DÉCOMPOSITION EN BLOCS DE LA CATÉGORIE DES REPRÉSENTATIONS ℓ-MODULAIRES LISSES DE LONGUEUR FINIE DE $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$

par

Bastien Drevon & Vincent Sécherre

Résumé. — Soit F un corps localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle p, soit G une forme intérieure de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ avec $n \geqslant 1$, et soit ℓ un nombre premier différent de p. Nous décrivons la décomposition en blocs de la catégorie des représentations lisses et de longueur finie de G à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell$. Contrairement au cas des représentations complexes d'un groupe réductif p-adique quelconque et au cas des représentations ℓ-modulaires de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$, à chaque bloc de cette décomposition correspond non pas un unique support supercuspidal, mais une réunion finie de tels supports, que nous décrivons. Nous prouvons également qu'un bloc supercuspidal est équivalent au bloc principal (c'est-à-dire le bloc contenant le caractère trivial) du groupe multiplicatif d'une algèbre à division convenable, et nous déterminons les représentations irréductibles ayant une extension non scindée avec une représentation supercuspidale de G donnée.

Abstract. — Let F be a non-Archimedean locally compact field of residue characteristic p, let G be an inner form of $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ with $n \geqslant 1$, and let ℓ be a prime number different from p. We describe the block decomposition of the category of finite length smooth representations of G with coefficients in $\overline{\mathbb{F}}_\ell$. Unlike the case of complex representations of an arbitrary p-adic reductive group and that of ℓ-modular representations of $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$, several non-isomorphic supercuspidal supports may correspond to the same block. We describe the (finitely many) supercuspidal supports corresponding to a given block. We also prove that a supercuspidal block is equivalent to the principal (that is, the one which contains the trivial character) block of the multiplicative group of a suitable division algebra, and we determine those irreducible representations having a nontrivial extension with a given supercuspidal representation of G.

2010 Mathematics Subject Classification: 22E50

Keywords and Phrases: Bloc, Extension, Longueur, Réduction mod ℓ, Représentation supercuspidale, Type

1. Introduction

1.1.

Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle p, et soit G le groupe des points rationnels d'un groupe algébrique réductif connexe sur F. C'est un groupe localement compact et totalement discontinu. On s'intéresse aux représentations lisses de G sur des espaces vectoriels complexes et aux opérateurs d'entrelacement entre ces représentations, qui forment une catégorie abélienne notée $\mathbf{Rep}_{\mathbb{C}}(\mathrm{G})$. Dans [**1**], Bernstein a montré comment cette catégorie se décompose en un produit de blocs, c'est-à-dire de facteurs directs indécomposables, chacun correspondant bijectivement à une classe inertielle de paires cuspidales de G. Au coeur de ce résultat, il y a le fait qu'une représentation irréductible cuspidale complexe de G est projective modulo le centre, c'est-à-dire projective dans la sous-catégorie pleine des représentations de G ayant un caractère central fixé. La sous-catégorie pleine $\mathbf{rep}_{\mathbb{C}}(\mathrm{G})$ formée des représentations de longueur finie se décompose elle aussi en une somme directe de blocs, chacun correspondant cette fois-ci à une *unique* classe de G-conjugaison de paires cuspidales, comme expliqué dans [**4**] 7.3.

1.2.

Remplaçons maintenant le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes par une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ d'un corps fini de caractéristique un nombre premier ℓ différent de p. Les représentations lisses de G sur des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-espaces vectoriels, dites *ℓ-modulaires*, sont étudiées depuis les travaux fondateurs de Vignéras [**28**], dans l'objectif d'étudier les phénomènes de congruence entre formes automorphes, ainsi que les propriétés de congruence des phénomènes de réciprocité et de fonctorialité de Langlands locales. Si la théorie des représentations ℓ-modulaires des groupes réductifs p-adiques ressemble à la théorie complexe sur certains points, du fait que p est inversible dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell$, une différence essentielle est l'existence, dans le cas modulaire, de représentations cuspidales non supercuspidales, c'est-à-dire apparaissant non comme quotients mais comme sous-quotients d'induites paraboliques propres (on renvoie au paragraphe 3.1 ci-dessous pour les définitions de *cuspidal* et *supercuspidal*). Par conséquent, une représentation cuspidale n'est en général pas projective modulo le centre dans le cas modulaire. S'ajoute à ceci le phénomène récemment observé ([**12, 11**]) de non-unicité du support supercuspidal : une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible d'un groupe réductif p-adique peut apparaître comme sous-quotient d'induites paraboliques de paires supercuspidales non conjuguées. Aussi l'approche de Bernstein devient-elle inopérante dans le cas modulaire.

1.3.

Supposons maintenant que G soit une forme intérieure du groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$, avec $n \geqslant 1$. C'est un groupe de la forme $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$, où D est une algèbre à division centrale de dimension d^2 sur F, et où m est un diviseur de n tel que $md = n$. Pour un tel groupe, on dispose de l'arsenal technique de la théorie des types de Bushnell et Kutzko développée dans [**3**], [**2**], [**14**], [**20**],..., [**25**] et adaptée au cas ℓ-modulaire dans [**17**], permettant d'étudier en détail ses représentations ℓ-modulaires. On peut attacher à toute représentation irréductible de G un unique support supercuspidal (voir le paragraphe 3.2), et montrer que la catégorie abélienne $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$ des représentations lisses de G à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ se décompose en un produit de blocs $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\Omega)$, chacun correspondant bijectivement à une classe d'inertie Ω de paires supercuspidales (théorème

3.1). Se pose ensuite la question de la décomposition de la sous-catégorie pleine $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$, formée des représentations de longueur finie : nous y répondons dans le présent article.

1.4.

Pour décomposer $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$, nous nous appuyons sur le résultat suivant (lemme 3.4).

Lemme 1.1. — *Soit* S *une partie de l'ensemble* X *des classes d'isomorphisme de* $\overline{\mathbb{F}}_\ell$*-représentations irréductibles de* G *telle que, pour toutes représentations* $\sigma \in \mathrm{S}$ *et* $\pi \in \mathrm{X} - \mathrm{S}$*, le premier espace d'extension* $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\sigma, \pi)$ *soit nul. Alors la catégorie* $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$ *se décompose en la somme directe de* $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \mathrm{S})$*, la sous-catégorie pleine des représentations dont les sous-quotients irréductibles sont dans* S*, et de* $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \mathrm{X} - \mathrm{S})$.

Pour que $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\sigma, \pi)$ soit non nul, il faut et suffit qu'il existe une représentation indécomposable de G de longueur 2 dont l'unique sous-représentation irréductible soit π et l'unique quotient irréductible soit σ. Étant donné une représentation irréductible π de G, nous cherchons donc à quelle condition une représentation $\sigma \in \mathrm{X}$ a une extension non scindée avec π, et plus généralement à quelle condition π et σ sont des constituants irréductibles d'une représentation indécomposable de $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$. Pour cela, la décomposition en blocs de $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$ donnée au paragraphe 1.3 assure qu'on peut se ramener au cas où π et σ ont des supports supercuspidaux inertiellement équivalents.

1.5.

Notre stratégie repose partiellement sur la notion de réduction modulo ℓ. Expliquons de quoi il s'agit. Considérons les représentations irréductibles de G à coefficients dans une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ du corps des nombres ℓ-adiques. Une telle représentation est dite *entière* si elle admet un $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-réseau stable par G, où $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ est l'anneau des entiers de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Tensoriser un tel réseau par $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ fournit une représentation lisse ℓ-modulaire de longueur finie, dont la semi-simplification ne dépend pas du réseau choisi : on appelle celle-ci la *réduction mod* ℓ de la $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation entière considérée. Par exemple, il y a un critère simple pour savoir si une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation cuspidale π de G est entière : il faut et il suffit que son caractère central soit lui-même entier, c'est-à-dire à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}_\ell^\times$. Si tel est le cas, il y a une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale ρ de G telle que la réduction mod ℓ de π soit :

$$\rho \oplus \rho\nu \oplus \cdots \oplus \rho\nu^{a-1} \tag{1.1}$$

où ν désigne le caractère "valeur absolue de la norme réduite" de G et $a = a(\pi) \geqslant 1$ la longueur de cette réduction mod ℓ. En outre, l'ensemble des facteurs irréductibles de (1.1) est soit réduit à ρ, soit formé de tous les $\rho\nu^j$, $j \in \mathbb{Z}$, et on se trouve dans l'un ou l'autre cas selon que ℓ divise ou non $q(\rho) - 1$, où $q(\rho)$ est une certaine puissance du cardinal q du corps résiduel de F associée à ρ au paragraphe 3.9. Dans le cas où ρ est de niveau 0, elle vaut simplement q^n.

Inversement, si ρ est une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation *supercuspidale* (et pas seulement cuspidale) de G, l'ensemble des représentations de G apparaissant avec ρ dans la réduction mod ℓ d'une même $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation cuspidale entière est soit réduit à ρ (si ℓ ne divise pas $q(\rho)-1$), soit formé des représentations $\rho\nu^j$, $j \in \mathbb{Z}$ (si ℓ divise $q(\rho)-1$).

Observons que, si $\boldsymbol{k}$ est un corps fini de caractéristique p, il existe un phénomène comparable mais plus simple dans le cas du groupe linéaire général $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{k})$: si π est une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{k})$ dont la réduction mod ℓ contienne une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation supercuspidale, alors π est cuspidale et sa réduction mod ℓ est irréductible.

1.6.

Disons plus généralement que des représentations irréductibles ℓ-modulaires de G sont *équivalentes* s'il existe une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière de G dont la réduction mod ℓ contienne chacune de ces représentations. Il n'est pas évident *a priori* qu'il s'agisse d'une relation d'équivalence, mais on peut montrer le résultat suivant (proposition 3.19).

Proposition 1.2. — *Soit π une représentation irréductible de* G *dont le support supercuspidal est $\rho_1 + \cdots + \rho_r$. Alors une représentation irréductible π' est équivalente à π si et seulement s'il y a des entiers $j_1, \ldots, j_r \in \mathbb{Z}$ tels que le support supercuspidal de π' soit $\rho_1\nu^{j_1} + \cdots + \rho_r\nu^{j_r}$, où, pour chaque $k = 1, \ldots, r$, l'entier j_k est nul si ℓ ne divise pas $q(\rho_k) - 1$.*

Notons $\mathrm{B}(\pi)$ la classe des représentations irréductibles équivalentes à une représentation donnée π, et notons $\mathscr{B}$ l'ensemble des classes $\mathrm{B}(\pi)$ lorsque π décrit les représentations irréductibles ℓ-modulaires de G. (Attention : la définition des $\mathrm{B}(\pi)$ que nous donnons au paragraphe 3.11 est différente, mais équivalente d'après la proposition 1.2.) On a le résultat suivant (théorème 6.2).

Théorème 1.3. — *On a une décomposition en blocs :*

$$\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}) = \bigoplus_{\mathrm{B}} \mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \mathrm{B})$$

où B *décrit les éléments de $\mathscr{B}$, et où $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \mathrm{B})$ est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$ formée des représentations dont tous les sous-quotients irréductibles sont dans* B.

Dans le cas où $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$, des représentations irréductibles de G sont dans le même bloc si et seulement si elles ont le même support supercuspidal (voir les remarques 3.18 et 6.3).

1.7.

Il n'est pas difficile de montrer (voir le lemme 3.5) que deux représentations irréductibles équivalentes au sens du paragraphe 1.6 sont les constituants d'une représentation indécomposable de longueur finie G, et (voir le lemme 3.2) que les constituants irréductibles d'une représentation indécomposable de longueur finie G ont le même caractère central. Il ne reste donc qu'à prouver que, pour toute classe $\mathrm{B} \in \mathscr{B}$, l'espace $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\sigma, \pi)$ est nul quels que soient $\pi \in \mathrm{B}$ et $\sigma \in \mathrm{X} - \mathrm{B}$.

Nous pouvons supposer, comme observé au paragraphe 1.4, que σ, π ont des supports supercuspidaux inertiellement équivalents. Nous procédons en trois étapes :

(1) d'abord le cas où π est une représentation supercuspidale de niveau 0 de G,
(2) puis le cas où π est une représentation supercuspidale de niveau quelconque de G,
(3) et enfin le cas général.

Détaillons chacune de ces trois étapes, à commencer par la première.

1.8.

La première étape passe par la construction et l'analyse de l'enveloppe projective de π dans la catégorie $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$. Pour ce faire, nous décrivons π comme l'induite compacte d'une représentation ξ d'un sous-groupe N de G telle que :

– le groupe N contient et normalise le sous-groupe compact maximal $\mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_\mathrm{D})$, où $\mathcal{O}_\mathrm{D}$ est l'anneau des entiers de D,

– la restriction de ξ à $\mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_\mathrm{D})$ est l'inflation d'une représentation irréductible supercuspidale de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{k}_\mathrm{D})$, où $\boldsymbol{k}_\mathrm{D}$ est le corps résiduel de D.

(Dans le langage de la théorie des types simples de Bushnell-Kutzko [**3, 17**], la paire (N,ξ) est un type simple maximal étendu de niveau 0 : voir les paragraphes 3.7–3.8.) Une fois prouvé que ξ admet une enveloppe projective P_ξ dans la catégorie des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations de longueur finie de N (paragraphe 4.3), il n'est pas difficile d'en déduire que π admet une enveloppe projective P_π dans $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$ en considérant l'induite compacte de P_ξ à G. Puis nous prouvons que les sous-quotients irréductibles de P_π sont tous de la forme $\pi\nu^j$, $j \in \mathbb{Z}$ (corollaire 4.17) : outre la proposition 4.5 et la formule (1.1) régissant la réduction mod ℓ des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations cuspidales, un point essentiel de l'argument est la propriété des représentations supercuspidales du groupe fini $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{k}_\mathrm{D})$ soulignée à la fin du paragraphe 1.5. Enfin, ces sous-quotients irréductibles devant posséder le même caractère central, on peut imposer que $j = 0$ dès que π et $\pi\nu$ n'ont pas le même caractère central, c'est-à-dire dès que ℓ ne divise pas $q^n - 1$.

1.9.

La seconde étape consiste à se ramener au cas précédent, au moyen d'une équivalence de catégories construite par Chinello [**5, 6**] grâce à la théorie des types simples de Bushnell-Kutzko [**3, 17**]. Étant donné une représentation supercuspidale π de G, de classe inertielle Ω, Chinello :

– construit un progénérateur de type fini de la catégorie :

$$\bigoplus_{\Omega'} \mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\Omega') \tag{1.2}$$

(où Ω' décrit les classes inertielles équivalentes à Ω en un sens que nous ne préciserons pas ici),

– prouve l'existence d'une extension finie E de F de degré k divisant n et d'une équivalence de catégorie $\mathbf{F}$ de (1.2) vers la catégorie des représentations de niveau 0 d'une forme intérieure G_0 convenable de $\mathrm{GL}_{n/k}(\mathrm{E})$,

– et prouve enfin l'existence d'une représentation supercuspidale π_0 de niveau 0 de G_0, de classe inertielle Ω_0, telle que $\mathbf{F}$ envoie $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\Omega)$ sur $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\Omega_0)$ et π sur π_0 (proposition 5.4).

Il s'agit alors de montrer que l'image de $\mathrm{B}(\pi)$ par le foncteur $\mathbf{F}$ est égale à $\mathrm{B}(\pi_0)$, ce que nous faisons en décrivant le comportement de $\mathbf{F}$ par torsion par un caractère non ramifié (lemme 5.5).

1.10.

Enfin, nous traitons le cas général dans la section 6, en nous inspirant de [**26**] Paragraphe 1.1. Nous obtenons le résultat suivant (proposition 6.1).

Proposition 1.4. — *Soient π et π' des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations irréductibles de* G. *Supposons qu'il existe un entier $i \geqslant 0$ tel que $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{G}}(\pi',\pi)$ soit non nul. Alors π,π' sont équivalentes.*

Enfin, le résultat suivant (proposition 6.4) complète la description de la relation d'équivalence faite dans la proposition 1.2.

Proposition 1.5. — *Pour que des représentations irréductibles de* G *soient équivalentes, il faut et suffit qu'elles apparaissent comme sous-quotients d'une même représentation indécomposable de longueur finie de* G.

1.11.

Dans la section 7, nous nous intéressons aux blocs supercuspidaux de $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$ et $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$, dans l'objectif de prolonger les résultats de Chinello [**5, 6**] (voir le paragraphe 1.9). Soit π une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation supercuspidale de G, de classe inertielle Ω, et posons $\mathrm{B} = \mathrm{B}(\pi)$. Nous construisons un progénérateur de type fini du bloc $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\Omega)$ (proposition 7.4) et calculons l'algèbre de ses endomorphismes (théorème 7.10). Nous en déduisons le résultat suivant (théorème 7.1 et corollaire 7.2). Appelons *bloc principal* le bloc contenant le caractère trivial.

Théorème 1.6. — *Il existe un corps localement compact non archimédien* F' *et une* F'*-algèbre à division centrale* D' *tels que le bloc* $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\Omega)$ *(resp.* $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\mathrm{B})$*) soit équivalent au bloc principal de* $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{D}'^{\times})$ *(resp. de* $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{D}'^{\times})$*).*

Ce résultat corrobore le principe selon lequel, étant donné un groupe réductif connexe $\mathbf{G}$ défini sur F, un bloc de $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathbf{G}(\mathrm{F}))$ devrait être équivalent au bloc principal de $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathbf{G}'(\mathrm{F}))$ pour un groupe réductif convenable $\mathbf{G}'$ (voir Dat [**9**], ainsi que [**10, 6**] pour le cas de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$). Observons cependant que, contrairement à ce qui se passe pour les représentations complexes, on ne peut pas toujours choisir $\mathrm{D}' = \mathrm{F}'$ dans ce théorème (voir la remarque 7.15).

1.12.

Enfin, dans la dernière section, étant donné une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation supercuspidale π de G, nous déterminons toutes les représentations irréductibles π' de G telles qu'il existe une extension non scindée de π par π'. Le résultat (proposition 8.5) s'exprime en fonction de l'invariant de Hasse h

de D (définition 3.8) et du degré k de l'extension E/F du paragraphe 1.9. On note (a, b) le plus grand diviseur commun à deux entiers $a, b \geqslant 1$.

Proposition 1.7. — *Notons $h(\pi)$ le reste dans la division euclidienne de $hk/(k, d)$ par $d/(k, d)$. L'ensemble des représentations π' de* G *telles que* $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\pi, \pi')$ *soit non nul est :*

(1) *réduit à π si ℓ ne divise pas $q(\pi) - 1$,*
(2) *formé de π et de la représentation $\pi\nu^{-h(\pi)}$ si ℓ divise $q(\pi) - 1$.*

2. Notations

Nous introduisons maintenant les principales définitions et notations qui seront utilisées dans la suite.

2.1.

Fixons un corps localement compact non archimédien F, de caractéristique résiduelle p.

Si K est une extension finie de F, ou plus généralement une F-algèbre à division de dimension finie, on note $\mathcal{O}_{\mathrm{K}}$ son anneau d'entiers, $\mathfrak{p}_{\mathrm{K}}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\mathrm{K}}$ et $\boldsymbol{k}_{\mathrm{K}}$ son corps résiduel, qui est un corps fini de cardinal noté q_{K}. On pose $q = q_{\mathrm{F}}$ dans toute la suite.

Si n est un entier strictement positif, on note $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ l'algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans K et $\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ le groupe de ses éléments inversibles. Muni de la topologie induite par celle de K, c'est un groupe topologique localement profini.

2.2.

Soit R un anneau commutatif, et soit G un groupe localement profini.

Par R-*représentation* (ou simplement représentation si aucune confusion n'en résulte) de G on entendra toujours une représentation lisse sur un R-module. Par R-*caractère* de G, on entendra une représentation lisse de G sur R, c'est-à-dire un homomorphisme de groupes de G dans $\mathrm{R}^\times$ de noyau ouvert.

On note $\mathbf{Rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ la catégorie abélienne des R-représentations lisses de G, et $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ la sous-catégorie pleine formée des représentations de longueur finie.

Si π est une représentation d'un sous-groupe fermé H de G et $g \in \mathrm{G}$, on pose $\mathrm{H}^g = g^{-1}\mathrm{H}g$ et on note π^g la représentation $x \mapsto \pi(gxg^{-1})$ de H^g. Si χ est un caractère de H, on note $\pi\chi$ la représentation $x \mapsto \chi(x)\pi(x)$ de H.

2.3.

Étant donné un nombre premier ℓ différent de p, on note $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ une clôture algébrique du corps des nombres ℓ-adiques, $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ son anneau des entiers et $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ son corps résiduel.

Par la suite, R désignera ou bien un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p, ou bien l'anneau local $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$.

3. Préliminaires et premiers théorèmes de décomposition

Fixons une fois pour toutes une F-algèbre à division centrale D, de degré réduit d, et un entier $m \geqslant 1$. Posons $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$. Si l'on pose $n = md$, c'est une forme intérieure de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$.

On fixe une uniformisante ϖ_F de F, et une uniformisante ϖ_D de D telle que $\varpi_\mathrm{D}^d = \varpi_\mathrm{F}$.

Dans cette section, R est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p.

3.1.

Soit P un sous-groupe parabolique de G, soit N son radical unipotent et soit M une composante de Levi de P. On note $\boldsymbol{i}_\mathrm{P}^\mathrm{G}$ le foncteur d'induction parabolique normalisée de M à G relativement à P. (La normalisation nécessite de fixer une racine carrée de q dans R, ce que nous faisons une fois pour toutes.) Si $m_1, \dots, m_r$ sont des entiers $\geqslant 1$ de somme m, si M est le sous-groupe de Levi des matrices diagonales par blocs de tailles respectives $m_1, \dots, m_r$, canoniquement isomorphe au produit $\mathrm{GL}_{m_1}(\mathrm{D}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{m_r}(\mathrm{D})$, si P est le sous-groupe parabolique standard engendré par M et les matrices unipotentes triangulaires supérieures, et si π_i est une représentation de $\mathrm{GL}_{m_i}(\mathrm{D})$ pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, on note :

$$\pi_1 \times \cdots \times \pi_r \tag{3.1}$$

l'induite parabolique de $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r$ à G relativement à P.

Une représentation irréductible de G est dite *cuspidale* (resp. *supercuspidale*) si elle n'est quotient (resp. sous-quotient) d'aucune représentation de la forme (3.1) avec $r \geqslant 2$. Une représentation supercuspidale est donc cuspidale, la réciproque n'étant pas vraie en général. Si R est de caractéristique nulle, toute représentation cuspidale est supercuspidale.

On définit de façon analogue les notions de représentation irréductible cuspidale et supercuspidale de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{k})$, où $\boldsymbol{k}$ est un corps fini de caractéristique p.

3.2.

Soit π une R-représentation irréductible de G. D'après [**16**] Theorème 8.16, il existe des entiers $m_1, \dots, m_r$ de somme m et des R-représentations irréductibles supercuspidales $\pi_1, \dots, \pi_r$ comme au paragraphe 3.1 telles que π soit un sous-quotient de l'induite parabolique (3.1), et ces représentations supercuspidales sont uniques à permutation près. La somme formelle :

$$\pi_1 + \cdots + \pi_r \tag{3.2}$$

s'appelle le *support supercuspidal* de π. On la note $\mathrm{scusp}(\pi)$.

La *classe inertielle* d'un support supercuspidal (3.2) est l'ensemble des supports supercuspidaux de G de la forme $\pi_1\chi_1 + \cdots + \pi_r\chi_r$ où χ_i est un caractère non ramifié du groupe $\mathrm{GL}_{m_i}(\mathrm{D})$, pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$.

Si Ω est une classe inertielle de supports supercuspidaux de G, on note $\mathbf{Rep}_\mathrm{R}(\mathrm{G}, \Omega)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_\mathrm{R}(\mathrm{G})$ formée des représentations dont tous les sous-quotients irréductibles ont leur support supercuspidal dans Ω.

Appelons *bloc* de $\mathbf{Rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ un facteur direct indécomposable de cette catégorie.

Théorème 3.1 **([1, 30, 26])**. — *Pour chaque classe inertielle* Ω *de supports supercuspidaux de* G*, la sous-catégorie* $\mathbf{Rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G},\Omega)$ *est un bloc. On a une décomposition :*

$$\mathbf{Rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G}) = \prod_{\Omega} \mathbf{Rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G},\Omega) \tag{3.3}$$

où Ω *décrit les classes inertielles de supports supercuspidaux de* G*.*

3.3.

Passons maintenant à la sous-catégorie $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ des R-représentations de longueur finie de G. D'abord, la décomposition (3.3) induit une décomposition :

$$\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G}) = \bigoplus_{\Omega} \mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G},\Omega) \tag{3.4}$$

où $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G},\Omega)$ est la sous-catégorie pleine des représentations de longueur finie de $\mathbf{Rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G},\Omega)$. Cependant, contrairement aux $\mathbf{Rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G},\Omega)$, les facteurs $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G},\Omega)$ ne sont pas indécomposables, comme nous allons le voir tout de suite.

Notons Z le centre de G, naturellement isomorphe à $\mathrm{F}^{\times}$. D'après [**28**] II.2.8, toute R-représentation irréductible de G admet un caractère central.

Lemme 3.2. — *Soit* V *une* R*-représentation de longueur finie de* G*. Pour tout caractère* α *du centre de* G*, on note* $\mathrm{V}(\alpha)$ *la plus grande sous-représentation de* V *dont les sous-quotients irréductibles admettent* α *pour caractère central. On a alors :*

$$\mathrm{V} = \bigoplus_{\alpha} \mathrm{V}(\alpha). \tag{3.5}$$

Démonstration. — Soit n la longueur de V, et soit r le cardinal de l'ensemble des caractères centraux des composants irréductibles de V. La preuve se fait par récurrence sur n, comme celle de [**26**] Proposition 1.7. Nous ne détaillons que le cas où $n = r = 2$.

Supposons donc que V ait une sous-représentation irréductible W, de caractère central α, et que V/W soit irréductible et de caractère central $\beta \neq \alpha$. Il s'agit de prouver que W a un supplémentaire dans V stable par G. Plus précisément, nous allons prouver que :

$$\mathrm{X} = \{v \in \mathrm{V} \mid z \cdot v = \beta(z)v \text{ pour tout } z \in \mathrm{Z}\}$$

est un supplémentaire de W dans V stable par G. Bien sûr, X est stable par G et $\mathrm{W} \oplus \mathrm{X} \subseteq \mathrm{V}$. Comme V est de longueur 2, il suffit de prouver que $\mathrm{X} \neq \{0\}$ pour en déduire que $\mathrm{W} \oplus \mathrm{X} = \mathrm{V}$. Fixons un $v \in \mathrm{V}$ tel que $v \notin \mathrm{W}$ et un $z_0 \in \mathrm{Z}$ tel que $\beta(z_0) \neq \alpha(z_0)$, et posons :

$$x = z_0 \cdot v - \alpha(z_0)v.$$

Pour tout $z \in \mathrm{Z}$, on pose $w = z \cdot v - \beta(z)v$ (qui appartient à W car Z agit par β sur le quotient V/W). En particulier, pour $z = z_0$, on en déduit que $x \neq 0$ car $v \notin \mathrm{W}$. On a :

$$\begin{aligned} z \cdot x &= z_0 \cdot (\beta(z)v + w) - \alpha(z_0)(z \cdot v) \\ &= \beta(z)(x + \alpha(z_0)v) + \alpha(z_0)w - \alpha(z_0)(w + \beta(z)v) \\ &= \beta(z)x \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $x \in \mathrm{X}$, ce qui met fin à la démonstration. □

Il sera commode d'introduire la définition suivante.

Définition 3.3. — Des R-représentations irréductibles π, π' de G sont dites *dépendantes* s'il y a une R-représentation indécomposable de longueur finie de G ayant π et π' pour sous-quotients.

D'après le lemme 3.2, pour que deux représentations irréductibles de G soient dépendantes, il faut qu'elles aient le même caractère central.

3.4.

D'après [**29**], la catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ a assez d'objets projectifs. On peut donc définir, pour des représentations π, π' de cette catégorie, des espaces d'extension $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{G}}(\pi, \pi')$ pour tout $i \geqslant 0$.

Dans ce paragraphe, nous nous concentrerons sur le premier espace d'extension entre représentations irréductibles. Étant donné des R-représentations irréductibles π et π' de G, l'espace d'extension $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\pi, \pi')$ est non nul si et seulement s'il existe une représentation indécomposable de G de longueur 2 dont l'unique sous-représentation soit isomorphe à π' et l'unique quotient soit isomorphe à π.

Le lemme suivant nous donne un moyen général de décomposer la catégorie $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ en somme de deux facteurs directs. Notons Irr(G) l'ensemble des classes d'isomorphisme de R-représentations irréductibles de G.

Lemme 3.4. — *Soit* S *une partie de* Irr(G) *telle que, pour toute* $\sigma \in \mathrm{S}$ *et toute* $\pi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{G}) - \mathrm{S}$, *on ait :*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\sigma, \pi) = \{0\}. \tag{3.6}$$

Alors $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$ *se décompose en la somme directe de* $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G}, \mathrm{S})$*, la sous-catégorie pleine des représentations dont tous les sous-quotients irréductibles sont dans* S*, et de* $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G}, \mathrm{Irr}(\mathrm{G}) - \mathrm{S})$*.*

Démonstration. — Soit V une R-représentation de longueur finie de G. On note X la plus grande sous-représentation de V dont tous les sous-quotients irréductibles sont dans S, et Y celle dont tous les sous-quotients irréductibles sont hors de S. Il s'agit de prouver que V est égal à $\mathrm{X} \oplus \mathrm{Y}$, c'est-à-dire que $\mathrm{W} = \mathrm{V}/(\mathrm{X} \oplus \mathrm{Y})$ est nul. Supposons que ce ne soit pas le cas ; soit π une sous-représentation irréductible de W, qu'on peut supposer dans S pour fixer les idées, le cas contraire se traitant de la même façon. Notons U l'image réciproque de π par la surjection naturelle de V sur W. C'est une extension de U/Y, qui a tous ses sous-quotients irréductibles dans S, par Y, qui a tous ses sous-quotients irréductibles hors de S. Par un argument de dévissage classique, la condition (3.6) entraîne que $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\mathrm{U}/\mathrm{Y},\mathrm{Y})$ est nul ; ainsi U est la somme directe de Y et U/Y. Le fait que U/Y ait tous ses sous-quotients irréductibles dans S, contienne strictement X et se plonge dans V contredit la maximalité de X. □

3.5.

Le lemme suivant donne une condition suffisante pour que des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations irréductibles soient dépendantes. Elle repose sur la notion de réduction mod ℓ, que nous rappelons maintenant.

Soit π une représentation de longueur finie de G sur un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espace vectoriel V. Elle est dite *entière* si V contient un $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-réseau L stable par G. La représentation de G sur $\mathrm{L}\otimes\overline{\mathbb{F}}_\ell$ est alors lisse et de longueur finie, et sa semi-simplification ne dépend que de π, et pas du choix du réseau stable L de V. On la note $\mathbf{r}_\ell(\pi)$, qu'on appelle la *réduction mod ℓ* de π. Pour les détails, on renvoie le lecteur à [**28, 31**].

Lemme 3.5. — *Soit π une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière de* G. *Si deux $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations irréductibles non isomorphes de* G *apparaissent dans $\mathbf{r}_\ell(\pi)$, elles sont dépendantes.*

Démonstration. — Soit σ un facteur irréductible de $\mathbf{r}_\ell(\pi)$, et soit T l'ensemble des facteurs irréductibles τ de $\mathbf{r}_\ell(\pi)$ tels que σ et τ soient dépendants. On veut prouver que T est égal à l'ensemble de tous les facteurs irréductibles de $\mathbf{r}_\ell(\pi)$. Supposons que ce ne soit pas le cas. Nous allons prouver qu'il existe une structure entière L de V, l'espace de π, telle qu'aucune sous-représentation irréductible de $\mathrm{L}\otimes\overline{\mathbb{F}}_\ell$ ne soit dans T.

Pour cela, nous allons utiliser [**13**] Lemma 2.2.6. Pour se convaincre que l'on peut s'en servir, on observe que, d'après [**28**] II.4.7, il existe une extension finie E de $\mathbb{Q}_\ell$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et une E-représentation V_E de G telles que :

$$\mathrm{V}\simeq\mathrm{V}_\mathrm{E}\otimes_\mathrm{E}\overline{\mathbb{Q}}_\ell.$$

L'espace V_E contient un $\mathcal{O}_\mathrm{E}$-réseau M_E stable par G, et $\mathrm{M}_\mathrm{E}\otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{E}}\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ est un $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-réseau de V stable par G. Quitte à augmenter E si besoin, on peut même supposer que tous les sous-quotients irréductibles de $\mathbf{r}_\ell(\pi)$ sont définis sur $\boldsymbol{k}_\mathrm{E}$, le corps résiduel de E. En particulier, les éléments de T sont tous de la forme $\mathrm{W}\otimes_{\boldsymbol{k}_\mathrm{E}}\overline{\mathbb{F}}_\ell$, où W décrit un ensemble T_E de $\boldsymbol{k}_\mathrm{E}$-représentations irréductibles de G. Appliquant [**13**] Lemma 2.2.6 à la E-représentation V_E (ce qu'on peut faire car $\mathcal{O}_\mathrm{E}$ est un anneau de valuation discrète complet) on obtient un $\mathcal{O}_\mathrm{E}$-réseau L_E de V_E stable par G tel qu'aucune sous-représentation irréductible de $\mathrm{L}_\mathrm{E}\otimes\boldsymbol{k}_\mathrm{E}$ ne soit dans T_E. Ainsi $\mathrm{L}=\mathrm{L}_\mathrm{E}\otimes\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ est un $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-réseau de V stable par G ayant la propriété voulue.

Soit maintenant ρ une sous-représentation irréductible de $\mathrm{L}\otimes\overline{\mathbb{F}}_\ell$. Elle n'est pas dans T, donc ρ et σ ne sont pas dépendantes. Il y a donc une décomposition :

$$\mathrm{L}\otimes\overline{\mathbb{F}}_\ell=\mathrm{X}_1\oplus\mathrm{X}_2$$

où X_1 est indécomposable et contient σ mais pas ρ, et où X_2 contient ρ. Tout sous-quotient irréductible de X_1 est dans T : contradiction. □

3.6.

Nous utiliserons principalement le lemme 3.5 dans le cas où la représentation π est cuspidale. Le résultat suivant décrit la réduction mod ℓ d'une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale entière de G. On note ν le caractère non ramifié "valeur absolue de la norme réduite" de G.

Proposition 3.6. — *Soit π une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale entière de* G.

(1) *Il existe une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale ρ de* G *et un entier $a \geqslant 1$ tels que :*

$$\mathsf{r}_\ell(\pi) = \rho \oplus \rho\nu \oplus \cdots \oplus \rho\nu^{a-1}. \tag{3.7}$$

(2) *Si $\epsilon(\rho)$ est le plus petit entier $i \geqslant 1$ tel que $\rho\nu^i$ soit isomorphe à ρ, l'entier a est soit égal à* 1*, soit égal à $\epsilon(\rho)\ell^u$ pour un $u \geqslant 0$.*

Démonstration. — La première partie est donnée par [**17**] Theorème 3.15, la seconde est donnée par [**17**] Lemme 3.19 et [**18**] 3.3. □

D'après [**18**] 3.3, on a une autre description de $\epsilon(\rho)$. Si $t(\rho)$ désigne le *nombre de torsion* de ρ, c'est-à-dire le nombre de caractères non ramifiés χ de G tels que ρ soit isomorphe à $\rho\chi$, et si q est le cardinal du corps résiduel de F, alors :

$$\epsilon(\rho) = \text{ordre de } q^{t(\rho)} \bmod \ell. \tag{3.8}$$

Afin d'affiner la description de l'entier a apparaissant dans (3.7), il nous faut introduire des invariants supplémentaires associés à ρ, ce que nous faisons dans les paragraphes suivants, à commencer par le cas où ρ est de niveau 0.

3.7.

Soit ρ une R-représentation cuspidale de G de niveau 0, c'est-à-dire que l'espace de ses vecteurs invariants par le pro-p-sous-groupe $1+\mathrm{M}_m(\mathfrak{p}_\mathrm{D})$ est non nul. D'après [**17**] Paragraphe 3.2, le groupe compact maximal $\mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_\mathrm{D})$ agit sur cet espace *via* une représentation de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{k}_\mathrm{D})$, de dimension finie car ρ est admissible ([**28**] II.2.8), et contenant une sous-représentation irréductible cuspidale σ. Selon [**16**] Paragraphe 6.1, on a le fait suivant.

Fait 3.7. — *La représentation ρ est supercuspidale si et seulement si σ est supercuspidale.*

Posons $\mathrm{N}^0 = \mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_\mathrm{D})$, notons ξ^0 l'inflation de σ à N^0 et notons N le normalisateur de la classe d'isomorphisme de ξ^0 dans G. D'après [**17**] Paragraphe 3.1, il y a un unique prolongement de ξ^0 à N, noté ξ, tel que l'induite compacte de ξ à G soit isomorphe à ρ. D'après [**17**] Lemme 5.3, la représentation de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{k}_\mathrm{D})$ sur l'espace des vecteurs de ρ invariants par le sous-groupe $\mathrm{N}^1 = 1 + \mathrm{M}_m(\mathfrak{p}_\mathrm{D})$ est isomorphe à la somme directe des conjugués de σ sous $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{k}_\mathrm{D}/\boldsymbol{k}_\mathrm{F})$: notons b

sa longueur, c'est-à-dire le nombre de conjugués de σ sous ce groupe de Galois. Le groupe N est compact mod le centre de G et :

$$F^\times N^0 \subseteq N \subseteq \mathscr{N}_G(N^0),$$

où $\mathscr{N}_G(N^0)$, le normalisateur de N^0 dans G, est engendré par N^0 et l'uniformisante ϖ_D. L'action de ϖ_D par conjugaison sur $\mathcal{O}_D$ induit un automorphisme de $\boldsymbol{k}_D$, engendrant le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{k}_D/\boldsymbol{k}_F)$. L'entier b est l'indice de N dans $\mathscr{N}_G(N^0)$, c'est-à-dire que :

$$N = \langle N^0, \varpi \rangle, \quad \varpi = \varpi_D^b. \tag{3.9}$$

L'indice $s = s(\rho)$ de $F^\times N^0$ dans N, qui vérifie $bs = d$, ne dépend pas du choix de σ. C'est l'ordre dans $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{k}_D/\boldsymbol{k}_F)$ du stabilisateur de la classe d'isomorphisme de σ.

Profitons-en pour introduire la définition suivante, qui nous sera utile dans la section 7.

Définition 3.8. — L'*invariant de Hasse* de D est l'unique entier $h \in \{1, \ldots, d\}$ premier à d tel que le $\boldsymbol{k}_F$-automorphisme de $\boldsymbol{k}_D$ induit par la conjugaison par ϖ_D soit égal à :

$$x \mapsto x^{q^h}$$

où q est le cardinal de $\boldsymbol{k}_F$. Il est indépendant du choix de ϖ_D.

3.8.

Il sera utile d'énoncer une réciproque à ce qui précède.

Définition 3.9. — Appelons *type simple maximal étendu de niveau* 0 de G une paire (K, μ) formée d'un sous-groupe ouvert $K \subseteq G$ compact mod le centre et d'une représentation irréductible μ de K vérifiant les propriétés suivantes :

(1) le groupe K contient N^0 et la restriction de μ à N^0, notée μ^0, est l'inflation d'une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{k}_D)$,

(2) le normalisateur de la classe d'isomorphisme de μ^0 dans G est égal à K.

D'après le paragraphe 3.7, toutes les représentations cuspidales de niveau 0 de G sont obtenues par induction compacte d'un type simple maximal étendu de niveau 0. On a aussi la réciproque suivante (voir [**17**] Proposition 3.1 et [**16**] Paragraphe 6.1).

Proposition 3.10. — (1) *L'induite compacte à* G *d'un type simple maximal étendu de niveau* 0 *est une représentation irréductible cuspidale de niveau* 0 *de* G.

(2) *Deux types simples maximaux étendus de niveau* 0 *induisent la même représentation cuspidale de* G *si et seulement s'ils sont conjugués sous le normalisateur* $\mathscr{N}_G(N^0)$ *de* N^0 *dans* G.

(3) *L'induite compacte à* G *d'un type simple maximal étendu de niveau* 0 *est supercuspidale si et seulement si la représentation cuspidale de* $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{k}_D)$ *qui lui correspond est supercuspidale.*

3.9.

Supposons maintenant que ρ soit une R-représentation cuspidale de niveau quelconque de G. D'après [**3, 24, 17**], il y a un sous-groupe ouvert compact J^0 de G et une représentation irréductible λ^0 de J^0 possédant les propriétés suivantes :

(1) Les R-représentations irréductibles de G dont la restriction à J^0 contient λ^0 sont exactement les représentations supercuspidales de G inertiellement équivalentes à ρ.

(2) Le groupe J^0 a un unique pro-p-sous-groupe distingué maximal J^1, et la restriction de λ^0 à J^1 est un multiple d'une représentation irréductible η.

(3) La représentation η se prolonge en une représentation κ de J^0, et il y a une représentation irréductible ξ^0 de J^0 triviale sur J^1 telle que λ^0 soit isomorphe à $\kappa \otimes \xi^0$.

(4) Il y a une extension finie E de F dans $\mathrm{M}_m(\mathrm{D})$ telle que :

(a) si B est le centralisateur de E dans $\mathrm{M}_m(\mathrm{D})$, alors J^0 est égal à $(\mathrm{J}^0 \cap \mathrm{B}^\times)\mathrm{J}^1$ et il existe un entier $r \geqslant 1$, une E-algèbre à division centrale C de degré réduit c et un isomorphisme de E-algèbres :

$$\phi : \mathrm{B} \simeq \mathrm{M}_r(\mathrm{C}), \quad rc = \frac{md}{[\mathrm{E} : \mathrm{F}]}, \quad c = \frac{d}{(d, [\mathrm{E} : \mathrm{F}])}, \tag{3.10}$$

envoyant $\mathrm{J}^0 \cap \mathrm{B}^\times$ sur le sous-groupe compact maximal standard $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_\mathrm{E})$ et $\mathrm{J}^1 \cap \mathrm{B}^\times$ sur son unique pro-p-sous-groupe distingué maximal,

(b) si $\boldsymbol{k}_\mathrm{C}$ est le corps résiduel de C, et si l'on identifie le groupe :

$$\mathrm{J}^0/\mathrm{J}^1 \simeq (\mathrm{J}^0 \cap \mathrm{B}^\times)/(\mathrm{J}^1 \cap \mathrm{B}^\times) \tag{3.11}$$

à $\mathrm{GL}_r(\boldsymbol{k}_\mathrm{C})$ via un isomorphisme (3.10), la représentation ξ^0 est l'inflation d'une représentation cuspidale σ de $\mathrm{GL}_r(\boldsymbol{k}_\mathrm{C})$.

De façon analogue au fait 3.7, on a le fait suivant ([**16**] Paragraphe 6.1).

Fait 3.11. — *La représentation ρ est supercuspidale si et seulement si σ est supercuspidale.*

Comme au paragraphe 3.7, on note $s(\rho)$ l'ordre du stabilisateur dans $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{k}_\mathrm{C}/\boldsymbol{k}_\mathrm{E})$ de la classe d'isomorphisme de σ. On définit aussi :

$$f(\rho) = \frac{n}{e_{\mathrm{E}/\mathrm{F}}}, \quad q(\rho) = q^{f(\rho)}. \tag{3.12}$$

On observera que, si ρ est de niveau 0, on a $\mathrm{E} = \mathrm{F}$, $\mathrm{J}^0 = \mathrm{N}^0$, $\mathrm{J}^1 = \mathrm{N}^1$ et $\lambda^0 = \xi^0$ avec les notations du paragraphe 3.7. L'invariant $f(\rho)$ est donc simplement égal à n dans ce cas.

D'après [**17**] (3.6), on a la propriété suivante, liant les invariants $s(\rho)$, $f(\rho)$ et le nombre de torsion $t(\rho)$ défini au paragraphe 3.6. On note ℓ l'exposant caractéristique de R.

Fait 3.12. — *Il y a un entier $v \geqslant 0$ tel que $f(\rho) = t(\rho)s(\rho)\ell^v$.*

Comme en niveau 0, il existe un unique prolongement λ de λ^0 au normalisateur dans G de sa classe d'isomorphisme, dont l'induite compacte à G soit isomorphe à ρ, mais nous n'utiliserons pas ce fait.

3.10.

Précisons maintenant les résultats du paragraphe 3.6. D'après [**17**], (3.9) on a le fait suivant.

Fait 3.13. — *Si π est une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale entière de* G *comme dans la proposition 3.6, alors l'entier a dans* (3.7)*, c'est-à-dire la longueur de $\mathbf{r}_\ell(\pi)$, divise $s(\rho)$.*

Le résultat suivant, que nous n'énonçons que dans le cas où la $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation ρ est supercuspidale, donne une réciproque à la proposition 3.6.

Proposition 3.14. — *Soit ρ une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation supercuspidale de* G*, et soit un entier $a \geqslant 1$. Pour qu'il y ait une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible cuspidale entière π de* G *telle que $\mathbf{r}_\ell(\pi)$ contienne ρ et soit de longueur a, il faut et suffit qu'une des conditions suivantes soit vérifiée :*

(1) *ou bien $a = 1$,*

(2) *ou bien $\epsilon(\rho)$ divise $s(\rho)$ et a est un diviseur de $s(\rho)$ de la forme $a = \epsilon(\rho)\ell^u$ pour un $u \geqslant 0$.*

Démonstration. — Voir [**16**] Theorème 6.11 si $a = 1$, et [**18**] Proposition 1.6 si $a \neq 1$. □

Comme $\epsilon(\rho)$ est l'ordre de $q^{t(\rho)}$ mod ℓ d'après (3.8), le fait que $\epsilon(\rho)$ divise $s(\rho)$ équivaut à ce que ℓ divise $q^{t(\rho)s(\rho)} - 1$, ce qui, d'après le fait 3.12 et compte tenu de (3.12), équivaut à :

$$\ell \text{ divise } q(\rho) - 1.$$

On en déduit les corollaires suivants.

Corollaire 3.15. — *Soit ρ une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible supercuspidale de* G*, et soit $j \in \mathbb{Z}$. Pour qu'il y ait une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation cuspidale entière π de* G *dont la réduction mod ℓ contienne à la fois ρ et $\rho\nu^j$, il faut et suffit que ρ et $\rho\nu^j$ soient isomorphes ou que ℓ divise $q(\rho) - 1$.*

Démonstration. — La condition est nécessaire : si une telle représentation π existe, et si ρ et $\rho\nu^j$ ne sont pas isomorphes, la proposition 3.6 assure que la longueur a de $\mathbf{r}_\ell(\pi)$ est un multiple de $\epsilon(\rho)$, et le résultat suit du fait 3.13.

Inversement, si les représentations ρ et $\rho\nu^j$ sont isomorphes, le résultat suit de la proposition 3.14 appliquée avec $a = 1$. Supposons maintenant que $\epsilon(\rho)$ divise $s(\rho)$ mais que ρ, $\rho\nu^j$ ne soient pas isomorphes. Le résultat suit alors de la proposition 3.14 appliquée avec $a = \epsilon(\rho)$. □

Corollaire 3.16. — *Soit ρ une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation supercuspidale de* G*.*

(1) *Si ℓ divise $q(\rho) - 1$, alors, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, les représentations ρ et $\rho\nu^j$ sont dépendantes.*

(2) *Supposons que ℓ ne divise pas $q(\rho) - 1$, et soit π une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation cuspidale entière de* G *dont la réduction mod ℓ contient ρ. Alors $\mathbf{r}_\ell(\pi)$ est irréductible.*

Démonstration. — Le point (1) est une conséquence du corollaire 3.15 et du lemme 3.5. Le point (2) est une conséquence de la proposition 3.6(2) et du fait 3.13. □

3.11.

Avant de mettre fin à cette section, discutons de la réduction mod ℓ d'une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière quelconque de G. Introduisons la définition suivante.

Définition 3.17. — Soit π une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible de G, dont on écrit :

$$\mathrm{scusp}(\pi) = \rho_1 + \cdots + \rho_r$$

le support supercuspidal. On note $\mathrm{B}(\pi)$ l'ensemble des représentations irréductibles π' de G dont le support supercuspidal est de la forme :

$$\mathrm{scusp}(\pi') = \rho_1\nu^{j_1} + \cdots + \rho_r\nu^{j_r}, \quad j_1, \ldots, j_r \in \mathbb{Z},$$

où, pour chaque $k = 1, \ldots, r$, l'entier j_k est nul si ℓ ne divise pas $q(\rho_k) - 1$.

Remarque 3.18. — Pour que $\mathrm{B}(\pi)$ contienne des représentations de supports supercuspidaux différents, il faut et suffit donc qu'il y ait un $k \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $\epsilon(\rho_k) \neq 1$ et ℓ divise $q(\rho_k) - 1$.

Si G est déployé, c'est-à-dire si d est égal à 1, cela ne se produit jamais : on a $s(\rho_k) = 1$ pour tout k, donc le fait que ℓ divise $q(\rho_k) - 1$ implique que $\epsilon(\rho_k) = 1$.

Si π est supercuspidale de niveau 0, cela se produit si ℓ divise $q^n - 1$ mais pas $q^{n/s(\rho)} - 1$, sachant que $s(\rho)$ divise d et est premier à m (voir [**18**] Corollaire 3.9). En particulier, pour le caractère trivial de $\mathrm{D}^\times$, cela se produit si ℓ divise $q^d - 1$ mais pas $q - 1$.

La relation $\pi' \in \mathrm{B}(\pi)$ équivaut à $\mathrm{B}(\pi') = \mathrm{B}(\pi)$. C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations irréductibles de G.

Proposition 3.19. — *Soient π et π' des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations irréductibles de* G. *Pour que les ensembles* $\mathrm{B}(\pi)$ *et* $\mathrm{B}(\pi')$ *soient égaux, il faut et suffit qu'il existe une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière de* G *dont la réduction mod ℓ contienne à la fois π et π'.*

Démonstration. — Supposons d'abord que $\pi' \in \mathrm{B}(\pi)$. Pour chaque $i = 1, \ldots, r$, choisissons une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation cuspidale entière π_i de $\mathrm{GL}_{m_i}(\mathrm{D})$ dont la réduction mod ℓ contienne à la fois ρ_i et $\rho_i\nu^{j_i}$, dont l'existence est assurée par le corollaire 3.15. Soient maintenant $\phi_1, \ldots, \phi_r$ des caractères non ramifiés de $\mathrm{GL}_{m_1}(\mathrm{D}), \ldots, \mathrm{GL}_{m_r}(\mathrm{D})$ à valeurs dans $1 + \mathfrak{m}$ (où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$) et considérons l'induite parabolique :

$$\pi_1\phi_1 \times \cdots \times \pi_r\phi_r. \tag{3.13}$$

Par construction, sa réduction mod ℓ contient à la fois π et π', l'induction parabolique étant compatible à la réduction mod ℓ (voir [**16**] 1.2.3 ou [**28**] II.4.14). Nous allons prouver que, pour un choix convenable des ϕ_i, cette induite est irréductible, ce qu'on va prouver par récurrence sur r.

Supposons que $r \geqslant 2$ et que l'induite $\pi_1\phi_1 \times \cdots \times \pi_{r-1}\phi_{r-1}$ soit irréductible. Pour que (3.13) le soit, il faut et suffit (d'après [**16**] Corollaire 7.32 par exemple) de choisir ϕ_r de sorte que, pour tout $i \in \{1, \ldots, r-1\}$, l'induite parabolique $\pi_i\phi_i \times \pi_r\phi_r$ soit irréductible, c'est-à-dire (selon [**23**] Section 4) que $\pi_r\phi_r$ n'appartienne pas à la réunion :

$$\left\{\pi_1\phi_1\nu^{s(\pi_1)}, \ldots, \pi_{r-1}\phi_{r-1}\nu^{s(\pi_{r-1})}\right\} \cup \left\{\pi_1\phi_1\nu^{-s(\pi_1)}, \ldots, \pi_{r-1}\phi_{r-1}\nu^{-s(\pi_{r-1})}\right\}$$

(les entiers $s(\pi_i)$ et $t(\pi_i)$ sont introduits au paragraphe 3.6), c'est-à-dire que :

$$\left(\phi_r\chi_i\phi_i^{-1}\nu^{s(\pi_i)}\right)^{t(\pi_i)} \neq 1 \quad \text{et} \quad \left(\phi_r\chi_i\phi_i^{-1}\nu^{-s(\pi_i)}\right)^{t(\pi_i)} \neq 1$$

à chaque fois que π_r et π_i sont inertiellement équivalents, χ_i étant un caractère non ramifié tel que π_r soit isomorphe à $\pi_i\chi_i$. Cette condition n'interdit qu'un nombre fini de valeurs pour ϕ_r, alors que $1 + \mathfrak{m}$ est infini.

Supposons maintenant que π et π' apparaissent dans la réduction mod ℓ d'une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière de G, dont on note $\pi_1 + \cdots + \pi_u$ le support cuspidal, π_k étant une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation cuspidale entière de $\mathrm{GL}_{n_k}(\mathrm{D})$, avec $n_1 + \cdots + n_u = m$. Les représentations π et π' apparaissent donc dans la réduction mod ℓ de l'induite parabolique :

$$\pi_1 \times \cdots \times \pi_u.$$

Pour chaque k, écrivons $\tau_k \oplus \tau_k\nu \oplus \cdots \oplus \tau_k\nu^{a_k-1}$ la réduction mod ℓ de π_k, où τ_k est une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_{n_k}(\mathrm{D})$ et a_k est un entier soit égal à 1, soit égal à $\epsilon(\tau_k)\ell^{v_k}$ pour un entier $v_k \geqslant 0$. D'après [**16**] Section 6 (voir plus précisément le théorème 6.14), le support supercuspidal de τ_k est de la forme $\rho_k + \rho_k\nu + \cdots + \rho_k\nu^{r_k-1}$ pour un entier $r_k \geqslant 1$ divisant n_k et une représentation supercuspidale ρ_k de $\mathrm{GL}_{n_k/r_k}(\mathrm{D})$. Aussi y a-t-il des entiers $c_k, c'_k \in \{0, \ldots, a_k - 1\}$ tels que :

$$\mathrm{scusp}(\pi) = \sum_{k=1}^{u} \sum_{j=0}^{r_k-1} \rho_k\nu^{j+c_k}, \quad \mathrm{scusp}(\pi') = \sum_{k=1}^{u} \sum_{j=0}^{r_k-1} \rho_k\nu^{j+c'_k}.$$

En outre, si ℓ ne divise pas $q(\rho_k) - 1$, on a $a_k = 1$ d'après la proposition 3.14, ce qui entraîne que $c'_k = c_k$. Par conséquent, on a $\pi' \in \mathrm{B}(\pi)$. □

Par ailleurs, le lemme 3.5 assure que des représentations irréductibles π et π' apparaissant dans la réduction mod ℓ d'une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière de G — ou, ce qui est équivalent d'après la proposition 3.19, telles que $\pi' \in \mathrm{B}(\pi)$ — sont dépendantes. L'objet des sections 4 à 6 est de prouver la réciproque (voir le théorème 6.2 et la proposition 6.4).

4. Le cas supercuspidal de niveau zéro

Dans cette section, on étudie les représentations supercuspidales de niveau 0 du groupe $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$, la motivation étant de se ramener à ce cas-ci pour le cas supercuspidal général, qu'on traitera dans la section suivante.

4.1.

Dans cette section, on fixe une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation supercuspidale π de niveau 0 de G. Comme au paragraphe 3.7 dont on reprend les notations, on fixe une paire (N, ξ) dont l'induite à G est isomorphe à π. Observons que, π étant de niveau 0, le corollaire 3.16 prend la forme particulièrement simple suivante :

– Si ℓ divise $q^n - 1$, alors, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, les représentations π et $\pi\nu^j$ sont dépendantes.

– Supposons que ℓ ne divise pas $q^n - 1$, et soit $\widetilde{\pi}$ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation cuspidale entière de G dont la réduction mod ℓ contient π. Alors $\mathbf{r}_\ell(\widetilde{\pi})$ est irréductible.

La représentation π étant supercuspidale, la représentation σ de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{k}_{\mathrm{D}})$ dont ξ^0 est l'inflation à N^0 est supercuspidale d'après le fait 3.7.

4.2.

Soit π' une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible de G telle que l'espace d'extension $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\pi, \pi')$ soit non nul. D'après [**26**] Theorem 10.4, il existe un caractère non ramifié χ de G tel que π' soit isomorphe à $\pi\chi$. Les représentations π et π' ayant le même caractère central d'après le lemme 3.2, on en déduit que $\chi^n = 1$.

Fixons donc un caractère non ramifié χ de G tel que $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\pi, \pi\chi)$ soit non nul. La représentation π étant isomorphe à l'induite compacte de ξ à G, il s'ensuit que $\pi\chi$ est isomorphe à l'induite compacte de $\xi\chi$ à G. Selon la propriété d'adjonction [**28**] Proposition I.5.9(e) et la formule de Mackey, on a des isomorphismes d'espaces vectoriels :

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\pi, \pi\chi) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{N}}(\xi, \pi\chi) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{N}}\left(\xi, \bigoplus_{g \in \mathrm{N}\backslash\mathrm{G}/\mathrm{N}} \mathrm{Ind}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{N}\cap\mathrm{N}^g}(\xi\chi)^g\right) \tag{4.1}$$

et ce dernier espace se plonge dans :

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{N}}\left(\xi, \prod_{g \in \mathrm{N}\backslash\mathrm{G}/\mathrm{N}} \mathrm{Ind}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{N}\cap\mathrm{N}^g}(\xi\chi)^g\right) \simeq \prod_{g \in \mathrm{N}\backslash\mathrm{G}/\mathrm{N}} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{N}}(\xi, \mathrm{Ind}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{N}\cap\mathrm{N}^g}(\xi\chi)^g). \tag{4.2}$$

Nous montrerons plus loin (dans la proposition 4.13) que seul le facteur correspondant à $g \in \mathrm{N}$ contribue à ce produit, et qu'on a un isomorphisme :

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\pi, \pi\chi) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{N}}(\xi, \xi\chi)$$

d'espaces vectoriels. Pour cela, nous allons prouver que ξ admet une enveloppe projective dans la catégorie $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{N})$ des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations de longueur finie de N, et déterminer les sous-quotients irréductibles de cette enveloppe.

4.3.

Dans ce paragraphe, R est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p et ζ est une R-représentation irréductible de N triviale sur N^1. On va montrer qu'elle admet une enveloppe projective dans la catégorie des R-représentations de longueur finie de N. On sait que N est engendré par N^0 et l'élément ϖ défini au paragraphe 3.7, et que $\varpi^s = \varpi_F$. Le quotient :

$$\mathsf{H} = N/\langle N^1, \varpi_F\rangle \tag{4.3}$$

est donc un groupe fini. Par ailleurs, la restriction de ζ à $F^\times$ est un multiple d'un caractère ω_ζ. Fixons un caractère ω de N trivial sur N^0 tel que $\omega(\varpi_F) = \omega_\zeta(\varpi_F)$ et posons :

$$\zeta_1 = \zeta\omega^{-1}. \tag{4.4}$$

C'est une représentation de N triviale sur $\langle N^1, \varpi_F\rangle$. Elle peut donc être vue comme une représentation de H. Elle a donc une enveloppe projective P_1 dans la catégorie des R-représentations de longueur finie de H (voir par exemple [**27**] Proposition 41). Celle-ci est indécomposable et sa restriction à $F^\times$ est un multiple du caractère $\omega_\zeta\omega^{-1}$.

Lemme 4.1. — *Soit* X *une* R*-représentation de longueur finie de* N*. Il y a des sous-représentations* X_1 *et* X_0 *de* X*, uniques, telles que* $X = X_1 \oplus X_0$ *et :*

(1) *la représentation* X_1 *est invariante par* $\langle N^1, \varpi_F\rangle$*,*

(2) *aucun des composants irréductibles de* X_0 *n'est invariant par* $\langle N^1, \varpi_F\rangle$*.*

Démonstration. — D'abord, comme N^1 est un pro-p-groupe et que p est inversible dans R, il y a une unique décomposition $X = V \oplus W$ en sous-représentations telles que $V = X^{N^1}$ et aucun des composants irréductibles de W ne soit invariant par N^1. Puis, d'après le lemme 3.2, il existe des scalaires $z_1, \dots, z_r \in R^\times$ deux à deux distincts et une décomposition :

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$

telle que, pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, l'uniformisante ϖ_F agit sur chaque composant irréductible de V_i par le scalaire z_i. Si aucun des z_i n'est égal à 1, on pose $X_1 = \{0\}$ et $X_0 = X$. Sinon, on peut renuméroter de sorte que $z_1 = 1$, et on pose $X_1 = V_1$ et $X_0 = V_2 \oplus \cdots \oplus V_r \oplus W$. □

Lemme 4.2. — *La représentation* P_1 *vue comme représentation de* N *par inflation est une enveloppe projective de* ζ_1 *dans* $\mathbf{rep}_R(N)$*.*

Démonstration. — Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ P_1 \arrow[r, two heads, "u"'] & Y \end{tikzcd}$$

dans la catégorie des R-représentations de longueur finie de N. Écrivons :

$$X = X_1 \oplus X_0, \quad Y = Y_1 \oplus Y_0,$$

les décompositions de X et Y données par le lemme 4.1. Comme P_1 est triviale sur $\langle N^1, \varpi_F\rangle$, on a $\mathrm{Im}(u) \subseteq Y_1$, c'est-à-dire que $u = u_1 \oplus 0$. Écrivons $f = f_1 \oplus f_0$ avec :

$$f_1 \in \mathrm{Hom}_N(X_1, Y_1), \quad f_0 \in \mathrm{Hom}_N(X_0, Y_0).$$

Par projectivité de P_1 dans la catégorie des R-représentations de H, il existe un morphisme v_1 de P_1 dans X_1 tel que $f_1 \circ v_1 = u_1$. Posant $v = v_1 \oplus 0$, on obtient $f \circ v = u$, ce qui prouve que P_1 est projective dans $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{N})$.

Prouvons maintenant que P_1 est une enveloppe projective de ζ_1 vue comme représentation de longueur finie de N. Pour cela, supposons que Y soit égale à ζ_1 et que X soit projective. Chacun des facteurs X_1 et X_0 est projectif. Le morphisme f_0 étant nul, f_1 est surjectif. Comme X_1 est projective dans $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathsf{H})$, il y a un morphisme surjectif $w_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{H}}(\mathrm{X}_1, \mathrm{P}_1)$ tel que $u_1 \circ w_1 = f_1$. Posant $w = w_1 \oplus 0$, qui est surjectif de X sur P_1, on trouve $u \circ w = f$. $\square$

Montrons à présent un lemme qui affirme que la projectivité résiste à la torsion par un caractère.

Lemme 4.3. — *Soit* Q *une* R*-représentation projective de* N*, et soit* ψ *un* R*-caractère de* N*.*

(1) *La représentation* $\mathrm{Q}\psi$ *est une* R*-représentation projective de* N*.*

(2) *Si* Q *est une enveloppe projective d'une représentation* W *de* N*, alors* $\mathrm{Q}\psi$ *est une enveloppe projective de* $\mathrm{W}\psi$*.*

Démonstration. — Considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{X} \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Q}\psi \arrow[r, two heads, "u"'] & \mathrm{Y} \end{tikzcd}$$

dans $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{N})$. Tordant par ψ^{-1}, et Q étant projective, on a un morphisme $v \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{N}}(\mathrm{Q}, \mathrm{X}\psi^{-1})$ tel que $f \circ v = u$. L'assertion (1) se déduit du fait que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{N}}(\mathrm{Q}, \mathrm{X}\psi^{-1}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{N}}(\mathrm{Q}\psi, \mathrm{X})$.

Supposons maintenant que Y soit égale à W et que X soit projective. Tordant par ψ^{-1}, et la représentation $\mathrm{X}\psi^{-1}$ étant projective dans $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{N})$ d'après le lemme 4.3, on obtient un morphisme surjectif $w \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{N}}(\mathrm{X}\psi^{-1}, \mathrm{Q}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{N}}(\mathrm{X}, \mathrm{Q}\psi)$ tel que $u \circ w = f$. $\square$

Proposition 4.4. — *La représentation* ζ *admet une enveloppe projective dans* $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{N})$*.*

Démonstration. — D'après les lemmes 4.2 et 4.3, la représentation $\mathrm{P}_1\omega$ est une enveloppe projective de ζ dans $\mathbf{rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{N})$. $\square$

Par unicité de l'enveloppe projective à isomorphisme près, la classe d'isomorphisme de $\mathrm{P}_1\omega$ est indépendante du choix du caractère ω qui a servi à sa construction.

4.4.

Si τ est une représentation de dimension finie de N et si ζ est une représentation irréductible de N, on note $(\tau : \zeta)$ la multiplicité de ζ dans τ, c'est-à-dire le nombre de composants irréductibles de τ qui sont isomorphes à ζ.

Proposition 4.5. — *Soit* ζ *une* $\overline{\mathbb{F}}_\ell$*-représentation irréductible de* N *triviale sur* N^1 *et soit* P *son enveloppe projective dans* $\mathsf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{N})$.

(1) *Il y a, à isomorphisme près, une unique* $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$*-représentation projective* $\widetilde{\mathrm{P}}$ *dans* $\mathsf{rep}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{N})$ *telle que* $\widetilde{\mathrm{P}}\otimes\overline{\mathbb{F}}_\ell$ *soit isomorphe à* P.

(2) *Pour toute* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$*-représentation irréductible entière* τ *de* N, *la multiplicité de* τ *dans* $\widetilde{\mathrm{P}}\otimes\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ *est égale à celle de* ζ *dans* $\mathbf{r}_\ell(\tau)$.

Démonstration. — Nous reprenons les notations du paragraphe précédent. D'après la proposition 42 et le paragraphe 15.4 de [**27**], on a les faits suivants :

– il y a, à isomorphisme près, une unique $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-représentation projective $\widetilde{\mathrm{P}}_1$ dans $\mathsf{rep}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathsf{H})$ telle que $\widetilde{\mathrm{P}}_1\otimes\overline{\mathbb{F}}_\ell$ soit isomorphe à P, et

– pour toute $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible τ_1 de H, la multiplicité de ζ_1 dans $\mathbf{r}_\ell(\tau_1)$ est égale à la multiplicité de τ_1 dans $\widetilde{\mathrm{P}}_1\otimes\overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

Fixons un $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-caractère $\widetilde{\omega}$ de N tel que $\mathbf{r}_\ell(\widetilde{\omega})=\omega$ et posons :

$$\widetilde{\mathrm{P}}=\widetilde{\mathrm{P}}_1\widetilde{\omega}. \tag{4.5}$$

C'est une représentation projective (d'après le lemme 4.3) et $\widetilde{\mathrm{P}}\otimes\overline{\mathbb{F}}_\ell$ est isomorphe à P. Si Q est une $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-représentation projective dans $\mathsf{rep}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{N})$ ayant la même propriété, alors, par projectivité, tout isomorphisme entre $\widetilde{\mathrm{P}}\otimes\overline{\mathbb{F}}_\ell$ et $\mathrm{Q}\otimes\overline{\mathbb{F}}_\ell$ se relève en un isomorphisme entre $\widetilde{\mathrm{P}}$ et Q.

Afin de prouver la seconde partie de la proposition, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.6. — *Soit* τ *une* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$*-représentation irréductible entière du groupe* N. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *La représentation* τ *est triviale sur* N^1.
(2) *La représentation* $\mathbf{r}_\ell(\tau)$ *est triviale sur* N^1.
(3) *La représentation* $\mathbf{r}_\ell(\tau)$ *contient un facteur irréductible trivial sur* N^1.

Démonstration. — Bien sûr, (1) implique (2), lui-même impliquant (3). Prouvons que (3) implique (1). Comme N^1 est distingué dans N et que τ est irréductible, il nous suffit de prouver que la restriction de τ à N^1 contient le caractère trivial. Comme N^1 est un pro-p-groupe et ℓ est différent de p, le $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractère trivial de N^1 est une représentation projective ; le résultat s'ensuit. □

Soit τ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière de N. Si elle n'est pas triviale sur N^1, alors elle n'apparaît pas dans $\widetilde{\mathrm{P}}\otimes\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ (car $\widetilde{\mathrm{P}}$ est triviale sur N^1 par construction) et $\mathbf{r}_\ell(\tau)$ ne contient aucun facteur irréductible trivial sur N^1 d'après le lemme 4.6. Supposons maintenant que τ soit triviale sur N^1. Sa restriction à $\mathrm{F}^\times$ est un multiple d'un caractère ω_τ. Si la réduction mod ℓ de ω_τ n'est pas égale à ω_ζ, alors ζ n'apparaît pas dans $\mathbf{r}_\ell(\tau)$ et τ n'apparaît pas dans $\widetilde{\mathrm{P}}\otimes\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Sinon, on peut choisir le caractère $\widetilde{\omega}$ de (4.5) tel que $\tau_1=\tau\widetilde{\omega}^{-1}$ soit triviale en ϖ_F. On a :

$$(\mathbf{r}_\ell(\tau):\zeta)=(\mathbf{r}_\ell(\tau_1):\zeta_1)=\left(\widetilde{\mathrm{P}}_1\otimes\overline{\mathbb{Q}}_\ell:\tau_1\right)=\left(\widetilde{\mathrm{P}}\otimes\overline{\mathbb{Q}}_\ell:\tau\right)$$

ce qui donne le résultat voulu. □

Remarque 4.7. — (1) L'unicité de la $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-représentation projective $\widetilde{\mathrm{P}}$ implique que, pour tout $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-caractère χ de N dont la réduction mod ℓ est triviale, $\widetilde{\mathrm{P}}\chi$ et $\widetilde{\mathrm{P}}$ sont isomorphes.

(2) La seconde assertion de la proposition 4.5 implique en particulier qu'une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière de N apparaît comme facteur de $\widetilde{\mathrm{P}} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ si et seulement si sa réduction mod ℓ contient ζ.

4.5.

On se propose maintenant d'obtenir des informations sur les sous-quotients irréductibles de l'enveloppe projective P de la représentation ξ du paragraphe 4.1, dans $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{N})$. On va prouver le résultat suivant. Soit ν le caractère non ramifié “valeur absolue de la norme réduite” de G. Il est d'ordre fini.

Proposition 4.8. — *Soit ξ' un sous-quotient irréductible de* P*.*

(1) *Il y a un entier $j \in \mathbb{Z}$ tel que ξ' soit isomorphe à $\xi\nu^j$.*

(2) *Si ℓ ne divise pas $q^n - 1$, alors ξ' est isomorphe à ξ.*

Afin de prouver cette proposition, nous allons avoir besoin de mettre en évidence certaines des propriétés des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations irréductibles entières de N dont la réduction mod ℓ contient ξ.

Lemme 4.9. — *Soit τ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière de* N *dont la réduction mod ℓ contient ξ.*

(1) *Il y a un sous-groupe* K *de* N *contenant* N^0 *et une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible μ de* K *tels que :*

- (a) *la restriction μ^0 de μ à* N^0 *est irréductible,*
- (b) *le normalisateur de μ^0 dans* N *est égal à* K *et sa réduction mod ℓ est égale à ξ^0,*
- (c) *l'induite de μ à* N *est isomorphe à τ.*

(2) *Si* (K', μ') *vérifie les conditions* (a), (b) *et* (c) *ci-dessus, alors* K′ *est égal à* K *et μ' est conjuguée à μ sous* N*, et $\mathbf{r}_\ell(\mu')$ est égale à la restriction de ξ à* K*.*

(3) *L'induite compacte de τ à* G *est irréductible et cuspidale.*

Démonstration. — Notons τ^0 la restriction de τ à N^0. Comme $\mathbf{r}_\ell(\tau)$ contient ξ, il y a un facteur irréductible μ^0 de τ^0 tel que $\mathbf{r}_\ell(\mu^0)$ contienne ξ^0. Soit K le normalisateur de μ^0 dans N. Fixons un prolongement μ de μ^0 à K tel que τ soit isomorphe à l'induite de μ à N, et notons $\widetilde{\pi}$ l'induite compacte de τ à G. Par transitivité de l'induction, c'est aussi l'induite compacte de μ à G. On va prouver que (K, μ) est un type simple maximal étendu de niveau 0 au sens de la définition 3.9. Il suffit pour cela de prouver d'une part que μ^0 est triviale sur N^1, d'autre part que c'est l'inflation d'une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{k}_\mathrm{D})$.

D'abord, comme $\mathbf{r}_\ell(\mu^0)$ contient ξ^0 qui est triviale sur N^1, le lemme 4.6 assure que μ^0 est triviale sur N^1. Ensuite, notons α la représentation irréductible de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{k}_\mathrm{D})$ dont μ^0 est l'inflation.

Alors $\mathbf{r}_\ell(\alpha)$ contient la représentation σ dont ξ^0 est l'inflation. Or σ est supercuspidale d'après le fait 3.7 (voir aussi le paragraphe 4.1) : d'après [**28**] III.1.1 et III.2.9, il s'ensuit que α est cuspidale et que $\mathbf{r}_\ell(\alpha)$ est égale à σ. La paire (K, μ) est un type simple maximal étendu de niveau 0 de G comme voulu, donc $\widetilde{\pi}$ est irréductible et cuspidale d'après la proposition 3.10. Ceci prouve les assertions (1) et (3).

Supposons ensuite que (K', μ') vérifie les conditions (a), (b) et (c) du premier item du lemme 4.9. D'après ce qui précède, c'est un type simple maximal étendu de niveau 0 de G, dont l'induite compacte à G est isomorphe à $\widetilde{\pi}$. D'après la proposition 3.10, ce type est conjugué à (K, μ) par un élément g du normalisateur de N^0 dans G. La condition (b) entraîne que g normalise ξ^0, donc $g \in \mathrm{N}$ comme voulu. Ceci prouve la première partie de (2).

Le fait que $\mathbf{r}_\ell(\mu^0)$ soit égale à ξ^0 entraîne que $\mathbf{r}_\ell(\mu)$ est irréductible et égale à $\xi_{\mathrm{K}}\beta$, où ξ_{K} est la restriction de ξ à K et β un caractère de K trivial sur N^0. Ensuite, $\mathbf{r}_\ell(\tau)$ est égale à la semi-simplification de :

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{N}}(\mathbf{r}_\ell(\mu)) \simeq \xi \otimes \mathrm{Ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{N}}(\beta)$$

et la semi-simplification de $\mathrm{Ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{N}}(\beta)$ est la somme directe de ℓ^v copies de chacun des caractères de N prolongeant β, où ℓ^v est la plus grande puissance de ℓ divisant $(\mathrm{N} : \mathrm{K})$. Du fait que $\mathbf{r}_\ell(\tau)$ contient ξ, on déduit que β admet un prolongement à N trivial, donc que β lui-même est trivial, ce qui finit de prouver (2). □

Remarque 4.10. — On a prouvé au passage que la multiplicité de ξ dans $\mathbf{r}_\ell(\tau)$ est égale à la plus grande puissance de ℓ divisant l'indice de K dans N.

Passons à la preuve de la proposition 4.8. Soit ξ' un sous-quotient irréductible de P.

Lemme 4.11. — *Il y a une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière τ de* N *dont la réduction mod ℓ contient à la fois ξ et ξ'.*

Démonstration. — Il existe des sous-représentations $\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{X}$ de P telles que le quotient X/Y soit isomorphe à ξ'. Soit P′ l'enveloppe projective de ξ' dans $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{N})$. Comme tout morphisme de P′ vers ξ' se relève vers $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{P}$, l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathrm{N}}(\mathrm{P}', \mathrm{P})$ est non nul. Notons $\widetilde{\mathrm{P}}$ et $\widetilde{\mathrm{P}}'$ les $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-représentations projectives de N relevant P et P′ données par la proposition 4.5. Par projectivité de $\widetilde{\mathrm{P}}'$, l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathrm{N}}(\widetilde{\mathrm{P}}', \widetilde{\mathrm{P}})$ est non nul. Puis, comme $\widetilde{\mathrm{P}}$ et $\widetilde{\mathrm{P}}'$ sont libres sur $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$, on en déduit que :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{N}}\left(\widetilde{\mathrm{P}}' \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell, \widetilde{\mathrm{P}} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell\right) \neq \{0\}.$$

Par conséquent, il existe un facteur irréductible entier τ commun à $\widetilde{\mathrm{P}}' \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $\widetilde{\mathrm{P}} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$. D'après la proposition 4.5, les représentations ξ' et ξ apparaissent dans $\mathbf{r}_\ell(\tau)$. □

Fixons une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation irréductible entière τ de N comme dans le lemme 4.11. Fixons une paire (K, μ) comme dans le lemme 4.9. Comme $\mathbf{r}_\ell(\tau)$ contient ξ', il y a un facteur irréductible μ'^0 de τ^0 (la restriction de τ à N^0) dont la réduction mod ℓ contienne un composant irréductible de ξ'^0, la restriction de ξ' à N^0. Comme τ est irréductible, les facteurs irréductibles de τ^0 sont conjugués sous N, c'est-à-dire que μ'^0 est conjugué à μ^0 sous N, qui normalise ξ^0. Par conséquent, ξ'^0 est irréductible et isomorphe à ξ^0. On en tire le résultat suivant.

Lemme 4.12. — *Il y a un caractère ψ de* N *trivial sur* N^0 *tel que ξ' soit isomorphe à $\xi\psi$.*

Soit $\widetilde{\pi}$ l'induite compacte de τ à G, qui est irréductible et cuspidale selon le lemme 4.9. Comme $\mathbf{r}_\ell(\tau)$ contient ξ et ξ', la représentation $\mathbf{r}_\ell(\widetilde{\pi})$ contient à la fois π et l'induite compacte de ξ' à G, qui est de la forme $\pi\psi$ pour un caractère non ramifié ψ de G d'après le lemme 4.12. D'après la proposition 3.6, il y a un $j \in \mathbb{Z}$ tel que $\pi\psi$ soit isomorphe à $\pi\nu^j$. En outre, dans le cas où ℓ ne divise pas $q^n - 1$, le paragraphe 4.1 assure que $\mathbf{r}_\ell(\widetilde{\pi})$ est irréductible, on peut donc choisir $j = 0$ dans ce cas-là. La représentation $\pi\nu^j$ est supercuspidale, et elle contient (N, ξ') et $(\mathrm{N}, \xi\nu^j)$: ces types sont conjugués sous le normalisateur de N^0 dans G, d'après la proposition 3.10. Comme leurs restrictions à N^0 sont toutes deux isomorphes à ξ^0, ils sont même conjugués sous N, c'est-à-dire qu'ils sont isomorphes. Ceci met fin à la preuve de la proposition 4.8.

4.6.

On sait (cf. paragraphe 4.2) que $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\pi, \pi\chi)$ se plonge dans le produit :

$$\prod_g \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{N}}(\xi, \mathrm{Ind}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{N}\cap\mathrm{N}^g}(\xi\chi)^g)$$

où g décrit un système de représentants des doubles classes de G mod N. Nous allons voir que seul $g \in \mathrm{N}$ contribue à ce produit.

Lemme 4.13. — *Soit $g \in \mathrm{G}$ tel que* $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{N}}(\xi, \mathrm{Ind}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{N}\cap\mathrm{N}^g}(\xi\chi)^g)$ *soit non nul. Alors $g \in \mathrm{N}$.*

Démonstration. — Soit ξ' un sous-quotient irréductible de $\mathrm{Ind}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{N}\cap\mathrm{N}^g}(\xi\chi)^g$ tel que $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{N}}(\xi, \xi')$ soit non nul, et soit M une extension non triviale de ξ par ξ'. Soit P' l'enveloppe projective de ξ'. Le diagramme :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \xi' \arrow[r] & \mathrm{M} \arrow[r] & \xi \arrow[r] & 0 \\ & \mathrm{P}' \arrow[u, two heads] \arrow[rr, dotted] & & \mathrm{P} \arrow[u, two heads] \arrow[ul, dotted] & \end{tikzcd}$$

montre que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{N}}(\mathrm{P}', \mathrm{P})$ est non nul. En particulier, ξ' est un sous-quotient irréductible de P. D'après la proposition 4.8, il existe un entier $j \in \mathbb{Z}$ tel que ξ' soit isomorphe à $\xi\nu^j$. La représentation P' est donc isomorphe à $\mathrm{P}\nu^j$, et il suit de la proposition 4.8 appliquée derechef que les sous-quotients irréductibles de P' sont tous de la forme $\xi\nu^i$ avec $i \in \mathbb{Z}$.

D'autre part, le fait que ξ' soit un sous-quotient irréductible de $\mathrm{Ind}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{N}\cap\mathrm{N}^g}(\xi\chi)^g$ entraîne l'existence d'un morphisme non nul de P' vers cette induite. D'après ce qui précède, il existe un $i \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\{0\} \neq \mathrm{Hom}_{\mathrm{N}}\left(\xi\nu^i, \mathrm{Ind}^{\mathrm{N}}_{\mathrm{N}\cap\mathrm{N}^g}(\xi\chi)^g\right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{N}\cap\mathrm{N}^g}\left(\xi\nu^i, (\xi\chi)^g\right).$$

Par restriction à $\mathrm{N}^0 \cap \mathrm{N}^{0g}$, on en déduit que g appartient à l'ensemble d'entrelacement de ξ^0. D'après la section 1 de [**15**] (rédigée pour des représentations complexes mais dont les arguments sont encore valables sur $\overline{\mathbb{F}}_\ell$) celui-ci est égal à N. Par conséquent, on a $g \in \mathrm{N}$. □

Corollaire 4.14. — *On a un isomorphisme d'espaces vectoriels :*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\pi, \pi\chi) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{N}}(\xi, \xi\chi).$$

L'espace $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{N}}(\xi, \xi\chi)$ étant non nul, considérons une extension non triviale M de ξ par $\xi\chi$. Le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \xi\chi \arrow[r] & \mathrm{M} \arrow[r] & \xi \arrow[r] & 0 \\ & & & \mathrm{P} \arrow[u, two heads] \arrow[ul, dotted] & \end{tikzcd}$$

montre que $\xi\chi$ apparaît comme sous-quotient de P. On a donc $\xi\chi \simeq \xi\nu^j$ pour un $j \in \mathbb{Z}$, et on peut supposer que $j = 0$ si ℓ ne divise pas $q^n - 1$. Récapitulons le résultat obtenu dans la proposition suivante.

Proposition 4.15. — *Soit π et π' deux représentations supercuspidales de* G *de niveau* 0 *telles que* $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\pi, \pi')$ *soit non nul. Alors il existe un entier $j \in \mathbb{Z}$ tel que π' soit isomorphe à $\pi\nu^j$, et on a $j = 0$ lorsque ℓ ne divise pas $q^n - 1$.*

On va utiliser cette proposition pour en déduire la proposition suivante, où l'on s'intéresse aux espaces d'extension supérieurs Ext^i pour $i \geqslant 1$.

Proposition 4.16. — *Soit π et π' deux représentations supercuspidales de* G *de niveau* 0*. Supposons qu'il existe un entier $i \geqslant 0$ tel que* $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{G}}(\pi', \pi)$ *soit non nul.*

(1) *Il existe un entier $j \in \mathbb{Z}$ tel que π' soit isomorphe à $\pi\nu^j$.*
(2) *Si ℓ ne divise pas $q^n - 1$, alors π' est isomorphe à π.*

Démonstration. — On va utiliser l'induite compacte :

$$\Pi = \mathrm{ind}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{P})$$

à G de l'enveloppe projective P d'un type ξ associé à π. On sait que Π est projectif car P l'est et l'induction compacte préserve la projectivité. D'après la proposition 4.8, chaque sous-quotient irréductible de P est de la forme $\xi\nu^j$ pour un $j \in \mathbb{Z}$. Par induction compacte de N à G, on en déduit que Π a une suite de composition finie dont les quotients sont de la forme :

$$\mathrm{ind}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{G}}(\xi\nu^j) \simeq \pi\nu^j, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

On en déduit d'une part que Π est de longueur finie, d'autre part que :

(1) si ℓ divise $q^n - 1$, les sous-quotients irréductibles de Π sont de la forme $\pi\nu^j$, avec $j \in \mathbb{Z}$;
(2) si ℓ ne divise pas $q^n - 1$, tous les sous-quotients irréductibles de Π sont isomorphes à π.

Nous allons utiliser ces propriétés pour montrer la proposition 4.16. Traitons le cas où ℓ divise $q^n - 1$, l'autre cas étant similaire et plus simple. On procède par récurrence sur i, le cas où $i = 1$ découlant de la proposition 4.15.

Supposons que $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{G}}(\pi', \pi)$ soit non nul pour un entier $i \geqslant 2$ et que π' ne soit pas de la forme $\pi\nu^j$ pour $j \in \mathbb{Z}$. Par hypothèse de récurrence, l'espace $\mathrm{Ext}^l_{\mathrm{G}}(\pi', \pi\nu^j)$ est nul pour tout $0 \leqslant l < i$ et tout $j \in \mathbb{Z}$. Fixons une suite de composition :

$$\Pi = \Pi_0 \supsetneq \Pi_1 \supsetneq \Pi_2 \supsetneq \cdots \supsetneq \Pi_r \supsetneq \Pi_{r+1} = \{0\}.$$

Il y a pour tout $k \in \{0, \ldots, r\}$ un $j_k \in \mathbb{Z}$ tel que Π_k/Π_{k+1} soit isomorphe à $\pi\nu^{j_k}$. Considérons la suite exacte courte :

$$0 \to \Pi_1 \to \Pi \to \pi\nu^{j_0} \to 0.$$

On en déduit, pour tout $i \geqslant 1$ et tout $u \in \mathbb{Z}$, la suite exacte :

$$\mathrm{Ext}^{i-1}_{\mathrm{G}}(\pi'\nu^u, \pi\nu^{j_0}) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{G}}(\pi'\nu^u, \Pi_1) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{G}}(\pi'\nu^u, \Pi).$$

L'espace $\mathrm{Ext}^{i-1}_{\mathrm{G}}(\pi'\nu^u, \pi\nu^{j_0})$ est nul par hypothèse de récurrence, et $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{G}}(\pi'\nu^u, \Pi)$ est nul car Π est projective. Par conséquent, $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{G}}(\pi'\nu^u, \Pi_1)$ est nul pour tout $u \in \mathbb{Z}$. On montre de façon analogue que $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{G}}(\pi'\nu^u, \Pi_k)$ est nul pour tout $k \in \{0, \ldots, r\}$ et tout $u \in \mathbb{Z}$. En particulier, si $k = r$, l'espace $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{G}}(\pi'\nu^u, \pi\nu^{j_r})$ est nul. Choisissant $u = j_r$, on obtient une contradiction. □

Tirons de la preuve de la proposition 4.16 le corollaire suivant.

Corollaire 4.17. — *Toute* $\overline{\mathbb{F}}_\ell$*-représentation supercuspidale* π *de niveau* 0 *de* G *admet une enveloppe projective* P_π *dans* $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$. *Les sous-quotients irréductibles de* P_π *sont tous de la forme* $\pi\nu^j$ *avec* $j \in \mathbb{Z}$ *et, si* ℓ *ne divise pas* $q^n - 1$, *on peut même supposer que* $j = 0$.

Démonstration. — Considérons la représentation Π apparaissant dans la preuve de la proposition 4.16. Alors π admet une enveloppe projective dans $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$: il suffit, parmi les facteurs directs de Π admettant π pour quotient, d'en choisir un de longueur minimale. La preuve de la proposition 4.16 montre qu'elle a les propriétés voulues. □

5. Le cas supercuspidal de niveau quelconque

Dans cette section, on étudie les représentations supercuspidales quelconques de G.

5.1.

Soit π une R-représentation irréductible supercuspidale de G, et soit $\Omega = \Omega(\pi)$ sa classe inertielle. D'après le théorème 3.1, la catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G}, \Omega)$ formée des représentations dont les sous-quotients irréductibles sont dans Ω (c'est-à-dire de la forme $\pi\chi$ pour un caractère non ramifié χ de G) est un facteur direct indécomposable de $\mathbf{Rep}_{\mathrm{R}}(\mathrm{G})$.

Fixons une paire $(\mathrm{J}^0, \lambda^0)$ comme au paragraphe 3.9, dont nous utiliserons les notations. Rappelons qu'on a une extension finie E de F, une E-algèbre B qu'on identifie à $\mathrm{M}_r(\mathrm{C})$ via un isomorphisme (3.10) fixé une fois pour toutes, que J^0 a un unique pro-p-sous-groupe distingué maximal J^1 et que la restriction de λ^0 à J^1 est un multiple d'une représentation irréductible η. Dans toute cette section, on pose :

$$\mathrm{G}_0 = \mathrm{B}^\times \simeq \mathrm{GL}_r(\mathrm{C}).$$

D'après [**26**] Proposition 10.2, l'induite compacte $\mathrm{ind}_{\mathrm{J}^0}^{\mathrm{G}}(\lambda^0)$ appartient à $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \Omega)$.

5.2.

Nous allons maintenant décrire certains résultats dus à Chinello [**6**] que nous utiliserons pour nous ramener à un bloc de niveau 0 de $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0^\times)$. Notons $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \eta)$ la sous-catégorie pleine formée des représentations de $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$ engendrées par leur composante η-isotopique. La catégorie $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \Omega)$ introduite au paragraphe précédent en est un facteur direct.

Notons maintenant $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \eta)$ la $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-algèbre des fonctions à support compact $\Psi : \mathrm{G} \to \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\eta)$ telles que $\Psi(xgy) = \eta(x) \circ \Psi(g) \circ \eta(y)$ quels que soient $x, y \in \mathrm{J}^1$, munie du produit :

$$\Psi * \Psi' : g \mapsto \sum_h \Psi(h)\Psi'(h^{-1}g)$$

où h décrit un système de représentants de G/J^1. Notant $\mathbf{Mod}(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \eta))$ la catégorie des modules à droite sur $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \eta)$, on a un foncteur :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\eta : \mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \eta) &\to \mathbf{Mod}(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \eta)) \\ \mathrm{V} &\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}\left(\mathrm{ind}_{\mathrm{J}^1}^{\mathrm{G}}(\eta), \mathrm{V}\right) \end{aligned} \tag{5.1}$$

où l'action (à gauche) de $\Psi \in \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \eta)$ sur $f \in \mathrm{ind}_{\mathrm{J}^1}^{\mathrm{G}}(\eta)$ est définie par la formule :

$$\Psi * f : g \mapsto \sum_h \Psi(h) f(h^{-1}g)$$

et l'action (à droite) de Ψ sur $\varphi \in \mathbf{M}_\eta(\mathrm{V})$ est donnée par $\varphi \cdot \Psi : f \mapsto \varphi(\Psi * f)$. On a le résultat important suivant.

Théorème 5.1 **([6] Theorem 5.10)**. — *Le foncteur $\mathbf{M}_\eta$ est une équivalence de catégories.*

Observons que, dans le cas particulier où π est de niveau 0, G_0 est égal à G et η est le caractère trivial du groupe $\mathrm{J}^1 = \mathrm{N}^1 = 1 + \mathrm{M}_m(\mathfrak{p}_\mathrm{D})$. Le foncteur (5.1) définit alors une équivalence de la catégorie $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \mathrm{N}^1)$ des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations de G qui sont de niveau 0, c'est-à-dire qui sont engendrées par leurs vecteurs N^1-invariants, vers la catégorie $\mathbf{Mod}(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \mathrm{N}^1))$ des modules à droite sur la $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-algèbre des fonctions de G dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ à support compact et bi-invariantes par N^1.

5.3.

Notons K^0 le sous-groupe compact maximal $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_\mathrm{C})$ de G_0 et K^1 son pro-p-sous-groupe distingué maximal. Comme ci-dessus, on a la sous-catégorie pleine $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\mathrm{K}^1)$ de $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0)$ formée des représentations engendrées par leurs vecteurs K^1-invariants, la $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-algèbre $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\mathrm{K}^1)$ des fonctions de G_0 dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ à support compact et bi-invariantes par K^1, et le foncteur :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 : \mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\mathrm{K}^1) &\rightarrow \mathbf{Mod}(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\mathrm{K}^1)) \\ \mathrm{V} &\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_0}\left(\mathrm{ind}_{\mathrm{K}^1}^{\mathrm{G}_0}(1),\mathrm{V}\right) \end{aligned}$$

qui est une équivalence de catégories selon [**5**] théorème 3.2. Dans [**6**], Chinello construit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-algèbres :

$$\theta : \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\mathrm{K}^1) \to \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\eta) \tag{5.2}$$

dépendant du choix de la représentation κ prolongeant η fixé au paragraphe 3.9, et ayant la propriété suivante (voir [**6**] Section 3).

Fait 5.2. — *Soit ϖ_C une uniformisante de* C*, soit un entier $i \in \{0,\dots,r\}$ et soit la matrice diagonale :*

$$b = \mathrm{diag}(1,\dots,1,\varpi_\mathrm{C},\dots,\varpi_\mathrm{C}) \in \mathrm{G}_0$$

où 1 *apparaît i fois. Si $\Psi_0 \in \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\mathrm{K}^1)$ est à support dans $\mathrm{K}^1 b \mathrm{K}^1$, son image $\theta(\Psi_0)$ est à support dans $\mathrm{J}^1 b \mathrm{J}^1$.*

Cet isomorphisme d'algèbres θ définit une équivalence de catégories :

$$\theta^* : \mathbf{Mod}(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\eta)) \to \mathbf{Mod}(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\mathrm{K}^1)).$$

Composant les foncteurs $\mathbf{M}_\eta$ et θ^* avec un quasi-inverse de $\mathbf{M}_1$, Chinello obtient une équivalence de catégories :

$$\mathbf{F} : \mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\eta) \to \mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\mathrm{K}^1). \tag{5.3}$$

Le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\eta) \arrow[r, "\mathbf{F}"] \arrow[d, "\mathbf{M}_\eta"'] & \mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\mathrm{K}^1) \arrow[d, "\mathbf{M}_1"] \\ \mathbf{Mod}(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\eta)) \arrow[r, "\theta^*"'] & \mathbf{Mod}(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\mathrm{K}^1)) \end{tikzcd}$$

résume la situation.

5.4.

Considérons maintenant la représentation ξ^0 de J^0 triviale sur J^1 du paragraphe 3.9, telle que λ^0 soit isomorphe à $\kappa \otimes \xi^0$. Elle définit, par restriction, une représentation ξ_0^0 de $J^0 \cap G_0 \simeq K^0$ triviale sur $J^1 \cap G_0 \simeq K^1$, inflation de la représentation cuspidale σ du groupe :

$$J^0/J^1 \simeq K^0/K^1 \simeq GL_r(\boldsymbol{k}_C)$$

qui est même supercuspidale d'après le fait 3.11.

Notons K le normalisateur de la classe d'isomorphisme de ξ_0^0 dans G_0, et fixons un prolongement ξ_0 de ξ_0^0 à K. D'après le paragraphe 3.8, la paire (K, ξ_0) est un type simple maximal étendu de niveau 0 de G_0, et son induite compacte à G_0, notée π_0, est une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation supercuspidale de niveau 0 de G_0. Par construction de π_0, on a le résultat suivant.

Lemme 5.3. — *On a $q(\pi) = q(\pi_0)$.*

Comme au paragraphe 3.9, la représentation supercuspidale π_0 définit un facteur direct indécomposable $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G_0, \Omega_0)$ de $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G_0, K^1)$, où Ω_0 est la classe inertielle de π_0, formé des représentations dont les sous-quotients irréductibles sont dans Ω_0. D'après [**6**] Theorem 5.15, on a le résultat suivant.

Proposition 5.4. — *Le foncteur $\mathbf{F}$ induit une équivalence entre $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G, \Omega)$ et $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G_0, \Omega_0)$.*

Dorénavant, nous choisirons π_0, ou de façon équivalente ξ_0, de sorte que $\mathbf{F}(\pi) \simeq \pi_0$.

5.5.

Nous allons montrer que $\mathbf{F}$ se comporte bien vis-à-vis de la torsion par un caractère non ramifié, afin d'utiliser les résultats de la section précédente.

Lemme 5.5. — *Soit χ un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractère non ramifié de* G, *et soit χ_0 la restriction de χ à* G_0. *Alors $\mathbf{F}(\pi\chi)$ est isomorphe à $\pi_0\chi_0$.*

Posons $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G, \eta)$. Si $f \in \mathrm{ind}_{J^1}^G(\eta)$ et si χ est un caractère non ramifié de G, on note χf la fonction $g \mapsto \chi(g)f(g)$ de $\mathrm{ind}_{J^1}^G(\eta)$. Si $\Psi \in \mathcal{H}$, on note $\chi\Psi$ la fonction $f \mapsto \chi(g)\Psi(g)$ de $\mathcal{H}$.

Remarque 5.6. — On observera que, si $f \in \mathrm{ind}_{J^1}^G(\eta)$ a pour support $J^1 g$ pour un $g \in G$, alors χf est simplement égale à $\chi(g)f$. De façon analogue, si $\Psi \in \mathcal{H}$ a pour support $J^1 g J^1$ pour un $g \in G$, alors $\chi\Psi$ est simplement égale à $\chi(g)\Psi$.

Il est commode d'introduire la définition suivante.

Définition 5.7. — Si M est un $\mathcal{H}$-module à droite et si χ est un caractère non ramifié de G, on note $M\chi$ le $\mathcal{H}$-module à droite d'espace sous-jacent M, muni de l'action de $\mathcal{H}$ donnée par :

$$(v, \Psi) \mapsto v \cdot (\chi^{-1}\Psi), \quad v \in M, \quad \Psi \in \mathcal{H},$$

où $\cdot$ désigne l'action de $\mathcal{H}$ sur M.

Le lemme suivant justifie la définition précédente.

Lemme 5.8. — *Soit π une représentation dans $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\eta)$, et soit χ un caractère non ramifié de* G. *Les $\mathcal{H}$-modules $\mathbf{M}_\eta(\pi\chi)$ et $\mathbf{M}_\eta(\pi)\chi$ sont isomorphes.*

Démonstration. — Pour tout vecteur w dans l'espace de η, on note $\boldsymbol{i}_w$ l'élément de $\mathrm{ind}_{\mathrm{J}^1}^{\mathrm{G}}(\eta)$ de support J^1 prenant la valeur w en 1. Par réciprocité de Frobenius, il correspond à tout morphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{ind}_{\mathrm{J}^1}^{\mathrm{G}}(\eta),\pi\chi)$ le morphisme :

$$w \mapsto \varphi(\boldsymbol{i}_w)$$

de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}^1}(\eta,\pi\chi)$. Réciproquement, à tout $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{J}^1}(\eta,\pi\chi)$ correspond le morphisme :

$$f \mapsto \sum_g \chi(g)^{-1}\pi(g)^{-1}\psi(\boldsymbol{i}_{f(g)})$$

de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{ind}_{\mathrm{J}^1}^{\mathrm{G}}(\eta),\pi\chi)$, où g décrit un système de représentants de $\mathrm{J}^1\backslash\mathrm{G}$. Les $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-espaces vectoriels $\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}^1}(\eta,\pi\chi)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}^1}(\eta,\pi)$ étant égaux, on peut associer à φ le morphisme :

$$\varphi^* : f \mapsto \sum_g \pi(g)^{-1}\varphi(\boldsymbol{i}_{f(g)})$$

de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{ind}_{\mathrm{J}^1}^{\mathrm{G}}(\eta),\pi)$. On définit de cette façon un isomorphisme d'espaces vectoriels $\varphi \mapsto \varphi^*$ de $\mathbf{M}_\eta(\pi\chi)$ vers $\mathbf{M}_\eta(\pi)\chi$, et nous allons vérifier que c'est un isomorphisme de $\mathcal{H}$-modules.

Soit $\Psi \in \mathcal{H}$. Il s'agit de prouver que, pour tout w dans l'espace de η, on a :

$$(\varphi \cdot \Psi)(\boldsymbol{i}_w) = (\varphi^* \cdot \chi^{-1}\Psi)(\boldsymbol{i}_w). \tag{5.4}$$

Posons $f = \Psi * \boldsymbol{i}_w \in \mathrm{ind}_{\mathrm{J}^1}^{\mathrm{G}}(\eta)$, qui n'est autre que la fonction $g \mapsto \Psi(g)w$. On a :

$$\chi^{-1}\Psi(\boldsymbol{i}_w) = (\chi^{-1}\Psi) * \boldsymbol{i}_w = \chi^{-1}f.$$

Le membre de droite de (5.4) donne :

$$\varphi^*(\chi^{-1}f) = \sum_g \pi(g)^{-1}\varphi(\boldsymbol{i}_{\chi(g)^{-1}f(g)}) = \sum_g \chi(g)^{-1}\pi(g)^{-1}\varphi(\boldsymbol{i}_{f(g)}) = \varphi(f)$$

ce qui prouve le résultat escompté. □

Posons $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\mathrm{K}^1)$. On a une propriété analogue au lemme 5.8 pour les $\mathcal{H}_0$-modules.

Prouvons maintenant le lemme 5.5. Comme $\mathbf{F}(\pi\chi)$ est dans $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0,\Omega_0)$, on sait qu'il existe un caractère non ramifié μ_0 de G_0 tel que $\mathbf{F}(\pi\chi)$ soit isomorphe à $\pi_0\mu_0$. Appliquant $\mathbf{M}_1$, et compte tenu du lemme 5.8, on obtient un isomorphisme $\theta^*(\mathbf{M}_\eta(\pi)\chi) \simeq \theta^*(\mathbf{M}_\eta(\pi))\mu_0$ de $\mathcal{H}_0$-modules. Par définition, cela signifie que :

$$\theta(\mu_0\Psi_0) = \chi\theta(\Psi_0)$$

pour tout $\Psi_0 \in \mathcal{H}_0$.

Supposons maintenant que Ψ_0 soit la fonction caractéristique de la double-classe $\mathrm{K}^1b\mathrm{K}^1$ avec $b = \mathrm{diag}(1,\dots,1,\varpi_{\mathrm{C}}) \in \mathrm{G}_0$. D'après la remarque 5.6, on a $\mu_0\Psi_0 = \mu_0(b)\Psi_0$. Ensuite, d'après le fait 5.2, la fonction $\Psi = \theta(\Psi_0)$ a pour support $\mathrm{J}^1 b\mathrm{J}^1$. D'après la remarque 5.6 à nouveau, on a donc $\chi\Psi = \chi(b)\Psi$. On en déduit que $\mu_0(b) = \chi(b)$.

Le caractère χ est de la forme $\alpha \circ \mathrm{Nrd}$, où α est un caractère non ramifié de $\mathrm{F}^\times$ et Nrd désigne la norme réduite de $\mathrm{M}_m(\mathrm{D})$ sur F. De façon analogue, le caractère μ_0 est de la forme $\alpha_0 \circ \mathrm{Nrd}_\mathrm{B}$ où α_0 est un caractère non ramifié de $\mathrm{E}^\times$ et Nrd_B est la norme réduite de B sur E. On a :

$$\begin{aligned} \chi(b) &= \alpha \circ \mathrm{Nrd}(b) \\ &= \alpha \circ \mathrm{N}_{\mathrm{E/F}} \circ \mathrm{Nrd}_\mathrm{B}(b) \\ &= \alpha \circ \mathrm{N}_{\mathrm{E/F}}(\mathrm{Nrd}_\mathrm{C}(\varpi_\mathrm{C})) \end{aligned}$$

et $\varpi_\mathrm{E} = \mathrm{Nrd}_\mathrm{C}(\varpi_\mathrm{C})$ est une uniformisante de E. Un calcul analogue donne $\mu_0(b) = \alpha_0(\varpi_\mathrm{E})$. On en déduit que $\alpha_0 = \alpha \circ \mathrm{N}_{\mathrm{E/F}}$, donc que μ_0 est égal à χ_0, la restriction de χ à G_0.

5.6.

On utilise notre travail ci-dessus pour obtenir la proposition suivante qui généralise la proposition 4.16.

Proposition 5.9. — *Soit π et π' deux représentations irréductibles supercuspidales de* G. *Supposons qu'il existe un entier $i \geqslant 0$ tel que $\mathrm{Ext}^i_\mathrm{G}(\pi', \pi)$ soit non nul.*

(1) *Il existe un entier $j \in \mathbb{Z}$ tel que π' soit isomorphe à $\pi\nu^j$.*

(2) *Si ℓ ne divise pas $q(\pi) - 1$, alors π' est isomorphe à π.*

Démonstration. — Comme les représentations π' et π sont dans le même bloc de $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$, on en déduit que π' est dans $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \Omega)$. On peut donc appliquer $\mathbf{F}$, ce qui donne :

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{G}_0}(\mathbf{F}(\pi'), \mathbf{F}(\pi)) \neq \{0\}$$

dans $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}_0, \Omega_0)$, et $\mathbf{F}(\pi)$ est isomorphe à π_0. D'après la proposition 4.16, ceci entraîne que :

(1) il existe un entier $j \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathbf{F}(\pi')$ soit isomorphe à $\pi_0\nu_0^j$,

(2) si ℓ ne divise pas $q(\pi_0) - 1$, alors $\mathbf{F}(\pi')$ est isomorphe à π_0,

où ν_0 désigne le caractère non ramifié “valeur absolue de la norme réduite” de G_0. D'après le lemme 5.3, on a $q(\pi_0) = q(\pi)$. D'après le lemme 5.5, et comme la restriction de ν à G_0 est égale à ν_0, on a donc :

(1) il existe un entier $j \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathbf{F}(\pi')$ soit isomorphe à $\mathbf{F}(\pi\nu^j)$,

(2) si ℓ ne divise pas $q(\pi) - 1$, alors $\mathbf{F}(\pi')$ est isomorphe à $\mathbf{F}(\pi)$.

Le foncteur $\mathbf{F}$ étant une équivalence de catégories, on trouve le résultat annoncé. □

Enfin, le corollaire suivant généralise le corollaire 4.17.

Corollaire 5.10. — *Toute $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation supercuspidale π de* G *admet une enveloppe projective P_π dans $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$. Les sous-quotients irréductibles de P_π sont tous de la forme $\pi\nu^j$ avec $j \in \mathbb{Z}$ et, si ℓ ne divise pas $q(\pi) - 1$, on peut même supposer que $j = 0$.*

6. Le cas général

Dans cette section, on décompose la catégorie $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$ en blocs.

6.1.

On considère à présent une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation irréductible quelconque π de G. D'après la définition 3.17, il lui correspond un ensemble $\mathrm{B}(\pi)$. Nous allons prouver le résultat suivant, qui généralise la proposition 5.9. Pour cela, nous nous inspirons de [**26**] Paragraphe 1.1.

Proposition 6.1. — *Soient π et π' des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations irréductibles de* G. *Supposons qu'il existe un entier $i \geqslant 0$ tel que $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{G}}(\pi', \pi)$ soit non nul. Alors $\pi' \in \mathrm{B}(\pi)$.*

Démonstration. — Écrivons le support supercuspidal de π sous la forme $\rho_1 + \cdots + \rho_r$. Rappelons que $\pi' \in \mathrm{B}(\pi)$ si et seulement s'il y a des entiers $j_1, \dots, j_r \in \mathbb{Z}$ tels que $\mathrm{scusp}(\pi')$ s'écrive :

$$\rho_1\nu^{j_1} + \cdots + \rho_r\nu^{j_r} \tag{6.1}$$

et, pour chaque $k = 1, \dots, r$, l'entier j_k est nul si ℓ ne divise pas $q(\rho_k) - 1$. Nous allons procéder en plusieurs étapes.

(1) Le cas où π' est cuspidale et où π ne l'est pas.

On procède par récurrence sur i, en montrant la contraposée (on suppose donc que le support supercuspidal de π' n'est pas de la forme (6.1)). Comme π n'est pas cuspidale, on a une injection de π dans $\boldsymbol{i}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{P}}(\tau)$ où τ est une représentation cuspidale d'un sous-groupe de Levi M de G associé à un sous-groupe parabolique P de radical unipotent N. On a une suite exacte courte :

$$0 \to \pi \to \boldsymbol{i}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{P}}(\tau) \to \delta \to 0$$

qui définit δ et on en déduit en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\pi', \cdot)$ la suite exacte :

$$\mathrm{Ext}^{i-1}_{\mathrm{G}}(\pi', \delta) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{G}}(\pi', \pi) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{G}}(\pi', \boldsymbol{i}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{P}}(\tau)).$$

Les sous-quotients irréductibles de δ ont le même support supercuspidal que π. Par hypothèse de récurrence, on a donc $\mathrm{Ext}^{i-1}_{\mathrm{G}}(\pi', \mathrm{A}) = \{0\}$ pour tout sous-quotient irréductible A de δ. Par un argument de dévissage standard, $\mathrm{Ext}^{i-1}_{\mathrm{G}}(\pi', \delta)$ est nul. Pour montrer que $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{G}}(\pi', \boldsymbol{i}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{P}}(\tau))$ est nul, on utilise la réciprocité de Frobenius. Notant π'_{N} le module de Jacquet de π' relativement au triplet parabolique $(\mathrm{P}, \mathrm{M}, \mathrm{N})$, on a :

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{G}}(\pi', \boldsymbol{i}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{P}}(\tau)) \simeq \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{M}}(\pi'_{\mathrm{N}}, \tau)$$

et ce dernier espace est nul. Ceci donne $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{G}}(\pi', \pi) = \{0\}$ et conclut la récurrence.

(2) Le cas où π est cuspidale et où π' ne l'est pas.

On résout ce cas-là en considérant les contragrédientes $\pi^\vee$ et $\pi'^\vee$. On a :

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{G}}(\pi', \pi) \simeq \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{G}}(\pi^\vee, \pi'^\vee)$$

qui est nul par le cas précédent.

(3) Le cas où π n'est pas supercuspidale, mais où π et π' sont cuspidales.

On procède par récurrence sur i en montrant la contraposée. Comme π n'est pas supercuspidale, elle apparaît comme sous-quotient de $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\rho)$ où ρ est une représentation irréductible supercuspidale d'un sous-groupe de Levi M de G d'un sous-groupe parabolique P de radical unipotent N. On considère les sous-représentations de $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\rho)$ ayant un quotient isomorphe à π, et qui sont minimales pour cette propriété. Parmi ces sous-représentations minimales, on en choisit une, que l'on note V, dont le nombre $k(\pi)$ de sous-quotients irréductibles cuspidaux soit minimal. On écrit $\pi \simeq \mathrm{V}/\mathrm{W}$ où W est une sous-représentation de V dans laquelle π n'apparaît pas, et on raisonne par récurrence sur $k = k(\pi)$. Considérons la suite exacte courte :

$$0 \to \mathrm{V} \to \boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\tau) \to \boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\tau)/\mathrm{V} \to 0.$$

Appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\pi', \cdot)$, on en déduit la suite exacte :

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{G}}^{i-1}(\pi', \boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\tau)/\mathrm{V}) \to \mathrm{Ext}_{\mathrm{G}}^{i}(\pi', \mathrm{V}) \to \mathrm{Ext}_{\mathrm{G}}^{i}(\pi', \boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\tau)).$$

L'espace $\mathrm{Ext}_{\mathrm{G}}^{i}(\pi', \boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\tau))$ est nul par adjonction. De plus, tous les sous-quotients irréductibles δ de $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\tau)$ vérifient $\mathrm{Ext}_{\mathrm{G}}^{i-1}(\pi', \delta) = \{0\}$. En effet, si δ n'est pas cuspidale, cela découle du cas 1 et, si δ est cuspidal, c'est une conséquence de l'hypothèse de récurrence sur i. Par conséquent, l'espace $\mathrm{Ext}_{\mathrm{G}}^{i-1}(\pi', \boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\tau)/\mathrm{V})$ est nul, ce dont on déduit que $\mathrm{Ext}_{\mathrm{G}}^{i}(\pi', \mathrm{V})$ l'est aussi. On a également la suite exacte courte :

$$0 \to \mathrm{W} \to \mathrm{V} \to \pi \to 0$$

dont on déduit la suite exacte :

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{G}}^{i}(\pi', \mathrm{V}) \to \mathrm{Ext}_{\mathrm{G}}^{i}(\pi', \pi) \to \mathrm{Ext}_{\mathrm{G}}^{i+1}(\pi', \mathrm{W})$$

et on vient de montrer que le membre de gauche est nul. Pour conclure, il reste donc à montrer que $\mathrm{Ext}_{\mathrm{G}}^{i+1}(\pi', \mathrm{W})$ est nul. Pour cela, nous allons prouver que l'espace $\mathrm{Ext}_{\mathrm{G}}^{i+1}(\pi', \delta)$ est nul pour tout sous-quotient irréductible δ de W. Si δ n'est pas cuspidal, cela découle du cas 1. Si δ est cuspidal (ce qui ne peut se produire que si $k(\pi) \geqslant 2$), on a $k(\delta) < k(\pi)$ et cela découle de l'hypothèse de récurrence sur k.

(4) Le cas où π' n'est pas supercuspidale, mais où π et π' sont cuspidales.

De même, on résout ce cas en passant aux contragrédientes.

(5) Le cas où π et π' sont supercuspidales.

Ce cas a fait l'objet de la proposition 5.9.

(6) Le cas où ni π ni π' ne sont cuspidales.

Encore une fois, on procède par récurrence sur i et par contraposée. Comme π n'est pas cuspidale, on peut l'écrire comme une sous-représentation de $\boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\tau)$ où τ est une représentation cuspidale d'un sous-groupe de Levi standard M de G associé à un sous-groupe parabolique standard P de radical unipotent N. On a une suite exacte courte :

$$0 \to \pi \to \boldsymbol{i}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\tau) \to \delta \to 0$$

qui définit δ, et on en déduit en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\pi', \cdot)$ la suite exacte :

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{G}}^{i-1}(\pi', \delta) \to \mathrm{Ext}_{\mathrm{G}}^{i}(\pi', \pi) \to \mathrm{Ext}_{\mathrm{G}}^{i}(\pi', \mathrm{ind}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{G}}(\tau)) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathrm{M}}^{i}(\pi'_{\mathrm{N}}, \tau)$$

où π'_{N} est encore le module de Jacquet de π' relativement au triplet parabolique $(\mathrm{P}, \mathrm{M}, \mathrm{N})$. Les sous-quotient irréductible de δ ayant tous le même support supercuspidal que π, aucun d'entre eux n'appartient à $\mathrm{B}(\pi')$ puisqu'on a supposé que $\mathrm{B}(\pi') \neq \mathrm{B}(\pi)$. Il s'ensuit que $\mathrm{Ext}_{\mathrm{G}}^{i-1}(\pi', \delta)$ est nul par hypothèse de récurrence sur i. Il reste à montrer que l'espace $\mathrm{Ext}_{\mathrm{M}}^{i}(\alpha, \tau)$ est nul pour tout sous-quotient irréductible α de π'_{N}.

Supposons au contraire qu'il y ait un sous-quotient irréductible α de π'_{N} pour lequel l'espace $\mathrm{Ext}_{\mathrm{M}}^{i}(\alpha, \tau)$ ne soit pas nul. La représentation π' n'étant pas cuspidale, elle apparaît comme sous-quotient de l'induite parabolique d'une représentation supercuspidale ρ' d'un sous-groupe de Levi standard M' de G associé à un sous-groupe parabolique standard P' de radical unipotent N'. Selon le lemme géométrique ([**7**] 2.8), il y a une matrice de permutation w telle que α apparaisse comme sous-quotient de $\boldsymbol{i}_{\mathrm{M}\cap\mathrm{P}'^{w}}^{\mathrm{M}}(\rho'^{w})$ et $\mathrm{M}'^{w} \subseteq \mathrm{M}$. Quitte à remplacer ρ' par ρ'^{w}, on peut supposer que w est l'identité, de sorte que α apparaisse dans $\boldsymbol{i}_{\mathrm{M}\cap\mathrm{P}'}^{\mathrm{M}}(\rho')$.

Écrivons maintenant respectivement α et τ sous la forme $\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_u$ et $\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_u$, où α_k et τ_k sont des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_{n_k}(\mathrm{D})$ pour chaque k, où $n_1, \ldots, n_u$ sont des entiers $\geqslant 1$ de somme m et où τ_k est cuspidale. Le sous-groupe de Levi M est donc naturellement isomorphe à $\mathrm{GL}_{n_1}(\mathrm{D}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_u}(\mathrm{D})$. D'une part, comme α apparaît dans $\boldsymbol{i}_{\mathrm{M}\cap\mathrm{P}'}^{\mathrm{M}}(\rho')$, on a :

$$\mathrm{scusp}(\alpha_1) + \cdots + \mathrm{scusp}(\alpha_u) = \mathrm{scusp}(\pi'). \tag{6.2}$$

D'autre part, compte tenu des cas 2 et 3 et de la proposition 5.9, les ensembles $\mathrm{B}(\alpha_k)$ et $\mathrm{B}(\tau_k)$ sont égaux pour tout k. On déduit de ceci que le membre de gauche de (6.2) est de la forme (6.1), donc que π' appartient à $\mathrm{B}(\pi)$, ce qui contredit notre hypothèse de départ.

Ceci met fin à la démonstration de la proposition 6.1. □

6.2.

Notons $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathrm{G})$ l'ensemble des $\mathrm{B}(\pi)$ quand π parcourt les représentations irréductibles du groupe G. Énonçons le premier résultat principal de l'article.

Théorème 6.2. — *On a une décomposition en blocs :*

$$\mathsf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}) = \bigoplus_{\mathrm{B}} \mathsf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\mathrm{B}) \tag{6.3}$$

où B *décrit les éléments de* $\mathscr{B}$, *et où* $\mathsf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ *est la sous-catégorie pleine de* $\mathsf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G})$ *formée des représentations dont tous les sous-quotients irréductibles sont dans* B. *En d'autres termes, toute* $\overline{\mathbb{F}}_\ell$*-représentation de longueur finie* V *de* G *admet une unique décomposition :*

$$\mathrm{V} = \bigoplus_{\mathrm{B}} \mathrm{V}(\mathrm{B}) \tag{6.4}$$

où V(B) *désigne la plus grande sous-représentation de* V *dont tous les sous-quotients irréductibles sont dans* B.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur la longueur de V, le cas de longueur 1 étant immédiat puisque les $\mathrm{B} \in \mathscr{B}$ sont disjoints grâce à l'unicité du support supercuspidal.

Soit V une représentation de longueur finie $\geqslant 2$ de G, soit π une sous-représentation irréductible de V et posons $\mathrm{B} = \mathrm{B}(\pi)$. La proposition 6.1 assure que, pour toute représentation $\pi' \in \mathrm{B}$ et toute représentation $\sigma \in \mathrm{Irr}(\mathrm{G}) - \mathrm{B}$, l'espace d'extension $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\pi', \sigma)$ est nul. Par conséquent, d'après le lemme 3.4, la représentation V se décompose en $\mathrm{V} = \mathrm{V}(\mathrm{B}) \oplus \mathrm{W}$ où W est la plus grande sous-représentation de V dont les sous-quotients irréductibles sont hors de B. Comme V(B) est non nul, la longueur de W est strictement moindre que celle de V. On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence.

Enfin, le fait que les facteurs $\mathsf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ sont indécomposables est une conséquence de la proposition 3.19 et du lemme 3.5. □

Remarque 6.3. — Si $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$, la remarque 3.18 montre que des représentations irréductibles sont dans le même bloc si et seulement si elles ont le même support supercuspidal.

6.3.

Comme annoncé à la fin de la section 3, nous terminons cette section par le résultat suivant.

Proposition 6.4. — *Soient* π, π' *des* $\overline{\mathbb{F}}_\ell$*-représentations irréductibles de* G. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Il existe une* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$*-représentation irréductible entière de* G *dont la réduction mod* ℓ *contienne à la fois* π *et* π'.

(2) *Les ensembles* $\mathrm{B}(\pi)$ *et* $\mathrm{B}(\pi')$ *sont égaux.*

(3) *Les représentations* π *et* π' *sont dépendantes.*

Démonstration. — Les première et seconde assertions sont équivalentes selon la proposition 3.19, et la première implique la troisième selon le lemme 3.5. Il ne reste donc plus qu'à prouver que la troisième implique l'une des deux autres. Or il suit du théorème 6.2 que, si des représentations π et π' sont dépendantes, alors $\mathrm{B}(\pi') = \mathrm{B}(\pi)$. □

7. Blocs supercuspidaux

Soit π une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation supercuspidale de $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$. Notons Ω sa classe inertielle, et posons $\mathrm{B} = \mathrm{B}(\pi)$. L'objectif de cette section est de prouver le théorème suivant.

Théorème 7.1. — *Il existe un corps localement compact non archimédien* F' *et une* F'*-algèbre à division centrale* D' *tels que les blocs* $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\Omega)$ *et* $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{D}'^\times,\Omega')$ *sont équivalents, où* Ω' *est la classe inertielle du caractère trivial de* $\mathrm{D}'^\times$*.*

7.1.

Indiquons immédiatement comment déduire du théorème 7.1 le corollaire suivant.

Corollaire 7.2. — *Notons* B' *l'ensemble des représentations irréductibles de* $\mathrm{D}'^\times$ *dépendantes du caractère trivial. Alors les blocs* $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ *et* $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{D}'^\times,\mathrm{B}')$ *sont équivalents.*

Démonstration. — L'équivalence de catégories du théorème 7.1 préserve le fait d'être de longueur finie. Elle envoie donc $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ sur un bloc de $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{D}'^\times)$ contenu dans $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{D}'^\times,\Omega')$. Un tel bloc est de la forme $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{D}'^\times,\mathrm{B}'')$, où B'' est égal à $\mathrm{B}(\chi)$ pour un caractère non ramifié χ de $\mathrm{D}'^\times$. Il suffit alors d'appliquer le foncteur de torsion par χ^{-1}, qui induit une équivalence entre $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{D}'^\times,\mathrm{B}'')$ et $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{D}'^\times,\mathrm{B}')$. □

En outre, la proposition 5.4 montre que, pour prouver le théorème 7.1, il suffit de le faire dans le cas où π est de niveau 0, ce que nous supposerons désormais.

Nous allons construire un progénérateur de type fini du bloc $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\Omega)$ et calculer l'algèbre de ses endomorphismes.

7.2.

Fixons un type (N,ξ) dont l'induite compacte à G soit isomorphe à π, comme au paragraphe 3.7. Soit ξ^0 la restriction de ξ à N^0, et soit P^0 l'enveloppe projective de ξ^0 dans $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{N}^0)$.

Lemme 7.3. — *L'induite compacte :*

$$\operatorname{ind}_{\mathrm{N}^0}^{\mathrm{G}}(\mathrm{P}^0) \tag{7.1}$$

est projective et de type fini dans $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\Omega)$*.*

Démonstration. — Elle est projective en tant qu'induite compacte d'une représentation projective, et de type fini en tant qu'induite compacte d'une représentation de dimension finie.

Il reste à prouver que cette représentation, qu'on note Π, appartient au bloc $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\Omega)$. Soit π' un de ses sous-quotients irréductibles. Celui-ci est de niveau 0 : la représentation de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{k}_\mathrm{D})$ sur l'espace des vecteurs de π' invariants par N^1 est non nulle. Fixons-en une sous-représentation irréductible τ, ce qui est possible car π' est admissible. La restriction de Π à N^0 se décompose en la somme directe :

$$\bigoplus_g \mathrm{ind}_{N^0 \cap N^{0g}}^{N^0}(P^{0g})$$

où g décrit les matrices diagonales de G de la forme $\mathrm{diag}(\varpi_D^{k_1}, \ldots, \varpi_D^{k_m})$ où $k_1, \ldots, k_m$ sont des entiers relatifs tels que $k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_m$. Il y a donc un g tel que τ apparaisse comme sous-quotient irréductible de $\mathrm{ind}_{N^0 \cap N^{0g}}^{N^0}(P^{0g})$. Pour que cette induite ait des vecteurs non nuls invariants par N^1, il faut et suffit que l'induite $\mathrm{ind}_{N^0 \cap N^{0g}}^{N^0}(\xi^{0g})$ en ait également (rappelons que les sous-quotients de P^0 sont tous isomorphes à ξ^0 d'après [**28**] III.2.9). La représentation σ du groupe $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{k}_D)$ dont ξ^0 est l'inflation étant cuspidale (elle est même supercuspidale), ceci n'est possible que si g normalise N^0, c'est-à-dire si $k_1 = \cdots = k_m$. Supposons que ce soit le cas, c'est-à-dire qu'on ait $g = \varpi_D^k$ pour un $k \in \mathbb{Z}$. Alors τ est un sous-quotient irréductible de P^{0g}, donc τ est isomorphe à ξ^{0g} et π' est un sous-quotient irréductible de l'induite compacte $\mathrm{ind}_{N^0}^{G}(\xi^0)$. Le résultat voulu suit maintenant de [**26**] Proposition 8.1 (voir aussi la fin du paragraphe 5.1). □

Rappelons (voir par exemple [**19**] 4.11) qu'un objet projectif et de type fini Π de $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G, \Omega)$ est un progénérateur si toute représentation irréductible de $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G, \Omega)$, c'est-à-dire toute représentation irréductible inertiellement équivalente à π, est isomorphe à un quotient de Π.

Proposition 7.4. — *La représentation* $\mathrm{ind}_{N^0}^{G}(P^0)$ *est un progénérateur de* $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(G, \Omega)$.

Démonstration. — Étant donné un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractère non ramifié χ de G, il s'agit de prouver que $\pi\chi$ est un quotient de (7.1). La représentation ξ^0 étant un quotient de P^0, et le foncteur d'induction compacte étant exact, il suffit de prouver que $\pi\chi$ est un quotient de l'induite compacte de ξ^0 à G, ce qui suit de ce que π est un quotient de ladite induite et χ est trivial sur N^0. □

Remarque 7.5. — Dans le cas particulier où π est le caractère trivial de $G = D^\times$, la représentation P^0 est l'induite à $\mathcal{O}_D^\times$ du caractère trivial de $U_D^{(\ell)}$, le plus petit sous-groupe ouvert de $\mathcal{O}_D^\times$ dont l'indice est une puissance de ℓ. Le progénérateur (7.1) de la proposition 7.4 est donc l'induite compacte du caractère trivial de $U_D^{(\ell)}$ à $D^\times$.

Nous allons maintenant calculer l'algèbre des endomorphismes du progénérateur $\mathrm{ind}_{N^0}^{G}(P^0)$.

7.3.

Notons G le groupe réductif fini $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{k}_D)$ et σ la représentation supercuspidale de G dont ξ^0 est l'inflation. Fixons une extension $\boldsymbol{t}$ de $\boldsymbol{k}_D$ dans $M_m(\boldsymbol{k}_D)$ de degré m, de façon à voir le groupe multiplicatif $\mathsf{T} = \boldsymbol{t}^\times$ comme un tore de G. Notons a la valuation ℓ-adique de $q^n - 1$. La composante ℓ-primaire S de T est donc cyclique d'ordre ℓ^a. Soit Σ la $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-représentation projective de G telle que la $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation $\Sigma \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ soit une enveloppe projective de σ dans $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathsf{G})$. On a le résultat suivant (Dat [**8**] Proposition B.1.2).

Proposition 7.6. — *Il y a un isomorphisme de* $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$*-algèbres* $\mathrm{End}(\Sigma) \simeq \overline{\mathbb{Z}}_\ell[\mathsf{S}]$.

Plus précisément, une fois fixé un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractère $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{t}/\boldsymbol{k}_\mathrm{F})$-régulier θ de T correspondant à σ par la théorie de Deligne-Lusztig, la $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-représentation Σ considérée par Dat est munie d'une action $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-linéaire de T commutant à celle de G. Il y a donc un homomorphisme de $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-algèbres de $\overline{\mathbb{Z}}_\ell[\mathsf{T}]$ dans $\mathrm{End}(\Sigma)$, induisant par restriction un isomorphisme de $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-algèbres :

$$j : \overline{\mathbb{Z}}_\ell[\mathsf{S}] \to \mathrm{End}(\Sigma). \tag{7.2}$$

Par ailleurs, il y a une décomposition canonique de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations de $\mathsf{G} \times \mathsf{T}$:

$$\Sigma \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell = \bigoplus_\alpha \mathrm{V}_\alpha \tag{7.3}$$

indexée sur les $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-caractères α de S, où V_α est isomorphe à $\pi_\alpha \otimes \theta\alpha$, la représentation π_α étant l'unique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation cuspidale de G relevant σ correspondant au $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-caractère $\theta\alpha$ (où θ désigne, par abus de notation, l'unique relèvement de θ à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ de même ordre que θ) par la théorie de Deligne-Lusztig. Étendant les scalaires à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ dans (7.2), on obtient l'isomorphisme canonique de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-algèbres :

$$\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathsf{S}] \to \mathrm{End}(\Sigma) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathsf{G}}(\Sigma \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

qui, compte tenu de (7.3), associe à tout élément $f \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathsf{S}]$ l'endomorphisme de $\Sigma \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ agissant sur le facteur V_α par le scalaire :

$$\sum_{x \in \mathsf{S}} f(x)(\theta\alpha)(x) = \sum_{x \in \mathsf{S}} f(x)\alpha(x)$$

l'égalité provenant de ce que θ est d'ordre premier à ℓ et x d'ordre divisant ℓ^a.

Fixons un générateur $\varsigma \in \mathsf{S}$, et notons t son image dans $\mathrm{End}(\Sigma)$. On a :

$$\mathrm{End}(\Sigma) = \overline{\mathbb{Z}}_\ell[\mathsf{t}], \quad \mathsf{t}^{\ell^a} = 1. \tag{7.4}$$

Étendant les scalaires à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, l'endomorphisme t agit sur le facteur V_α par le scalaire $\alpha(\varsigma) \in \overline{\mathbb{Z}}_\ell^\times$.

7.4.

Notons $\widetilde{\mathrm{P}}^0$ la $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-représentation projective de N telle que $\widetilde{\mathrm{P}}^0 \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$ soit isomorphe à P^0. À isomorphisme près, c'est l'inflation à N^0 de la représentation Σ du paragraphe 7.3. On déduit de la proposition 7.6 le résultat suivant.

Corollaire 7.7. — *Il y a un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-algèbres* $\mathrm{End}(\mathrm{P}^0) \simeq \overline{\mathbb{F}}_\ell[\mathsf{S}]$.

Démonstration. — Le résultat suit de la proposition 7.6 et du fait que la $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-algèbre $\mathrm{End}(\mathrm{P}^0)$ est isomorphe à $\mathrm{End}(\widetilde{\mathrm{P}}^0) \otimes \overline{\mathbb{F}}_\ell$. □

La classe d'isomorphisme de $\widetilde{\mathrm{P}}^0$ est normalisée par N car ξ^0 l'est. Rappelons qu'on a fixé une uniformisante ϖ_D de D telle que $\varpi_\mathrm{D}^d = \varpi_\mathrm{F}$ et que le groupe N est engendré par N^0 et $\varpi = \varpi_\mathrm{D}^b$, où b est le cardinal de l'orbite de σ sous $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{k}_\mathrm{D}/\boldsymbol{k}_\mathrm{F})$. Fixons un isomorphisme de $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-représentations de N :

$$\mathsf{a} \in \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell \mathrm{N}}(\widetilde{\mathrm{P}}^0, \widetilde{\mathrm{P}}^{0\varpi}) \tag{7.5}$$

ce qui équivaut à fixer un prolongement de $\widetilde{\mathrm{P}}^0$ à N prenant la valeur a en ϖ. Étendons les scalaires et restreignons à N^0 dans (7.5). Compte tenu de (7.3), pour tout caractère α de S, il y a un unique caractère β de S tel que a envoie V_α sur V_β, c'est-à-dire tel que le conjugué de π_α par ϖ soit isomorphe à π_β. Ceci définit une permutation $\alpha \mapsto \beta$ entre $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractères de S.

Rappelons qu'on a défini (voir la définition 3.8) l'invariant de Hasse h de D, qui est un entier de $\{1, \dots, d\}$ premier à d. La conjugaison par ϖ, qui est égal à ϖ_{D}^b, induit donc sur le corps résiduel $\boldsymbol{k}_{\mathrm{D}}$ l'automorphisme :

$$x \mapsto x^{q^{hb}}.$$

La représentation cuspidale π_α correspondant au caractère $\theta\alpha$, sa conjuguée par ϖ correspond au caractère :

$$(\theta\alpha)^{q^{hb}}$$

qui est conjugué sous $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{t}/\boldsymbol{k}_{\mathrm{D}})$ à $\theta\beta$ pour un unique caractère β de S, c'est-à-dire que :

$$(\theta\alpha)^{q^{hb}} = (\theta\beta)^{q^{di}}$$

pour un $i \in \mathbb{Z}$. Séparant les facteurs d'ordre premier à ℓ des facteurs d'ordre une puissance de ℓ, on obtient :

$$\theta^{q^{hb-di}} = \theta \quad \text{et} \quad \beta = \alpha^{q^{hb-di}}.$$

D'après [**18**] Paragraphe 3.4, l'ordre de q modulo l'ordre de θ est égal à mb, et m est premier à l'entier $s = d/b$. Ainsi mb divise $hb - di$, c'est-à-dire que i est solution de l'équation $si \equiv h \bmod m$. Il sera commode de choisir i tel que :

$$h' = \frac{h - si}{m} \in \{1, \dots, s\} \tag{7.6}$$

ce qui détermine i de façon unique. On observe que l'entier h' ainsi défini est premier à s, car h est premier à d. On en déduit le résultat suivant. Soit t le générateur de $\mathrm{End}(\widetilde{\mathrm{P}}^0)$ tel que $\mathsf{t}^{\ell^a} = 1$ provenant du générateur $\varsigma \in \mathsf{S}$ fixé au paragraphe 7.3 (voir (7.4)).

Lemme 7.8. — (1) *Pour tout caractère α de S, on a :*

$$\beta = \alpha^{q^{hb-di}} = \alpha^{q^{mbh'}}.$$

(2) *On a l'égalité* $\mathsf{ata}^{-1} = \mathsf{t}^{q^{mbh'}}$.

Démonstration. — La première assertion résulte de la discussion qui précède. Ensuite, d'après le paragraphe 7.3, l'élément t agit sur le facteur V_α par le scalaire $\alpha(\varsigma)$, tandis que ata^{-1} agit sur V_α comme t agit sur V_β, c'est-à-dire par le scalaire $\beta(\varsigma)$. L'endomorphisme $\mathsf{ata}^{-1} - \mathsf{t}^{q^{mbh'}}$ agissant par 0 sur chaque facteur V_α, il est nul. □

Remarque 7.9. — Ceci ne dépend du choix ni de θ, ni du générateur $\varsigma \in \mathsf{S}$, ni de a.

7.5.

Notons P l'induite compacte de P^0 à N.

Théorème 7.10. — *La* $\overline{\mathbb{F}}_\ell$*-algèbre* End(P) *est engendrée par deux générateurs* t, u *avec les relations :*

$$\mathsf{t}^{\ell^a} = 1, \quad \mathsf{utu}^{-1} = \mathsf{t}^{q^{mbh'}}.$$

Démonstration. — Notons E, E^0 les algèbres d'endomorphismes de P, P^0 respectivement. Par définition de P, on a un morphisme naturel :

$$\mathrm{E}^0 \to \mathrm{E} \tag{7.7}$$

de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-algèbres. Pour tout $h \in \mathrm{N}$ et tout vecteur v dans l'espace de P^0, on note $[h, v]$ l'élément de P de support $\mathrm{N}^0 h$ et prenant la valeur v en h. Ainsi, si $e \in \mathrm{E}^0$, son image dans E est l'endomorphisme $[h, v] \mapsto [h, e(v)]$. On en déduit que (7.7) est injective. Identifions dorénavant E^0 à son image dans E. Notons encore a l'image de (7.5) dans $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell \mathrm{N}}(\mathrm{P}^0, \mathrm{P}^{0\varpi})$ par réduction de $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ à $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ et définissons un endomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-modules u de P par :

$$\mathsf{u}([h, v]) = [\varpi^{-1} h, \mathsf{a}(v)].$$

On vérifie que u commute à l'action de N, c'est-à-dire que $\mathsf{u} \in \mathrm{E}$. Soit maintenant $\mathsf{t} \in \mathrm{E}^0$ comme dans le corollaire 7.7. Calculons utu^{-1}. L'appliquant à la fonction $[h, v]$, on trouve :

$$\begin{aligned} \mathsf{utu}^{-1}([h, v]) &= \mathsf{ut}([\varpi^{-1} h, \mathsf{a}^{-1}(v)]) \\ &= \mathsf{u}([\varpi^{-1} h, \mathsf{ta}^{-1}(v)]) \\ &= [h, \mathsf{ata}^{-1}(v)] \end{aligned}$$

c'est-à-dire que, d'après le lemme 7.8, on a $\mathsf{utu}^{-1} = \mathsf{t}^{q^{mbh'}}$.

Il ne reste plus qu'à vérifier que E est engendré par E^0 et u. Par réciprocité de Frobenius et décomposition de Mackey, on a des isomorphismes de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-espaces vectoriels :

$$\mathrm{E} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{N}^0}(\mathrm{P}^0, \mathrm{P}) \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{N}^0}(\mathrm{P}^0, \mathrm{P}^{0\varpi^i}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathsf{a}^i \mathrm{E}_0.$$

Ceci se traduit de la façon suivante : étant donné un endomorphisme $f \in \mathrm{E}$, les applications :

$$f_i : v \mapsto \mathsf{a}^{-i} f([1, v])(\varpi^i), \quad v \in \mathrm{P}^0, \quad i \in \mathbb{Z},$$

appartiennent à E_0, ne sont non nulles que pour un nombre fini de i (car $f([1, v]) \in \mathrm{ind}_{\mathrm{N}^0}^{\mathrm{N}}(\mathrm{P}^0)$ est à support compact dans N) et f est égal à la somme des $\mathsf{u}^i f_i$. □

Remarque 7.11. — (1) Le théorème 7.10 généralise des résultats de Dat [**8**] : voir la proposition B.1.2(ii.a) dans le cas où $d = 1$, et la proposition B.2.1(iv) dans le cas où $m = s = 1$.

(2) Dans le cas où $m = 1$, $s = n$, par exemple si π est le caractère trivial de $\mathrm{D}^\times$, la remarque 7.5 montre que End(P) est l'algèbre de groupe de $\mathrm{D}^\times/\mathrm{U}_\mathrm{D}^{(\ell)}$, ce dernier étant isomorphe au produit semi-direct de S, la composante ℓ-primaire de $\boldsymbol{k}_\mathrm{D}^\times$, par $\mathbb{Z}$, un entier $i \in \mathbb{Z}$ agissant sur S par l'automorphisme $x \mapsto x^{q^{hi}}$.

7.6.

Prouvons maintenant le théorème 7.1. Rappelons que P est l'induite compacte de P^0 à N.

Lemme 7.12. — *Notons* Π *l'induite compacte de* P *à* G.

(1) *La catégorie* $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \Omega)$ *est équivalente à la catégorie des modules à droite sur* $\mathrm{End}(\Pi)$*.*

(2) *Le morphisme naturel de* $\overline{\mathbb{F}}_\ell$*-algèbres de* End(P) *dans* $\mathrm{End}(\Pi)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — La représentation Π étant un progénérateur de $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \Omega)$ d'après la proposition 7.4, il suit par exemple de [**19**] 4.11 que le foncteur :

$$\mathrm{V} \mapsto \mathrm{Hom}_\mathrm{G}(\Pi, \mathrm{V}) \tag{7.8}$$

est une équivalence de catégories entre $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \Omega)$ et la catégorie $\mathbf{Mod}(\mathrm{End}(\Pi))$ des modules à droite sur $\mathrm{End}(\Pi)$. Ensuite, par adjonction, on a un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-espaces vectoriels :

$$\mathrm{End}(\Pi) \simeq \bigoplus_g \mathrm{Hom}_\mathrm{N}(\mathrm{P}, \mathrm{P}^g) \tag{7.9}$$

où g décrit un système de représentants de doubles classes de G mod N. Soit $g \in \mathrm{G}$ tel que l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathrm{N} \cap \mathrm{N}^g}(\mathrm{P}, \mathrm{P}^g)$ soit non nul. La restriction de P à N^0 étant une somme directe de copies de P^0, on trouve que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{N}^0 \cap \mathrm{N}^{0g}}(\mathrm{P}^0, \mathrm{P}^{0g})$ est non nul, donc que g entrelace ξ^0, c'est-à-dire que $g \in \mathrm{N}$. Par conséquent, (7.9) donne un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-algèbres entre $\mathrm{End}(\Pi)$ et End(P). □

Remarque 7.13. — Dans le cas particulier où π est le caractère trivial de $\mathrm{D}^\times$ (voir les remarques 7.5 et 7.11), le foncteur (7.8) est le foncteur des invariants par $\mathrm{U}_\mathrm{D}^{(\ell)}$, qui est distingué dans $\mathrm{D}^\times$. Par conséquent, si V est une représentation dans le bloc principal de $\mathrm{D}^\times$, c'est-à-dire dont tous les sous-quotients irréductibles sont des caractères non ramifiés, l'espace W de ses vecteurs invariants par $\mathrm{U}_\mathrm{D}^{(\ell)}$ est stable par $\mathrm{D}^\times$, et le quotient $\mathrm{X} = \mathrm{V}/\mathrm{W}$ n'a pas de vecteur $\mathrm{U}_\mathrm{D}^{(\ell)}$-invariant non nul. Il s'ensuit que X est nul, donc que le foncteur (7.8) est le foncteur identité.

Soit maintenant F' un corps localement compact non archimédien dont le corps résiduel soit de cardinal $q' = q^{mb}$, et soit D' une F'-algèbre à division centrale de degré réduit s et d'invariant de Hasse égal à l'entier h' défini par (7.6), qui est premier à s. Soit Π' l'induite compacte à $\mathrm{D}'^\times$ du caractère trivial de $\mathrm{U}_{\mathrm{D}'}^{(\ell)}$ (remarque 7.5) et soit E' l'algèbre de ses endomorphismes. Comme q'^s est égal à q^n, la valuation ℓ-adique de $q'^s - 1$ est a. D'après la remarque 7.11, l'algèbre E' est engendrée par des générateurs t', u' avec les relations :

$$\mathsf{t}'^{\ell^a} = 1, \quad \mathsf{u}'\mathsf{t}'\mathsf{u}'^{-1} = \mathsf{t}'^{q^{mbh'}}.$$

Elle est donc isomorphe à E. D'après la remarque 7.13, les catégories $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{D}'^\times, \Omega')$ et $\mathbf{Mod}(\mathrm{E}')$ sont identiques. Le théorème 7.1 s'ensuit.

Remarque 7.14. — Le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \Omega) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{D}'^\times, \Omega') \arrow[d] \\ \mathbf{Mod}(\mathrm{E}) \arrow[r] & \mathbf{Mod}(\mathrm{E}') \end{tikzcd}$$

résume la situation : les équivalences de catégories verticales sont données par (7.8) et le foncteur identité $\mathrm{V}' \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}'^\times}(\Pi', \mathrm{V}')$, l'équivalence horizontale inférieure est induite par l'isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-algèbres entre E' et E envoyant t' sur t et u' sur u, et l'équivalence horizontale supérieure est définie par le fait que le diagramme est commutatif.

Remarque 7.15. — On observe ici un phénomène qui ne se produit pas dans le cas complexe. Dans le cas complexe en effet, un bloc supercuspidal de $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$ est toujours équivalent au bloc de $\mathrm{F}^\times$ contenant le caractère trivial, c'est-à-dire qu'on peut choisir D' égal à F' (et même F' égal à F) dans le théorème 7.1. Dans le cas ℓ-modulaire en revanche, un bloc de $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{F}^\times)$ contient une seule représentation irréductible, tandis que $\mathbf{rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G}, \mathrm{B}(\pi))$ contient tous les $\pi\nu^j$, $j \in \mathbb{Z}$.

8. Le premier espace d'extension dans le cas supercuspidal

Soit π une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation supercuspidale de $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$. Nous déterminons toutes les représentations irréductibles π' de G telles qu'il existe une extension non scindée de π par π'.

8.1.

Dans ce paragraphe, on cherche les $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations irréductibles de $\mathrm{D}^\times$ ayant une extension non triviale avec le caractère trivial 1. D'après le début du paragraphe 4.2, de telles représentations doivent être des caractères non ramifiés de $\mathrm{D}^\times$ d'ordre divisant n.

Soit donc χ un caractère non ramifié de $\mathrm{D}^\times$ d'ordre divisant n. Si χ est trivial, l'espace d'extension $\mathrm{Ext}_{\mathrm{D}^\times}(1,1)$ est toujours non trivial, car la représentation :

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \alpha(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\alpha(x)$ est l'image dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ de la valuation de la norme réduite de x, est une extension non triviale de 1 par lui-même. Supposons donc χ non trivial. On pose :

$$z = \chi(\varpi_{\mathrm{D}}) \in \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$$

qui vérifie $z^n = 1$ et $z \neq 1$. On cherche à quelle condition l'espace $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{D}^\times}(1, \chi)$ est nul, c'est-à-dire à quelle condition toute extension de 1 par χ est scindée.

Soit M une extension de 1 par χ, et soit (e_1, e_2) une base de M sur $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ telle que $\mathrm{D}^\times$ agisse sur la droite engendrée par e_1 par le caractère χ. On définit une application α de $\mathrm{D}^\times$ dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ par :

$$x \cdot e_2 = e_2 + \alpha(x)e_1, \quad x \in \mathrm{D}^\times.$$

Comme M est une représentation de $\mathrm{D}^\times$, cette application α a la propriété de cocycle :

$$\alpha(xy) = \alpha(x) + \chi(x)\alpha(y), \quad x, y \in \mathrm{D}^\times, \tag{8.1}$$

et l'extension M est scindée si et seulement s'il y a un $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_\ell$ tel que $\mathrm{D}^\times$ agisse sur $e_2 - \lambda e_1$ par le caractère trivial, c'est-à-dire tel que :

$$\alpha(x) = \lambda(\chi(x) - 1), \quad x \in \mathrm{D}^\times. \tag{8.2}$$

Le caractère χ étant non ramifié, (8.1) entraîne que la restriction de α à $\mathcal{O}_\mathrm{D}^\times$ est un morphisme de groupes de $\mathcal{O}_\mathrm{D}^\times$ dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell$.

Lemme 8.1. — *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :*

$$\alpha(\varpi_\mathrm{D}^k) = \alpha(\varpi_\mathrm{D}) \cdot \frac{z^k - 1}{z - 1}.$$

Démonstration. — La formule est vraie pour $k = 0$ et $k = 1$ et, si elle est vraie pour un $k \geqslant 1$, l'identité :

$$\alpha(\varpi_\mathrm{D}^{k+1}) = \alpha(\varpi_\mathrm{D}^k) + z^k \cdot \alpha(\varpi_\mathrm{D})$$

montre qu'elle est vraie pour $k+1$. Elle est donc vraie pour tout $k \geqslant 0$. De façon analogue, on vérifie qu'elle est vraie pour $k \leqslant 0$. □

Remarque 8.2. — On en déduit en particulier que $\alpha(\varpi_\mathrm{D}^n) = \alpha(\varpi_\mathrm{F})$ est nul.

Si α est nulle sur $\mathcal{O}_\mathrm{D}^\times$, l'extension M est scindée : en effet, le lemme 8.1 prouve qu'on a la relation (8.2) avec $\lambda = \alpha(\varpi_\mathrm{D})/(z-1)$.

Supposons maintenant que α ne soit pas nulle sur $\mathcal{O}_\mathrm{D}^\times$. Comme $\ell \neq p$, elle est nulle sur le pro-p-sous-groupe $1 + \mathfrak{p}_\mathrm{D}$; elle induit donc un morphisme non nul de groupes de $\boldsymbol{k}_\mathrm{D}^\times$ dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell$, donc ℓ divise $q^n - 1$. La condition (8.1) entraîne :

$$\begin{aligned} a(\varpi_\mathrm{D} x \varpi_\mathrm{D}^{-1}) &= \alpha(\varpi_\mathrm{D}) + z \cdot (\alpha(x) + \alpha(\varpi_\mathrm{D}^{-1})) \\ &= \alpha(\varpi_\mathrm{D}) + z \cdot \alpha(x) + z \cdot \alpha(\varpi_\mathrm{D}) \cdot (z^{-1} - 1)/(z-1) \\ &= z \cdot \alpha(x) \end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathcal{O}_\mathrm{D}^\times$. Or, si h désigne l'invariant de Hasse de $\mathrm{D}^\times$ (voir la définition 3.8), le conjugué de x par ϖ_D est congru à $x^{q^h} \bmod 1 + \mathfrak{p}_\mathrm{D}$. On en déduit que, pour qu'il existe une extension non scindée de 1 par χ, il faut que ℓ divise $q^n - 1$ et que :

$$z = q^h.$$

Nous allons prouver que la réciproque est vraie.

Lemme 8.3. — *Supposons que ℓ divise q^n-1, et notons χ_h le $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractère non ramifié de* $\mathrm{D}^\times$ *prenant la valeur q^h en une uniformisante. Alors $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{D}^\times}(1,\chi_h)$ est non nul.*

Démonstration. — Si le caractère χ_h est trivial, c'est-à-dire si ℓ divise $q-1$, le résultat découle du fait que $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{D}^\times}(1,1)$ n'est pas trivial, comme nous l'avons vu au début du paragraphe. Supposons maintenant que χ_h ne soit pas trivial. D'après ce qui précède, il suffit de prouver l'existence d'une application α de $\mathrm{D}^\times$ dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ vérifiant (8.1) mais pas (8.2). Nous allons construire une application α vérifiant (8.1) et non nulle sur $\mathcal{O}_\mathrm{D}^\times$: elle ne pourra donc pas vérifier (8.2). Comme ℓ divise q^n-1, il y a un morphisme de groupes non nul de $\mathcal{O}_\mathrm{D}^\times$ dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell$. Fixons-en un, qu'on note β. Tout $x\in\mathrm{D}^\times$ s'écrit de façon unique $u\varpi_\mathrm{D}^k$, où $k\in\mathbb{Z}$ est sa valuation et où $u\in\mathcal{O}_\mathrm{D}^\times$. Posons :

$$\alpha(x)=\beta(u)+\frac{z^k-1}{z-1},\quad \text{avec } z=q^h\neq 1.$$

Nous allons prouver que α vérifie (8.1). Si $y\in\mathrm{D}^\times$, écrivons-le $v\varpi_\mathrm{D}^l$ avec $l\in\mathbb{Z}$ et $v\in\mathcal{O}_\mathrm{D}^\times$. On a :

$$\alpha(xy)=\beta\left(u\varpi_\mathrm{D}^k v\varpi_\mathrm{D}^{-k}\right)+\frac{z^{k+l}-1}{z-1}$$

tandis que :

$$\alpha(x)+\chi(x)\alpha(y) \quad = \quad \beta(u)+\frac{z^k-1}{z-1}+z^k\cdot\left(\beta(v)+\frac{z^l-1}{z-1}\right).$$

Pour que α vérifie l'identité (8.1), il faut et suffit donc que :

$$\beta\left(\varpi_\mathrm{D}v\varpi_\mathrm{D}^{-1}\right)=z\cdot\beta(v)$$

pour tout $v\in\mathcal{O}_\mathrm{D}^\times$, ce qui découle immédiatement de ce que, comme remarqué plus haut, le conjugué de v par ϖ_D est congru à v^{q^h} mod $1+\mathfrak{p}_\mathrm{D}$. □

En résumé, on a le résultat suivant.

Proposition 8.4. — *L'ensemble des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-caractères χ de* $\mathrm{D}^\times$ *tels que $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{D}^\times}(1,\chi)$ soit non nul est :*

(1) *réduit au caractère trivial si ℓ ne divise pas q^n-1,*
(2) *formé du caractère trivial et du caractère non ramifié $\chi_h:\varpi_\mathrm{D}\mapsto q^h$ si ℓ divise q^n-1.*

8.2.

Dans ce paragraphe, nous généralisons la proposition 8.4 au cas d'une représentation supercuspidale quelconque π de $\mathrm{G}=\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$. Nous allons utiliser la description de π par la théorie des types simples donnée au paragraphe 3.9, dont nous utilisons les notations.

Notons $h(\pi)$ l'invariant de Hasse de l'algèbre à division C apparaissant dans (3.10). Si h est l'invariant de Hasse de D et si g est le degré de E sur F (avec les notations du paragraphe 3.9), alors $h(\pi)$ est le reste dans la division euclidienne de $gh/(g,d)$ par $c=d/(g,d)$. C'est un entier premier à c.

Proposition 8.5. — *Soit π une $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentation supercuspidale de* G. *L'ensemble des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations supercuspidales π' de* G *telles que* $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\pi,\pi')$ *soit non nul est :*

(1) *réduit à π si ℓ ne divise pas $q(\pi)-1$,*
(2) *formé de π et de la représentation $\pi\nu^{-h(\pi)}$ si ℓ divise $q(\pi)-1$.*

Démonstration. — Dans le cas où ℓ ne divise pas $q(\pi)-1$, le résultat découle de la proposition 5.9. Supposons désormais que ℓ divise $q(\pi)-1$. Selon la proposition 5.9, on peut supposer que π' est isomorphe à $\pi\nu^j$ pour un entier $j\in\mathbb{Z}$.

Supposons d'abord que le résultat soit vrai pour les représentations supercuspidales de niveau 0 : on va en déduire le résultat dans le cas de niveau non nul en raisonnant comme dans la preuve de la proposition 5.9. Appliquons le foncteur $\mathbf{F}$ introduit au paragraphe 5.3, envoyant π sur la représentation supercuspidale π_0 de niveau 0 de G_0. On trouve que :

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}}(\pi,\pi')\neq\{0\}\quad\Leftrightarrow\quad\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{G}_0}(\mathbf{F}(\pi),\mathbf{F}(\pi'))\neq\{0\}\,.$$

D'après le cas de niveau 0, et comme $q(\pi_0)=q(\pi)$ d'après le lemme 5.3, la représentation $\mathbf{F}(\pi')$ est isomorphe à π_0 ou à $\pi_0\nu_0^{-h(\pi)}$, où ν_0 est le caractère non ramifié "valeur absolue de la norme réduite" de G_0. Par ailleurs, d'après le lemme 5.5, et comme la restriction de ν à G_0 est égale à ν_0, la représentation $\mathbf{F}(\pi\nu^{-h(\pi)})$ est isomorphe à $\pi_0\nu_0^{-h(\pi)}$. Le foncteur $\mathbf{F}$ étant une équivalence de catégories, on trouve le résultat annoncé.

Supposons maintenant que π soit de niveau 0. On a donc $q(\pi)=q^n$ et $h(\pi)=h$. Reprenons les notations du paragraphe 7.6, et notamment celles de la remarque 7.14. On a une équivalence de catégories entre $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{G},\Omega)$ et $\mathbf{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{D}'^{\times},\Omega')$, que l'on note $\mathbf{G}$, et un isomorphisme d'algèbres entre E et E$'$. Nous allons utiliser le même argument que ci-dessus : il suffit pour cela de vérifier que $\mathbf{G}(\pi\nu^j)$ est isomorphe à $\mathbf{G}(\pi)\nu'^j$, où ν' est la caractère "valeur absolue de la norme réduite" de $\mathrm{D}'^{\times}$. Pour cela, nous allons suivre le raisonnement de la preuve du lemme 5.5.

D'abord, par analogie avec le lemme 5.8, on a le résultat suivant : si l'on note M le E-module à droite $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\Pi,\pi)$, alors $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\Pi,\pi\nu^j)$ est le E-module obtenu en tordant M par le caractère de E défini par $\mathsf{t}\mapsto 1$ et $\mathsf{u}\mapsto\nu^j(\varpi)$.

Ensuite, il existe un unique caractère non ramifié μ' de $\mathrm{D}'^{\times}$ tel que $\mathbf{G}(\pi\nu^j)$ soit égal à $\mathbf{G}(\pi)\mu'$. Considéré comme un module sur E$'$, il est obtenu en tordant $\mathbf{G}(\pi)$ par le caractère de E$'$ défini par $\mathsf{t}'\mapsto 1$ et $\mathsf{u}'\mapsto\mu'(\varpi')$, où ϖ' est une uniformisante de D$'$. Ceci entraîne l'égalité :

$$\mu'(\varpi')=\nu^j(\varpi).$$

Or $\nu(\varpi)$ est égal à $q^{-mb}=q'^{-1}$. On en déduit que μ' est égal à ν'^j. □

Références

1. J. Bernstein, *Le centre de Bernstein*, in *Representations of reductive groups over a local field*, Travaux en Cours, 1–32, Hermann, 1984. (Écrit par P. Deligne.)

2. P. Broussous, *Hereditary orders and embeddings of local fields in simple algebras*, J. Algebra **204** (1998), 324–336.
3. C. Bushnell et P. Kutzko, *The admissible dual of* $\mathrm{GL}(N)$ *via compact open subgroups*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
4. W. Casselman, *Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups*, notes non publiées, 1995.
5. G. Chinello, *Hecke algebra with respect to the pro-p-radical of a maximal compact open subgroup for* $\mathrm{GL}_n(F)$ *and its inner forms*, J. Algebra **478** (2017), 296–317.
6. ———, *Blocks of the category of smooth* ℓ*-modular representations of* $\mathrm{GL}_n(F)$ *and its inner forms: reduction to level 0*, Algebra Number Theory **12** (2018), n°7, 1675–1713.
7. J.-F. Dat, ν*-tempered representations of p-adic groups. I. l-adic case*, Duke Math. J. **126** (2005), n°3, 397–469.
8. ———, *Théorie de Lubin-Tate non abélienne* ℓ*-entière*, Duke Math. J. **161** (2012), n°6, 951–1010.
9. ———, *A functoriality principle for blocks of p-adic linear groups*, in *Around Langlands correspondences*, Contemp. Math. **691** (2017), 103–131.
10. ———, *Equivalences of tame blocks for p-adic linear groups*, Math. Ann. **371** (2018), 565–613.
11. ———, *Simple subquotients of big parabolically induced representations of p-adic groups*, J. Algebra **510** (2018), 499–507.
12. O. Dudas, *Non-uniqueness of supercuspidal support for finite reductive groups*, J. Algebra **510** (2018), 508–512.
13. M. Emerton et D. Helm, *The local Langlands correspondence for* GL_n *in families*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **47** (2014), n°4, 655–722.
14. M. Grabitz, *Simple characters for principal orders in* $\mathrm{M}_m(D)$, J. Number Theory **126** (2007), 1–51.
15. M. Grabitz, A. Silberger et E.-W. Zink, *Level zero types and Hecke algebras for local central simple algebras*, J. Number Theory **91** (2001), n°1, 92–125.
16. A. Mínguez et V. Sécherre, *Représentations lisses modulo* ℓ *de* $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$, Duke Math. J. **163** (2014), 795–887.
17. ———, *Types modulo* ℓ *pour les formes intérieures de* GL_n *sur un corps local non archimédien*, avec un appendice par V. Sécherre et S. Stevens, Proc. London Math. Soc. **109** (2014), n°4, p. 823–891.
18. ———, *Correspondance de Jacquet-Langlands locale et congruences modulo* ℓ, Invent. Math. **208** (2017), n°2, 553-631.
19. B. Pareigis, *Categories and functors*, traduit de l'allemand, Pure and Applied Mathematics 39, Academic Press, New York, 1970.
20. V. Sécherre, *Représentations lisses de* $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$*,* I *: caractères simples*, Bull. Soc. math. France **132** (2004), n°3, 327–396.
21. ———, *Représentations lisses de* $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$*,* II *:* β*-extensions*, Compositio Math. **141** (2005), 1531–1550.
22. ———, *Représentations lisses de* $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$*,* III *: types simples*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **38** (2005), 951–977.
23. ———, *Proof of the Tadić conjecture* (U0) *on the unitary dual of* $\mathrm{GL}_m(D)$, J. Reine Angew. Math. **626** (2009), 187–203.
24. V. Sécherre et S. Stevens, *Représentations lisses de* $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$*,* IV *: représentations supercuspidales*, J. Inst. Math. Jussieu **7** (2008), n°3, p. 527–574.
25. ———, *Smooth representations of* $\mathrm{GL}_m(\mathrm{D})$*,* VI*: semisimple types*, Int. Math. Res. Not. **13** (2012), 2994–3039.
26. ———, *Block decomposition of the category of* ℓ*-modular smooth representations of* $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ *and its inner forms*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **49** (2016), n°3, 669–709.

27. J.-P. Serre, *Linear representations of finite groups*, traduit de la seconde édition en français, GTM **42**, Springer-Verlag (1977).
28. M.-F. Vignéras, *Représentations l-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $l \neq p$*, Progress in Mathematics, vol. 137, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.
29. ———, *Cohomology of sheaves on the building and R-representations*, Invent. Math. **127** (1997), n°2, 349–373.
30. ———, *Induced R-representations of p-adic reductive group*, Selecta Math. (N.S.) **4** (1998), n°4, 549–623. With an appendix by Alberto Arabia.
31. ———, *On highest Whittaker models and integral structures*, Contributions to Automorphic forms, Geometry and Number theory: Shalikafest 2002, John Hopkins Univ. Press, 2004, 773–801.

Bastien Drevon, Laboratoire de Mathématiques de Versailles, UVSQ, CNRS, Université Paris-Saclay, 78035 Versailles, France • *E-mail :* `bast139@hotmail.fr`

Vincent Sécherre, Laboratoire de Mathématiques de Versailles, UVSQ, CNRS, Université Paris-Saclay, 78035 Versailles, France, Institut Universitaire de France • *E-mail :* `vincent.secherre@uvsq.fr`