# Groupes et géométrie, feuille 12

N. Perrin

## À rendre le mercredi 06.05.2020

## Correction le mardi 07.05.2020

**Exercice 1 (80 Points)** Soit $G$ un groupe simple d'ordre 60.

(i) Supposons qu'il existe $G' \subset G$ un sous-groupe d'ordre 20 et soit $G'_5$ un 5-sous-groupe de Sylow de $G'$. Montrer que $G'_5 \triangleleft G'$.

(ii) Montrer que $G' \subset N_G(G'_5)$ et en déduire que $N_G(G'_5)$ est d'ordre 20 ou 60.

(iii) En utilisant les théorèmes de Sylow (et le fait que le nombre de 5-Sylow est $[G : N_G(G'_5)]$, cf. feuille 11, exercice 4), montrer que $G$ n'admet pas de sous-groupe d'ordre 20.

(iv) Montrer que si $G$ admet un sous-groupe $K$ d'ordre 12, alors $K$ admet 4 3-sous-groupes de Sylow (si $K$ a un unique 3-sous-groupe de Sylow $K_3$, on pourra procéder comme ci-dessus en considérant $N_G(K_3)$).

(v) Soient $H$ et $H'$ deux sous-groupes distincts d'ordre 4.

  (a) On suppose que $H \cap H' = \langle a \rangle$ est d'ordre 2 (donc $a$ est d'ordre 2). Montrer que $H \cup H' \subset C_G(a) = \{g \in G \mid ga = ag\}$.

  (b) Montrer que $C_G(a)$ contient au moins 6 éléments et est d'ordre divisible par 4.

  (c) En déduire que $|C_G(a)|$ vaut 12, 20 ou 60.

  (d) Montrer qu'aucun des cas n'est possible et que $H \cap H' = \{1\}$.

(vi) Soit $H$ est un 2-Sylow, supposons $H = N_G(H)$.

  (a) Calculer le nombre de 2-Sylow de $G$ (on pourra utiliser et le fait que le nombre de 2-Sylow est $[G : N_G(H)]$, cf. feuille 11, exercice 4)

  (b) En comptant le nombre d'éléments d'ordre 2 et 5, montrer que $H \neq N_G(H)$.

(vii) Montrer que $G$ possède 5 2-sous-groupes de Sylow (on pourra déterminer le cardinal de $N_G(H)$ pour $H$ un 2-Sylow.

(viii) Montrer que $G \simeq \mathfrak{A}_5$ en considérant l'action de $G$ par conjugaison sur les 2-Sylow.

*Solution.* Remarque préliminaire, on a $60 = 2^2 \times 3 \times 5$. Les 3-sous-groupes de Sylow sont d'ordre 3. Les 5-sous-groupes de Sylow sont d'ordre 5.

(i) Le groupe $G'$ est d'ordre $20 = 2^2 \times 5$. Le nombre de ses 5-sous-groupes de Sylow divise $2^2 = 4$ (donc vaut 1, 2, ou 4) et est congru à 1 modulo 5. La seule possibilité est donc 1 et il y a un unique 5-sous-groupe de Sylow $G'_5$ dans $G'$. Ce dernier doit donc être distingué.

(ii) Par définition du normalisateur de $G'_5$ dans $G$ (plus grand sous-groupe de $G$ dans lequel $G'_5$ est distingué) et comme $G'_5 \triangleleft G'$ par la question (i), on doit avoir $G' \subset N_G(G'_5)$. Comme $G'$ est d'ordre 20, l'ordre de $N_G(G'_5)$ est donc un multiple de 20. Par ailleurs, $N_G(G'_5)$ est un sous-groupe de $G$ donc son ordre divise 60. Les seuls multiplesde 20 qui sont des diviseurs de 60 sont 20 et 60.

(iii) Si $G$ a un sous-groupe $G'$ d'ordre 20, alors par la question (i), $G'$ a un unique 5-sous-groupes de Sylow $G'_5$ et $G'_5 \triangleleft G'$. Ainsi $N_G(G'_5)$ est d'ordre 20 ou 60. Si c'est 60, c'est qu'on a $G = N_G(G'_5)$ et $G'_5$ est distingué dans $G$ (par définition du normalisateur) donc $G$ n'est pas simple, une contradiction. Sinon, on a que $N_G(G'_5)$ est d'ordre 20 donc $G' = N_G(G'_5)$. Mais alors, $G'_5$ est un 5-sous-groupe de SYlow de $G$ et le nombre de 5-sous-groupe de Sylow de $G$ doit être égal à $[G : N_G(G'_5)] = 60/20 = 3$. Par ailleurs ce nombre doit être congru à 1 modulo 5, une contradiction.

(i v) Soit $K$ un sous-groupe d'ordre 12 de $G$. Le nombre de 3-sous-groupes de Sylow de $K$ divise 4 et est congru à 1 modulo 3. Les diviseurs de 20 sont $1, 2, 4$ et les seuls possibles sont donc 1 ou 4. Si $K$ a un unique 3-sous-groupe de Sylow $K_3$, alors on a $K_3 \triangleleft K$ et $K \subset N_G(K_3)$. L'ordre de $N_G(K_3)$ doit donc être un multiple de $|K| = 12$ et un diviseur de 60. Ce ne peut être que 12 ou 60. Si c'est 60, alors $G = N_G(K'_3)$ et $K'_3 \triangleleft G$ qui ne peut être simple, contradiction. Si c'est 12, alors $K = N_G(K'_3)$ et $K'_3$ est un 3-sous-groupe de Sylow de $G$. Le nombre des 3-sous-groupes de Sylow de $G$ doit donc être $[G : N_G(K'_3)] = [G : K] = 60/12 = 5$ et aussi congru à 1 modulo 3, une contradiction. Le nombre de 3-sous-groupes de Sylow de $K$ vaut donc 4.

(v) Soient $H$ et $H'$ deux sous-groupes d'ordre 4. Remarquons que ce sont des 2-sous-groupes de Sylow de $G$. Comme $G$ est simple, il en existe au moins 2. Notons que comme $H$ et $H'$ sont d'ordre 4, ils sont isomorphes à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ou $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ et sont donc commutatifs.

(a) Soit $h \in H$, on a $a \in H$ donc $a$ et $h$ commutent (car $H$ est commutatif donc $h/inC_G(a)$. De la même manière $H' \subset C_G(a)$.

(b) Comme $C_G(a)$ est un groupe et contient $H$ qui est d'ordre 4, son ordre est multiple de 4. Par ailleurs, l'union $H \cup H'$ contient 6 éléments (car $H \cap H'$ en contient 2) donc $C_G(a)$ aussi.

(c) Notons que l'ordre de $C_G(a)$ doit aussi diviser 60. Les multiples de 4 plus grand que 6 et qui divisent 60 sont 12, 20 et 60.

(d) Si $C_G(a)$ est d'ordre 60, alors $G = C_G(a)$ et $a$ commute avec tous les éléments de $G$. En particulier, le groupe $\langle a \rangle$ est distingué dans $G$, une contradiction. On a déjà vu que $G$ n'admet pas de sous-grope d'ordre 20 donc $C_G(a)$ ne peut être d'ordre 20. Finalement, si $C_G(a)$ est d'ordre 12, alors par la question (iii) le nombre de 3-sous-groupes de Sylow dans le groupe $C_G(q)$ vaut 4. Ces 3-sous-groupes de Sylow n'ont que l'élément 1 en commun ce qui nous donne $4 \times 2 = 8$ éléments d'ordre 3 dans $C_G(a)$. Mais $C_G(a)$ contient aussi l'union $H \cup H'$ qui est formé de 6 éléments d'ordre divisant 4 et qui sont donc distincts de nos éléments d'ordre 3. On obtient au moins $8 + 6 = 14$ éléments dans $C_G(a)$ qui est supposé d'ordre 12, une contradiction. Aucun cas n'est donc possible et on doit donc avoir $H \cap H' = \{1\}$.

(vi) Supposons $H = N_G(H)$.

(a) Le nombre de 2-Sylow de $G$ est donc $[G : N_G(H)] = [G : H] = 60/4 = 15$.

(b) Les 2-sous-groupes de Sylow ne se rencontrent que selon 1 ce qui nous donne $15 \times 3 = 45$ éléments d'ordre 2 ou 4. De plus, le nombre de 5-sous-groupes de Sylow divise 12 et est congru à 1 modulo 5. Comme $G$ est simple ce ne peut être 1 donc c'est 6. Les 5-sous-groupes de Sylow ne se rencontrent que selon 1, ceci nous donne $6 \times 4 = 24$ éléments d'ordre 5. On obtient ainsi $24 + 45 = 69$ éléments dans $G$, c'est impossible et donc $N_G(H) \neq H$.

(vii) Le nombre de 2-sous-groupes de Sylow de $G$ est un diviseur de 15 et est congru à 1 modulo 2. Les possibilités sont donc 1, 3, 5 ou 15. Comme $G$ est simple, ce nombre ne peut être 1. On a vu que ce nombre ne peut être 15 (car alors pour un 2-sous-groupe de Sylow $H$, on a $15 = [G : N_G(H)]$ donc $N_G(H)$ est d'ordre 4 et $N_G(H) = H$). Si c'est 3, alors on a $[G : N_G(H)] = 3$ et donc $N_G(H)$ est d'ordre 20, c'est exclu par la question (iii), le nombre de 2-sous-groupes de Sylow ne peut donc être que 5.

(viii) On fait agir $G$ sur l'ensemble $X$ de ses 2-sous-groupes de Sylow. On obtient donc un morphisme de groupes $\varphi : G \to \mathfrak{S}_5$. Le noyau de ce morphisme est un sous-groupe distingué de $G$ donc $\ker(\varphi) = G$ ou $\ker(\varphi) = \{1\}$. Le premier cas est impossible car alors $G$ agirait trivialement sur ses 2-sous-groupes de Sylow alors qu'il agit transitivement. On doit donc avoir $\ker(\varphi) = \{1\}$ et $\varphi$ est injectif. Le groupe $G$ est donc isomorphe à un sous-groupe d'ordre 60 de $\mathfrak{S}_5$ ou encore à un sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_5$. Nous avons vu à l'exercice 5 du TD6 que $\mathfrak{A}_5$ est le seul sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_5$. ∎

**Exercice 2 (20 Points)** Soit $G$ un $p$-groupe fini.

(i) On suppose que $G$ agit sur un ensemble fini $X$ et on note $X^G = \{x \in X \mid g \cdot x = x \text{ pour tout } g \in G\}$ l'ensemble des points fixes de $X$ sous $G$. Monter que l'on a
$$|X| \equiv |X^G| \pmod p.$$

(ii) En faisant agir $G$ sur lui-même par conjugaison : $G \times G \to G; (g, x) \mapsto g \cdot x = gxg^{-1}$, montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe non trivial de $G$ (*i.e* $Z(G) \neq \{1\}$).

*Solution.* (i) Soit $G \cdot x$ l'orbite de $x$ dans $X$. On sait que $|G \cdot x|$ est un diviseur de $|G|$. Ainsi, on a l'alternative

- $x \in X^G$ c'est-à-dire $x$ est un point fixe et $|G \cdot x| = 1$ ou
- $|G \cdot x|$ est un multiple de $p$, ou encore $|G \cdot x| \equiv 0 \pmod p$.

On considère l'équation aux classes que l'on sépare en fonction de l'alternative précédente :
$$|X| = \sum_{G\cdot x \in X/G} |G\cdot x| = \sum_{x \in X^G} |G\cdot x| + \sum_{G\cdot x \in X/G, x \notin X^G} |G\cdot x| = |X^G| + \sum_{G\cdot x \in X/G, x \notin X^G} |G\cdot x|.$$

En réduisant modulo $p$, on obtient $|X| \equiv |X^G| \pmod p$.

(ii) On regarde maintenant $X = G$ en faisant agir $G$ sur lui-même par conjugaison. Les points fixes de $X$ sont $X^G = \{x \in G \mid g \cdot x = x \ \forall g \in G\} = \{x \in G \mid gxg^{-1} = x \ \forall g \in G\} = \{x \in G \mid gx = xg \ \forall g \in G\} = Z(G)$. On obtient donc
$$0 \equiv |G| \equiv |Z(G)| \pmod p.$$

Ainsi l'ordre du centre $Z(G)$ de $G$ est un multiple de $p$. Mais $1 \in Z(G)$ donc ce multiple est au moins $p$ et le centre n'est pas trivial. ∎