

Licence de mathématique
Université Paris-Saclay

MA202 – Algèbre linéaire

P.-G. Plamondon & N. Perrin

Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines

Année 2020-2021

Table des matières

I. Ensembles et applications	3
1. Ensembles, notations et conventions	4
1.1. Premières définitions et premiers exemples	4
1.2. Constructions en théorie des ensembles	5
1.2.1. Union	6
1.2.2. Intersection	7
1.2.3. Complémentaire	7
1.2.4. Ensemble des parties	8
1.2.5. Produit cartésien	8
2. Applications	10
2.1. Premières définitions et premiers exemples	10
2.2. Applications injectives, surjectives et bijectives	11
2.3. Applications et opérations sur les ensembles	13

Première partie .

Ensembles et applications

1. Ensembles, notations et conventions

1.1. Premières définitions et premiers exemples

La théorie des ensembles est une partie non triviale des mathématiques. Elle est fortement reliée à la logique et forme le socle de base de tout raisonnement mathématique. Nous n'allons pas étudier la théorie des ensembles ni la logique dans ce texte mais nous rappelons quelques notations importantes, quelques axiomes de bases ainsi que quelques résultats utiles dans toutes les mathématiques voire dès que l'on a affaire à un raisonnement logique.

Pour les raisons évoquées ci-dessus, notre définition d'ensemble reste assez vague mais suffisamment "évidente" pour être acceptée par tous.

Définition 1.1.1 Un **ensemble** E est une collection d'objets appelés **éléments**.

Axiome 1.1.2 (Égalité de deux ensembles) Deux ensembles sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes éléments.

Remarque 1.1.3 Cet axiome semble trivial, cependant il est très utile dans la pratique. En effet, pour montrer que deux ensembles M et N sont égaux, on montre une **double inclusion** : tout élément de M est contenu dans N ET tout élément de N est contenu dans M . C'est le moyen le plus simple et le plus sûr pour montrer que deux ensembles sont égaux.

Notation 1.1.4 Nous utiliserons les notations suivantes.

- (i) **les crochets ensemblistes** : $\{ \}$. Par exemple $M = \{0; 1; 2\}$ signifie que M est la collection des objets 0, 1 et 2.
- (ii) **est élément de** : $\in$. Par exemple, on a $1 \in \{0; 1; 2\}$.
- (iii) **n'est pas élément de** : $\notin$. Par exemple $3 \notin \{0; 1; 2\}$.
- (iv) **pour tout** : $\forall$. Par exemple $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $n \geq 0$ se lit *pour tout n entier naturel, on a que n est supérieur ou égal à 0*.
- (v) **il existe** : $\exists$. Par exemple $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 5$ se lit *il existe un entier naturel n tel que n est supérieur ou égal à 5*.

- (vi) **alors** : $\Rightarrow$. Par exemple $n \geq 1 \Rightarrow n \geq 0$ se lit *si n est supérieur ou égal à 1, alors n est supérieur ou égal à 0*.
- (vii) **tel que** : , . . Par exemple $\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 5$ se lit *il existe un entier naturel n tel que n est supérieur ou égal à 5*.

Remarque 1.1.5 En symboles, l'axiome d'égalité des ensembles s'écrit de la manière suivante : on a $M = N$ si et seulement si

$$(x \in M \Rightarrow x \in N) \text{ et } (x \in N \Rightarrow x \in M).$$

Définition 1.1.6 Soit M un ensemble.

- (i) Un **sous-ensemble** N de M est un ensemble tel que tout élément de N est aussi un élément de M . En symboles : $x \in N \Rightarrow x \in M$.
On écrit alors $N \subset M$ ou $N \subseteq M$.
- (ii) Un sous-ensemble **propre** est un sous-ensemble $N \subset M$ de M tel que $N \neq M$.
On écrit alors $N \subsetneq M$.

Exemple 1.1.7 On a les inclusions suivantes :

- (i) $\{0; 1; 2\} \subseteq \{0; 1; 2\}$
(ii) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.
(iii) $\{1; 2\} \subsetneq \{0; 1; 2\}$.

Remarque 1.1.8 En symboles l'affirmation $N \subsetneq M$ s'écrit

$$(\forall x \in N, x \in M) \text{ et } (\exists x \in M, x \notin N).$$

Remarque 1.1.9 Attention, un ensemble “ne distingue pas les d'éléments égaux”. Ainsi, on a $\{0; 1; 2\} = \{2; 0; 1\} = \{0; 0; 1; 2; 2; 2\}$.

1.2. Constructions en théorie des ensembles

Axiome 1.2.1 Soit P une propriété et M un ensemble, alors il existe un sous-ensemble $N \subset M$ de M formé de tous les éléments de M qui vérifient la propriété P .

Notation 1.2.2 On peut définir un nouveau symbole : **qui vérifie la propriété** ou encore **tel que** : $|$. Par exemple $\{0; 1; 2\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 2\}$ se lit : *l'ensemble contenant les éléments 0, 1 et 2 est égal à l'ensemble des entiers naturels n tels que n est inférieur ou égal à 2*.

Nous pouvons maintenant montrer notre premier théorème...

Proposition 1.2.3 S'il existe un ensemble, alors il existe un **ensemble vide** : un ensemble ne contenant aucun élément. On le note $\emptyset$.

Preuve. Soit M un ensemble. Par hypothèse, nous savons qu'il en existe au moins un. Considérons alors, grâce à l'axiome 1.2.1, le sous-ensemble $N \subset M$ de M suivant : $N = \{x \in M \mid x \neq x\}$. L'ensemble N ne peut contenir aucun élément, il est donc vide et on a $N = \emptyset$. ■

Remarque 1.2.4 L'ensemble vide est contenu dans tout ensemble : pour tout ensemble M , on a $\emptyset \subset M$.

On pourrait penser que les assertions précédentes et la théorie des ensembles en général sont inutiles car évidentes. Il faut cependant se méfier des évidences. Par exemple, on a le résultat suivant.

Proposition 1.2.5 Il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles.

Preuve. Si un tel ensemble existe, appelons le M , alors par l'axiome 1.2.1, on peut considérer le sous-ensemble $N = \{x \in M \mid x \notin x\}$. C'est un ensemble et donc un élément de M . On peut donc se demander si N est dans lui-même. S'il l'était, c'est-à-dire si $N \in N$, cela voudrait dire que l'affirmation $N \notin N$ est fausse mais par définition de N on obtient que N n'est pas dans N donc $N \notin N$, une contradiction. Si par contre il n'y est pas, ou encore si $N \notin N$, alors N vérifie la condition pour être dans N donc $N \in N$, encore une contradiction... Nous venons de montrer par l'absurde que l'ensemble des ensembles n'existe pas. ■

1.2.1. Union

Axiome 1.2.6 (Axiome d'union)

- (i) Soient M et N deux ensembles, alors il existe un ensemble, noté $M \cup N$, qui contient exactement tous les éléments de M et N . Cet ensemble est appelé **union** de M et N . On a

$$M \cup N = \{x \mid x \in M \text{ ou } x \in N\}.$$

- (ii) Plus généralement, si I est un ensemble (dit ensemble d'indices) et si $(M_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles indexés par I , alors il existe un ensemble

$$\bigcup_{i \in I} M_i,$$

l'**union des ensembles** $(M_i)_{i \in I}$ qui contient exactement les éléments de M_i pour tout $i \in I$. En symboles :

$$\bigcup_{i \in I} M_i = \{x \mid \text{il existe } i \in I \text{ tel que } x \in M_i\}.$$

A partir de l'axiome d'union et le l'axiome 1.2.1, on peut fabriquer de nouveaux ensembles.

1.2.2. Intersection

Proposition 1.2.7 (Intersection)

1. Soient M et N deux ensembles, il existe alors un ensemble, noté $M \cap N$ et appelé **intersection** de M et N qui contient exactement les éléments qui sont dans M et dans N . En symboles :

$$M \cap N = \{x \in M \cup N \mid x \in M \text{ et } x \in N\}.$$

2. Plus généralement, si I est un ensemble d'indices et si $(M_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles, alors il existe un ensemble, noté

$$\bigcap_{i \in I} M_i$$

et appelé **intersection** des $(M_i)_{i \in I}$, qui contient exactement les éléments qui sont dans chacun des M_i pour tout $i \in I$. En symboles :

$$\bigcap_{i \in I} M_i = \left\{ x \in \bigcup_{i \in I} M_i \mid \text{pour tout } i \in I \text{ on a } x \in M_i \right\}.$$

Proposition 1.2.8 Soient M , N et O trois ensembles. On a alors

- (i) $M \cup M = M$ et $M \cap M = M$.
- (ii) $M \cup N = N \cup M$ et $M \cap N = N \cap M$.
- (iii) $M \cup (N \cup O) = (M \cup N) \cup O$ et $M \cap (N \cap O) = (M \cap N) \cap O$

Preuve. Voir feuille d'exercices. ■

Proposition 1.2.9 Soient M , N et O trois ensembles. On a alors

- (i) $M \cap (N \cup O) = (M \cap N) \cup (M \cap O)$.
- (ii) $M \cup (N \cap O) = (M \cup N) \cap (M \cup O)$.

Preuve. Voir feuille d'exercices. ■

1.2.3. Complémentaire

Définition 1.2.10 Soient M et N deux ensembles. Le **complémentaire** de N dans M , noté $M \setminus N$, est l'ensemble des éléments de M qui ne sont pas dans N . En symboles :

$$M \setminus N = \{x \in M \mid x \notin N\}.$$

Remarque 1.2.11 Il n'est pas nécessaire que N soit contenu dans M pour que le complémentaire soit bien défini. Par exemple, si $M = \mathbb{Z}$ et $N = \mathbb{R}_{<0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$, alors $M \setminus N = \mathbb{N}$.

Proposition 1.2.12 Soient M , N et O trois ensembles. On a alors

- (i) $M \setminus (N \cup O) = (M \setminus N) \cap (M \setminus O)$.
- (ii) $M \setminus (N \cap O) = (M \setminus N) \cup (M \setminus O)$.

Preuve. Voir feuille d'exercices. ■

1.2.4. Ensemble des parties

Axiome 1.2.13 Soit M un ensemble, alors il existe un ensemble, noté $\mathcal{P}(M)$ et appelé **ensemble des parties** de M , dont les éléments sont exactement tous les sous-ensembles de M .

Exemple 1.2.14 Voici quelques exemples d'ensembles des parties.

- (i) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
- (ii) $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset; \{\emptyset\}\}$.
- (iii) $\mathcal{P}(\{0; 1; 2\}) = \{\emptyset; \{0\}; \{1\}; \{2\}; \{0; 1\}; \{0; 2\}; \{1; 2\}; \{0; 1; 2\}\}$.

Remarque 1.2.15 On peut remarquer que le nombre d'éléments de l'ensemble des parties d'un ensemble fini est toujours une puissance de 2 (ci-dessus $1 = 2^0$, $2 = 2^1$ et $8 = 2^3$). Ceci n'est pas un hasard.

1.2.5. Produit cartésien

Définition 1.2.16 Soient M et N deux ensembles.

- (i) Une **paire ordonnée** d'éléments de M et N est la donnée d'un premier élément $x \in M$ de M et d'un second élément $y \in N$ de N . On note alors la paire par (x, y) .
- (ii) L'ensemble de toutes les paires ordonnées d'éléments de M et N est appelé **produit cartésien** de M et N et est noté $M \times N$. En symboles :

$$M \times N = \{(x, y) \mid x \in M, y \in N\}.$$

Remarque 1.2.17 On a $(x, y) = (y, x)$ si et seulement si $x = y$.

Exemple 1.2.18 Soit $M = \{0; 1; 2\}$ et $N = \{A, B\}$ alors on a

$$M \times N = \{(0, A); (0, B); (1, A); (1, B); (2, A); (2, B)\}.$$

Exemple 1.2.19 Voici un exemple que nous allons utiliser très souvent : un n -uplet de réels (c'est-à-dire une liste ordonnée de n réels) est un élément de $\mathbb{R}^n$. On le note $a = (a_i)_{i \in [1, n]}$ et on utilise les notations en ligne ou en colonne suivantes :

$$a = (a_1, \dots, a_n) \text{ ou } a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} .$$

2. Applications

2.1. Premières définitions et premiers exemples

Définition 2.1.1 Soient M et N deux ensembles. Une **application** f de M dans N est une relation entre M et N qui à chaque élément $x \in M$ de l'**ensemble de départ** M associe un unique élément, noté $f(x)$ de l'**ensemble d'arrivée** N . On dit aussi que f va de M dans N . En symboles, on écrit :

$$\begin{array}{ccc} f : & M & \rightarrow & N \\ & x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

Exemple 2.1.2

- (i) Soit M un ensemble, il existe toujours l'**application identité** de M , notée Id_M , qui va de M dans M telle que $\text{Id}_M(x) = x$ pour tout $x \in M$. En symboles : $\text{Id}_M : M \rightarrow M, x \mapsto x$.
- (ii) La fonction “carré” est une application : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.

Définition 2.1.3 Soient $f : M \rightarrow N$ et $g : N \rightarrow O$ deux applications. L'application **composée** de f et g est l'application, notée $g \circ f : M \rightarrow O$, définie par $x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Définition 2.1.4 Soit $f : M \rightarrow N$ une application et soient $X \subset M$ et $Y \subset N$ des sous-ensembles de M et N . L'**image** de X par f est le sous-ensemble noté $f(X)$ de N défini par

$$f(X) = \{y \in N \mid \exists x \in X \text{ tel que } y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

L'**image inverse** ou l'**image réciproque** de Y par f est le sous-ensemble noté $f^{-1}(Y)$ de M défini par

$$f^{-1}(Y) = \{x \in M \mid f(x) \in Y\}.$$

Lorsque $Y = \{y\}$ ne contient qu'un élément, on écrira $f^{-1}(y)$ à la place de $f^{-1}(\{y\})$.

Exemple 2.1.5 Soit $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ l'application définie par $x \mapsto x^2$. Alors, on a $f(\{-1; 1\}) = \{1\}$ et $f^{-1}(1) = \{-1; 1\}$.

2.2. Applications injectives, surjectives et bijectives

Définition 2.2.1 Soit $f : M \rightarrow N$ une application.

- (i) L'application f est dite **injective** si, pour tout $x \in M$ et tout $x' \in M$, on a l'implication $(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$.
- (ii) L'application f est dite **surjective** si $f(M) = N$.
- (iii) L'application f est dite **bijective** si f est injective et surjective.

Remarque 2.2.2 Deux versions équivalentes :

- (i) Par contraposée, une application $f : M \rightarrow N$ est injective si et seulement si pour tout $x \in M$ et tout $x' \in M$, l'implication suivante est vérifiée : $(x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$.
- (ii) On a toujours $f(M) \subset N$ donc f est surjective si et seulement si $N \subset f(M)$ ou encore si et seulement si, pour tout $y \in N$, il existe $x \in M$ tel que $f(x) = y$.

Exemple 2.2.3 Les preuves des exemples suivants sont laissées en exercice.

- (i) L'application identité $\text{Id}_M : M \rightarrow M$ est toujours bijective.
- (ii) L'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = n$ est injective mais non surjective.
- (iii) L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$ n'est ni injective ni surjective.
- (iv) L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ définie par $f(x) = \sin(x)$ n'est pas injective mais est surjective.
- (v) L'application $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$ est injective mais n'est pas surjective.
- (vi) L'application $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ définie par $f(x) = \sin(x)$ est bijective.

Remarque 2.2.4 L'exemple précédent (les quatre dernières applications) montrent qu'ensembles de départ et ensembles d'arrivée sont très importants pour les notions d'applications injectives, surjectives et bijectives.

Proposition 2.2.5 Soit $f : M \rightarrow N$ une application. L'application f est bijective si et seulement s'il existe une application $g : N \rightarrow M$ telle que $g \circ f = \text{Id}_M$ et $f \circ g = \text{Id}_N$.

Lorsque f est bijective, l'application g ci-dessus est unique.

Preuve. Si f est bijective, alors elle est surjective et pour tout $y \in N$, il existe un élément $x \in M$ tel que $f(x) = y$. Cet élément $x \in M$ est unique car si $x' \in M$ est tel que $f(x') = y$, alors $f(x) = f(x')$ et comme f est injective, on a $x = x'$. À chaque $y \in N$, on peut donc associer de manière unique un élément $x = g(y)$ de M . Ceci définit une application $g : N \rightarrow M$ et on a $f(g(y)) = f(x) = y$ et $g(f(x)) = g(y) = x$.

L'application g ainsi définie est unique. En effet, si $h : N \rightarrow M$ est une autre application telle que $h \circ f = \text{Id}_M$ et $f \circ h = \text{Id}_N$, alors on a pour tout $y \in M$ les

égalités suivantes : $f(g(y)) = y = f(h(y))$ et comme f est injective, on a $g(y) = h(y)$ pour tout $y \in N$. Les applications g et h sont donc les mêmes : $h = g$.

Réciproquement, s'il existe une application $g : N \rightarrow M$ telle que $g \circ f = \text{Id}_M$ et $f \circ g = \text{Id}_N$. Si $x, x' \in M$ sont tels que $f(x) = f(x')$, alors on a $x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'$ donc $x = x'$ et f est injective. Si $y \in N$, alors on a $y = f(g(y))$ et en posant $x = g(y) \in M$, on a bien $y = f(x) \in f(M)$ et f est surjective. ■

Définition 2.2.6 Soit $f : M \rightarrow N$ une application bijective, l'unique application $g : N \rightarrow M$ telle que $g \circ f = \text{Id}_M$ et $f \circ g = \text{Id}_N$ est appelée **application réciproque** ou parfois **inverse** et est notée $f^{-1} : N \rightarrow M$.

Remarque 2.2.7 Attention, ne pas confondre. La notation f^{-1} pour l'application réciproque (et l'appellation inverse encore plus) est trompeuse. Il ne faut pas confondre cette notation avec les deux suivantes :

- (i) L'image inverse d'un sous-ensemble $Y \subset N$ notée $f^{-1}(Y)$. Différence : l'application réciproque f^{-1} n'existe que si f est bijective. L'image inverse existe toujours même si f n'est pas bijective.
- (ii) L'inverse $x^{-1} = \frac{1}{x}$ d'un réel par exemple. Ainsi l'application cotangente notée $\cotan : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$x \mapsto \frac{1}{\tan(x)} = \tan^{-1}(x) \text{ (notation à éviter!)}$$

alors que l'application réciproque de l'application tangente (rappelons que $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ est bijective) est l'application arctan : $\mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ qui pourrait aussi se noter $\tan^{-1}$. Pour éviter les confusions, on essaiera de ne jamais utiliser la notation $\tan^{-1}$ et de lui préférer $\cotan$ et $\arctan$ pour ne pas les confondre.

Proposition 2.2.8 Soient $f : M \rightarrow N$ et $g : N \rightarrow O$ deux applications. On a alors,

- (i) si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- (ii) si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- (iii) si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Preuve. 1. Soient $x, y \in M$, tels que $g \circ f(x) = g \circ f(y)$, alors on a $g(f(x)) = g(f(y))$ et comme g est injective, on obtient $f(x) = f(y)$. Comme f est injective, on en déduit l'égalité $x = y$. On a montré que $g \circ f$ est injective.

2. Soit $z \in O$. Comme g est surjective, il existe $y \in N$ tel que $g(y) = z$. Comme f est surjective, il existe $x \in M$ tel que $f(x) = y$. On a alors les égalités $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$, donc $g \circ f$ est surjective.

3. Découle de 1. et 2. et de la définition de bijective. ■

Proposition 2.2.9 Soit $f : M \rightarrow N$ une application avec M et N non vides.

- (i) L'application f est injective si et seulement s'il existe une application $g : N \rightarrow M$ telle que $g \circ f = \text{Id}_M$.
- (ii) L'application f est surjective si et seulement s'il existe une application $h : N \rightarrow M$ telle que $f \circ h = \text{Id}_N$.
- (iii) Si f est bijective, alors les applications g et h ci-dessus sont toutes les deux égales à l'application réciproque f^{-1} .

Preuve. Voir feuille d'exercices. ■

Définition 2.2.10 Soit $f : M \rightarrow N$ une application, le **graphe** de f est le sous-ensemble, noté $\Gamma(f) \subset M \times N$ de $M \times N$ défini par

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in M \times N \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in M\}.$$

Définition 2.2.11 Soient M et N deux ensembles, l'**ensemble des applications** de M vers N est noté N^M .

2.3. Applications et opérations sur les ensembles

Proposition 2.3.1 Soient $f : M \rightarrow N$ une application, $M_1, M_2 \subset M$ des sous-ensembles de M et $N_1, N_2 \subset N$ des sous-ensembles de N .

- (i) On a $(M_1 \subset M_2 \Rightarrow f(M_1) \subset f(M_2))$ et $(N_1 \subset N_2 \Rightarrow f^{-1}(N_1) \subset f^{-1}(N_2))$.
- (ii) On a $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$ et $f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$.
- (iii) On a $f(M_1 \cap M_2) \subset f(M_1) \cap f(M_2)$ et $f^{-1}(N_1 \cap N_2) = f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)$.
- (iv) On a $f(M_1) \setminus f(M_2) \subset f(M_1 \setminus M_2)$ et $f^{-1}(N_1 \setminus N_2) = f^{-1}(N_1) \setminus f^{-1}(N_2)$.

Preuve. Voir feuille d'exercices. ■

Index

- application, [10](#)
 - application identité, [10](#)
 - application réciproque, [12](#)
 - bijective, [11](#)
 - composée, [10](#)
 - ensemble d'arrivée, [10](#)
 - ensemble de départ, [10](#)
 - ensemble des applications, [13](#)
 - graphe, [13](#)
 - image, [10](#)
 - image inverse, [10](#)
 - image réciproque, [10](#)
 - injective, [11](#)
 - inverse, [12](#)
 - surjective, [11](#)
- double inclusion, [4](#)
- ensemble, [4](#)
 - élément, [4](#)
 - complémentaire, [7](#)
 - ensemble des parties, [8](#)
 - ensemble vide, [6](#)
 - intersection, [7](#)
 - paire ordonnée, [8](#)
 - produit cartésien, [8](#)
 - sous-ensemble, [5](#)
 - sous-ensemble propre, [5](#)
 - union, [6](#)