatif au 1er bloc est d'arriver à donner un aperçu général de la théorie : origines, notions de base, examples fondamentaux, et résultats importants du domaine. Ces aspects là sont maintenant suffisamment formalisés pour que l'on puisse envisager les traiter correctement en une dizaine de séances.

Il a été décidé de prendre comme référence principale le livre en gestation **Introduction to Cluster algebras** de Fomin, Williams et Zelevinsky", désigné par [FWZ] dans la suite. [1] On a essayé de faire correspondre aussi bien que possible les différentes parties du programme ci-dessous à des parties du livre.

1. Voir les liens hypertextes dans la section Ressources plus loin.

I. Introduction. (deux séances ?)

I.1. Positivité sur quelques exemples (??) (Pierre-Guy - 1 séance)

[Chap. 1, FWZ] (?)

1. Matrices totalement positives
2. Partie positive de la grassmannienne $G_2(\mathbf{R}^n)$
3. L'équation d'Abel du dilogarithme et le Y-système de type A_2
4. Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$

I.2. Vue d'ensemble (??) (Luc ? 1 séance)

1. Mutation, Carquois, graines, toussa...
2. Résultats fondamentaux : phénomène de Laurent, positivité, cohérence du signe, etc.
3. Exemples fondamentaux (liste, un exemple concret (type A_2))
4. Algèbres amassées de type fini

II. Algèbres amassées : théorie générale, examples, résultats. ($N \geq 10$ séances ?)

II.1. Mutations. (Ilias - 2 séances ?)

[Chap. 2, FWZ]

II.2. Amas et graines. (? - 2 ou 3 séances ?)

[Chap. 3, FWZ]

II.3. Examples. (3-4 séances ?)

— Grassmanniennes ([§1.2, FWZ] ou [§6.7, FWZ] pour le cas général)

— Type A_n [§5.3, FWZ] / Espace de modules $\mathscr{M}_{0,n+3}$ (*cf.* §1.3 dans [FG-ENS])

— Type fini (type D [§5.4,FWZ] ?)

— Algèbre amassée associée à une surface (Référence : **[FST]** [2] ?)

— Un autre exemple ?? (*e.g.* tiré [Chap. 6, FWZ], ou Double-cellule de Bruhat cf. [§2.2,FZ-2003] [3].)

II.4. Algèbres amassées de type fini. (entre 3 et 5 séances ?)

II.4.1. Sous-algèbres, folding, toussa... (1 séance)

[Chap. 4, FWZ]

II.4.1. Type fini : description et classification ($k = ?$ séances)

[Chap. 5, FWZ]

• Preuve (via description des amas) que “type Dynkin” ⇒ “type fini”

• Classification des algèbres amassées de type fini de rang 2

• Classification des algèbres amassées de type fini ([Thm 5.2.8, FWZ])

—

2. **[FST]** : S. Fomin, M. Shapiro, D. Thurston. *Cluster algebras and triangulated surfaces. I. Cluster complexes.* Acta Math. **201** (2008), p. 83–146.

3. **[FZ-2003]** : S. Fomin, A. Zelevinsky. *Cluster algebras: notes for the CDM-03 conference.* Current dev. in math. (2003), p. 1–34

II.5. Algèbres amassées : résultats généraux. (??)

II.5.1. Phénomène de Laurent (?)

II.5.2. Positivité (?)

Seulement en rang 2 ?

II.5.3. Cohérence du signe (?)

II.5.4. Formule de séparation des variables (?)

—

III. Catégorification des algèbres amassées.

1. De quoi s'agit-il ?

2. Applications. Caractère de Caldero-Chapoton ? Périodicité des Y-systèmes (Keller) ??

Ressources spécifiques : articles de Bernhard Keller :

— **[Keller1]** : *Cluster algebras, quiver representations and triangulated categories.* London Math. Soc. Lecture Note Ser. **375**, Cambridge Univ. Press (2010), p. 76–160 ;

— **[Keller2]** : *Cluster algebras and derived categories* (2012) ;

— **[Keller3]** : *Cluster algebras and cluster categories.* Bull. Iranian Math. Soc. **37** (2011), p. 187–234 ;

— **[Keller4]** : *The periodicity conjecture for pairs of Dynkin diagrams.* Ann. of Math. **177** (2013), p. 111–170.

IV. Diagrammes de diffusion (scattering diagrams).

1. De quoi s'agit-il ? Il s'agit d'une notion qui provient de la physique des particules (scattering amplitudes), importée ensuite en géométrie algébrique en relation avec la symétrie miroir (travaux de Gross-Hacking-Keel **[GHK]**) et qui est introduite et utilisée de façon cruciale dans l'article très important *Canonical bases for cluster algebras* de Gross-Hacking-Keel-Kontsevich (**[GHKK]**) dans lequel ils démontrent dans une grande généralité des résultats fondamentaux sur les algèbres amassées : phénomène de Laurent, positivité, cohérence du signe. Ils obtiennent beaucoup d'autre chose également (conjecture de dualité de Fock-Goncharov dans un grand nombre de cas, etc.)

2. D'une façon générale, un scattering diagram (SD) est un objet de nature tropicale et combinatoire. Il s'agirait ici de définir proprement cet objet dans le cas des algèbres amassées, d'étudier assez précisément quelques exemples et d'au moins décrire (si les preuves sont trop compliquées à exposer) comment cette notion est utilisée pour obtenir les résultats importants mentionnés ci-dessus.

On notera que la notion de SD n'est pas spécifique au cas des algèbres amassées mais est plus générale : elle fait sens et se révelle être pertinente pour des objets plus généraux (algèbres amassées généralisées, variétés log Calabi-Yau), par exemple relativement à la symétrie miroir ou aux phénomènes de wall-crossing en théorie des invariants de Donaldson-Thomas. De ce fait, cette notion pourrait intéresser des personnes

Ressources spécifiques :

— **[GHKK]** : *Canonical bases for cluster algebras.* J. Amer. Math. Soc. **31** (2018), p. 497-608 ;
— **[Mandel]** : *Scattering diagrams, theta functions, and [...].* ArXiv :1503.06183 (2019) (?)
— **[Nakanishi-II]** : *Cluster Algebras and Scattering Diagrams, Part II.* ArXiv :2103.16309 (2021) ;
— **[Nakanishi-III]** : *Cluster Algebras and Scattering Diagrams, Part III.* ArXiv :2111.00800 (2021).

V. Algèbres amassées et géométrie. Il s'agirait de discuter de certains des liens importants entre la théorie des algèbres amassées et des questions géométriques.

V.1. Autour des travaux de Fock et Goncharov. Dans plusieurs articles, Fock et Goncharov ont devellopé un point de vue géométrique intéressant sur les algèbres amassées.

Dans une série d'articles (*e.g.* **[FG-ENS]**) ils définissent des pendants géométriques aux algèbres amassées (notions de $\mathscr{A}$- et de $\mathscr{X}$-variété amassée) et étudient leur propriétés. En particulier, sont abordés les questions de la quantisation de ces variétés et est énoncée une conjecture (“conjecture de dualité de Fock-Goncharov”) qui a suscitée beaucoup de travaux ultérieurs.

Dans **[FG-IHES]** (complété par **[GS]**), les auteurs construisent une structure amassée sur certains espaces de modules de G-fibrés sur une surface. Partant de là (et d'ailleurs aussi), une “théorie de Teichmüller supérieure" a été développée pas différents auteurs. C'est maintenant un domaine de recherche assez actif.

Les travaux évoqués ci-dessous sont sophistiqués et profonds, il s'agirait seulement d'essayer de donner des idées aussi claires que possible des objets et notions mis en œuvre, pour idéalement arriver à comprendre les énoncés des résultats principaux (par ex. celui de la conjecture de dualité de Fock-Goncharov).

Références :

— **[FG-IHES]** V. Fock, A. Goncharov. *Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory.* Publ. IHES **103** (2006), p. 1–211 ;
— **[FG-ENS]** V. Fock, A. Goncharov . *Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm.* Ann. Sci. ENS **42** (2009), p. 865–930.
— **[GS]** A. Goncharov, L. Shen. *Quantum geometry of moduli spaces of local systems and representation theory.* ArXiv 1904.10491 (2019)

V.2. Symétrie miroir pour les variétés amassées. Comme son nom l'indique. Plus précisément, il s'agit de voir comment la symétrie miroir à la Gross-Hacking-Keel (pour les variétés log Calabi-Yau) se passe dans le cas plus particulier des variétés amassées.

Références :

— **[GHK-Bir]** M. Gross, P. Hacking, S. Keel. *Birational geometry of cluster algebras.* Algebr. Geom. **2** (2015), p. 137–175.
— **[HK]** P. Hacking, S. Keel. *Mirror symmetry and cluster algebras.* Proc. ICM Vol. II., Rio de Janeiro (2018), p. 671-697.
— **[GHKK]** : *Canonical bases for cluster algebras.* J. Amer. Math. Soc. **31** (2018), p. 497-608 ;