LSMA202 – EXERCICES 1 : ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Février 2021

Les exercices précédés du symbole (*) sont considérés plus difficiles et servent à approfondir les notions abordées dans cette feuille.

1. Ensembles

Exercice 1. Soient A et B deux ensembles. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $A \subseteq B$;

(2) $A \cap B = A$;

(3) $A \cup B = B$.

Exercice 2. Soient A et B deux ensembles. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $A = B$;

(2) $A \cap B = A \cup B$.

Exercice 3. Soit U un ensemble, et soient A et B deux sous-ensembles de U. Montrer que $U \setminus (A \cap B) = (U \setminus A) \cup (U \setminus B)$ et $U \setminus (A \cup B) = (U \setminus A) \cap (U \setminus B)$.

Exercice 4. Soient A, B et C trois ensembles. Montrer que $C \subseteq A \cap B$ si et seulement si ($C \subseteq A$ et $C \subseteq B$).

Montrer aussi que $A \cup B \subseteq C$ si et seulement si ($A \subseteq C$ et $B \subseteq C$).

Exercice 5. Soient A, B et C trois ensembles. Démontrer les énoncés suivants.

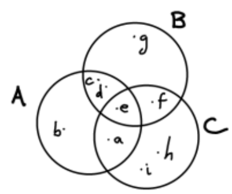
(1) $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$.

(2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(3) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ et $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

(4) Si $A \subseteq B$, alors $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$.

Exercice 6. Un *diagramme de Venn* est un diagramme permettant de représenter des ensembles et leurs éléments. Par exemple, un diagramme de Venn associé aux ensembles $A = \{a, b, c, d, e\}, B = \{c, d, e, f, g\}$ et $C = \{a, e, f, h, i\}$ est



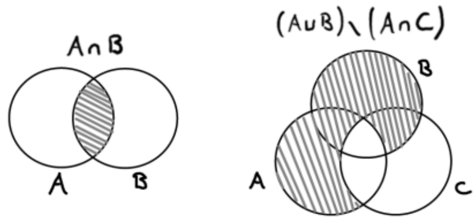
De manière générale, si on a des ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$, un diagramme de Venn pour ces ensembles comprend

— une région pour chaque A_i, bornée par une courbe fermée (dans l'exemple ci-dessus, les régions sont des cercles), et

— pour chaque élément x, un point se trouvant dans les régions associées aux ensembles contenant x et pas dans les autres.

Un diagramme de Venn doit donc contenir des régions distinctes pour toutes les relations d'appartenance possibles aux A_i. Dans l'exemple ci-dessus où $n = 3$, on a 8 régions (l'extérieur est une région). En général, on en a 2^n.

Si on omet de dessiner les éléments, un diagramme de Venn permet aussi de visualiser les unions et intersections d'ensembles. En voici deux exemples :



Dessiner un diagramme de Venn illustrant chacune des expressions suivantes :

(1) $A \cap B$
(2) $A \setminus B$
(3) $A \cup B$
(4) $\big((A \cup B) \setminus A\big) \setminus B$
(5) $A \cap B \cap C$
(6) $(A \cap B) \cup C$
(7) $(A \cup B) \cap C$
(8) $(A \cup B) \setminus C$
(9) $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$
(10) $\big((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)\big) \setminus (A \cap B \cap C)$
(11) (*) $A \cap B \cap C \cap D$ (il doit y avoir 16 régions distinctes.)

Exercice 7. On définit la *différence symétrique* de deux ensembles A et B comme étant l'ensemble $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

(1) Illustrer la différence symétrique de deux ensembles par un diagramme de Venn (voir Exercice 6 pour la définition).
(2) Soient A, B et C trois ensembles. Montrer que

(a) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
(b) $A \triangle B = B \triangle A$
(c) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$
(d) $A \triangle \emptyset = A$
(e) $A \triangle A = \emptyset$
(f) Si $A \triangle B = A$, alors $B = \emptyset$.
(g) Si $A \triangle B = \emptyset$, alors $A = B$.
(h) On a que $A \subseteq B$ si et seulement si $A \triangle B \subseteq B$.

Exercice 8. (1) Soit A un ensemble fini de cardinalité n. Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ des sous-ensembles de A est de cardinalité 2^n.

(2) Soient A et B deux ensembles finis. Montrer l'égalité suivante sur les cardinalités :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

(3) Soient A, B et C trois ensembles finis. Montrer l'égalité suivante sur les cardinalités :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

(4) (*) Soit $n \geq 1$ un entier, et soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des ensembles finis. Montrer que

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \left(\sum_{i=1}^{n} |A_i|\right) - \left(\sum_{1\leq i<j\leq n} |A_i \cap A_j|\right) + \left(\sum_{1\leq i<j<k\leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k|\right) - \ldots + (-1)^{n+1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|.$$

Exercice 9. Si A et B sont deux ensembles, alors on désigne par $A \times B$ leur produit cartésien.

(1) Soient A et B deux ensembles finis. Montrer que $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

(2) Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des ensembles finis (avec $n \geq 2$). Montrer que

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|.$$

2. Applications

Exercice 10. Pour chacune des applications suivantes, décrire l'image de l'application et déterminer si elle est injective, surjective ou bijective.

(1) $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto x^2 + y^2 \end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto 2x \end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ n &\longmapsto 2n \end{aligned}$$

(5) $$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ n &\longmapsto n^2 \end{aligned}$$

(6) $$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ (a,b) &\longmapsto \frac{a}{b} \end{aligned}$$

(7) $f : E \to F$, où E est l'ensemble des humains nés depuis le premier janvier 1900, F l'ensemble des dates depuis le premier janvier 1900, et f la fonction associant à chaque humain sa date de naissance.

Exercice 11. Soient E et F deux ensembles finis. On suppose que F n'est pas vide. On désigne par $|E|$ et $|F|$ leurs cardinalités. Soit $f : E \to F$ une application.

(1) Montrer que si f est injective, alors $|E| \leq |F|$.

(2) Montrer que si f est surjective, alors $|E| \geq |F|$.

(3) Montrer que si f est bijective, alors $|E| = |F|$.

Exercice 12. Soient E et F deux ensembles *finis* et *ayant la même cardinalité*. Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) f est injective ;

(2) f est surjective ;

(3) f est bijective.

Exercice 13. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer que

(1) si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective ;

(2) si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective ;
(3) si $g \circ f$ est injective, alors f est injective ;
(4) si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Montrer que la réciproque des énoncés ci-dessus est fausse, en donnant un contre-exemple pour chacun.

Exercice 14. Soient E et F deux ensembles non vides, et soit $E \times F$ leur produit cartésien.

(1) Soit $\pi_E : E \times F \to E$ l'application définie par $\pi_E(x, y) = x$. Montrer que π_E est surjective.
(2) Soit $y \in F$, et soit $\iota_y : E \to E \times F$ l'application définie par $\iota_F(x) = (x, y)$. Montrer que ι_y est injective.

Exercice 15. Soit $f : E \to F$ une application. Pour tout sous-ensemble X de E, son *image par* f est l'ensemble

$$f(X) := \{y \in F \mid \exists x \in X, f(x) = y\}.$$

Pour tout sous-ensemble Y de F, sa *préimage par* f est l'ensemble

$$f^{-1}(Y) := \{x \in E \mid f(x) \in Y\}.$$

(1) Soient W et X deux sous-ensembles de E. Montrer que si $W \subseteq X$, alors on a une inclusion $f(W) \subseteq f(X)$.
(2) Soient Y et Z deux sous-ensembles de F. Montrer que si $Y \subseteq Z$, alors on a une inclusion $f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(Z)$.
(3) Montrer que si $X \subseteq E$, alors $X \subseteq f^{-1}\big(f(X)\big)$.
(4) Montrer que si $Y \subseteq F$, alors $f\big(f^{-1}(Y)\big) \subseteq Y$.
(5) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) f est surjective ;
   (b) $f(X) = Y$;
   (c) pour tout $y \in F$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ n'est pas vide.
(6) Montrer que les conditions sont équivalentes :
   (a) f est injective ;
   (b) pour tous $x, x' \in E$ tels que $x \neq x'$, l'ensemble $f(\{x, x'\})$ contient exactement deux éléments ;
   (c) pour tout $y \in F$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ contient au plus un élément.