Un théorème d'Ax-Lindemann-Weierstrass

Guy Casale
(+ J. Freitag, J. Nagloo)

IRMAR, Université de Rennes 1

Théorème (Lindemann-Weierstrass (1885))

Soit $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}^n$.

Si $\mathrm{deg.tr.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}) < n$ *alors* $\exists q \in \mathbb{N}^n$ *tel que* $\prod (e^{\alpha_i})^{q_i} = 1$.

Conjecture (Schanuel (1960))

Soit $z \in \mathbb{C}^n$.

Si $\mathrm{deg.tr.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(z_1, \ldots z_n, e^{z_1}, \ldots, e^{z_n}) < n$ *alors* $\exists q \in \mathbb{N}^n$ *tel que* $\prod (e^{z_i})^{q_i} = 1$.

Théorème (Ax-Schanuel (1971))

Soit $t \in (\mathbb{C}[[s]] \setminus \mathbb{C})^n$.
Si $\operatorname{tr.deg.}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(t_1, \dots, t_n, e^{t_1}, \dots, e^{t_n}) < n+1$ *alors* $\exists q \in \mathbb{N}^n$ *tel que* $\prod \left(e^{t_i}\right)^{q_i} \in \mathbb{C}$.

- Ax – groupes algébriques
- Bertrand-Pillay – théorie de Galois différentielle
- Tsimerman – structures o-minimales
- ...

Ax-Lindemann-Weierstrass for j

Soient $j : \mathbb{H} \to \mathbb{CP}^1$ "le" quotient par $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ et V une variété algébrique sur $\mathbb{C}$.

Théorème (Pila-Tsimerman (2016))

Soit $t \in (\mathbb{C}(V) \setminus \mathbb{C})^n$.

Si $\quad \mathrm{tr.deg.}_{\mathbb{C}(V)}\mathbb{C}(V)\left(j(t_1)\dots j(t_n), j'(t_1)\dots j'(t_n), j''(t_1)\dots j''(t_n)\right) < 3n$

alors $\quad \exists\, \ell < k$ *et* $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Q})$ *tels que* $\quad t_\ell = \gamma t_k$

(et $P \in \mathbb{C}[Y_\ell, Y_k]$ *tel que* $P(j(t_\ell), j(t_k)) = 0$.*)*

La fonction j est une solution de

$$\left(\frac{y''}{y'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{y^2 - 1968y + 2654208}{y^2(y-1728)^2}y'^2 = 0.$$

- Ullmo -Yafaev-Klingler – variétés de Shimura, sans les dérivées
- Mok-Pila-Tsimerman – Ax-Schanuel pour variétés de Shimura

La dérivée schwarzienne

- $S_t y = \left(\frac{y''}{y'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2$ où ' $= \frac{d}{dt}$; $S_t(f(g)) = S_g(f) \circ g(g')^2 + S_t(g)$

- $\mathrm{Schw}(R) : S_y(t) = R(y)$; $R \in \mathbb{C}(y)$
  τ_1 et τ_2 sont solutions ssi $\exists \gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ telle que $\tau_1 = \gamma\tau_2$

- $\mathrm{Gal}(\mathrm{Schw}(R)) \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ est le stab. de l'annulateur $I \subset \mathbb{C}[y, t, \frac{dt}{dy}, \frac{d^2t}{dy^2}, \ldots]$ d'une solution τ.

- $\mathrm{Gal}(\mathrm{Schw}(R)) \neq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ ssi $\exists u \in \overline{\mathbb{C}(y)}^{alg}$ telle que $\frac{du}{dy} - \frac{1}{2}u^2 = R(y)$.

- $\tau(y)$ est solution de $S_y(t) = R(y)$ ssi sa réciproque $j(t)$ est solution de

$$\mathrm{Unif}(R) \quad : \quad S_t(y) + R(y)y'^2 = 0$$

Pour $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ groupe fuchsien de $1^{\text{ère}}$ espèce ($\mathbb{H}/\Gamma$ est une courbe algébrique), le quotient $j : \mathbb{H} \to Y$ est solution de

$$\mathrm{Unif}(R_j) \quad : \quad S_t(y) + R_j(y)y'^2 = 0$$

Théorème

Soient Γ un groupe fuchsien d'uniformisante $j : \mathbb{H} \to Y$ et $t \in (\mathbb{C}(V) \setminus \mathbb{C})^n$.

Si $\quad \mathrm{deg.tr.}_{\mathbb{C}(V)}\mathbb{C}(V)\left(j(t_1)\ldots j(t_n), j'(t_1)\ldots j'(t_n), j''(t_1)\ldots j''(t_n)\right) < 3n$

alors $\quad \exists\, \ell < k$ *et* $P \in \mathbb{C}[Y_\ell, Y_k]$ *tels que* $\quad P(j(t_\ell), j(t_k)) = 0$

(et $\gamma \in \mathrm{Comm}(\Gamma)$ tels que $t_\ell = \gamma t_k$)

- $\overline{\Gamma}^z \subset \mathrm{Gal}(\mathrm{Schw}(R_j)) \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$
- $\mathrm{Comm}(\Gamma) = \{\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \mid [\Gamma : \gamma\Gamma\gamma^{-1} \cap \Gamma] < \infty\}$
- $\gamma \in \mathrm{Comm}(\Gamma)$ si et seulement si $j \circ \gamma \in \overline{\mathbb{C}(j)}^{alg}$

Forte minimalité de $\mathrm{Unif}(R)$

Une équa diff. $y^{(n)} = E(t, y, y' \ldots y^{(n-1)})$ avec $E \in \mathbb{C}[t, y \ldots y^{(n-1)}]$ sera notée E.

Définition

Une équation différentielle E est fortement minimale si

$$\forall\ \mathbb{C}(t) \subset K \subset \mathcal{U} \text{ et } \forall f \in Sol(E, \mathcal{U}), \quad \mathrm{deg.tr.}_K K\langle f \rangle = 0 \text{ ou } n.$$

Théorème

Si $\mathrm{Gal}(\mathrm{Schw}(R)) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ *alors* $\mathrm{Unif}(R)$ *est fortement minimale.*

preuve

Soient $\mathbb{C}(t) \subset K$ et $f \in Sol(E, \mathcal{U})$. On note $I \subset L = K[y, y', y'']$ l'annulateur de f.

$\mathfrak{psl}_2(\mathbb{C})$ agit sur K par $\frac{d}{dt}$, $t\frac{d}{dt}$ et $\frac{t^2}{2}\frac{d}{dt}$ et se prolonge sur $K[y, y', y'']$ par

- $X = \frac{\partial}{\partial t}$
- $H = t\frac{\partial}{\partial t} - y'\frac{\partial}{\partial y'} - 2y''\frac{\partial}{\partial y''}$
- $Y = \frac{t^2}{2}\frac{\partial}{\partial t} - ty'\frac{\partial}{\partial y'} - (2ty'' + y')\frac{\partial}{\partial y''}$

et préserve

- $D = \frac{\partial}{\partial t} + y'\frac{\partial}{\partial y} + y''\frac{\partial}{\partial y'} + \left(\frac{3}{2}\frac{y''^2}{y'} - (y')^3 R(y)\right)\frac{\partial}{\partial y''}$

La stabilisateur de I est une sous algèbre de Lie.
Si elle est propre, elle est conjuguée à une sous algèbre de $\mathbb{C}X + \mathbb{C}H$.

Le noyau de l'action de X, H sur L/I est la cloture algébrique de $\mathbb{C}[y]$ dans L/I et contient $\frac{y''}{y'^2}$. En notant $u(y)$ cette fonction, nous obtenons une solution de l'équation de Riccati $\frac{du}{dy} - \frac{1}{2}u^2 + R(y) = 0$.

Trivialité géométrique de $\mathrm{Unif}(R)$

Une application du théorème de trichotomie

Proposition

Une équa.diff. E, autonome, fortement minimale, $\mathrm{ord}(E) > 1$, est géométriquement triviale :
Si $y_1, \ldots, y_n \in Sol(E,\mathcal{U})$ telles que $\mathrm{deg.tr.}_K K\langle y_1, \ldots y_n\rangle < n\,\mathrm{ord}(E)$
alors il existe $\ell \neq k$ tels que $y_\ell \in \overline{K\langle y_k\rangle}^{alg}$.

En utilisant l'action de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$:

Théorème

Soient R tel que $\mathrm{Gal}(\mathrm{Schw}(R)) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ et $y_1, \ldots, y_n \in Sol(\mathrm{Unif}(R),\mathcal{U})$
telles que $\mathrm{deg.tr.}_K K\langle y_1, \ldots y_n\rangle < 3n$ *alors il existe $\ell \neq k$ tels que $y_\ell \in \overline{\mathbb{C}(y_k)}^{alg}$.*

Les fibres

…sont les équations avec second membre. Pour $a \in K$,

$$\mathrm{Fib}(a) \quad : \quad S_t(y) + R(y)y'^2 = a$$

Elles ont les mêmes propriétés que $\mathrm{Unif}(R)$: forte minimalité, trivialité géométrique

…en faisant le changement de variable $s = A(t)$ avec $S_t A = a$.

Lemme

Si R provient d'un groupe fuchsien, $\quad y_1 \in Sol(\mathrm{Fib}(a), \mathcal{U})$, $\quad y_2 \in Sol(\mathrm{Fib}(b), \mathcal{U})$ *non algébriques sur K telles que* $\quad y_2 \in \overline{K\langle y_1\rangle}^{alg}$ $\quad$ *alors* $\quad a = b$.

Le preuve de ALW

Considérons sur V un champ de vecteurs δ tel que $\delta t_i \neq 0$.

- $j'(t_i)\delta t_i = \delta(j(t_i))$,
- $S_\delta(j(t_i)) + R(j(t_i))(\delta(j(t_i)))^2 = S_\delta t_i$

Si

$$\mathrm{deg.tr.}_{\mathbb{C}(V)}\mathbb{C}(V)\langle j(t_1)\dots j(t_n)\rangle_\delta < 3n$$

il existe K et $k < \ell$ tels que

$$\mathrm{deg.tr.}_K K\langle j(t_k), j(t_\ell)\rangle < 6$$

La forte minimalité implique de $j(t_k) \in \overline{K\langle j(t_\ell)\rangle_\delta}^{alg}$, ainsi $S_\delta t_\ell = S_\delta t_k$
Quitte à changer de "variable", $j(t_k)$ et $j(t_\ell)$ sont solutions de $\mathrm{Unif}(R)$

et $j(t_k) \in \overline{\mathbb{C}(j(t_\ell))}^{alg}$