Groupes et géométrie,
feuille 10

N. Perrin

À rendre le jeudi 11.04.2019

Correction le mardi 16.04.2019

Exercice 1 ($2 \times 10 = 20$ Points) Soit G un groupe fini, soit p un facteur premier de $|G|$ et soit $H \subset G$ un sous-groupe de G. On suppose qu'il existe un p-sous-groupe de Sylow S de G tel que $N_G(S) \subset H$.

(i) Montrer que $S \subset H$ et que S est un p-sous-groupe de Sylow de H.

(ii) Montrer que $N_G(H) = H$.

Solution. (i) On a $S \subset N_G(S)$ donc $S \subset H$. De plus comme S est un p-sousgroupe de Sylow de G, on a $|G| = p^\alpha m$ avec p ne divisant pas m et $|S| = p^\alpha$. De plus, on a que l'ordre $h = |H|$ de H doit diviser l'ordre de G donc h divise $p^\alpha m$ et comme S est un sous-groupe de H, on a que $p^\alpha = |S|$ divise $h|H|$. Ainsi on a $|H| = p^\alpha m'$ avec p ne divisant pas m'. Le sous-groupe S de H est donc un p-sous-groupe de Sylow de H.

(ii) Remarquons que $H \subset N_G(H)$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $g \in N_G(H)$. Comme $S \subset H$, on a $gSg^{-1} \subset gHg^{-1} = H$ (car $g \in N_G(H)$). Ainsi gSg^{-1} est un sous-groupe de Sylow de H donc il existe $h \in H$ tel que $gSg^{-1} = hSh^{-1}$. On a donc en conjuguant par h^{-1}, on a $h^{-1}gSg^{-1}h = S$ donc $(h^{-1}g)S(h^{-1}g)^{-1} = S$. On a donc $h^{-1}g \in N_G(S) \subset H$ donc $h^{-1}g = h' \in H$. Finalement, on a $g = hh' \in H$ et $N_G(H) \subset H$ donc $N_G(H) = H$. ∎

Exercice 2 (20 Points) Soit G un groupe fini, soit $N \triangleleft G$ un sous-groupe distingué de G et soit p un facteur premier de N. Montrer que si S est un p-sous-groupe de Sylow de N, alors $G = N \cdot N_G(S) = \{ng \mid n \in N \text{ et } g \in N_G(S)\}$.

Solution. On a clairement l'inclusion $N \cdot N_G(S) \subset G$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit donc $g \in G$. Le groupe gSg^{-1} est un sous-groupe de $gNg^{-1} = N$ (car N est distingué) et comme $|gSg^{-1}| = |S|$ et que S est un p-sous-groupe de Sylow de N, le sous-groupe gSg^{-1} est aussi un sous-groupe de Sylow de N. Comme tous les p-sous-groupes de Sylow de N sont distingués dans N, il existe $n \in N$ tel que $nSn^{-1} = gSg^{-1}$. Ainsi, on a $S = (n^{-1}g)S(n^{-1}g)^{-1}$ donc $h = n^{-1}g \in N_G(S)$. On a donc $g = nh \in N \cdot N_G(S)$. ∎

Exercice 3 ($2 \times 10 = 20$ Points) Soient p, q et r trois nombres premiers tels que $p < q < r$ et soit G un groupe d'ordre pqr. On note n_p, n_q et n_r le nombre de p-sous-groupes de Sylow, le nombre et q-sous-groupes de Sylow et le nombre de r-sous-groupes de Sylow de G.

(i) Montrer que l'on doit avoir $pqr \geq n_p(p-1) + n_q(q-1) + n_r(r-1)$.

(ii) Montrer que le groupe G n'est pas simple.

Solution. (i) On note $S_{p,1}, \cdots, S_{p,n_p}$, $S_{q,1}, \cdots, S_{q,n_q}$ et $S_{r,1}, \cdots, S_{r,n_r}$ les p-, q- et r-sous-groupes de Sylow de G. Leur cardinal est respectivement p, q et r. De plus, l'intersection de deux p-sous-groupes de Sylow est un sous-groupe et ne peut qu'être de cardinal 1 ou p. Comme ce ne peut être p (car sinon les sous-groupes sont égaux), ça doit être 1. Ainsi, ces sous-groupes ne se rencontrent que selon l'élḿent 1 et on a

$$\begin{aligned}
|(S_{p,1} \setminus \{1\}) \cup \cdots \cup (S_{p,n_p} \setminus \{1\})| &= n_p(p-1), \\
|(S_{q,1} \setminus \{1\}) \cup \cdots \cup (S_{q,n_q} \setminus \{1\})| &= n_q(q-1) \text{ et} \\
|(S_{r,1} \setminus \{1\}) \cup \cdots \cup (S_{r,n_r} \setminus \{1\})| &= n_r(r-1).
\end{aligned}$$

Par ailleurs ces trois ensembles ne se rencontrent pas (les éléments de ces ensembles sont d'ordre p, q et r respectivement). On a donc (en ajoutant l'élément neutre :

$$pqr \geq n_p(p-1) + n_q(q-1) + n_r(r-1) + 1.$$

(ii) Notons que si $n_p = 1$, $n_Q = 1$ ou $n_r = 1$, alors il n'y a qu'un p- , q ou r-sous-groupe de Sylow et qu'il est alors distingué ce qui montre que G n'est pas simple. On va donc montrer que l'on a $n_p = 1$ ou $n_q = 1$ ou $n_r = 1$. Si ce n'est pas le cas, alors n_r divise pq. On doit donc avoir $n_r = 1$, p, q, ou pq. Par ailleurs, on a $n_r \equiv 1 \pmod r$. On doit donc avoir $n_r = pq$. De plus n_p divise qr donc $n_p = 1$, q, r ou qr. Si $n_p \neq 1$, on a donc $n_p \geq q$. De même, n_q divise qr donc $n_q = 1$, p, r ou pr. Si $n_q \neq 1$, on a donc $n_q \geq p$. Si n_p, n_q et n_r sont différents de 1, on a donc

$$\begin{aligned}
n_p(p-1) + n_q(q-1) + n_r(r-1) + 1 \quad &\geq q(p-1) + p(q-1) + pq(r-1) \\
&\geq qp - q + pq - q + pqr - pq + 1 \\
&\geq pqr + pq - p - q + 1 \\
&\geq pqr + (p-1)(q-1) > pqr.
\end{aligned}$$

La dernière égalité est vraie car p et q sont premiers donc au moins égaux à 2. On obtient une contradiction. ■

Exercice 4 (10 Points) Montrer qu'un groupe d'ordre 200 n'est pas simple.

Solution. On décompose 200 en produit de facteurs premiers. On a $200 = 2^3 \times 5^2$. Soit n_5 les nombres de 5-sous-groupes de Sylow du groupe. Alors n_5 divise 8 donc $n_5 \in \{1, 2, 4, 8\}$ et $n_5 \equiv 1 \pmod 5$. On doit donc avoir $n_5 = 1$ et il y a un seul 5-sous-groupe de Sylow qui doit être distingué. Le groupe n'est pas simple. ■

Exercice 5 (30 Points) Montrer qu'un groupe G d'ordre 300 n'est pas simple (on pourra faire agir G sur l'ensemble de ses 5-sous-groupes de Sylow).

Solution. On décompose 300 en produit de facteurs premiers. On a $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$. Soit n_5 les nombres de 5-sous-groupes de Sylow du groupe. Alors n_5 divise 12 donc $n_5 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ et $n_5 \equiv 1 \pmod 5$. On doit donc avoir $n_5 = 1$ ou $n_5 = 6$.

Dans le premier cas, il y a un seul 5-sous-groupe de Sylow qui doit être distingué. Le groupe n'est pas simple.

Dans le second cas, on pose $X = \{\text{5-sous-groupes de Sylow de } G\}$. On a $|X| = 6$. On fait agir G sur X par $g \cdot S = gSg^{-1}$ pour $g \in G$ et $S \in X$. On obtient ainsi un morphisme de groupes $\varphi : G \to \mathrm{Bij}(X) \simeq \mathfrak{S}_6$. Ce morphisme n'est pas trivial car il a une unique orbite (tous les 5-sous-groupes de Sylow sont conjugués), on a donc $\ker(\varphi) \neq G$. De plus, si $\ker(\varphi) = \{1\}$, alors φ est injective et $300 = |G|$ doit diviser $|\mathrm{Bij}(X)| = |\mathfrak{S}_6| = 6! = 720$. Ce n'est pas le cas. Donc $\ker(\varphi)$ est un sous-groupe distingué de G qui n'est ni égal à G ni trivial. Le groupe G ne peut donc être simple. ∎