Groupes et géométrie, Test 2

N. Perrin (barème indicatif et susceptible de changer : 2 points par question)

Exercice 1 Soit G un groupe fini et X un ensemble fini sur lequel le groupe G agit.

(i) On suppose que $|G| = 15$ et $|X| = 17$ et que G agit sur X sans point fixe. Donner le nombre d'orbites pour cette action et le cardinal de chaque orbite.

(ii) On suppose que $|G| = 143$ et $|X| = 108$, le groupe G peut-il agir sans point fixe sur X ?

Exercice 2 Soit G et $H \lhd G$ un sous-groupe distingué. Soit p-un facteur premier de H et S un p-sous-groupe de Sylow de H tel que $S \lhd H$. Montrer que $S \lhd G$.

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel de dimension n et $G = \mathrm{GL}(E)$. Soit X l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E. On admet (c'est très facile) que pour $g \in G$ et $V \in X$, l'application $(g, V) \mapsto g(V)$ définit une action de G sur X.

(i) Déterminer l'orbite et le stabilisateur de $V_0 = \{0\} \in X$.

(ii) Soit $e \in E$ un vecteur non nul et $V_e = \langle e \rangle$ le sous-espace vectoriel engendré par ce vecteur. Déterminer l'orbite de $V_e = \langle e \rangle \in X$.

(iii) Donner le nombre d'orbites pour cette action et les décrire.

Exercice 4 Soient G un groupe et H un sous-groupe distingué de G. On se donne un nombre premier p et $P \subset G$ un sous-groupe de G.

(i) On suppose que P est un p-sous-groupe de Sylow de G. Montrer que $H \cap P$ est un p-sous-groupe de Sylow de H et que HP/H est un p-sous-groupe de Sylow de G/H.

(ii) Réciproquement, on suppose que $H \cap P$ est un p-sous-groupe de Sylow de H et que HP/H est un p-sous-groupe de Sylow de G/H. A-t-on que P est un p-sous-groupe de Sylow de G ?

Exercice 5 Pour les groupes G suivants, donner tous les sous-groupes de Sylow de G.

(i) Pour $G = \mathbb{Z}/240\mathbb{Z}$.

(ii) Pour $G = D_{10}$ le groupe diedral d'ordre 10 formé de l'ensemble des isométries du plan qui préservent un pentagone régulier $ABCDE$ ci-dessous.