# Licence de mathématique
# Université Paris-Saclay

# MA202 – Algèbre linéaire

P.-G. Plamondon & N. Perrin

Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines

Année 2020-2021

# Table des matières

# Première partie .

# Ensembles et applications

# 1. Ensembles, notations et conventions

## 1.1. Premières définitions et premiers exemples

La théorie des ensembles est une partie non triviale des mathématiques. Elle est fortement reliée à la logique et forme le socle de base de tout raisonnement mathématique. Nous n'allons par étudier la théorie des ensembles ni la logique dans ce texte mais nous rappelons quelques notations importantes, quelques axiomes de bases ainsi que quelques résultats utiles dans toutes les mathématiques voire dès que l'on a affaire à un raisonnement logique.

Pour les raisons évoquées ci-dessus, notre définition d'ensemble reste assez vague mais suffisament "évidente" pour être acceptée par tous.

**Définition 1.1.1** Un **ensemble** $E$ est une collection d'objects appelés **éléments**.

**Axiome 1.1.2 (Égalité de deux ensembles)** Deux ensembles sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes éléments.

**Remarque 1.1.3** Cet axiome semble trivial, cependant il est très utile dans la pratique. En effet, pour montrer que deux ensembles $M$ et $N$ sont égaux, on montre une **double inclusion** : tout élément de $M$ est contenu dans $N$ ET tout élément de $N$ est contenu dans $M$. C'est le moyen le plus simple et le plus sûr pour montrer que deux ensembles sont égaux.

**Notation 1.1.4** Nous utiliserons les notations suivantes.

(i) **les crochets ensemblistes** : $\{\ \}$. Par exemple $M = \{0; 1; 2\}$ signifie que $M$ est la collection des objets 0, 1 et 2.

(ii) **est élément de** : $\in$. Par exemple, on a $1 \in \{0; 1; 2\}$.

(iii) **n'est pas élément de** : $\notin$. Par exemple $3 \notin \{0; 1; 2\}$.

(iv) **pour tout** : $\forall$. Par exemple $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $n \geq 0$ se lit *pour tout $n$ entier naturel, on a que $n$ est supérieur ou égal à* 0.

(v) **il existe** : $\exists$. Par exemple $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 5$ se lit *il existe un entier naturel $n$ tel que $n$ est supérieur ou égal à* 5.

(vi) **alors** : $\Rightarrow$. Par exemple $n \geq 1 \Rightarrow n \geq 0$ se lit *si $n$ est supérieur ou égal à* 1*, alors $n$ est supérieur ou égal à* 0.

(vii) **tel que** : , ou $|$. Par exemple $(\exists n \in \mathbb{N},\ n \geq 5)$ ou $(\exists n \in \mathbb{N} \mid n \geq 5)$ se lit *il existe un entier naturel $n$ tel que $n$ est supérieur ou égal à* 5.

**Remarque 1.1.5** En symboles, l'axiome d'égalité des ensembles s'écrit de la manière suivante : on a $M = N$ si et seulement si

$$(x \in M \Rightarrow x \in N) \text{ et } (x \in N \Rightarrow x \in M).$$

**Définition 1.1.6** Soit $M$ un ensemble.

(i) Un **sous-ensemble** $N$ de $M$ est un ensemble tel que tout élément de $N$ est aussi un élément de $M$. En symboles : $x \in N \Rightarrow x \in M$.
On écrit alors $N \subset M$ ou $N \subseteq M$.

(ii) Un sous-ensemble **propre** est un sous-ensemble $N \subset M$ de $M$ tel que $N \neq M$. On écrit alors $N \subsetneq M$.

**Exemple 1.1.7** On a les inclusions suivantes :

(i) $\{0; 1; 2\} \subseteq \{0; 1; 2\}$

(ii) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

(iii) $\{1; 2\} \subsetneq \{0; 1; 2\}$.

**Remarque 1.1.8** En symboles l'affirmation $N \subsetneq M$ s'écrit

$$(\forall x \in N, x \in M) \text{ et } (\exists x \in M, x \notin N).$$

**Remarque 1.1.9** Attention, un ensemble "ne distingue pas les éléments égaux". Ainsi, on a $\{0; 1; 2\} = \{2; 0; 1\} = \{0; 0; 1; 2; 2; 2\}$.

## 1.2. Constructions en théorie des ensembles

**Axiome 1.2.1** Soit $P$ une propriété et $M$ un ensemble, alors il existe un sous-ensemble $N \subset M$ de $M$ formé de tous les éléments de $M$ qui vérifient la propriété $P$.

**Notation 1.2.2** On peut définir un nouveau symbole : **qui vérifie la propriété** ou encore **tel que** : $|$. Par exemple $\{0; 1; 2\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 2\}$ se lit : *l'ensemble contenant les éléments* 0, 1 *et* 2 *est égal à l'ensemble des entiers naturels $n$ tels que $n$ est inférieur ou égal à* 2.

Nous pouvons maintenant montrer notre premier théorème...

**Proposition 1.2.3** S'il existe un ensemble, alors il existe un **ensemble vide** : un ensemble ne contenant aucun élément. On le note $\emptyset$.

*Preuve.* Soit $M$ un ensemble. Par hypothèse, nous savons qu'il en existe au moins un. Considérons alors, grâce à l'axiome 1.2.1, le sous-ensemble $N \subset M$ de $M$ suivant : $N = \{x \in M \mid x \neq x\}$. L'ensemble $N$ ne peut contenir aucun élément, il est donc vide et on a $N = \emptyset$. ∎

**Remarque 1.2.4** L'ensemble vide est contenu dans tout ensemble : pour tout ensemble $M$, on a $\emptyset \subset M$.

On pourrait penser que les assertions précédentes et la théorie des ensembles en général sont inutiles car évidentes. Il faut cependant se méfier des évidences. Par exemple, on a le résultat suivant.

**Proposition 1.2.5** Il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles.

*Preuve.* Si un tel ensemble existe, notons le $M$. Par l'axiome 1.2.1, on peut considérer le sous-ensemble $N = \{x \in M \mid x \notin x\}$. C'est un ensemble et donc un élément de $M$. On peut donc se demander si $N$ est un élément de $N$. S'il c'est le cas, c'est-à-dire si $N \in N$, cela voudrait dire que l'affirmation $N \notin N$ est fausse mais par définition de $N$ on obtient que $N$ n'est pas dans $N$ donc $N \notin N$, une contradition. Si par contre il n'y est pas, ou encore si $N \notin N$, alors $N$ vérifie la condition pour être dans $N$ donc $N \in N$, encore une contradiction... Nous venons de montrer par l'absurde que l'ensemble des ensembles n'existe pas. ∎

### 1.2.1. Union

**Axiome 1.2.6 (Axiome d'union)**

(i) Soient $M$ et $N$ deux ensembles, alors il existe un ensemble, noté $M \cup N$, qui contient exactement tous les éléments de $M$ et $N$. Cet ensemble est appelé **union** de $M$ et $N$. On a
$$M \cup N = \{x \mid x \in M \text{ ou } x \in N\}.$$

(ii) Plus généralement, si $I$ est un ensemble (dit ensemble d'indices) et si $(M_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles indexés par $I$, alors il existe un ensemble
$$\bigcup_{i \in I} M_i,$$
l'**union des ensembles** $(M_i)_{i \in I}$ qui contient exactement les éléments de $M_i$ pour tout $i \in I$. En symboles :
$$\bigcup_{i \in I} M_i = \{x \mid \text{ il existe } i \in I \text{ tel que } x \in M_i\}.$$

À partir de l'axiome d'union et le l'axiome 1.2.1, on peut fabriquer de nouveaux ensembles.

### 1.2.2. Intersection

**Proposition 1.2.7 (Intersection)**

1. Soient $M$ et $N$ deux ensembles, il existe alors un ensemble, noté $M \cap N$ et appelé **intersection** de $M$ et $N$ qui contient exactement les éléments qui sont dans $M$ et dans $N$. En symboles :

$$M \cap N = \{x \in M \cup N \mid x \in M \text{ et } x \in N\}.$$

2. Plus généralement, si $I$ est un ensemble d'indices et si $(M_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles, alors il existe un ensemble, noté

$$\bigcap_{i \in I} M_i$$

et appelé **intersection** des $(M_i)_{i\in I}$, qui contient exactement les éléments qui sont dans chacun des $M_i$ pour tout $i \in I$. En symboles :

$$\bigcap_{i\in I} M_i = \left\{ x \in \bigcup_{i\in I} M_i \;\middle|\; \text{pour tout } i \in I \text{ on a } x \in M_i \right\}.$$

**Proposition 1.2.8** Soient $M$, $N$ et $O$ trois ensembles. On a alors

(i) $M \cup M = M$ et $M \cap M = M$.

(ii) $M \cup N = N \cup M$ et $M \cap N = N \cap M$.

(iii) $M \cup (N \cup O) = (M \cup N) \cup O$ et $M \cap (N \cap O) = (M \cap N) \cap O$

*Preuve.* Voir feuille d'exercices. ■

**Proposition 1.2.9** Soient $M$, $N$ et $O$ trois ensembles. On a alors

(i) $M \cap (N \cup O) = (M \cap N) \cup (M \cap O)$.

(ii) $M \cup (N \cap O) = (M \cup N) \cap (M \cup O)$.

*Preuve.* Voir feuille d'exercices. ■

### 1.2.3. Différence et complémentaire

**Définition 1.2.10** Soient $M$ et $N$ deux ensembles. La **différence** de $M$ et de $N$, notée $M \setminus N$ est l'ensemble des éléments de $M$ qui ne sont pas dans $N$. En symboles :

$$M \setminus N = \{x \in M \; |x \notin N\}.$$

**Remarque 1.2.11** Il n'est pas nécessaire que $N$ soit contenu dans $M$ pour que la différence soit bien définie. Par exemple, si $M = \mathbb{Z}$ et $N = \mathbb{R}_{<0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$, alors $M \setminus N = \mathbb{N}$.

**Remarque 1.2.12** La différence est parfois aussi appelée **complémentaire** de $M$ dans $N$ dans certains ouvrages. Nous réserverons le terme de complémentaire au cas où $N$ est un sous-ensemble de $M$ c'est-à-dire où $N \subset M$.

**Proposition 1.2.13** Soient $M$, $N$ et $O$ trois ensembles. On a alors

(i) $M \setminus (N \cup O) = (M \setminus N) \cap (M \setminus O)$.

(ii) $M \setminus (N \cap O) = (M \setminus N) \cup (M \setminus O)$.

*Preuve.* Voir feuille d'exercices. ■

### 1.2.4. Ensemble des parties

**Axiome 1.2.14** Soit $M$ un ensemble, alors il existe un ensemble, noté $\mathcal{P}(M)$ et appelé **ensemble des parties** de $M$, dont les éléments sont exactement tous les sous-ensembles de $M$.

**Exemple 1.2.15** Voici quelques exemples d'ensembles des parties.

(i) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

(ii) $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset; \{\emptyset\}\}$.

(iii) $\mathcal{P}(\{0; 1; 2\}) = \{\emptyset; \{0\}; \{1\}; \{2\}; \{0; 1\}; \{0; 2\}; \{1; 2\}; \{0; 1; 2\}\}$.

**Remarque 1.2.16** On peut remarquer que le nombre déléments de l'ensemble des parties d'un ensemble fini est toujours une puissance de 2 (ci-dessus $1 = 2^0$, $2 = 2^1$ et $8 = 2^3$). Ceci n'est pas un hasard.

### 1.2.5. Produit cartésien

**Définition 1.2.17** Soient $M$ et $N$ deux ensembles.

(i) Une **paire ordonnée** d'éléments de $M$ et $N$ est la donnée d'un premier élément $x \in M$ de $M$ et d'un second élément $y \in N$ de $N$. On note alors la paire par $(x, y)$.

(ii) L'ensemble de toutes les paires ordonnées d'éléments de $M$ et $N$ est appelé **produit cartésien** de $M$ et $N$ et est noté $M \times N$. En symboles :

$$M \times N = \{(x, y) \mid x \in M,\ y \in N\}.$$

**Remarque 1.2.18** On a $(x, y) = (z, t)$ si et seulement si ($x = z$ et $y = t$).

**Exemple 1.2.19** Soit $M = \{0; 1; 2\}$ et $N = \{A, B\}$ alors on a

$$M \times N = \{(0, A); (0, B); (1, A); (1, B); (2, A); (2, B)\}.$$

**Exemple 1.2.20** Voici un exemple que nous allons utiliser très souvent : un $n$-uplet de réels (c'est-à-dire une liste ordonnée de $n$ réels) est un élément de $\mathbb{R}^n$. On le note $a = (a_i)_{i \in [1,n]}$ et on utilise les notations en ligne ou en colonne suivantes :

$$a = (a_1, \cdots, a_n) \text{ ou } a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

# 2. Applications

## 2.1. Premières définitions et premiers exemples

**Définition 2.1.1** Soient $M$ et $N$ deux ensembles. Une **application** $f$ de $M$ dans $N$ est une relation entre $M$ et $N$ qui à chaque élément $x \in M$ de **l'ensemble de départ** $M$ associe un unique élément, noté $f(x)$ de **l'ensemble d'arrivée** $N$. On dit aussi que $f$ va de $M$ dans $N$. En symboles, on écrit :

$$f: \begin{array}{ccc} M & \to & N \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

**Exemple 2.1.2**

(i) Soit $M$ un ensemble, il existe toujours **l'application identité** de $M$, notée $\mathrm{Id}_M$, qui va de $M$ dans $M$ telle que $\mathrm{Id}_M(x) = x$ pour tout $x \in M$. En symboles : $\mathrm{Id}_M : M \to M$, $x \mapsto x$.

(ii) La fonction suivante est une application : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.

**Définition 2.1.3** Soient $f : M \to N$ et $g : N \to O$ deux applications. L'application **composée** de $f$ et $g$ est l'application, notée $g \circ f : M \to O$, définie par $x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

**Définition 2.1.4** Soit $f : M \to N$ une application et soient $X \subset M$ et $Y \subset N$ des sous-ensembles de $M$ et $N$. **L'image** de $X$ par $f$ est le sous-ensemble noté $f(X)$ de $N$ défini par

$$f(X) = \{y \in N \mid \exists x \in X \text{ tel que } y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

**L'image inverse** ou **l'image réciproque** de $Y$ par $f$ est le sous-ensemble noté $f^{-1}(Y)$ de $M$ défini par

$$f^{-1}(Y) = \{x \in M \mid f(x) \in Y\}.$$

Lorsque $Y = \{y\}$ ne contient qu'un élément, on écrira $f^{-1}(y)$ à la place de $f^{-1}(\{y\})$.

**Exemple 2.1.5** Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ l'application définie par $x \mapsto x^2$. Alors, on a $f(\{-1; 1\}) = \{1\}$ et $f^{-1}(1) = \{-1; 1\}$.

## 2.2. Applications injectives, surjectives et bijectives

**Définition 2.2.1** Soit $f : M \to N$ une application.

(i) L'application $f$ est dite **injective** si, pour tout $x \in M$ et tout $x' \in M$, on a l'implication $(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$.

(ii) L'application $f$ est dite **surjective** si $f(M) = N$.

(iii) L'application $f$ est dite **bijective** si $f$ est injective et surjective.

**Remarque 2.2.2** Deux versions équivalentes :

(i) Par contraposée, une application $f : M \to N$ est injective si et seulement si pour tout $x \in M$ et tout $x' \in M$, l'implication suivante est vérifée : $(x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$.

(ii) On a toujours $f(M) \subset N$ donc $f$ est surjective si et seulement si $N \subset f(M)$ ou encore si et seulement si, pour tout $y \in N$, il existe $x \in M$ tel que $f(x) = y$.

**Exemple 2.2.3** Les preuves des exemples suivants sont laissées en exercice.

(i) L'application identité $\mathrm{Id}_M : M \to M$ est toujours bijective.

(ii) L'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = n$ est injective mais non surjective.

(iii) L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$ n'est ni injective ni surjective.

(iv) L'application $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ définie par $f(x) = \sin(x)$ n'est pas injective mais est surjective.

(v) L'application $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$ est injective mais n'est pas surjective.

(vi) L'application $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ définie par $f(x) = \sin(x)$ est bijective.

**Remarque 2.2.4** L'exemple précédent (les quatre dernières applications) montrent qu'ensembles de départ et ensembles d'arrivée sont très importants pour les notions d'applications injectives, surjectives et bijectives.

**Proposition 2.2.5** Soit $f : M \to N$ une application. L'application $f$ est bijective si et seulement s'il existe une application $g : N \to M$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_M$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_N$.

Lorsque $f$ est bijective, l'application $g$ ci-dessus est unique.

*Preuve.* Si $f$ est bijective, alors elle est surjective et pour tout $y \in N$, il existe un élément $x \in M$ tel que $f(x) = y$. Cet élément $x \in M$ est unique car si $x' \in M$ est tel que $f(x') = y$, alors $f(x) = f(x')$ et comme $f$ est injective, on a $x = x'$. À chaque $y \in N$, on peut donc associer de manière unique un élément $x = g(y)$ de $M$. Ceci définit une application $g : N \to M$ et on a $f(g(y)) = f(x) = y$ et $g(f(x)) = g(y) = x$.

L'application $g$ ainsi définie est unique. En effet, si $h : N \to M$ est une autre application telle que $h \circ f = \mathrm{Id}_M$ et $f \circ h = \mathrm{Id}_N$, alors on a pour tout $y \in M$ les égalités suivantes : $f(g(y)) = y = f(h(y))$ et comme $f$ est injective, on a $g(y) = h(y)$ pour tout $y \in N$. Les applications $g$ et $h$ sont donc les mêmes : $h = g$.

Réciproquement, s'il existe une application $g : N \to M$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_M$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_N$. Si $x, x' \in M$ sont tels que $f(x) = f(x')$, alors on a $x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'$ donc $x = x'$ et $f$ est injective. Si $y \in N$, alors on a $y = f(g(y))$ et en posant $x = g(y) \in M$, on a bien $y = f(x) \in f(M)$ et $f$ est surjective. ∎

**Définition 2.2.6** Soit $f : M \to N$ une application bijective, l'unique application $g : N \to M$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_M$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_N$ est appelée **application réciproque** ou parfois **inverse** et est notée $f^{-1} : N \to M$.

**Remarque 2.2.7** Attention, ne pas confondre. La notation $f^{-1}$ pour l'application réciproque (et l'appellation inverse encore plus) est trompeuse. Il ne faut pas confondre cette notation avec les deux suivantes :

(i) L'image inverse d'un sous-ensemble $Y \subset N$ notée $f^{-1}(Y)$. Différence : l'application récriproque $f^{-1}$ n'existe que si $f$ est bijective. L'image inverse existe toujours même si $f$ n'est pas bijective.

(ii) L'inverse $x^{-1} = \frac{1}{x}$ d'un réel par exemple. Ainsi l'application cotangente notée cotan : $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$x \mapsto \frac{1}{\tan(x)} = \tan^{-1}(x) \text{ (notation à éviter !)}$$

alors que l'application réciproque de l'application tangente (rappelons que $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}$ est bijective) est l'application $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ qui pourrait aussi se noter $\tan^{-1}$. Pour éviter les confusions, on essaiera de ne jamais utiliser la notation $\tan^{-1}$ et de lui préférer cotan et arctan pour ne pas les confondre.

**Proposition 2.2.8** Soient$f : M \to N$ et $g : N \to O$ deux applications. On a alors,

(i) si $f$ et $g$ sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

(ii) si $f$ et $g$ sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

(iii) si $f$ et $g$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

*Preuve.* 1. Soient $x, y \in M$, tels que $g \circ f(x) = g \circ f(y)$, alors on a $g(f(x)) = g(f(y))$ et comme $g$ est injective, on obtient $f(x) = f(y)$. Comme $f$ est injective, on en déduit l'égalité $x = y$. On a montré que $g \circ f$ est injective.

2. Soit $z \in O$. Comme $g$ est surjective, il existe $y \in N$ tel que $g(y) = z$. Comme $f$ est surjective, il existe $x \in M$ tel que $f(x) = y$. On a alors les égalités $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$, donc $g \circ f$ est surjective.

3. Découle de 1. et 2. et de la définition de bijective. ∎

**Proposition 2.2.9** Soit $f : M \to N$ une application avec $M$ et $N$ non vides.

(i) L'application $f$ est injective si et seulement s'il existe une application $g : N \to M$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_M$.

(ii) L'application $f$ est surjective si et seulement s'il existe une application $h : N \to M$ telle que $f \circ h = \mathrm{Id}_N$.

(iii) Si $f$ est bijective, alors les applications $g$ et $h$ ci-dessus sont toutes les deux égales à l'application réciproque $f^{-1}$.

*Preuve.* Voir feuille d'exercices. ∎

**Définition 2.2.10** Soit $f : M \to N$ une application, le **graphe** de $f$ est le sous-ensemble, noté $\Gamma(f) \subset M \times N$ de $M \times N$ défini par

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in M \times N \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in M\}.$$

**Définition 2.2.11** Soient $M$ et $N$ deux ensembles, l'**ensemble des applications** de $M$ and $N$ est noté $N^M$.

## 2.3. Applications et opérations sur les ensembles

**Proposition 2.3.1** Soient $f : M \to N$ une application, $M_1, M_2 \subset M$ des sous-ensembles de $M$ et $N_1, N_2 \subset N$ des sous-ensembles de $N$.

(i) On a $(M_1 \subset M_2 \Rightarrow f(M_1) \subset f(M_2))$ et $(N_1 \subset N_2 \Rightarrow f^{-1}(N_1) \subset f^{-1}(N_2))$.

(ii) On a $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$ et $f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$.

(iii) On a $f(M_1 \cap M_2) \subset f(M_1) \cap f(M_2)$ et $f^{-1}(N_1 \cap N_2) = f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)$.

(iv) On a $f(M_1) \setminus f(M_2) \subset f(M_1 \setminus M_2)$ et $f^{-1}(N_1 \setminus N_2) = f^{-1}(N_1) \setminus f^{-1}(N_2)$.

*Preuve.* Voir feuille d'exercices. ∎

# Deuxième partie .

# Algèbre linéaire

# 3. Systèmes linéaires

Les systèmes linéaires sont à peu près partout (voir l'exemple ci-dessous) et ils sont tellement simples à résoudre que même lorsqu'ils ne sont pas là, on essaie de s'y ramener car sinon, on ne sait pas résoudre les problèmes. Ça s'appelle la linéarisation et c'est utilisé dans toutes les sciences, experimentales et non expérimentales. C'est un grand principe du mathématicien et du scientifique en général : si on ne sait pas résoudre un problème, on peut toujours essayer de le transformer en un problème qu'on sait résoudre !

## 3.1. Un exemple (pas vraiment d'actualité...)

Un téléphérique pratique les tarifs suivants :

— montée seule 22,50 €,

— descente seule 15 €,

— aller-retour 30 €.

Pendant la journée, on a encaissé 19650 € alors que 680 personnes sont montées et 520 sont descendues.

**Problème 3.1.1** Comment savoir combien de billets de chaque sorte ont été vendus ?

Pour résoudre ce problème, on note $m$ le nombre de montées seules, $d$ le nombre de descentes seules et $a$ le nombre d'aller-retours. le nombre total de montées est $m+a$ donc on a l'équation

$$m + a = 680$$

et le nombre total de descentes est $d+a$ d'où l'équation

$$d + a = 520.$$

Finalement, le chiffre d'affaires de la journée est donc de $22{,}5m+15d+30a$ et on obtient une dernière équation

$$22{,}5m + 15d + 30a = 19650.$$

Notre problème se modélise donc par un système de trois équations :

$$(\star)\quad \begin{cases} m+a=680 \\ d+a=520 \\ 22{,}5m+15d+30a=19650 \end{cases}$$

Il existe des techniques diverses pour résoudre ce genre de système. Une technique consisterait à écrire $m$ et $d$ en fonction de $a$ grâce aux deux premières équations, on obtient $m=680-a$ et $d=520-a$ puis d'injecter ce qu'on a trouvé dans la dernière équation afin d'obtenir une équation qui ne dépend que de la variable $a$ : $22{,}5(680-a)+15(520-a)+30a=19650$ et résoudre. Cette technique s'appelle **méthode par substitution**. Elle est tout à fait efficace, cependant si le nombre de variables grandit, il peut être plus compliqué de la mettre en œuvre car les variables se baladent des deux côtes des équations.

Dans ce chapitre et cet exemple, on va voir une méthode de résolution systématique : un algorithme (c'est très à la mode actuellement) dit de Gauß (1777-1855). Cette technique est tellement automatique qu'elle permettra de ne même plus ecrire les variables ! Un gain de temps non négligeable s'il y en a beaucoup [1].

Voici un exemple de cet algorithme appliqué à notre exemple. On va faire bien attention à toujours laisser la variable $m$ tout à gauche, la variable $d$ au milieu et la variable $a$ à la fin, même si ces variables n'apparaissent pas. Le système devient :

$$\begin{cases} \begin{array}{ccccccc} m & & & + & a & = & 680 \\ & & d & + & a & = & 520 \\ 22{,}5m & + & 15d & + & 30a & = & 19650 \end{array} \end{cases}$$

Ensuite, le principe est de faire des opérations sur les lignes pour éliminer les variables. On commence par éliminer la variable $m$ des deux dernières équations en utilisant la première. On ne change pas la ligne 2 (car la variable $m$ n'y est pas) et on remplace la dernière ligne par elle-même moins 22,5 fois la première ligne. On obtient

$$\begin{cases} \begin{array}{ccccccc} m & & & + & a & = & 680 \\ & & d & + & a & = & 520 \\ (22{,}5-22{,}5)m & + & (15-0)d & + & (30-22{,}5)a & = & 19650-22{,}5\times 680 \end{array} \end{cases}$$

En effectuant les calculs dans la dernière equation, on obtient

$$\begin{cases} \begin{array}{ccccccc} m & & & + & a & = & 680 \\ & & d & + & a & = & 520 \\ & & 15d & + & 7{,}5a & = & 4350 \end{array} \end{cases}$$

1. comme par exemple dans l'algorithme pagerank de google dont les variables sont les nombres de liens vers une page web donnée...

Et maintenant ? On recommence en éliminant $d$ de la dernière equation en remplaçant la dernière équation par elle-même moins 15 fois la deuxième. On obtient

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} m & & & + & a & = & 680 \\ & & d & + & a & = & 520 \\ & & (15-15)d & + & (7{,}5-15)a & = & 4350 - 15 \times 520 \end{array}\right.$$

Ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} m & & & + & a & = & 680 \\ & & d & + & a & = & 520 \\ & & & & -7{,}5a & = & -3450 \end{array}\right.$$

En divisant la dernière équation par $-7,5$, on obtient la valeur de $a$ :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} m & & & + & a & = & 680 \\ & & d & + & a & = & 520 \\ & & & & a & = & 460 \end{array}\right.$$

On élimine ensuite $a$ des deux premières équations en utilisant la dernière. On remplace donc la première équation par elle-même moins la dernière et la seconde par elle-même moins la dernière. On obtient :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} m & & & = & 220 \\ & d & & = & 60 \\ & & a & = & 460 \end{array}\right.$$

Le système est résolu. On a $m = 220$, $d = 60$ et $a = 460$.

## 3.2. Définition

**Définition 3.2.1 Un système linéaire** est une famille d'équations de la forme suivante (ici on a $m$ équations) :

$$(\star)\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + \cdots + a_{1,n}X_n = b_1 \\ a_{2,1}X_1 + a_{2,2}X_2 + \cdots + a_{2,n}X_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}X_1 + a_{m,2}X_2 + \cdots + a_{m,n}X_n = b_m \end{array}\right.$$

où $X_1, \cdots, X_n$ sont des **variables** ou encore **inconnues** et où les $a_{i,j}$ et les $b_j$ sont des scalaires, c'est-à-dire des nombres réels.

Le système est dit **homogène** si tous les coefficients $b_j$ sont nuls, c'est-à-dire si $b_j = 0$ pour tout $j$ entre 1 et $m$. Sinon, il est dit **inhomogène**.

**Remarque 3.2.2** Le système ci-dessus est linéaire car les variables apparaissent toutes à la puissance 1 et il n'y a aucun produit entre les variables. C'est un point très important. S'il n'est pas vérifié, la résolution devient plus difficile, voire impossible [2]...

**Définition 3.2.3** Considérons le système $(\star)$ suivant :

$$(\star)\quad \left\{\begin{array}{c} a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + \cdots + a_{1,n}X_n = b_1 \\ a_{2,1}X_1 + a_{2,2}X_2 + \cdots + a_{2,n}X_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}X_1 + a_{m,2}X_2 + \cdots + a_{m,n}X_n = b_m. \end{array}\right.$$

(i) La **matrice des coefficients** du système $(\star)$ est le tableau de nombres réels $A$ suivant :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

(ii) La **matrice des seconds membres** est le tableau $b$ suivant :

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Le système est alors écrit sous forme plus compacte de la manière suivante : $AX = b$.

(iii) La **matrice totale** ou **matrice étendue** du système $(\star)$ est le tableau suivant obtenu par concaténation des matrices $A$ et $b$ :

$$[A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$$

**Définition 3.2.4** Considérons le système $(\star)$ suivant :

$$(\star)\quad \left\{\begin{array}{c} a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + \cdots + a_{1,n}X_n = b_1 \\ a_{2,1}X_1 + a_{2,2}X_2 + \cdots + a_{2,n}X_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}X_1 + a_{m,2}X_2 + \cdots + a_{m,n}X_n = b_m. \end{array}\right.$$

(i) Une famille

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

2. Par exemple, on ne sait pas résoudre en général une équation, en une seule variable $X$, de la forme $aX^5 + bX^4 + cX^3 + dX^2 + eX + f = 0$.

de nombres réels $v_i$ est appelée **solution du système** $(\star)$, si on a les égalités suivantes :

$$\begin{cases} a_{1,1}v_1 + a_{1,2}v_2 + \cdots + a_{1,n}v_n = b_1 \\ a_{2,1}v_1 + a_{2,2}v_2 + \cdots + a_{2,n}v_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}v_1 + a_{m,2}v_2 + \cdots + a_{m,n}v_n = b_m. \end{cases}$$

(ii) **L'ensemble des solutions** du système $(\star)$ est noté $S(A,b)$ et est défini par $S(A,b) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \text{ est une solution de } (\star)\}$.

(iii) Le système est appelé **résoluble** si $S(A,b) \neq \emptyset$, c'est-à-dire s'il y a des solutions.

(iv) Le système est appelé **irrésoluble** si $S(A,b) = \emptyset$, c'est-à-dire s'il n'y a pas de solution.

## 3.3. Matrices, opérations sur les lignes

**Définition 3.3.1** Soient $m$ et $n$ deux entiers naturels.

(i) Une **matrice** est un tableau de nombre réels. Lorsque le nombre de lignes est $m$ et le nombre de colonnes est $n$, on dit que la matrice est de **taille** $m \times n$. On représente une telle matrice $A$ de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

(ii) L'ensemble des matrices de taille $m \times n$ est noté $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

(iii) Une matrice dont tous les coefficients sont nuls est appelée **matrice nulle** et notée 0.

On va maintenant définir des opérations sur les lignes d'une matrice qui seront les opérations autorisées dans l'algorithme de résolution des systèmes linéaires.

**Remarque 3.3.2** Pour résoudre un système, on travaille en général avec la matrice totale $B = [A|b]$ du système qui contient la matrice $A$ du système et le second membre $b$.

**Définition 3.3.3** Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice de taille $m \times n$. On définit trois types d'opérations sur les lignes de cette matrice. On note $L_1, \cdots, L_n$ les lignes de cette matrice.

(i) **Addition de $a$-fois une ligne** : soit $a \in \mathbb{R}$, on remplace la ligne $i$ (donc la ligne $L_i$) par elle-même plus $a$-fois la ligne $j$. Cette opération s'écrit souvent sous la forme $L_i \to L_i + aL_j$.

(ii) **Multiplication de la ligne par** $b$ : soit $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on remplace la ligne $i$ (donc la ligne $L_i$) par $b$-fois elle-même. Cette opération s'écrit souvent sous la forme $L_i \to bL_i$.

(iii) **Échange de lignes** : on peut changer l'ordre des lignes. Par exemple si on échange les lignes $i$ et $j$, on notera $L_i \leftrightarrow L_j$.

**Exemple 3.3.4** Voici un exemple de telles opérations. On part de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on décrit une suite de telles opérations qui permet d'obtenir une matrice plus simple. Les opérations sont les suivantes :

(i) échange des lignes 1 et 2 : $L_1 \leftrightarrow L_2$,

(ii) ligne 1 remplacée par $\frac{1}{2}$ fois elle-même : $L_1 \to \frac{1}{2}L_1$,

(iii) ligne 3 remplacée par elle-même moins la ligne 1 : $L_3 \to L_3 - L_1$,

(iv) ligne 2 remplacée par $\frac{1}{2}$ fois elle-même : $L_2 \to \frac{1}{2}L_2$,

(v) ligne 3 remplacée par elle-même plus la ligne 2 : $L_3 \to L_3 + L_2$,

(vi) ligne 1 remplacée par elle-même moins 2 fois la ligne 2 : $L_1 \to L_1 - 2L_2$.

On obtient ainsi la suite de matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (L_1 \leftrightarrow L_2) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (L_2 \to \frac{1}{2}L_2) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow (L_3 \to L_3 - L_1) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (L_2 \to \frac{1}{2}L_2) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow (L_3 \to L_3 + L_2) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (L_1 \to L_1 - 2L_2) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Remarque 3.3.5** Les opérations sur les lignes ci-dessus sont réversibles : il existe des opérations qui permettent de revenir en sens inverse.

(i) L'opération inverse de $L_i \to L_i + aL_j$ est l'opération $L_i \to L_i - aL_j$.

(ii) L'opération inverse de $L_i \to bL_i$ est l'opération $L_i \to \frac{1}{b}L_i$ (il est ici très important de supposer $b \neq 0$).

(iii) L'opération inverse de $L_i \leftrightarrow L_j$ est elle-même $L_i \leftrightarrow L_j$.

L'interêt de faire des opérations sur les lignes réside dans le résultat suivant.

**Proposition 3.3.6** L'ensemble des solutions d'un système ne change pas lorsque l'on fait des opérations sur les lignes comme ci-dessus.

*Preuve.* Commençons par l'opération $L_i \to L_i + aL_j$. On passe d'un système avec les lignes $L_1, \cdots, L_n$ à un système avec les mêmes lignes sauf la ligne $i$ qui devient $L_i + aL_j$. Il faut montrer que les deux systèmes ont les mêmes solutions, c'est-à-dire que leurs lignes sont des égalités en même temps. Si on a une solution du premier système alors toutes les lignes sont des égalités donc en particulier les lignes $L_i$ et $L_j$ et donc la ligne $L_i + aL_j$ est aussi une égalité. Si on a une solution du second système alors toutes les lignes sauf peut-être $L_i$ sont des égalités et la ligne $L_i + aL_j$ est aussi une égalité. Mais comme $L_j$ est une égalité, on a que $L_i = (L_i + aL_j) - aL_j$ est aussi une égalité.

Pour l'opération $L_i \to bL_i$ avec $b \neq 0$. On voit que $L_i$ est un égalité si et seulement si $bL_i$ en est une, donc les deux systèmes ont les même solutions.

Finalement, pour l'opération d'échange des lignes, c'est encore plus facile : les lignes ne changent pas. ∎

## 3.4. Algorithme de Gauß

Nous allons généraliser et décrire de manière systématique la méthode de résolution utilisée dans les exemples précédents. Pour ceci nous commençons par décrire la forme finale de la matrice : l'objectif de l'algorithme ou encore le moment où l'on s'arrête. Cette forme est la suivante :

$$
\begin{array}{cccccccccc|c}
1 & j_1 & & j_2 & & j_3 & & & j_r & n & \\
\hline
0 \cdots 0 & 1 & \star \cdots \star & 0 & \star \cdots \star & 0 & \star \cdots \star & & 0 & \star \cdots \star & 1 \\
 & & & 1 & \star \cdots \star & 0 & \star \cdots \star & \cdots & 0 & \vdots \quad \vdots & 2 \\
 & & & & & 1 & \star \cdots \star & & 0 & \vdots \quad \vdots & 3 \\
 & & & & & & & & 0 & \vdots \quad \vdots & 4 \\
 & & & 0 & & & & & \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & & 0 & \vdots \quad \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & & 1 & \star \cdots \star & r \\
\hline
 & & & & & & & & & & r+1 \\
 & & & 0 & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & m
\end{array}
$$

où les étoiles désignent des réels quelconques. Ici les pivots sont les suivants : $\mathrm{Pivot}(B) = \{j_1, \cdots, j_r\}$ (cf. ci-dessous).

Voici sa définition formelle.

**Définition 3.4.1** Soient $m$ et $n$ deux entiers naturels.

(i) Une matrice $B = (b_{i,j}) \in M_{m,n}(K)$ est sous **forme échelonnée réduite** si $B = 0$ ou s'il existe un entier $1 \leq r \leq \min(m,n)$ et des indices $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n$ (indices de colonnes), tels que l'on ait

a) pour $1 \leq k \leq r$, on a $b_{k,j} = 0$ si $j < j_k$ (les premières $j_k - 1$ entrées de la $k$-ième ligne sont nulles).

b) Pour $1 \leq k \leq r$, on a $b_{i,j_k} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$ (le $k$-ième coefficient de la colonne $j_k$ vaut 1 tous les autres sont nuls).

c) Pour $r+1 \leq k \leq m$, on a $b_{k,j} = 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$ (les lignes de $r+1$ à $m$ sont nulles).

(ii) Les indices $j_1, \cdots, j_r$ sont les **pivots** de la matrice $B$. L'ensemble des pivots est noté $\text{Pivot}(B) = \{j_1, \cdots, j_r\}$. Lorsque $B = 0$, on pose $\text{Pivot}(B) = \emptyset$.

(iii) L'entier $r$ est appelé **rang** de la matrice $B$.

**Exemple 3.4.2** La matrice suivante

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & b_{1,3} & b_{1,4} & 0 & b_{1,6} & 0 & 0 & b_{1,9} & b_{1,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_{2,6} & 0 & 0 & b_{2,9} & b_{2,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b_{3,9} & b_{3,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_{4,9} & b_{4,10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est sous forme échelonnée réduite. Son rang vaut 4 : $r = 4$ et ses pivots sont $\text{Pivot}(B) = \{2, 5, 7, 8\}$.

L'algorithme de Gauß ramène toute matrice à une matrice échelonnée réduite.

**Proposition 3.4.3 (Algorithme de Gauß)** Soit $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(K)$ une matrice de taille $m \times n$. Alors il existe des opérations sur les lignes de cette matrice qui permettrent de la transformer en une matrice $B$ échelonnée réduite.

**Définition 3.4.4** Une telle matrice $B$ obtenue à partir d'une matrice $A$ par l'algorithme de Gauß est appelée **forme échelonnée réduite de** $A$.

*Preuve.* Si $A = 0$, on a terminé. On a $r = 0$ et $\text{Pivot}(A) = \emptyset$.

Supposons que $A$ est non nulle : $A \neq 0$. On va fabriquer une suite de matrices $A^{(0)}, A^{(1)}, \ldots$ qui fournira en fin d'algorithme la matrice échelonnée réduite recherchée. On pose $A^{(0)} = (a^{(0)}_{i,j}) = A$. On trouve le premier pivot $j_1 \in [1, n]$ de la manière suivante :

$$j_1 = \min\{s \in [1, n] \mid \text{il existe un } p \in [1, m] \text{ tel que } a^{(0)}_{p,s} \neq 0\}.$$

En français dans le texte : *on cherche l'indice $j_1$ de la première colonne non nulle.*

On définit maintenant un entier $p \in [1, m]$ de la manière suivante :

$$p = \min\{l \in [1, m] \mid a^{(0)}_{l,j_1} \neq 0\}.$$

En français dans le texte : *on cherche le premier terme non nul de la colonne $j_1$, on appelle $p$ son indice.*

On effectue maintenant les opérations suivantes sur la matrice $A^{(0)}$ :

— on échange les lignes 1 et $p$ : $L_1 \leftrightarrow L_p$,

— on divise la ligne 1 par $a_{p,j_1}$ (qui est non nul par construction).

On obtient alors une matrice $C^{(0)} = (c_{i,j})_{i\in[1,m],j\in[1,n]} \in$ dont la première ligne est de la forme

$$\text{Première ligne de } C^{(0)} : (\underbrace{0 \cdots, 0}_{j_1-1 \text{ termes}}, 1, \star, \cdots, \star)$$

où les étoiles représentent des réels quelconques. Sur $C^{(0)}$, on effectue les opérations suivantes :

— on fait $L_2 \to L_2 - c_{2,j_1} L_1$,

— on fait $L_3 \to L_3 - c_{3,j_1} L_1$,

— $\cdots$

— on fait $L_i \to L_i - c_{i,j_1} L_1$,

— $\cdots$

— on fait $L_m \to L_m - c_{m,j_1} L_1$.

On appelle $A^{(1)}$ la matrice obtenue. On remarque que les $j_1 - 1$ premières colonnes de $A^{(1)}$ sont nulles et que sa $j_1$-ième colonne est de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

On continue par récurrence. On suppose que l'on a obtenu des matrices $A^{(1)}, \cdots, A^{(k-1)} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et des entiers $j_1 < \cdots < j_{k-1}$ qui sont telles que $A^{(i)}$ est sous-forme échelonnée réduite jusqu'à sa colonne $j_i$. On contruit alors $A^{(k)}$ pour $k \geq 2$ de la manière suivante. On pose

$$j_k = \min\{s \in [j_{k-1} + 1, n] \mid \text{il existe } p \in [k, m] \text{ tel que } a^{(k-1)}_{p,s} \neq 0\}.$$

En français dans le texte : *on cherche, dans les $m - k + 1$ dernières lignes, la première colonne d'indice plus grand que $j_{k-1}$ qui n'est pas nulle. On note $j_k$ son indice.*

Si un tel indice $j_k$ n'existe pas, alors toutes les lignes après la ligne $k-1$ sont nulles et on a terminé. L'algorithme s'arrête.

Supposons que $j_k$ existe. On définit alors $p \in [k, m]$ par

$$p = \min\{l \in [k, m] \mid a_{l,j_k}^{(k-1)} \neq 0\}.$$

En français dans le texte : *on cherche, dans les $m-k+1$ dernières lignes et dans la colonne $j_k$ (qui n'est pas nulle), le premier coefficient non nul. On appelle $p$ son indice de ligne.*

On effectue maintenant les opérations suivantes sur la matrice $A^{(k-1)} = (a_{i,j}^k)_{i\in[1,m],j\in[1,n]}$ :

- — on échange les lignes $k$ et $p$ : $L_k \leftrightarrow L_p$,
- — on divise la ligne $k$ par $a_{p,j_k}^{(k)}$ (qui est non nul par construction).

On obtient alors une matrice $C^{(k)} = (c_{i,j}^{(k)})_{i\in[1,m],j\in[1,n]} \in$ dont la $k$-ième ligne est de la forme

$$k\text{-ième ligne de } C^{(0)} : (\underbrace{0 \cdots, 0}_{j_k-1 \text{ termes}}, 1, \star, \cdots, \star)$$

où les étoiles représentent des réels quelconques. Sur $C^{(k)}$, on effectue les opérations suivantes :

- — on fait $L_1 \to L_1 - c_{1,j_k} L_k$,
- — $\cdots$
- — on fait $L_{k-1} \to L_{k-1} - c_{k-1,j_k} L_k$,
- — on fait $L_{k+1} \to L_{k+1} - c_{k+1,j_k} L_k$,
- — $\cdots$
- — on fait $L_m \to L_m - c_{m,j_k} L_k$.

On appelle $A^{(k)}$ la matrice obtenue. On remarque que les $j_k$ premières colonnes de $A^{(k)}$ sont sous forme échelonnée réduite.

On continue et on voit qu'au bout d'au plus $k = \min(m, n)$ étapes, l'algorithme doit se terminer car on a traité toutes les colonnes. ■

**Exemple 3.4.5** On reprend l'exemple 3.3.4,

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto C^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto C^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Corollaire 3.4.6** Pour résoudre un système $AX = b$, c'est-à-dire trouver l'ensemble de ses solutions, il suffit de résoudre le système associé à une forme échelonnée réduite de la matrice $B = [A|b]$.

**Exemple 3.4.7** Considérons le système

$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ x + 2y + 4z = 5 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

Sa matrice $A$ et son second membre $b$ sont

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alors que sa matrice totale $B$ est

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

On applique l'algorithme de Gauß à $B$, on obtient la suite de matrices suivantes où l'on a effectué dans l'ordre les opérations : $L_2 \to L_2 - L_1$ puis $L_2 \mapsto \frac{1}{2}L_2$ puis $L_3 \to L_3 - L_2$ puis $L_2 \mapsto \frac{1}{2}L_2$ puis $L_3 \to L_3 - L_2$ puis $L_2 \to L_2 - L_3$ et $L_1 - 2L_3$ :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

On voit que la seule solution du système est $(x, y, z) = (3, 1, 0)$. On obtient

$$S(A, b) = \{(3, 1, 0)\}.$$

Le système n'a qu'une solution.

**Exemple 3.4.8** Considérons le système

$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ x + 2y + 4z = 5 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

Sa matrice $A$ et son second membre $b$ sont

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

alors que sa matrice totale $B$ est

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

On applique l'algorithme de Gauß à $B$, on obtient la suite de matrices suivantes où l'on a effectué dans l'ordre les opérations : $L_2 \to L_2 - L_1$ puis $L_2 \to \frac{1}{2}L_2$ puis $L_3 \to L_3 - L_2$ puis $L_2 \mapsto \frac{1}{2}L_2$ puis $L_3 \to L_3 - L_2$ puis $L_1 \to L_1 - 2L_2$ puis $L_2 \to L_2 - L_3$ et enfin $L_1 \to L_1 - 3L_3$ :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

On voit que $(x, y, z)$ n'est jamais solution, en effet la dernière équation s'écrit $0 = 1$ ce qui est impossible. L'ensemble des solutions est donc

$$S(A, b) = \emptyset.$$

On voit qu'il y a pas de solution, le système est irrésoluble.

**Exemple 3.4.9** Considérons le système

$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ x + 2y + 4z = 5 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Sa matrice $A$ et son second membre $b$ sont

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alors que sa matrice totale $B$ est

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

On applique l'algorithme de Gauß à $B$, on obtient la suite de matrices suivantes où l'on a effectué dans l'ordre les opérations : $L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1$ puis $L_2 \mapsto \frac{1}{2}L_2$ puis $L_3 \to L_3 - L_2$ puis $L_2 \mapsto \frac{1}{2}L_2$ puis $L_3 \to L_3 - L_2$ et enfin $L_1 \to L_1 - 2L_2$ :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

On voit que $(x, y, z)$ est solution du système si et seulement si on a $y + z = 1$ et $x + 2z = 3$ ou encore si et seulement si $x = 3 - 2z$ et $y = 1 - z$. L'ensemble des solutions est donc

$$S(A, b) = \left\{(3 - 2z, 1 - z, z) \,\middle|\, z \in \mathbb{R}\right\}.$$

On voit qu'il y a une infinité de solutions.

Les exemples précédents montrent que l'on peut décrire les solutions du système à partir d'une forme réduite de sa matrice totale. Nous allons étudier ce lien plus en détail au prochain paragraphe.

## 3.5. Système homogène et inhomogène

**Définition 3.5.1** Considérons le système linéaire

$$(\star) \left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + \cdots + a_{1,n}X_n = b_1 \\ a_{2,1}X_1 + a_{2,2}X_2 + \cdots + a_{2,n}X_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}X_1 + a_{m,2}X_2 + \cdots + a_{m,n}X_n = b_m \end{array} \right.$$

et soient $A$ sa matrice, $b$ son second membre et $B = [A|b]$ sa matrice totale. La matrice $A$ est de taille $m \times n$ et $B$ est de taille $m \times (n + 1)$. Le système s'écrit $AX = b$.

**Le système homogène associé** au système $(\star)$ est le système

$$(\star\star) \left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + \cdots + a_{1,n}X_n = 0 \\ a_{2,1}X_1 + a_{2,2}X_2 + \cdots + a_{2,n}X_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}X_1 + a_{m,2}X_2 + \cdots + a_{m,n}X_n = 0 \end{array} \right.$$

où on remplace $b$ par la matrice colonne nulle. La matrice du système $(\star\star)$ est toujours $A$ mais son second membre est nul $0$ et la matrice totale est $[A|0]$. Le système s'écrit $AX = 0$.

Il y a un lien fort entre solutions du système $(\star)$ et du système homogène $(\star\star)$ associé.

**Proposition 3.5.2** Soit

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

une solution du système ($\star$). Alors toute solution $v'$ du système ($\star$) est de la forme

$$v' = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

où

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

est une solution du système homogène ($\star\star$).

**Définition 3.5.3** Soient $v \in \mathbb{R}^n$ et $w \in \mathbb{R}^n$ deux $n$-uplets de réels aussi appelés **vecteurs** de $\mathbb{R}^n$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ et } w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

**La somme** des vecteurs $v$ et $w$ est le vecteur $v' = v + w$ obtenu de la manière suivante :

$$v' = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

La proposition précédente peut donc se réécrire sous la forme plus compacte suivante.

**Proposition 3.5.4** Soit $v \in \mathbb{R}^n$ une solution du système ($\star$). Alors toute solution $v'$ du système ($\star$) est de la forme $v' = v + w$ où $w$ est une solution du système homogène ($\star\star$).

*Preuve.* Il faut montrer deux choses :

(i) si $w$ est une solution de ($\star\star$), alors $v + w$ est une solution de ($\star$) et

(ii) si $v'$ est une solution de ($\star$), alors il existe $w$ solution de ($\star\star$) telle que $v' = v + w$.

Soit $w$ une solution de ($\star\star$) et $v' = v + w$. On a alors $v'_i = v_i + w_i$ pour tout $i \in [1, n]$. On sait que les équations suivantes sont satisfaites (car $v$ est solution de ($\star$) et $w$ solution de ($\star\star$)) :

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}v_1 + a_{1,2}v_2 + \cdots + a_{1,n}v_n = b_1 \\ a_{2,1}v_1 + a_{2,2}v_2 + \cdots + a_{2,n}v_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}v_1 + a_{m,2}v_2 + \cdots + a_{m,n}v_n = b_m \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}w_1 + a_{1,2}w_2 + \cdots + a_{1,n}w_n = 0 \\ a_{2,1}w_1 + a_{2,2}w_2 + \cdots + a_{2,n}w_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}w_1 + a_{m,2}w_2 + \cdots + a_{m,n}w_n = 0 \end{array} \right.$$

En faisant la somme de chaque lignes, on obtient

$$\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}(v_1+w_1)+a_{1,2}(v_2+w_2)+\cdots+a_{1,n}(v_n+w_n)=b_1 \\ a_{2,1}(v_1+w_1)+a_{2,2}(v_2+w_2)+\cdots+a_{2,n}(v_n+w_n)=b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}(v_1+w_1)+a_{m,2}(v_2+w_2)+\cdots+a_{m,n}(v_n+w_n)=b_m \end{array}\right.$$

ce qui montre que $v' = v + w$ est bien soution de $(\star)$.

Supposons maintenant que $v'$ est solution de $(\star)$ et définissons $w$ par $w = v' - v$ c'est-à-dire

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \cdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1' - v_1 \\ \cdots \\ v_n' - v_n \end{pmatrix}.$$

On sait que les équations suivantes sont satisfaites (car $v'$ et $v$ sont solutions de $(\star)$) :

$$\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}v_1'+a_{1,2}v_2'+\cdots+a_{1,n}v_n'=b_1 \\ a_{2,1}v_1'+a_{2,2}v_2'+\cdots+a_{2,n}v_n'=b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}v_1+a_{m,2}v_2+\cdots+a_{m,n}v_n'=b_m \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{c} a_{1,1}v_1+a_{1,2}v_2+\cdots+a_{1,n}v_n=b_1 \\ a_{2,1}v_1+a_{2,2}v_2+\cdots+a_{2,n}v_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}v_1'+a_{m,2}v_2'+\cdots+a_{m,n}v_n=b_m \end{array}\right.$$

En faisant la différence de chaque lignes, on obtient

$$\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}(v_1'-v_1)+a_{1,2}(v_2'-v_2)+\cdots+a_{1,n}(v_n'-v_n)=b_1 \\ a_{2,1}(v_1'-v_1)+a_{2,2}(v_2'-v_2)+\cdots+a_{2,n}(v_n'-v_n)=b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}(v_1'-v_1)+a_{m,2}(v_2'-v_2)+\cdots+a_{m,n}(v_n'-v_n)=b_m \end{array}\right.$$

ce qui montre que $w = v' - v$ est soution de $(\star\star)$. On vérifie aisément que $v' = v + w$ donc $v'$ vérifie la condition voulue. ∎

**Remarque 3.5.5** Soit $v \in S(A, b)$ une solution du système $(\star)$, on peut résumer la proposition précédente par une égalité entre ensembles de solutions :

$$S(A, b) = v + S(A, 0).$$

où la notation du terme de droite signifie

$$v + S(A, 0) = \{v + w \mid w \in S(A, 0)\}.$$

Les solutions du système homogène jouent donc un rôle très imporant, ce qui explique la définition suivante, qui reviendra très souvent en mathématique...

**Définition 3.5.6** Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice. L'ensemble $S(A, 0)$ des solutions du système homogène $AX = 0$ est appelé **noyau** de la matrice $A$ et noté $\mathrm{Ker}(A)$. En symboles : $\mathrm{Ker}(A) = S(A, 0)$.

**Remarque 3.5.7 (Etymologie)** La notation Ker peut paraître bizarre, mais en anglais, le noyau se dit *the kernel* et en allemand *der Kern*. Les mathématiques n'ont pas de frontières !

Les systèmes homogènes ont un gros avantage par rapport aux systèmes non homogènes : ils ont toujours au moins une solution.

**Lemme 3.5.8** Considérons un système linéaire homogène

$$(\star\star)\quad \left\{\begin{array}{c} a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + \cdots + a_{1,n}X_n = 0 \\ a_{2,1}X_1 + a_{2,2}X_2 + \cdots + a_{2,n}X_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}X_1 + a_{m,2}X_2 + \cdots + a_{m,n}X_n = 0 \end{array}\right.$$

Alors le vecteur nul

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

est solution de $(\star\star)$. Si $A$ est la matrice du système, ceci se traduit par $0 \in \mathrm{Ker} A$. □

*Preuve.* Il suffit de remplacer les $X_i$ par 0 et de constater qu'on obtient l'égalité $0 = 0$. ■

**Proposition 3.5.9** Considérons un système linéaire homogène

$$(\star\star)\quad \left\{\begin{array}{c} a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + \cdots + a_{1,n}X_n = 0 \\ a_{2,1}X_1 + a_{2,2}X_2 + \cdots + a_{2,n}X_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}X_1 + a_{m,2}X_2 + \cdots + a_{m,n}X_n = 0 \end{array}\right.$$

et soient $A$ sa matrice, $b = 0$ son second membre et $B = [A|0]$ sa matrice totale. La matrice $A$ est de taille $m \times n$ et $B$ est de taille $m \times (n+1)$.

Soit $M$ une forme réduite de $B$ et soient $\mathrm{Pivot}(M) = \{j_1, \cdots, j_r\}$ ses pivots. La matrice $M$ est de la forme

$$\begin{array}{cccccccccccc|c}
1 & & & j_1 & & & & & j_r & & & n & n+1 \\
\hline
0 & \cdots & 0 & 1 & m_{1,j_1+1} & \cdots & m_{1,j_2-1} & \cdots & 0 & m_{1,j_r+1} & \cdots & m_{1,n} & 0 \\
 & & & & 0 & & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & & 1 & m_{r,j_r+1} & \cdots & m_{r,n} & 0 \\
\hline
 & & & & & & & & & & & & 0 \\
 & & & & 0 & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & 0
\end{array}$$

Soit

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

une solution de $(\star\star)$. Les coordonnées $v_{j_1}, \cdots, v_{j_r}$ de $v$ sont **liées** alors que les autres coordonnées $v_i$ avec $i \notin \{j_1, \cdots, j_r\}$ sont **libres**. Ceci signifie que les coordonnées libres preuvent prendre n'importe quelle valeur alors que les coordonnées $v_{j_1}, \cdots, v_{j_r}$ sont déterminées par les formules

$$\begin{cases} v_{j_1} = -\displaystyle\sum_{i=j_1+1, i\notin\{j_2,\cdots,j_r\}}^{n} m_{1,i}v_i \\ \vdots \\ v_{j_k} = -\displaystyle\sum_{i=j_k+1, i\notin\{j_{k+1},\cdots,j_r\}}^{n} m_{k,i}v_i \\ \vdots \\ v_{j_r} = -\displaystyle\sum_{i=j_r+1}^{n} m_{r,i}v_i. \end{cases}$$

L'entier $r$ est appelé **rang du système**. La **dimension** de l'ensemble des solutions est le nombre de paramètres libres et vaut $n - r$.

*Preuve.* Il suffit de résoudre les équations du système échelonné réduit. Sur chaque ligne $k$ de 1 à $r$, on garde la variable $v_{j_k}$ à gauche et on fait passer à droite les autres variables. On obtient les formules ci-dessus. ∎

**Définition 3.5.10** Soit $(\star\star)$ un système homogène de matrice totale $B = [A|0]$ et soit $M$ une forme échelonnée réduite de $B$. Soit $\mathrm{Pivot}(M) = \{j_1, \cdots, j_r\}$ l'ensemble des pivots de $M$.

(i) Les variables $X_{j_1}, \cdots, X_{j_r}$ du système sont dites **liées** alors que les autres variables $X_i$ avec $i \notin \{j_1, \cdots, j_r\}$ sont dites **libres**.

(ii) Le **rang** du système est $r$ et la **dimension** de l'ensemble des solutions est le nombre de variables libres et vaut $n - r$.

**Remarque 3.5.11** D'après la proposition précédente, pour obtenir une solution du système, il suffit de choisir des valeurs pour les variables libres, grâce à la forme échelonnée réduite, on en déduit les valeurs des variables liées.

**Exemple 3.5.12** Considérons le système homogène suivant :

$$\begin{cases} x \quad\quad +2z = 0 \\ x + 2y + 4z = 0 \\ \quad\; y + z = 0 \end{cases}$$

On peut remarquer que c'est le système homogène associé aux exemples 3.4.8 et 3.4.9. Sa matrice $A$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Son second membre est nul et sa matrice totale $B$ est

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

On applique l'algorithme de Gauß à $B$, on obtient la suite de matrices suivantes où l'on a effectué dans l'ordre les opérations : $L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1$ puis $L_2 \mapsto \frac{1}{2}L_2$ puis $L_3 \to L_3 - L_2$ puis $L_2 \mapsto \frac{1}{2}L_2$ puis $L_3 \to L_3 - L_2$ et enfin $L_1 \to L_1 - 2L_2$ :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Le résultat précédent nous dit que le rang $r$ est $r = 2$, les pivots sont $\{j_1, j_2\} = \{1, 2\}$. La dimension de l'ensemble des solutions est $n - r = 3 - 2 = 1$. Les solutions doivent donc dépendre d'une variable libre, la troisième variable (la seule qui n'est pas liée, c'est-à-dire dont l'indice n'est pas dans l'ensemble des pivots.

On retrouve ces données dans l'ensemble des solutions : un vecteur $(x, y, z)$ est solution du système si et seulement si on a $y + z = 0$ et $x + 2z = 0$ ou encore si et seulement si $x = -2z$ et $y = -z$. L'ensemble des solutions est donc

$$\mathrm{Ker}(A) = S(A, 0) = \big\{(-2z, -z, z) \,\big|\, z \in \mathbb{R}\big\}.$$

On voit qu'il y a une infinité de solutions dépendant d'un paramètre : $z$.

On obtient finalement les solutions d'un système quelconque.

**Proposition 3.5.13** Considérons un système linéaire

$$(\star) \quad \left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + \cdots + a_{1,n}X_n = b_1 \\ a_{2,1}X_1 + a_{2,2}X_2 + \cdots + a_{2,n}X_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}X_1 + a_{m,2}X_2 + \cdots + a_{m,n}X_n = b_m \end{array} \right.$$

et soient $A$ sa matrice, $b$ son second membre et $B = [A|b]$ sa matrice totale. La matrice $A$ est de taille $m \times n$ et $B$ est de taille $m \times (n+1)$.

Soit $M$ une forme réduite de $B$ et soient $\mathrm{Pivot}(M) = \{j_1, \cdots, j_r\}$ ses pivots.

(i) Le système $(\star)$ a une solution si et seulement le dernier pivot $j_r$ n'est pas égal à $n + 1$ : $j_r < n + 1$.

(ii) Si $j_r < n+1$, soit
$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$
une solution de $(\star)$. Les coordonnées $v_{j_1}, \cdots, v_{j_r}$ de $v$ sont **liées** alors que les autres coordonnées $v_i$ avec $i \notin \{j_1, \cdots, j_r\}$ sont **libres**. Ceci signifie que les coordonnées libres preuvent prendre n'importe quelle valeur alors que les coordonnées $v_{j_1}, \cdots, v_{j_r}$ sont déterminées par les formules
$$\left\{ \begin{array}{ccc} v_{j_1} & = & m_{1,n+1} - \displaystyle\sum_{i=j_1+1, i\notin\{j_2,\cdots,j_r\}}^{n} m_{1,i} v_i \\ & \vdots & \\ v_{j_k} & = & m_{k,n+1} - \displaystyle\sum_{i=j_k+1, i\notin\{j_{k+1},\cdots,j_r\}}^{n} m_{k,i} v_i \\ & \vdots & \\ v_{j_r} & = & m_{r,n+1} - \displaystyle\sum_{i=j_r+1}^{n} m_{r,i} v_i. \end{array} \right.$$
Le **rang** du système est $r$ et la **dimension** de l'ensemble des solutions est le nombre de paramètre libres et vaut $n-r$.

*Preuve.* Si $j_r = n+1$, alors la dernière équation s'écrit $0 = 1$ ce qui est impossible. Il n'y a pas de solution. Sinon, il suffit de résoudre les équations du système échelonné réduit. Sur chaque ligne $k$ de 1 à $r$, on garde la variable $v_{j_k}$ à gauche et on fait passer à droite les autres variables. On obtient les formules ci-dessus. ■

**Remarque 3.5.14** On retrouve le fait, voir proposition 3.5.2, que toute solution du système $(\star)$ s'écrit comme somme d'une solution particulière plus une solution du système homogène $(\star\star)$. Dans l'énoncé précédent, il y a une solution particulière facile a décrire, la solution
$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$
avec $v_i = 0$ pour tout $i \notin \{j_1, \cdots, j_r\}$ et $v_{j_1} = m_{1,n+1}, \cdots, v_{j_r} = m_{r,n+1}$.

**Exemple 3.5.15** On peut reprendre les exemples 3.4.8 et 3.4.9 et on voit que dans le premier cas, le pivot est sur la dernière colonne : il n'y a pas de solution alors que dans le second, ce n'est pas le cas et on obtient un ensemble de solutions dépendant d'un paramètre.

# Index