LSMA202 – EXERCICES 2 : SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

Février 2021

Les exercices précédés du symbole (*) sont considérés plus difficiles et servent à approfondir les notions abordées dans cette feuille.

Exercice 1 (Systèmes linéaires avec solution unique)**.** Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants en utilisant la méthode de Gauß.

(1)

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ 5x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} \phantom{-2x_1 - {}} x_2 = -52 \\ -2x_1 - x_2 = 34 \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} 27x_1 + x_2 = 23 \\ -14x_1 - x_2 = -10 \end{cases}$$

(4)

$$\begin{cases} 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 6x_3 = 13 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$

(5)

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ -x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$$

(6)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 = 7 \\ -2x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

(7)

$$\begin{cases} 3x_1 - x_3 - 5x_4 = -5 \\ -2x_1 + 9x_3 + x_4 = 45 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = -7 \\ -3x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Exercice 2 (Systèmes possiblement sans solutions)**.** Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants en utilisant la méthode de Gauß.

(1)

$$\begin{cases} -7x_1 + 56x_2 = 7 \\ -2x_1 + 16x_2 = 17 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} x_1 - 6x_2 = 85 \\ x_1 - x_2 = 15 \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 2 \\ 2x_1 - 12x_3 = 0 \\ x_1 - 6x_3 = 4 \end{cases}$$

(4)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 + 14x_2 = -16 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

(5)

$$\begin{cases} -5x_1 + 30x_2 - x_3 = 4 \\ -3x_1 + 18x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 17 \end{cases}$$

(6)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 9x_3 - 3x_4 = -15 \\ -x_1 - 5x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 - x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 11 \\ 2x_1 + 10x_3 + x_4 = -11 \end{cases}$$

Exercice 3 (Systèmes homogènes)**.** Décrire l'ensemble des solutions des systèmes homogènes suivants. Chaque fois, donner le rang du système.

(1)

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 = 0 \\ -10x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 0 \\ -2x_1 - 8x_2 = 0 \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

(4)

$$\begin{cases} - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}$$

(5)

$$\begin{cases} -9x_1 - 45x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 - 5x_2 - 17x_3 = 0 \end{cases}$$

(6)

$$\begin{cases} -2x_1 - 5x_2 + 42x_3 - 16x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 30x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

(7)

$$\begin{cases} 8x_1 + 16x_2 + 64x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

(8)

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 33x_3 + 34x_4 = 0 \\ x_1 - 9x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 15x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

(9)

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 14x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 25x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Exercice 4 (Systèmes linéaires généraux)**.** Décrivez l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants. Chaque fois, donner le rang du système.

(1)

$$\begin{cases} 6x_2 = 6 \\ x_1 + 3x_2 = -4 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 - 14x_3 = 2 \\ 10x_1 + 20x_3 = -10 \end{cases}$$

(3)

$$\begin{cases} 5x_1 + 35x_2 - 40x_3 = 9 \\ -x_1 - 7x_2 + 8x_3 = -3 \end{cases}$$

(4)

$$\begin{cases} -x_1 + 9x_2 + 2x_3 = -6 \\ -2x_1 + 18x_2 + 2x_3 = -4 \\ -5x_1 + 45x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

(5)

$$\begin{cases} 2x_1 + 40x_2 + 136x_3 = 12 \\ -2x_1 \qquad\quad - \ 16x_3 = 1 \\ x_1 + \quad x_2 + \ 11x_3 = 1 \end{cases}$$

(6)

$$\begin{cases} -2x_1 + 10x_2 - x_3 + 3x_4 = -4 \\ x_1 - \ 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$$

(7)

$$\begin{cases} -x_1 \qquad\quad + 9x_3 - 7x_4 = 11 \\ x_2 + \ x_3 - 2x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 3x_4 = -17 \end{cases}$$

(8)

$$\begin{cases} 4x_1 + \quad x_2 + 16x_3 - 6x_4 = 17 \\ x_1 - \ 3x_2 + 17x_3 - 7x_4 = 24 \\ -x_1 + 10x_2 - 45x_3 \qquad\quad = -10 \end{cases}$$

Exercice 5. Soient S et S' deux systèmes d'équations linéaires. Soit T le système d'équations linéaires obtenu en incluant toutes les équations de S et toutes celles de S'. Montrer que l'ensemble des solutions de T est l'intersections des ensembles des solution de S et de S'.

Exercice 6. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice $m \times n$, et considérons le système homogène $AX = 0$. Soient $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$ et $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$ deux solutions de ce système.

(1) Montrer que $U + V = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_m + v_m \end{bmatrix}$ est solution du système.

(2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. Montrer que $\lambda U = \begin{bmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_m \end{bmatrix}$ est solution du système.

Exercice 7. Soit $AX = 0$ un système homogène d'équations linéaires, où A est une matrice $m \times n$. Montrer que ce système n'admet que la solution nulle si et seulement si son rang est n.

Exercice 8. Soit $AX = b$ un système d'équations linéaires, et soit $A'X = b'$ un système obtenu en ajoutant une ligne à A et une ligne à b. Montrer que le rang du nouveau système $A'X = b'$ est supérieur ou égal au rang du système $AX = b$.

Exercice 9. Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Montrer que le système homogène d'équations linéaires associé à la matrice A est de rang 2 si et seulement si $ad - bc \neq 0$. (On pourra traiter plusieurs cas, selon que a et c sont nuls ou non.)

Exercice 10 (*)**.** Soit $AX = b$ un système d'équations linéaires. Supposons que le système admet au moins une solution, et soient U et V deux solutions. Montrer que $U + V$ est une solution si et seulement si le système est homogène (autrement dit, $b = 0$).