

Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines

Master 2 — Courbes Algébriques

Devoir maison 2020-2021

À faire en 3 heures

Dans ce texte, $\mathbf{k}$ est un corps algébriquement clos et $n, m \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 1

Soient $V \subset \mathbb{A}^n$ et $W \subset \mathbb{A}^m$ deux ensembles algébriques affines et soit $\varphi : V \rightarrow W$ une application régulière. On rappelle qu'il existe un morphisme de $\mathbf{k}$ -algèbre associé à φ , noté $\Gamma(\varphi) = \varphi^* : \mathbf{k}[W] \rightarrow \mathbf{k}[V]$ défini par $f \mapsto f \circ \varphi$. On rappelle également que pour $E \subset \mathbb{A}^m$ un ensemble quelconque, on note $\overline{E} = V(I(E))$ son adhérence pour la topologie de Zariski.

1. L'image $\varphi(V) = \{\varphi(x) \in W \mid x \in V\}$ est-il toujours un ensemble algébrique ?
2. On suppose que φ est injectif. Le morphisme $\Gamma(\varphi)$ est-il toujours surjectif ?
3. On suppose que φ est surjectif. Le morphisme $\Gamma(\varphi)$ est-il toujours injectif ?
4. Montrer que $\Gamma(\varphi)$ est injective si et seulement si $\overline{\varphi(V)} = W$.

EXERCICE 2

On rappelle qu'une courbe algébrique affine est un ensemble algébrique affine de dimension 1 irréductible. On rappelle aussi que les sous-ensembles algébriques affines stricts d'une courbe sont finis.

1. Soit $P \in \mathbf{k}[X, Y]$ non constant. Montrer que toutes les composantes irréductibles de $V(P)$ sont de dimension 1.
2. Soit $C \subset \mathbb{A}^2$ une courbe qu'on écrit sous la forme $C = V(P_1, \dots, P_r)$ avec $P_1, \dots, P_r \in \mathbf{k}[X, Y]$ non constants. Montrer que l'on peut supposer que chacun des polynômes P_i est irréductible. Montrer qu'il existe $P \in \mathbf{k}[X, Y]$ irréductible tel que $C = V(P)$.
3. Montrer que l'application $P \mapsto V(P)$ est une bijection entre polynômes irréductibles unitaires de $\mathbf{k}[X, Y]$ et courbes de $\mathbb{A}^2$.

EXERCICE 3

Soit $M_n(\mathbf{k})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n et soient $\mathrm{SL}_n(\mathbf{k}) = \{A \in M_n(\mathbf{k}) \mid \det(A) = 1\}$, $\mathrm{O}_n(\mathbf{k}) = \{A \in M_n(\mathbf{k}) \mid A^t A = I_n\}$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbf{k}) = \mathrm{SL}_n(\mathbf{k}) \cap \mathrm{O}_n(\mathbf{k})$, où A^t est la matrice transposée de A et I_n est la matrice identité de taille n .

1. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{k})$, $\mathrm{O}_n(\mathbf{k})$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbf{k})$ sont des sous-ensembles algébriques de $\mathbb{A}^{n^2}$.
2. Montrer que $\mathrm{SO}_2(\mathbf{k})$ est isomorphe à la courbe $V(X^2 + Y^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2$.
3. Donner les composantes irréductibles de $\mathrm{O}_2(\mathbf{k})$.
4. Donner la dimension de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{k})$ et montrer que c'est un ensemble irréductible et lisse.

Définition. Soient V et W deux ensembles algébriques projectifs.

1. On appelle **morphisme** de V dans W toute application $\varphi : V \rightarrow W$ qui est régulière en tout point de V .

2. Un morphisme $\varphi : V \rightarrow W$ est appelé **isomorphisme** s'il existe un morphisme $\psi : W \rightarrow V$ tel que $\varphi \circ \psi = \text{Id}_W$ et $\psi \circ \varphi = \text{Id}_V$.

EXERCICE 4

Dans cet exercice $\mathbf{k}$ est un corps de caractéristique différente de 2. Soit $V = \mathbb{P}^1$ et $W = V_{\mathbb{P}}(X^2 + Y^2 - Z^2)$. On considère l'application $\varphi : V \rightarrow W$ définie par $\varphi([u : v]) = [u^2 - v^2 : 2uv : u^2 + v^2]$.

1. Montrer que φ est un morphisme bijectif.
2. Décrire l'application réciproque ψ de φ . Est-ce un isomorphisme ?