REPRÉSENTATIONS CUSPIDALES DE $\mathrm{GL}_r(D)$ DISTINGUÉES PAR UNE INVOLUTION INTÉRIEURE

par

Vincent Sécherre

Résumé. — Soit un entier $n \geqslant 1$, soit F un corps localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle p impaire et soit G une forme intérieure de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$. C'est un groupe de la forme $\mathrm{GL}_r(D)$ pour un entier $r \geqslant 1$ et une F-algèbre à division D de degré réduit d tel que $rd = 2n$. Soit K une extension quadratique de F dans l'algèbre des matrices de taille r à coefficients dans D, et soit H son centralisateur dans G. Nous étudions les représentations cuspidales autoduales de G et leur distinction par le sous-groupe H du point de vue de la théorie des types. Si π est une telle représentation et si ϕ est son paramètre de Langlands, nous calculons la valeur en 1/2 du facteur epsilon de la restriction de ϕ au groupe de Weil de K, notée $\mathsf{e}_K(\phi)$. Lorsque F est de caractéristique nulle, nous en déduisons que π est distinguée par H si et seulement si ϕ est symplectique et $\mathsf{e}_K(\phi)$ est égal à $(-1)^r$. Ceci prouve dans ce cas une conjecture de Prasad et Takloo-Bighash.

Abstract. — Let n be a positive integer, F be a non-Archimedean locally compact field of residue characteristic $p \neq 2$ and G be an inner form of $\mathrm{GL}_{2n}(F)$. This is a group of the form $\mathrm{GL}_r(D)$ for a positive integer r and division F-algebra D of reduced degree d such that $rd = 2n$. Let K be a quadratic extension of F in the algebra of matrices of size r with coefficients in D, and H be its centralizer in G. We study selfdual cuspidal representations of G and their distinction by H from the point of view of type theory. Given such a representation π of G, we compute the value at 1/2 of the epsilon factor of the restriction of the Langlands parameter ϕ of π to the Weil group of K, denoted $\mathsf{e}_K(\phi)$. When F has characteristic 0, we deduce that π is H-distinguished if and only if ϕ is symplectic and $\mathsf{e}_K(\phi) = (-1)^r$. This proves in this case a conjecture by Prasad–Takloo-Bighash.

2010 Mathematics Subject Classification: 22E50
Keywords and Phrases: Cuspidal representation, Distinguished representation, Endo-class, Root number, Symplectic parameter, Type theory

1. Introduction

1.1.

Soit un entier $n \geqslant 1$, soit F un corps localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle p et soit A une F-algèbre centrale simple de degré réduit $2n$. C'est une algèbre de la forme $\mathsf{M}_r(D)$ pour un entier $r \geqslant 1$ et une F-algèbre à division D de degré réduit $d \geqslant 1$ tels que $rd = 2n$. Notons $G = \mathrm{GL}_r(D)$ le groupe des éléments inversibles de A. Soit K une extension quadratique de F incluse dans A, soit H son centralisateur dans G et soit μ un caractère de $K^\times$. On note Nrd_H la norme réduite de H dans $K^\times$, de sorte que le caractère μ définit un caractère

$\mu \circ \mathrm{Nrd}_H$ de H. Une représentation (lisse, complexe) irréductible π de G sur un espace vectoriel complexe V est dite μ-distinguée si V admet une forme linéaire non nulle $\mathscr{L}$ telle que :

$$\mathscr{L}(\pi(h)v) = \mu(\mathrm{Nrd}_H(h)) \cdot v,$$

pour tout $h \in H$ et tout $v \in V$, c'est-à-dire si l'espace $\mathrm{Hom}_H(\pi, \mu \circ \mathrm{Nrd}_H)$ est non nul. Dans [**50**], Prasad et Takloo-Bighash ont formulé la conjecture suivante. On verra μ indifféremment comme un caractère de $K^\times$ ou du groupe de Weil de K *via* l'homomorphisme de réciprocité de la théorie du corps de classes local.

Conjecture 1.1. — *Soit π une représentation irréductible de G dont le transfert à $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ soit générique. Supposons que la restriction de μ^n à $F^\times$ soit égale au caractère central de π. Notons ϕ le paramètre de Langlands de π et ϕ_K sa restriction au groupe de Weil de K.*

(1) *Si la représentation π est μ-distinguée, alors :*

(a) *le paramètre de Langlands ϕ est à valeurs dans le groupe $\mathrm{GSp}_{2n}(\mathbb{C})$ des similitudes symplectiques et son facteur de similitude est égal à la restriction de μ à $F^\times$,*

(b) *la valeur en 1/2 du facteur epsilon de $\phi_K \cdot \mu^{-1}$ est égale à $(-1)^r \mu(-1)^n$.*

(2) *Si la représentation π est essentiellement de carré intégrable, alors elle est μ-distinguée si et seulement si les conditions* (1.a) *et* (1.b) *sont satisfaites.*

1.2.

Cette conjecture est inspirée de résultats dus à Tunnel [**64**] et à Saito [**51**] dans le cas où n et d sont égaux à 1, et où F est soit de caractéristique nulle, soit de caractéristique p impaire. Dans le cas où μ est trivial, Guo [**33**] prouve que, si F est de caractéristique nulle et si $d \leqslant 2$, l'espace $\mathrm{Hom}_H(\pi, \mathbb{C})$ est de dimension au plus 1 pour toute représentation irréductible π de G et que, si cette dimension est non nulle, c'est-à-dire si π est H-distinguée, alors π est autoduale. Dans [**50**], Prasad et Takloo-Bighash prouvent leur conjecture lorsque $n = 2$. Leur preuve repose en partie sur des résultats de Gan-Takeda [**28**], qui supposent que F est de caractéristique nulle. Il y a eu récemment plusieurs résultats en direction de la preuve de la conjecture 1.1.

Quand F est de caractéristique nulle et μ est trivial, Feigon-Martin-Whitehouse [**26**] prouvent la conjecture 1.1(1) pour les représentations cuspidales de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$.

Chommaux [**22**] prouve la conjecture 1.1(2) dans le cas où π est la représentation de Steinberg de G tordue par un caractère et où F est de caractéristique différente de 2. Puis Chommaux et Matringe [**23**] ont annoncé une preuve de la même conjecture dans le cas où π est une représentation cuspidale de niveau 0 de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ et où F est de caractéristique résiduelle impaire.

Broussous et Matringe [**10**] étendent le théorème de multiplicité 1 de Guo au cas où d est quelconque et où F est de caractéristique différente de 2. Ils étendent également au cas d'une forme intérieure quelconque le théorème d'autodualité de Guo ; leur argument repose sur des résultats ([**33, 40**]) supposant que F est de caractéristique nulle, mais on trouve dans [**23**] un argument valable dès que F est de caractéristique différente de 2.

Lorsque μ est trivial et $d = 2$, Suzuki [**62**] ramène la preuve de la conjecture 1.1(1) au cas des représentations essentiellement de carré intégrable. Enfin, Xue [**65**] a annoncé une preuve (pour

μ trivial) de la conjecture 1.1(1), ainsi que de la conjecture 1.1(2) lorsque π est une représentation cuspidale dont le transfert de Jacquet-Langlands à $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ est cuspidal. Son argument repose sur plusieurs résultats supposant que le corps F est de caractéristique nulle.

1.3.

Dans cet article, nous prouvons la conjecture 1.1(2) pour toutes les représentations cuspidales de G dans le cas où F est de caractéristique nulle et $p \neq 2$, et où μ est trivial (théorème 9.2).

Théorème 1.2. — *Supposons que F soit de caractéristique nulle et que $p \neq 2$. Soit π une représentation irréductible cuspidale de G et soit ϕ son paramètre de Langlands. La représentation π est H-distinguée si et seulement si ϕ est autodual symplectique et la valeur en $1/2$ du facteur epsilon de ϕ_K est égale à $(-1)^r$.*

Notre approche, complètement différente de celle de [**65**], repose sur la description des représentations cuspidales des formes intérieures de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ par la théorie des types. Avant d'expliquer de quoi il s'agit, expliquons les restrictions faites sur la caractéristique et la caractéristique résiduelle de F.

Notre restriction sur la caractéristique de F provient du théorème 9.1 (voir aussi le théorème 1.3 dans cette introduction) dont la preuve disponible actuellement dans la littérature suppose que F est de caractéristique nulle. Par conséquent, tous les résultats de cet article qui l'utilisent, à savoir le théorème 9.2 et son corollaire le théorème 9.5, supposent que F est de caractéristique nulle. (Voir aussi les propositions 9.7 et 9.9 dans le cas déployé, utilisant le théorème 9.6.) *Tous les autres résultats de cet article sont valables sous la seule hypothèse que $p \neq 2$.*

Notre restriction sur la caractéristique résiduelle de F est plus sérieuse : l'hypothèse "$p \neq 2$" est inhérente à la méthode que nous employons, principalement parce que nous utilisons systématiquement le fait que le premier ensemble de cohomologie de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ à valeurs dans un pro-p-groupe est trivial (voir aussi le paragraphe 1.9).

1.4.

Bushnell et Kutzko ont montré dans [**21**] que toute représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_n(F)$, quels que soient l'entier n et le corps localement compact non archimédien F, s'obtient par induction compacte d'une représentation d'un sous-groupe ouvert et compact mod le centre de $\mathrm{GL}_n(F)$. Ce résultat a ensuite été étendu aux représentations cuspidales de n'importe quelle forme intérieure de $\mathrm{GL}_n(F)$ (voir [**9, 52, 53, 56**]). Plus précisément, notant G une forme intérieure de $\mathrm{GL}_n(F)$, il existe une famille de paires $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ formées d'un sous-groupe $\mathbf{J}$ ouvert et compact mod le centre de G et d'une représentation $\boldsymbol{\lambda}$ de $\mathbf{J}$ telle que :

– pour toute paire $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$, l'induite compacte de $\boldsymbol{\lambda}$ à G est irréductible et cuspidale ;
– toute représentation irréductible cuspidale de G s'obtient ainsi pour une paire $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ unique à G-conjugaison près.

Ces paires $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ sont appelées des *types simples maximaux étendus* de G, ce que nous abrégerons en *types* dans cet article. Étant donné une représentation cuspidale π de G et un type $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ lui correspondant, ainsi qu'un sous-groupe fermé H de G, une simple application de la formule de Mackey montre qu'on a un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\mathrm{Hom}_H(\pi, \mathbb{C}) \simeq \prod_g \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}^g \cap H}(\boldsymbol{\lambda}^g, \mathbb{C}) \tag{1.1}$$

où g décrit un système de représentants de $(\mathbf{J}, H)$-doubles classes de G. Ainsi, pour étudier la distinction de π par H, il suffit d'étudier la distinction de $\boldsymbol{\lambda}^g$ par $\mathbf{J}^g \cap H$ pour chaque g.

1.5.

Cette approche a été utilisée par Hakim et Murnaghan (voir par exemple [**35, 36, 34**]) pour étudier la distinction par divers sous-groupes d'une certaine classe de représentations cuspidales de $\mathrm{GL}_n(F)$, dites *essentiellement modérées.* Il s'agit des représentations cuspidales dont le paramètre de Langlands contient un caractère du sous-groupe d'inertie sauvage de F. La construction de ces représentations par induction compacte est plus simple que dans le cas non essentiellement modéré, et peut être décrite au moyen des paires admissibles ([**39, 16**]) de Howe.

Si l'on s'intéresse aux représentations cuspidales générales de $\mathrm{GL}_n(F)$ et non pas seulement à celles qui sont essentiellement modérées, les paires admissibles ne suffisent pas : il faut considérer directement les types $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ mentionnés au paragraphe précédent. Dans cette situation, [**55**] fournit une analyse complète de la distinction par $\mathrm{GL}_n(F_0)$ des représentations irréductibles cuspidales de $\mathrm{GL}_n(F)$ pour une extension quadratique F/F_0 de corps localement compacts non archimédiens, *lorsque* $p \neq 2$. Les méthodes développées dans [**55**] ont été adaptées par J. Zou [**68**] aux involutions unitaires de $\mathrm{GL}_n(F)$, toujours lorsque $p \neq 2$; le cas des involutions orthogonales fait l'objet d'un travail en cours du même auteur.

Une restriction inhérente à la méthode générale employée pour aborder tous ces résultats est que la caractéristique résiduelle p doit être supposée impaire. Dans cette introduction, nous supposerons dorénavant que $p \neq 2$.

1.6.

Revenons maintenant à la situation introduite au paragraphe 1.1, en supposant en outre que $p \neq 2$ et que le caractère μ est trivial. En particulier, G est une forme intérieure de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$.

Expliquons les grandes lignes de notre preuve de la conjecture 1.1(2) dans le cadre du paragraphe 1.3. Elle est composée de deux parties. La partie principale, qui occupe les sections 4 à 8 de l'article, étudie le lien entre distinction par H et valeur du facteur epsilon apparaissant dans la conjecture 1.1(1.b). Elle culmine dans les corollaires 7.18 et 8.13.

La seconde partie est celle qui nécessite de supposer que F est de caractéristique nulle. Elle repose sur le résultat suivant (voir le théorème 9.1), lui-même reposant principalement sur [**65**]. Rappelons qu'une représentation irréductible autoduale du groupe de Weil $\mathcal{W}_F$ de F relativement à une clôture séparable $\overline{F}$ de F est soit symplectique, soit orthogonale.

Théorème 1.3. — *Supposons que F soit de caractéristique nulle. Toute représentation cuspidale de G distinguée par H a un paramètre de Langlands autodual symplectique.*

À partir de là, notre argument est un argument de comptage : nous prouvons qu'il existe sur G autant de représentations cuspidales H-distinguées que de représentations cuspidales satisfaisant aux conditions de la conjecture 1.1. Bien entendu, les représentations cuspidales autoduales de G sont en nombre infini. Pour se ramener à des ensembles finis, on peut borner le niveau des représentations ; mais il est beaucoup plus éclairant d'introduire la notion d'endo-classe.

1.7.

Une endo-classe (sur F) est un invariant associé, par la théorie des types, à toute représentation essentiellement de carré intégrable d'une forme intérieure d'un groupe linéaire général sur F ([**12, 11**]). La définition générale de cet invariant requiert une machinerie considérable. Cependant, il a une interprétation arithmétique simple *via* la correspondance de Langlands locale ([**14, 58, 25**]) : deux représentations essentiellement de carré intégrable de formes intérieures de groupes linéaires généraux sur F ont la même endo-classe si et seulement si leurs paramètres de Langlands, une fois restreints au sous-groupe d'inertie sauvage $\mathcal{P}_F$, ont un facteur commun. La correspondance de Langlands locale induit alors une bijection entre classes de $\mathcal{W}_F$-conjugaison de représentations irréductibles de $\mathcal{P}_F$ et F-endo-classes. L'endo-classe est un invariant plus fin que le niveau normalisé, et il n'y a qu'un nombre fini d'endo-classes de niveau normalisé fixé.

1.8.

Reprenons la suite du paragraphe 1.6, et fixons une F-endo-classe $\boldsymbol{\Theta}$ à laquelle on peut penser pour le moment comme à une classe de $\mathcal{W}_F$-conjugaison de représentations irréductibles de $\mathcal{P}_F$. Supposons dans ce paragraphe que $\boldsymbol{\Theta}$ soit non nulle, c'est-à-dire qu'elle ne corresponde pas au caractère trivial de $\mathcal{P}_F$. (Le cas de l'endo-classe nulle est un peu moins direct mais se traite essentiellement de la même façon.) Notons $\mathbf{A}(G, \boldsymbol{\Theta})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations cuspidales autoduales de G d'endo-classe $\boldsymbol{\Theta}$, et notons $\mathbf{A}^+(G, \boldsymbol{\Theta})$ le sous-ensemble de celles qui sont distinguées par H. Notons également :

– $\mathbf{A}^{\mathrm{sp}}(G, \boldsymbol{\Theta})$ le sous-ensemble de $\mathbf{A}(G, \boldsymbol{\Theta})$ formé des classes de représentations dont le paramètre de Langlands est symplectique,

– $\mathbf{A}^{\mathrm{ptb}}(G, \boldsymbol{\Theta})$ le sous-ensemble de $\mathbf{A}^{\mathrm{sp}}(G, \boldsymbol{\Theta})$ formé des classes de représentations satisfaisant aux conditions de la conjecture 1.1.

L'ensemble $\mathbf{A}(G, \boldsymbol{\Theta})$ est fini, et est formé d'autant de représentations de parité symplectique que de représentations de parité orthogonale. Le cardinal de $\mathbf{A}^{\mathrm{sp}}(G, \boldsymbol{\Theta})$ est donc la moitié de celui de $\mathbf{A}(G, \boldsymbol{\Theta})$. D'autre part, une simple application d'une formule de Bushnell-Henniart [**13**] décrivant le comportement du facteur epsilon d'une représentation cuspidale de niveau non nul par torsion par un caractère modérément ramifié montre que la valeur du facteur epsilon apparaissant dans la conjecture 1.1 ne dépend ni de la représentation ni de la forme intérieure considérées mais *uniquement de* $\boldsymbol{\Theta}$; notons-la $\mathsf{w}_K(\boldsymbol{\Theta})$. Ceci a pour conséquence que l'ensemble $\mathbf{A}^{\mathrm{ptb}}(G, \boldsymbol{\Theta})$ est soit égal à $\mathbf{A}^{\mathrm{sp}}(G, \boldsymbol{\Theta})$, soit vide. (Il y a une exception si $\boldsymbol{\Theta}$ est nulle : voir la remarque 8.14.) Enfin, quand F est de caractéristique nulle, on a l'inclusion :

$$\mathbf{A}^+(G, \boldsymbol{\Theta}) \subseteq \mathbf{A}^{\mathrm{sp}}(G, \boldsymbol{\Theta}) \tag{1.2}$$

grâce au théorème 1.3. Notre stratégie consiste à montrer :

– d'une part que l'ensemble $\mathbf{A}^{+}(G,\boldsymbol{\Theta})$ est vide si et seulement si $\mathbf{A}^{\mathrm{ptb}}(G,\boldsymbol{\Theta})$ l'est, c'est-à-dire si et seulement si $\mathsf{w}_K(\boldsymbol{\Theta}) \neq (-1)^r$,

– d'autre part que, s'il est non vide, son cardinal est au moins moitié de celui de $\mathbf{A}(G,\boldsymbol{\Theta})$.

Il nous faut maintenant comprendre à quelles conditions $\mathbf{A}^{+}(G,\boldsymbol{\Theta})$ et $\mathbf{A}^{\mathrm{ptb}}(G,\boldsymbol{\Theta})$ sont vides.

1.9.

Pour déterminer à quelles conditions l'ensemble $\mathbf{A}^{\mathrm{ptb}}(G,\boldsymbol{\Theta})$ est vide, c'est-à-dire pour calculer le signe $\mathsf{w}_K(\boldsymbol{\Theta})$, il nous faut introduire deux invariants supplémentaires. Soit π une représentation cuspidale autoduale de G d'endo-classe $\boldsymbol{\Theta}$, et soit γ un facteur irréductible de la restriction à $\mathcal{P}_F$ du paramètre de Langlands de π. (D'après le paragraphe 1.7, la classe de $\mathcal{W}_F$-conjugaison de γ et $\boldsymbol{\Theta}$ se déterminent l'une l'autre.) Le stabilisateur de γ dans $\mathcal{W}_F$ est un sous-groupe de $\mathcal{W}_F$ égal à $\mathcal{W}_T$ pour une unique extension modérément ramifiée T de F dans $\overline{F}$. On pose :

$$\deg(\boldsymbol{\Theta}) = \dim(\gamma)\cdot[T:F], \tag{1.3}$$

qu'on appelle le *degré* de $\boldsymbol{\Theta}$. De même, le stabilisateur dans $\mathcal{W}_F$ de la somme directe de γ et de sa contragrédiente $\gamma^{\vee}$ est égal à $\mathcal{W}_{T_0}$ pour une unique extension T_0 de F contenue dans T. Si γ est triviale, c'est-à-dire si π est de niveau 0, on a $T = T_0 = F$. Sinon, le fait que π soit autoduale et que $p \neq 2$ implique que l'extension T/T_0 est quadratique. Elle ne dépend, à F-isomorphisme près, que de $\boldsymbol{\Theta}$.

Fixons maintenant un élément $\kappa \in K$ engendrant K sur F, et tel que $\alpha = \kappa^2 \in F^{\times}$. L'automorphisme de conjugaison $\mathrm{Ad}(\kappa)$, noté τ, est une involution sur G, dont le sous-groupe G^{τ} des points fixes est égal à H. Nous prouvons le résultat suivant (voir le théorème 7.17, équivalent au théorème ci-dessous mais formulé de façon différente).

Théorème 1.4. — *Soit $\boldsymbol{\Theta}$ l'endo-classe d'une représentation cuspidale autoduale de niveau non nul de G. Alors $\mathsf{w}_K(\boldsymbol{\Theta})$ est égal à $(-1)^r$ si et seulement si :*

(1) *si r est impair, alors $\alpha \notin \mathrm{N}_{T/T_0}(T^{\times})$ et $2n/\deg(\boldsymbol{\Theta})$ est impair,*

(2) *si r est pair, alors $\alpha \in \mathrm{N}_{T/T_0}(T^{\times})$ ou $2n/\deg(\boldsymbol{\Theta})$ est pair.*

Le cas des représentations de niveau nécessite un traitement à part : voir le paragraphe 8.5.

1.10.

Pour aller plus loin, on ne peut plus se contenter de l'interprétation d'une endo-classe comme classe de $\mathcal{W}_F$-conjugaison de représentations irréductibles de $\mathcal{P}_F$, et il faut introduire la notion de caractère simple, qui est au coeur de la théorie des types.

Les caractères simples sont des caractères bien particuliers de pro-p-sous-groupes ouverts bien particuliers de G, construits dans [**21, 9, 31, 52**]. L'ensemble des caractères simples des formes intérieures des groupes linéaires généraux sur F possède des propriétés remarquables d'entrelacement et de transfert d'un groupe à l'autre, subsumées dans la définition d'une relation d'équivalence sur cet ensemble appelée *endo-équivalence* (voir le paragraphe 3.5). Une endo-classe est alors une classe d'équivalence de caractères simples pour cette relation. Une représentation cuspidale π de G contient, à conjugaison près par G, un unique caractère simple ; sa classe d'endo-équivalence est l'endo-classe de π.

1.11.

Dans l'étude des représentations cuspidales de $\mathrm{GL}_n(F)$ distinguées par $\mathrm{GL}_n(F_0)$ réalisée dans [**55**], un résultat fondamental est l'existence, dans toute représentation cuspidale σ-*autoduale* de $\mathrm{GL}_n(F)$, c'est-à-dire toute représentation cuspidale π dont la contragrédiente $\pi^\vee$ est isomorphe à la conjuguée π^σ par l'automorphisme non trivial $\sigma \in \mathrm{Gal}(F/F_0)$, d'un caractère simple σ-autodual ([**3**] Theorem 4.1), c'est-à-dire un caractère simple θ tel que $\theta^\sigma = \theta^{-1}$. Dans l'étude des représentations cuspidales autoduales de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$, il suit des travaux de Blondel [**7**] qu'un bon analogue consiste à choisir pour σ un élément de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ tel que $\sigma^2 = 1$, et dont le polynôme caractéristique est égal à $(X^2-1)^n$: toute représentation cuspidale autoduale de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ contient alors un caractère simple σ-autodual (voir le corollaire 4.6).

Soit maintenant π une représentation cuspidale autoduale d'une forme intérieure quelconque G de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$, et soit τ comme au paragraphe 1.9. *Contrairement au cas de σ considéré plus haut*, la représentation π ne contient pas toujours un caractère simple τ-autodual, c'est-à-dire un caractère simple θ tel que $\theta^\tau = \theta^{-1}$. Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un caractère simple τ-autodual dans une représentation cuspidale autoduale de G. Il généralise le corollaire 4.6 (voir le théorème 5.18).

Théorème 1.5. — *Soit π une représentation cuspidale autoduale de niveau non nul de G. Notons $\boldsymbol{\Theta}$ son endo-classe. Alors π contient un caractère simple τ-autodual si et seulement si :*

(1) *si r est impair, alors $\alpha \notin \mathrm{N}_{T/T_0}(T^\times)$ et $2n/\deg(\boldsymbol{\Theta})$ est impair,*
(2) *si r est pair, alors $\alpha \in \mathrm{N}_{T/T_0}(T^\times)$ ou $2n/\deg(\boldsymbol{\Theta})$ est pair.*

Ici encore, le cas des représentations de niveau nécessite un traitement à part : voir le corollaire 8.3.

Ce résultat a plusieurs conséquences frappantes. La première est que, étant donné une représentation irréductible cuspidale autoduale de niveau non nul de G, le fait de contenir un caractère simple τ-autodual ne dépend que de son endo-classe (voir le corollaire 5.22 et la remarque 8.4). La seconde est que le lien avec le facteur epsilon du paragraphe 1.8 est complètement transparent : une représentation cuspidale autoduale de niveau non nul de G et d'endo-classe $\boldsymbol{\Theta}$ contient un caractère simple τ-autodual si et seulement si $\mathsf{w}_K(\boldsymbol{\Theta}) = (-1)^r$.

Il ressort aussi des paragraphes 5.2 à 5.6 menant à la preuve du théorème 1.5 que le problème de l'existence d'un caractère simple τ-autodual dans une représentation cuspidale de niveau non nul et d'endo-classe donnée peut être interprété comme un problème de plongement : pour qu'un tel caractère existe, il faut et suffit qu'il y ait un plongement de T dans A tel que la conjugaison par κ induise sur T l'automorphisme non trivial de T/T_0 (voir le corollaire 5.11).

Il ressort enfin de cette analyse que, pour qu'une représentation cuspidale autoduale de niveau non nul de $\mathbf{A}^{\mathrm{sp}}(G,\boldsymbol{\Theta})$ appartienne à $\mathbf{A}^{\mathrm{ptb}}(G,\boldsymbol{\Theta})$, il faut et suffit qu'elle contienne un caractère simple τ-autodual.

1.12.

Cette analyse de $\mathbf{A}^{\mathrm{ptb}}(G,\boldsymbol{\Theta})$ en termes de caractères simples τ-autoduaux n'est pas un simple artifice : c'est ce qui va nous permettre de déterminer s'il peut y avoir distinction par H. Faire le lien entre caractères simples τ-autoduaux et distinction est l'objet de la section 6. Le premier résultat dans cette direction est le suivant (voir la proposition 6.3 et le lemme 8.6).

Proposition 1.6. — *Toute représentation cuspidale autoduale H-distinguée de G contient un caractère simple τ-autodual.*

En d'autres termes, il découle de la proposition 1.6, des théorèmes 1.5 et 1.4, et enfin de (1.2) quand F est de caractéristique nulle, qu'on a l'inclusion :

$$\mathbf{A}^{+}(G,\boldsymbol{\Theta}) \subseteq \mathbf{A}^{\mathrm{ptb}}(G,\boldsymbol{\Theta}). \tag{1.4}$$

On en déduit immédiatement que, si $\mathbf{A}^{\mathrm{ptb}}(G,\boldsymbol{\Theta})$ est vide, alors $\mathbf{A}^{+}(G,\boldsymbol{\Theta})$ l'est aussi, ce qui prouve la conjecture dans ce cas.

Il reste alors à prouver l'égalité entre $\mathbf{A}^{+}(G,\boldsymbol{\Theta})$ et $\mathbf{A}^{\mathrm{ptb}}(G,\boldsymbol{\Theta})$ dans le cas où ce dernier n'est pas vide. Dans ce cas, partant de :

$$\mathbf{A}^{+}(G,\boldsymbol{\Theta}) \subseteq \mathbf{A}^{\mathrm{ptb}}(G,\boldsymbol{\Theta}) = \mathbf{A}^{\mathrm{sp}}(G,\boldsymbol{\Theta}), \tag{1.5}$$

et sachant que le cardinal de $\mathbf{A}^{\mathrm{sp}}(G,\boldsymbol{\Theta})$ est égal à la moitié de celui de $\mathbf{A}(G,\boldsymbol{\Theta})$ (voir le paragraphe 1.8), notre stratégie consiste à construire dans $\mathbf{A}^{+}(G,\boldsymbol{\Theta})$ des représentations H-distinguées de G en quantité au moins égale à la moitié du cardinal de $\mathbf{A}(G,\boldsymbol{\Theta})$. C'est ce que nous faisons dans les paragraphes 6.4 à 6.12 : voir la proposition 6.20 (et la proposition 8.10 en niveau 0). Pour des raison de cardinal, et compte tenu de (1.5), on obtient ainsi l'égalité cherchée.

1.13.

Lorsque r est pair, de la forme $2k$ pour un entier $k \geqslant 1$, tous les résultats des sections 5 et 6 s'adaptent au cas où H est remplacé par le sous-groupe de Levi $L = \mathrm{GL}_k(D) \times \mathrm{GL}_k(D)$ de G. Si l'on choisit un élément $\sigma \in G$ tel que $\sigma^2 = 1$ et dont le polynôme caractéristique réduit est égal à $(X^2-1)^n$, l'automorphisme de conjugaison $\mathrm{Ad}(\sigma)$, simplement noté σ, est une involution de G dont le sous-groupe des points fixes est conjugué à L. Le théorème 1.5 devient alors (voir le corollaire 5.23 et la remarque 8.4) :

Théorème 1.7. — *Toute représentation cuspidale autoduale de G contient un caractère simple σ-autodual.*

Les arguments des preuves des théorèmes 9.2 et 9.5 sont eux aussi valables pour le groupe L. Autrement dit, si π est une représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_{2k}(D)$, et si l'on considère les assertions :

(1) la représentation π est distinguée par $\mathrm{GL}_k(D) \times \mathrm{GL}_k(D)$,
(2) le paramètre de Langlands de π est autodual symplectique,

alors l'implication (1) $\Rightarrow$ (2) implique l'autre implication. (Dans le cas où G est déployé et où F est de caractéristique nulle, l'équivalence entre (1) et (2) est connue : voir [**41**].)

1.14.

Voici deux conséquences que nous tirons du théorème 9.2 et des résultats de la section 6.

D'abord, la proposition 6.17 affirme qu'une représentation cuspidale autoduale de niveau non nul de G contenant un caractère simple τ-autodual contient automatiquement un type τ-autodual, c'est-à-dire un type $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ tel que $\boldsymbol{\lambda}^\tau$ soit isomorphe à $\boldsymbol{\lambda}^\vee$. (On observera que ce résultat est faux en niveau 0 : voir le paragraphe 8.6.) Parmi les types τ-autoduaux contenus dans π, qui sont en nombre fini à H-conjugaison près, il est possible de mettre en évidence un type particulier, unique à H-conjugaison près, dit *générique*. Le théorème 9.5, qui est un analogue de [**3**] Corollary 6.6, affirme alors que la représentation cuspidale de G est H-distinguée si et seulement si son type générique est distingué.

Enfin, soit π une représentation cuspidale autoduale de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ de niveau non nul. Il existe une unique représentation cuspidale autoduale de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ inertiellement équivalente mais non isomorphe à π ; notons-là π^*. Soit $\boldsymbol{\Theta}$ l'endo-classe de π, soit T/T_0 l'extension quadratique qui lui est associée et posons $m = 2n/\deg(\boldsymbol{\Theta})$. Lorsque T/T_0 est ramifiée et $m = 1$, les représentations π et π^* ont la même parité, et [**8**] 6.8 montre comment déterminer cette parité en termes de théorie des types. Dans les autres cas, c'est-à-dire si T/T_0 est non ramifiée, ou si T/T_0 est ramifiée et m est pair, les représentations π et π^* ont des parités différentes, et il s'agit de déterminer laquelle des deux est de parité symplectique en termes de types. Les propositions 9.7 et 9.9 donnent une réponse à cette question.

1.15.

Pour finir, dans la section 10, nous expliquons brièvement comment les méthodes développées dans les sections 5 et 6 de l'article peuvent s'appliquer au cas d'une involution galoisienne sur une forme intérieure de $\mathrm{GL}_n(F)$.

Remerciements

Je remercie chaleureusement Nadir Matringe pour de nombreuses discussions stimulantes à propos de ce travail. Je le remercie en particulier de m'avoir expliqué les arguments de globalisation utilisés dans [**10**] et [**23**], ainsi que [**45**].

Je remercie également l'Institut Universitaire de France pour les excellentes conditions de travail qu'il m'a fournies durant la réalisation de ce travail.

2. Notations

Fixons un corps localement compact non archimédien F, de caractéristique résiduelle p. Nous supposerons que $p \neq 2$ à partir de la section 4.

Si K est une extension finite de F, ou plus généralement une F-algèbre à division de dimension finie, on note $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers, $\mathfrak{p}_K$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_K$ et $\boldsymbol{k}_K$ son corps résiduel, qui est un corps fini de cardinal noté q_K. On note $\boldsymbol{\mu}_K$ le sous-groupe de $K^\times$ formé des racines de l'unité d'ordre premier à p, qui s'identifie au groupe multiplicatif de $\boldsymbol{k}_K$ par réduction mod $\mathfrak{p}_K$.

On note aussi $\mathbf{U}_K^1 = 1 + \mathfrak{p}_K$ le groupe des unités principales de K, et val_K la valuation sur $K^\times$ prenant la valeur 1 en n'importe quelle uniformisante de K.

Si n est un entier strictement positif, on note $\mathbf{M}_n(K)$ l'algèbre des matrices carrés de taille n à coefficients dans K et $\mathrm{GL}_n(K)$ le groupe de ses éléments inversibles.

Si K est commutatif, on note $\mathrm{N}_{K/F}$ et $\mathrm{tr}_{K/F}$ la norme et la trace de K sur F, et on note $e_{K/F}$ et $f_{K/F}$ l'indice de ramification et le degré résiduel de K sur F.

On fixe une fois pour toute un caractère :

$$\psi : F \to \mathbb{C}^\times \tag{2.1}$$

trivial sur $\mathfrak{p}_F$ mais pas sur $\mathcal{O}_F$.

Par *représentation* d'un groupe localement profini G, on entendra toujours une représentation lisse sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Par *caractère* de G, on entendra une représentation lisse de G sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire un homomorphisme de groupes de G dans $\mathbb{C}^\times$ de noyau ouvert.

Étant donné une représentation π d'un sous-groupe fermé H de G, on note $\pi^\vee$ sa représentation contragrédiente. Si χ est un caractère de H, on note $\pi\chi$ la représentation $x \mapsto \chi(x)\pi(x)$ de H. Si $g \in G$, on pose $H^g = g^{-1}Hg$ et on note π^g la représentation $x \mapsto \pi(gxg^{-1})$ de H^g.

Si σ est une involution continue de G, on note π^σ la représentation $\pi \circ \sigma$ de $\sigma(H)$. Si μ est un caractère de $H \cap G^\sigma$, on dit que π est *μ-distinguée* si l'espace $\mathrm{Hom}_{H \cap G^\sigma}(\pi, \mu)$ est non nul. Si μ est le caractère trivial, on dit simplement que π est *$H \cap G^\sigma$-distinguée*, ou juste *distinguée*.

3. Préliminaires sur les types simples

Dans cette section, F est de caractéristique résiduelle p quelconque.

Nous introduisons dans cette section le langage élémentaire de la théorie des types simples, et nous rappelons les principaux résultats dont nous aurons besoin concernant les strates, caractères et types simples. Ces résultats sont issus de [**21, 12, 20**] pour les groupes linéaires généraux sur F et de [**52, 53, 54, 56, 11**] pour leurs formes intérieures. On trouvera également quelques résultats originaux dans les paragraphes 3.3 à 3.7. Il s'agit principalement de résultats qui étaient déjà connus pour les groupes linéaires généraux mais pas pour leurs formes intérieures.

3.1.

Soit A une F-algèbre centrale simple de degré réduit n, pour un entier donné $n \geqslant 1$. Fixons un A-module à gauche simple V, et notons D la F-algèbre opposée à $\mathrm{End}_A(V)$. C'est une F-algèbre à division centrale, V est un D-espace vectoriel à droite et A s'identifie naturellement à la F-algèbre $\mathrm{End}_D(V)$. Notons r la dimension de V sur D et d le degré réduit de D sur F. On a donc $n = rd$ et, si l'on fixe une base de V sur D, on obtient un isomorphisme de D-espaces vectoriels entre V et D^r et un isomorphisme de F-algèbres entre A et $\mathbf{M}_r(D)$.

Soit $[\mathfrak{a}, \beta]$ une strate simple dans A. Rappelons que $\mathfrak{a}$ est un $\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire dans A et que β est un élément de A satisfaisant à certaines conditions, parmi lesquelles :

(1) la F-algèbre $E = F[\beta]$ est un corps,
(2) son groupe multiplicatif $E^\times$ normalise $\mathfrak{a}$.

L'inclusion de E dans A fait de V un $E \otimes_F D$-module à droite. Le centralisateur de E dans A, noté B, est une E-algèbre centrale simple s'identifiant naturellement à $\mathrm{End}_{E\otimes D}(V)$, et l'intersection $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap B$ est un $\mathcal{O}_E$-ordre héréditaire de B.

Notons $\mathfrak{p}_\mathfrak{a}$ le radical de Jacobson de $\mathfrak{a}$. Alors $\mathbf{U}^i(\mathfrak{a}) = 1 + \mathfrak{p}_\mathfrak{a}^i$ est un pro-p-sous-groupe ouvert compact de $G = A^\times$ contenu dans $\mathfrak{a}^\times$, pour tout entier $i \geqslant 1$. La *période* de $\mathfrak{a}$ est l'unique entier $e \geqslant 1$ tel que $\mathfrak{a}\mathfrak{p}_F$ soit égal à $\mathfrak{p}_\mathfrak{a}^{ed}$.

On associe à $[\mathfrak{a}, \beta]$ des pro-p-sous-groupes ouverts compacts $H^1(\mathfrak{a}, \beta) \subseteq \mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta) \subseteq \mathbf{U}^1(\mathfrak{a})$ et un ensemble fini non vide $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ de caractères de $H^1(\mathfrak{a}, \beta)$ appelés *caractères simples*, dépendant du caractère ψ fixé à la section 2. On pose $\mathbf{J}^0(\mathfrak{a}, \beta) = \mathfrak{b}^\times \mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta)$ et on note $\mathbf{J}(\mathfrak{a}, \beta)$ le sous-groupe de G engendré par $\mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta)$ et le normalisateur de $\mathfrak{b}$ dans $B^\times$. On a :

$$\mathbf{J}^0(\mathfrak{a}, \beta) \cap B^\times = \mathfrak{b}^\times, \quad \mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta) \cap B^\times = \mathbf{U}^1(\mathfrak{b}), \quad \mathbf{J}^0(\mathfrak{a}, \beta)/\mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta) \simeq \mathfrak{b}^\times/\mathbf{U}^1(\mathfrak{b}). \tag{3.1}$$

Pour la proposition qui suit, on renvoie à [**20**] 2.1, [**21**] Proposition 5.1.1, [**52**] 3.3.2 et [**46**] Proposition 2.1.

Proposition 3.1. — *Soit $[\mathfrak{a}, \beta]$ une strate simple dans A, et soit $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$.*

(1) *Le normalisateur de θ dans G est égal à $\mathbf{J}(\mathfrak{a}, \beta)$.*

(2) *Le groupe $\mathbf{J}(\mathfrak{a}, \beta)$ a les propriétés suivantes :*

  (a) *C'est un sous-groupe ouvert et compact mod le centre de G.*

  (b) *Il possède un unique sous-groupe compact maximal, égal à $\mathbf{J}^0(\mathfrak{a}, \beta)$.*

  (c) *Il possède un unique pro-p-sous-groupe compact distingué maximal, égal à $\mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta)$.*

(3) *L'ensemble d'entrelacement de θ dans G est égal à $\mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta) B^\times \mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta)$.*

(4) *Il existe une $\mathbb{C}$-représentation irréductible η de $\mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta)$, unique à isomorphisme près, dont la restriction à $H^1(\mathfrak{a}, \beta)$ contienne θ, et une telle représentation se prolonge à $\mathbf{J}(\mathfrak{a}, \beta)$.*

Remarque 3.2. — Ceci inclut le cas particulier où $\beta = 0$. Dans ce cas, $[\mathfrak{a}, 0]$ est une strate simple dans A quel que soit l'ordre héréditaire $\mathfrak{a}$. Une telle strate simple est dite *nulle*. Dans cette situation, on a $E = F$ et $H^1(\mathfrak{a}, 0) = \mathbf{U}^1(\mathfrak{a})$, et $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, 0)$ est réduit au caractère trivial de $\mathbf{U}^1(\mathfrak{a})$. Le groupe $\mathbf{J}(\mathfrak{a}, 0)$ est le normalisateur de $\mathfrak{a}$ dans G, et on a $\mathbf{J}^0(\mathfrak{a}, 0) = \mathfrak{a}^\times$ et $\mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, 0) = \mathbf{U}^1(\mathfrak{a})$. Ainsi la représentation de Heisenberg η est le caractère trivial de $\mathbf{U}^1(\mathfrak{a})$.

Si θ est un caractère simple dans G, c'est-à-dire s'il existe une strate simple $[\mathfrak{a}, \beta]$ dans A telle que $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$, on note $\mathbf{J}_\theta$ son normalisateur, $\mathbf{J}_\theta^0$ l'unique sous-groupe compact maximal de $\mathbf{J}_\theta$ et $\mathbf{J}_\theta^1$ son unique pro-p-sous-groupe distingué maximal. On note aussi $H_\theta^1 = H^1(\mathfrak{a}, \beta) \subseteq \mathbf{J}_\theta^1$ le pro-p-groupe sur lequel θ est défini.

La représentation irréductible η de la proposition 3.1(4) est appelée la *représentation de Heisenberg* associée à θ.

3.2.

Fixons maintenant un $E \otimes_F D$-module à droite simple S. Posons $W = \mathrm{Hom}_{E\otimes D}(S, V)$. C'est un B-module à gauche simple. Notons C la E-algèbre à division opposée à $\mathrm{End}_B(W)$. On note

m la dimension de W sur C et c le degré réduit de C sur E. D'après [**67**] Proposition 1, on a :

$$mc = \frac{n}{[E:F]}, \quad c = \frac{d}{(d,[E:F])}. \tag{3.2}$$

Le choix d'un isomorphisme de $E \otimes_F D$-modules $V \simeq S^m$ définit un isomorphisme de F-algèbres :

$$\phi : A \to \mathbf{M}_m(\mathrm{End}_D(S)) \tag{3.3}$$

dont la restriction à B induit un isomorphisme de E-algèbres $B \simeq \mathbf{M}_m(C)$. On note $\mathcal{P}(\mathfrak{a},\beta)$ l'ensemble des isomorphismes (3.3) ainsi obtenus tels que l'ordre $\phi(\mathfrak{a} \cap B)$ soit standard, c'est-à-dire formé de matrices à coefficients dans $\mathcal{O}_C$ dont la réduction modulo $\mathfrak{p}_C$ est triangulaire supérieure par blocs. Un choix de $\phi \in \mathcal{P}(\mathfrak{a},\beta)$ induit un isomorphisme de groupes :

$$\mathbf{J}^0(\mathfrak{a},\beta)/\mathbf{J}^1(\mathfrak{a},\beta) \simeq \mathfrak{b}^\times/\mathbf{U}^1(\mathfrak{b}) \simeq \mathrm{GL}_{m_1}(\boldsymbol{l}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{m_s}(\boldsymbol{l}) \tag{3.4}$$

(le premier isomorphisme provenant de (3.1)) où $\boldsymbol{l}$ est le corps résiduel de C, les m_i sont des entiers de somme m et l'entier s est la période de $\mathfrak{b}$.

Remarque 3.3. — Le cardinal de $\boldsymbol{l}$ et l'entier s sont entièrement déterminés par n'importe quel caractère simple $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a},\beta)$. En effet, d'après (3.4) et la proposition 3.1, le centre de $\mathbf{J}^0_\theta/\mathbf{J}^1_\theta$ est un groupe abélien fini isomorphe à $(\boldsymbol{l}^\times)^s$. On observera que l'ordre $\mathfrak{b}$ est maximal si et seulement si $s=1$, c'est-à-dire si et seulement si le centre de $\mathbf{J}^0_\theta/\mathbf{J}^1_\theta$ est un groupe cyclique.

3.3.

Par la suite, nous ne considérerons que des caractères simples *maximaux*, au sens de la définition suivante.

Définition 3.4. — Une strate simple $[\mathfrak{a},\beta]$ dans A est dite *maximale* si $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap B$ est un ordre maximal dans B. Si c'est le cas, les caractères simples dans $\mathcal{C}(\mathfrak{a},\beta)$ sont dits *maximaux*.

Pour un caractère simple, la remarque 3.3 montre que la propriété d'être maximal ne dépend pas de la strate simple choisie pour le définir, c'est-à-dire que, si $[\mathfrak{a},\beta]$ est maximale, si $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a},\beta)$ et si $[\mathfrak{a}',\beta']$ est une strate simple telle que $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}',\beta')$, alors $[\mathfrak{a}',\beta']$ est maximale.

Une strate simple maximale a les propriétés suivantes, qui précisent la proposition 3.1.

Proposition 3.5. — *Si $[\mathfrak{a},\beta]$ est une strate simple maximale dans A, alors $\mathfrak{a}$ est l'unique ordre de A normalisé par $E^\times$ tel que $\mathfrak{a} \cap B = \mathfrak{b}$, et le groupe $\mathbf{J}(\mathfrak{a},\beta)$ normalise $\mathfrak{a}$.*

Démonstration. — La première assertion se déduit de [**53**] Lemme 1.6. Rappelons ensuite que le groupe $\mathbf{J}(\mathfrak{a},\beta)$ est engendré par $\mathbf{J}^1(\mathfrak{a},\beta)$, qui normalise $\mathfrak{a}$ car il est inclus dans $\mathbf{U}^1(\mathfrak{a})$, et le normalisateur de $\mathfrak{b}$ dans $B^\times$. La seconde assertion suit alors de la propriété d'unicité de $\mathfrak{a}$. □

La proposition suivante montre que deux strates simples définissant un même caractère simple maximal ont de nombreux invariants en commun.

Proposition 3.6. — *Soit $[\mathfrak{a},\beta]$ et $[\mathfrak{a}',\beta']$ des strates simples maximales dans A telles que l'intersection $\mathcal{C}(\mathfrak{a},\beta) \cap \mathcal{C}(\mathfrak{a}',\beta')$ soit non vide. Alors :*

$$\mathcal{C}(\mathfrak{a}',\beta') = \mathcal{C}(\mathfrak{a},\beta), \quad \mathfrak{a}' = \mathfrak{a}, \quad e_{F[\beta']/F} = e_{F[\beta]/F}, \quad f_{F[\beta']/F} = f_{F[\beta]/F}.$$

Démonstration. — Posons $E = F[\beta]$ et $E' = F[\beta']$. Soit $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a},\beta) \cap \mathcal{C}(\mathfrak{a}',\beta')$. D'après la proposition 3.1, son normalisateur $\mathbf{J}_\theta$ est égal à $\mathbf{J}(\mathfrak{a},\beta) = \mathbf{J}(\mathfrak{a}',\beta')$. Ce groupe contient $E^\times$ et $E'^\times$ et, les deux strates étant maximales, il normalise $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$. Intersectant la relation $\mathbf{J}^0(\mathfrak{a},\beta) \subseteq \mathfrak{a}'^\times$ avec $B^\times$, on trouve que $\mathfrak{b}^\times \subseteq \mathfrak{a}'^\times \cap B^\times$. Comme $\mathfrak{a}'$ est normalisé par $E^\times$, l'intersection $\mathfrak{a}' \cap B$ est un ordre héréditaire de B. Comme $\mathfrak{b}$ est maximal, on en déduit donc que $\mathfrak{a}' \cap B = \mathfrak{b}$. La proposition 3.5 entraîne que $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$, les égalités $e_{E'/F} = e_{E/F}$ et $f_{E'/F} = f_{E/F}$ suivent de [**11**] Lemma 4.14, et l'égalité $\mathcal{C}(\mathfrak{a}',\beta') = \mathcal{C}(\mathfrak{a},\beta)$ suit de [**11**] Theorem 4.16. □

Remarque 3.7. — (1) Lorsque A est déployée sur F, la proposition est vraie sans hypothèse de maximalité (voir [**20**] 2.1.1 et l'argument au début de [**61**] Section 6).

(2) Dans le cas non déployé, il n'est pas difficile de trouver des strates simples $[\mathfrak{a},\beta]$ et $[\mathfrak{a}',\beta']$ telles que $\mathcal{C}(\mathfrak{a},\beta) = \mathcal{C}(\mathfrak{a}',\beta')$ et $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}'$. Par exemple, soit D une algèbre de quaternions sur F et E une extension quadratique non ramifiée de F incluse dans D. Posons $A = \mathsf{M}_2(D)$ et :

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_D & \mathcal{O}_D \\ \mathfrak{p}_D & \mathcal{O}_D \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathcal{O}_D) \;\middle|\; c \in \mathfrak{p}_D \right\}.$$

qui est un ordre minimal de A. Choisissons un $\beta \in E$ minimal sur F au sens de [**21**] 1.4.14. Alors $[\mathfrak{a},\beta]$ est une strate simple dans A et $B = \mathsf{M}_2(E)$. Tout élément $y \in B^\times$ normalisant $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap B$ normalise aussi chaque caractère simple de $\mathcal{C}(\mathfrak{a},\beta)$. On a donc $\mathcal{C}(\mathfrak{a},\beta) = \mathcal{C}(\mathfrak{a}^y,\beta)$. Pourtant, si :

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varpi_F & 0 \end{pmatrix} \in B^\times, \quad \varpi_F \text{ uniformisante de } F,$$

on a $\mathfrak{a}^y \neq \mathfrak{a}$.

3.4.

Une famille de paires $(\mathbf{J},\boldsymbol{\lambda})$ appelées *types simples maximaux étendus* de G, constituées d'un sous-groupe $\mathbf{J}$ ouvert et compact mod le centre de G et d'une représentation irréductible $\boldsymbol{\lambda}$ de $\mathbf{J}$, a été construite dans [**21**] et [**52, 53, 54**].

Proposition 3.8. — *Soit $(\mathbf{J},\boldsymbol{\lambda})$ un type simple maximal étendu de G.*

(1) *Il existe un caractère simple maximal θ de G tel que :*

(a) *$F^\times \mathbf{J}^0_\theta \subseteq \mathbf{J} \subseteq \mathbf{J}_\theta$ et le normalisateur de $\boldsymbol{\lambda}$ dans $\mathbf{J}_\theta$ est égal à $\mathbf{J}$,*

(b) *la restriction de $\boldsymbol{\lambda}$ à H^1_θ est un multiple de θ.*

(2) *Le groupe $\mathbf{J}$ a un unique sous-groupe compact maximal $\mathbf{J}^0 = \mathbf{J}^0_\theta$, et un unique pro-p-sous-groupe compact distingué maximal $\mathbf{J}^1 = \mathbf{J}^1_\theta$.*

Soit $(\mathbf{J},\boldsymbol{\lambda})$ un type simple maximal étendu de G, soit θ un caractère simple maximal comme dans la proposition 3.8 et soit $[\mathfrak{a},\beta]$ une strate simple telle que $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a},\beta)$. L'ensemble $\mathcal{P}(\mathfrak{a},\beta)$ défini au paragraphe 3.2 est formé des isomorphismes ϕ tels que $\phi(\mathfrak{a} \cap B)$ soit l'ordre maximal standard constitué des matrices à coefficients dans $\mathcal{O}_C$. D'après le théorème de Skolem-Noether, deux isomorphismes de $\mathcal{P}(\mathfrak{a},\beta)$ sont conjugués sous $C^\times \mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_C)$, le normalisateur de l'ordre maximal standard de $\mathsf{M}_m(C)$. Un choix de ϕ induit un isomorphisme de groupes :

$$\mathbf{J}^0(\mathfrak{a},\beta)/\mathbf{J}^1(\mathfrak{a},\beta) \simeq \mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l}) \tag{3.5}$$

où l'on rappelle que $\boldsymbol{l}$ est le corps résiduel de C. La représentation de Heisenberg η associée à θ se prolongeant à $\mathbf{J}_\theta$, elle se prolonge *a fortiori* à $\mathbf{J}$.

Proposition 3.9. — *Soit $\boldsymbol{\kappa}$ une représentation de $\mathbf{J}$ prolongeant η.*

(1) *L'application :*

$$\boldsymbol{\xi} \mapsto \boldsymbol{\kappa} \otimes \boldsymbol{\xi} \tag{3.6}$$

induit une bijection entre classes d'isomorphisme de représentations irréductibles $\boldsymbol{\xi}$ de $\mathbf{J}$ triviales sur $\mathbf{J}^1$ et classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de $\mathbf{J}$ dont la restriction au sous-groupe $\mathbf{J}^1$ contient η.

(2) *Il existe, à isomorphisme près, une unique représentation irréductible $\boldsymbol{\rho}$ de $\mathbf{J}$ triviale sur $\mathbf{J}^1$ telle que $\boldsymbol{\lambda}$ soit isomorphe à $\boldsymbol{\kappa} \otimes \boldsymbol{\rho}$.*

(3) *Pour tout choix d'une strate simple $[\mathfrak{a}, \beta]$ telle que $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ et d'un $\phi \in \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \beta)$, la restriction de $\boldsymbol{\rho}$ à $\mathbf{J}^0$ s'identifie via* (3.5) *à une représentation cuspidale ρ de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$.*

(4) *L'orbite de ρ sous l'action de $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{l}/\boldsymbol{k}_E)$ a pour cardinal l'indice de $\mathbf{J}$ dans $\mathbf{J}_\theta$.*

Donnons la classification des représentations irréductibles cuspidales de G en termes de types simples maximaux étendus (voir [**21**] 6.2, 8.4, [**56**] Théorème 5.23 et [**57**] Corollary 7.3).

Théorème 3.10. — (1) *Étant donné une représentation cuspidale π de G, il y a un type simple maximal étendu $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ tel que $\boldsymbol{\lambda}$ apparaisse comme une sous-représentation de la restriction de π à $\mathbf{J}$, et un tel type est unique à G-conjugaison près.*

(2) *L'induction compacte induit une bijection entre classes de G-conjugaison de types simples maximaux étendus et classes d'isomorphisme de représentations cuspidales de G.*

Dorénavant, pour abréger, nous écrirons *type* plutôt que *type simple maximal étendu.*

Remarque 3.11. — Fixons un isomorphisme $\phi \in \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \beta)$ comme à la proposition 3.9(3), soit ϖ une uniformisante de C et notons b l'indice de $\mathbf{J}$ dans $\mathbf{J}_\theta$. Alors $\mathbf{J}$ est engendré par $\mathbf{J}^0$ et ϖ^b.

Remarque 3.12. — Un caractère simple contenu dans une représentation cuspidale de G est toujours maximal ([**56**] Corollaire 5.20), ce qui justifie qu'on ne s'intéresse ici qu'aux caractères simples maximaux.

Remarque 3.13. — Un *type de niveau* 0 est un type $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ de G attaché à une strate simple maximale nulle $[\mathfrak{a}, 0]$ au sens de la remarque 3.2. L'ordre $\mathfrak{a}$ est maximal et $\boldsymbol{\lambda}$ est une représentation irréductible de $\mathbf{J}(\mathfrak{a}, 0)$ triviale sur $\mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, 0) = \mathbf{U}^1(\mathfrak{a})$ dont la restriction à $\mathbf{J}^0(\mathfrak{a}, 0) = \mathfrak{a}^\times$ induit une représentation cuspidale de $\mathfrak{a}^\times/\mathbf{U}^1(\mathfrak{a}) \simeq \mathrm{GL}_r(\boldsymbol{k}_D)$. Une représentation cuspidale π de G contient un type de niveau 0 si et seulement si elle est de niveau 0. On a alors $[E : F] = 1$.

La définition suivante sera utile à partir de la section 5.

Définition 3.14. — Soit π une représentation cuspidale π de G, et soit $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ un type contenu dans π. Le *degré paramétrique* de π est l'entier :

$$\delta(\pi) = mb \cdot [E : F]$$

où m est défini par (3.2) et b par la remarque 3.11.

Proposition 3.15 **([47] Corollaire 3.9).** — *L'entier $s(\pi) = 2n/\delta(\pi)$ est premier à m.*

3.5.

Dans ce paragraphe, nous introduisons la notion d'endo-classe de caractères simples [**12, 19, 11**] qui sera au centre de tout notre travail.

Soit $[\mathfrak{a}, \beta]$ une strate simple dans A, et soit $[\mathfrak{a}', \beta']$ une strate simple dans une autre F-algèbre centrale simple A'. Supposons qu'il existe un isomorphisme de F-algèbres $\phi : F[\beta] \to F[\beta']$ tel que $\phi(\beta) = \beta'$. Il y a alors une bijection canonique :

$$\mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta) \to \mathcal{C}(\mathfrak{a}', \beta')$$

appelée *transfert* ([**21**] 3.6 et [**52**] 3.3.3).

Les applications de transfert jouissent d'une propriété de transitivité : si $[\mathfrak{a}, \beta]$ et $[\mathfrak{a}', \beta']$ sont comme ci-dessus, si $[\mathfrak{a}'', \beta'']$ est une strate simple dans une F-algèbre centrale simple A'' et s'il y a un isomorphisme de F-algèbres de $F[\beta']$ sur $F[\beta'']$ envoyant β' sur β'', le transfert de $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ à $\mathcal{C}(\mathfrak{a}'', \beta'')$ est la composée du transfert de $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ à $\mathcal{C}(\mathfrak{a}', \beta')$ et du transfert de $\mathcal{C}(\mathfrak{a}', \beta')$ à $\mathcal{C}(\mathfrak{a}'', \beta'')$.

Remarque 3.16. — Un cas particulier simple mais important de transfert est celui où $A' = A$ et $[\mathfrak{a}', \beta']$ est conjuguée à $[\mathfrak{a}, \beta]$ par un $g \in G$. Dans ce cas, le transfert de $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ à $\mathcal{C}(\mathfrak{a}', \beta')$ est donné par la conjugaison par g.

Dans la suite du paragraphe, nous nous concentrons sur les propriétés des caractères simples *maximaux* vis-à-vis du transfert.

Définition 3.17. — Soient A_1 et A_2 des F-algèbres centrales simples, et θ_1 et θ_2 des caractères simples maximaux dans $A_1^\times$ et $A_2^\times$ respectivement. Les caractères simples θ_1 et θ_2 sont dits *endo-équivalents* s'il existe des strates simples $[\mathfrak{a}_1, \beta_1]$ et $[\mathfrak{a}_2, \beta_2]$ dans A_1 et A_2 telles que :

(1) $\theta_1 \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}_1, \beta_1)$ et $\theta_2 \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}_2, \beta_2)$,

(2) les extensions $F[\beta_1]$ et $F[\beta_2]$ ont le même degré sur F,

(3) il y a une F-algèbre centrale simple A' et des strates simples maximales $[\mathfrak{a}', \beta_1']$ et $[\mathfrak{a}', \beta_2']$ dans A' telles que θ_1 et θ_2 se transfèrent en des caractères simples $\theta_1' \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}', \beta_1')$ et $\theta_2' \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}', \beta_2')$ qui s'entrelacent dans $A'^\times$, c'est-à-dire qu'il existe un $g \in A'^\times$ tel que :

$$\theta_2'(x) = \theta_1'(gxg^{-1}), \quad x \in H^1(\mathfrak{a}', \beta_2') \cap g^{-1}H^1(\mathfrak{a}', \beta_1')g.$$

En particulier, deux caractères simples maximaux transferts l'un de l'autre sont endo-équivalents.

La notion d'endo-équivalence a été introduite dans [**12**] (voir [**11**] pour les formes intérieures) d'une façon légèrement différente reposant sur la notion de caractère simple potentiel, que nous n'utiliserons pas dans cet article. Dans le cas des groupes linéaires généraux déployés, [**19**] explique comment faire l'économie des caractères simples potentiels. Dans le présent article, nous nous contentons de le faire pour les caractères simples maximaux des formes intérieures. Ainsi, la proposition suivante est une adaptation de [**11**] Corollary 8.3.

Proposition 3.18. — *L'endo-équivalence est une relation d'équivalence sur l'ensemble :*

$$\mathcal{C}_{\max}(F) = \bigcup_{[\mathfrak{a},\beta]} \mathcal{C}(\mathfrak{a},\beta),$$

l'union étant prise sur l'ensemble des strates simples maximales des F-algèbres centrales simples.

Démonstration. — Prouvons qu'il s'agit d'une relation transitive. Soit θ_1, θ_2 et θ_3 des caractères simples maximaux tels que θ_1, θ_2 soient endo-équivalents, ainsi que θ_2, θ_3. Pour θ_1, θ_2, il y a des strates simples maximales $[\mathfrak{a}_1,\beta_1]$, $[\mathfrak{a}_2,\beta_2]$ et $[\mathfrak{a}',\beta'_1]$, $[\mathfrak{a}',\beta'_2]$ comme ci-dessus. Pour θ_2, θ_3, il y a des strates simples maximales $[\mathfrak{a}^*_2,\beta^*_2]$ et $[\mathfrak{a}^*_3,\beta^*_3]$ dans A_2 et A_3 telles que :

(1) $\theta_2 \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}^*_2,\beta^*_2)$ et $\theta_3 \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}^*_3,\beta^*_3])$,

(2) les extensions $F[\beta^*_2]$ et $F[\beta^*_3]$ ont le même degré sur F,

(3) il y a une F-algèbre centrale simple A'' et des strates simples maximales $[\mathfrak{a}'',\beta''_2]$ et $[\mathfrak{a}'',\beta''_3]$ dans A'' telles que θ_2 et θ_3 se transfèrent en des caractères simples $\theta''_2 \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}'',\beta''_2)$ et $\theta''_3 \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}'',\beta''_3)$ qui s'entrelacent dans $A''^{\times}$.

Quitte a transférer à nouveau ces caractères simples, on peut même supposer que les F-algèbres centrales simples A' et A'' sont déployées, ce qui ne change pas le fait qu'ils s'entrelacent d'après [**11**] Theorem 1.11. Comme $\theta_2 \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}_2,\beta_2) \cap \mathcal{C}(\mathfrak{a}^*_2,\beta^*_2)$ est maximal, la proposition 3.6 implique :

$$\mathfrak{a}^*_2 = \mathfrak{a}_2, \quad e_{F[\beta^*_2]/F} = e_{F[\beta_2]/F}, \quad f_{F[\beta^*_2]/F} = f_{F[\beta_2]/F}.$$

On en déduit d'une part que les extensions $F[\beta_1]$ et $F[\beta^*_3]$ ont le même degré sur F, d'autre part qu'il existe une F-algèbre centrale simple déployée A° et des strates simples maximales $[\mathfrak{a}^\circ,\beta^\circ_1]$, $[\mathfrak{a}^\circ,\beta^\circ_2]$ et $[\mathfrak{a}^\circ,\beta^\circ_3]$ dans A° telles que les caractères θ_1, θ_2 et θ_3 se transfèrent en des caractères simples $\theta^\circ_1 \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}^\circ,\beta^\circ_1)$, $\theta^\circ_2 \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}^\circ,\beta^\circ_2)$, et $\theta^\circ_3 \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}^\circ,\beta^\circ_3)$. Comme θ'_1 et θ'_2 s'entrelacent dans $A'^{\times}$, il suit à nouveau de [**11**] Theorem 1.11 que θ°_1 et θ°_2 s'entrelacent dans $A^{\circ\times}$, et de [**21**] Theorem 3.5.11 qu'ils sont conjugués sous $A^{\circ\times}$. Faisant de même avec θ''_2 et θ''_3, on trouve que θ°_2, θ°_3 sont conjugués sous $A^{\circ\times}$. Par conséquent, θ°_1 et θ°_3 sont conjugués, donc s'entrelacent dans $A^{\circ\times}$. □

Une classe d'équivalence pour cette relation sur $\mathcal{C}_{\max}(F)$ est appelée une *F-endo-classe*. On note $\mathcal{E}(F)$ l'ensemble des F-endo-classes. Nous regroupons dans la proposition suivante les principales propriétés des endo-classes dont nous nous servirons par la suite ([**12, 57**]).

Proposition 3.19. — *Soit A une F-algèbre centrale simple, et soit $G = A^{\times}$.*

(1) *Deux caractères simples maximaux de G conjugués l'un de l'autre sont endo-équivalents.*

(2) *Supposons que G soit déployé sur F. Alors deux caractères simples maximaux de G sont endo-équivalents si et seulement s'ils sont conjugués sous G.*

(3) *Deux caractères simples maximaux contenus dans une même représentation cuspidale de G sont endo-équivalents, et même conjugués sous G.*

Étant donné un caractère simple maximal $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a},\beta)$, le degré de $F[\beta]/F$, son indice de ramification et son degré résiduel dépendent uniquement de son endo-classe $\boldsymbol{\Theta}$. Ces entiers sont appelés respectivement le degré, l'indice de ramification et le degré résiduel de $\boldsymbol{\Theta}$. Cette extension $F[\beta]$ n'est pas uniquement déterminée, mais sa sous-extension modérément ramifiée maximale l'est, à F-isomorphisme près ; on l'appelle *l'extension modérée paramétrique* de $\boldsymbol{\Theta}$ ([**20**] 2.2, 2.4).

Définition 3.20. — L'*endo-classe* d'une représentation cuspidale π de G est l'endo-classe de n'importe quel caractère simple maximal contenu dans π.

Remarque 3.21. — L'endo-classe nulle est l'endo-classe d'un caractère simple maximal trivial associé à une strate simple maximale nulle (voir la remarque 3.2). Une représentation cuspidale de G est d'endo-classe nulle si et seulement si elle est de niveau 0, c'est-à-dire si et seulement si elle admet un vecteur non nul invariant par $\mathbf{U}^1(\mathfrak{a})$, où $\mathfrak{a}$ est un ordre maximal quelconque de A.

3.6.

Nous déduisons des paragraphes 3.4 et 3.5 le résultat complémentaire suivant.

Proposition 3.22. — *Soit* $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ *un type de* G*. Le caractère simple* θ *vérifiant les conditions* (1.a) *et* (1.b) *de la proposition 3.8 est unique.*

Démonstration. — Soit θ' un caractère simple maximal de G vérifiant les conditions (1.a) et (1.b) ci-dessus. Soit $[\mathfrak{a}, \beta]$ et $[\mathfrak{a}', \beta']$ des strates simples dans A telles que $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ et $\theta' \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}', \beta')$. Ces caractères simples sont endo-équivalents car ils apparaissent dans la même représentation cuspidale $\mathrm{ind}_{\mathbf{J}}^{G}(\boldsymbol{\lambda})$, et ils sont même conjugués par un élément $g \in G$ (voir le théorème 3.10 et la proposition 3.19). On a donc $\theta' = \theta^g \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}^g, \beta^g)$ et $\mathbf{J}_{\theta'} = \mathbf{J}_{\theta}^{g}$, ce qui, par unicité du sous-groupe compact maximal de $\mathbf{J}_{\theta}$, donne $\mathbf{J}^0 = (\mathbf{J}^0)^g$.

Restreignant $\boldsymbol{\lambda}$ au pro-p-sous-groupe $H_{\theta}^{1} \cap H_{\theta'}^{1} = H_{\theta}^{1} \cap (H_{\theta}^{1})^g$, on a l'égalité $\theta^g = \theta$ sur ce sous-groupe, c'est-à-dire que g entrelace θ, donc $g \in \mathbf{J}^1 B^{\times} \mathbf{J}^1$. Comme $\mathbf{J}^1$ normalise θ, on peut supposer que $g \in B^{\times}$. Intersectant avec $B^{\times}$, l'identité $\mathbf{J}^0 = (\mathbf{J}^0)^g$ donne $\mathfrak{b}^{\times} = \mathfrak{b}^{\times g}$, c'est-à-dire que g normalise $\mathfrak{b}$, donc g normalise θ. $\square$

Le caractère simple θ est dit *attaché* au type $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$.

Remarque 3.23. — (1) Si un type contient toujours un unique caractère simple qui lui est attaché, un même caractère simple peut être attaché à des types non isomorphes.

(2) Si π est une représentation cuspidale de G, deux types contenus dans π ont le même caractère simple attaché θ si et seulement s'ils sont conjugués sous $\mathbf{J}_{\theta}$.

(3) Si A est déployée sur F, et si $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ est un type de caractère simple attaché θ, alors $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\theta}$. Par conséquent, une représentation cuspidale de G contenant θ contient un unique type de caractère simple attaché θ.

3.7.

Si θ est un caractère simple maximal de G et si $[\mathfrak{a}, \beta]$ est une strate simple dans A telle que $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$, alors $[\mathfrak{a}, -\beta]$ est une strate simple dans A et $\theta^{-1} \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, -\beta)$.

Deux caractères simples maximaux sont endo-équivalents si et seulement si leurs inverses sont endo-équivalents. Par conséquent, étant donné une endo-classe $\boldsymbol{\Theta} \in \mathcal{E}(F)$ et un caractère simple maximal θ d'endo-classe $\boldsymbol{\Theta}$, l'endo-classe de θ^{-1} ne dépend pas du choix de θ. On la note $\boldsymbol{\Theta}^{\vee}$.

Définition 3.24. — Une endo-classe $\boldsymbol{\Theta} \in \mathcal{E}(F)$ est dite *autoduale* si $\boldsymbol{\Theta}^{\vee} = \boldsymbol{\Theta}$.

Nous terminons cette section par le lemme suivant, qui sera utilisé à plusieurs reprises dans la suite de ce travail.

Lemme 3.25. — *Soient A_1 et A_2 des F-algèbres centrale simples, soient $[\mathfrak{a}_1,\beta_1]$ et $[\mathfrak{a}_2,\beta_2]$ des strates simples respectivement dans A_1 et A_2, soient $\theta_1\in\mathcal{C}(\mathfrak{a}_1,\beta_1)$ et $\theta_2\in\mathcal{C}(\mathfrak{a}_2,\beta_2)$ des caractères simples maximaux et soient u_1 et u_2 des éléments inversibles de A_1 et A_2 respectivement. Supposons que θ_2 soit le transfert de θ_1. Pour chaque $i\in\{1,2\}$, notons σ_i l'automorphisme intérieur de conjugaison par u_i, supposons que $\mathfrak{a}_i$ est stable par σ_i et que $\sigma_i(\beta_i)=-\beta_i$. Alors $\theta_1\circ\sigma_1=\theta_1^{-1}$ si et seulement si $\theta_2\circ\sigma_2=\theta_2^{-1}$.*

Démonstration. — Désignons respectivement par $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\tau}'$, $\boldsymbol{\tau}''$ les transferts de $\mathcal{C}(\mathfrak{a}_1,\beta_1)$ à $\mathcal{C}(\mathfrak{a}_2,\beta_2)$, de $\mathcal{C}(\sigma_1(\mathfrak{a}_1),\sigma_1(\beta_1))$ à $\mathcal{C}(\sigma_2(\mathfrak{a}_2),\sigma_2(\beta_2))$ et de $\mathcal{C}(\mathfrak{a}_1,-\beta_1)$ à $\mathcal{C}(\mathfrak{a}_2,-\beta_2)$. D'après la remarque 3.16 le transfert de $\mathcal{C}(\mathfrak{a}_i,\beta_i)$ à $\mathcal{C}(\sigma_i(\mathfrak{a}_i),\sigma_i(\beta_i))$ est donné par la conjugaison par u_i. Les propriétés de composition des transferts font donc que $\boldsymbol{\tau}'\circ\sigma_1$ est égal à $\sigma_2\circ\boldsymbol{\tau}$. Puis, compte tenu de l'hypothèse faite sur les strates simples, [**11**] Theorem 7.8 assure que $\boldsymbol{\tau}''$ est égal à $\boldsymbol{\tau}'$. Enfin, supposant que $\theta_1\circ\sigma_1=\theta_1^{-1}$, on a :

$$\theta_2\circ\sigma_2=\boldsymbol{\tau}'(\theta_1\circ\sigma_1)=\boldsymbol{\tau}''(\theta_1^{-1})=\boldsymbol{\tau}(\theta_1)^{-1}=\theta_2^{-1},$$

l'avant-dernière égalité venant de ce que le transfert est compatible à l'inversion. □

4. Représentations cuspidales autoduales de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$

À partir de maintenant, et ce jusqu'à la fin de cet article, on suppose que F est de caractéristique résiduelle $p\neq 2$.

Dans cette section, nous étudions les propriétés des représentations cuspidales autoduales de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ du point de vue de la théorie des types. Plus précisément, nous montrons que toute représentation cuspidale autoduale de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ contient un caractère simple – et même un type – possédant des propriétés remarquables. Le résultat principal de cette section est la proposition 4.5 (que l'on comparera avec [**3**] Theorem 4.1).

4.1.

Fixons un entier $n\geqslant 1$, et écrivons $G=\mathrm{GL}_{2n}(F)$ et $A=\mathbf{M}_{2n}(F)$. Notre point de départ sera le résultat suivant de Blondel.

Théorème 4.1 **([7] Theorem 1).** — *Soit π une représentation cuspidale irréductible de G. On suppose que π est autoduale. Il y a une strate simple $[\mathfrak{a},\beta]$ dans A, un caractère simple $\theta\in\mathcal{C}(\mathfrak{a},\beta)$ contenu dans π et un élément $u\in\mathfrak{a}^\times$ tels que $\theta^u=\theta^{-1}$ et $\beta^u=-\beta$.*

Faisons tout de suite quelques remarques sur ce résultat.

Remarque 4.2. — Posons $E=F[\beta]$, notons B le centralisateur de E dans A et $\mathbf{J}$ le normalisateur de θ dans G.

(1) Si π est de niveau 0, l'ordre $\mathfrak{a}$ est maximal, on a $\beta=0$, le caractère simple θ est trivial et on peut prendre pour u n'importe quel élément de $\mathfrak{a}^\times$.

(2) Si π est de niveau non nul, le centralisateur de u dans E est le sous-corps $E_0=F[\beta^2]$, l'extension E/E_0 est quadratique et $\mathrm{Ad}(u)$, l'automorphisme intérieur de conjugaison par u dans G, induit sur E l'automorphisme non trivial de E/E_0. En outre, on a $u\notin\mathbf{J}$ et $u^2\in\mathbf{J}\cap B^\times=\mathfrak{b}^\times$.

(3) Si $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ est le type (unique d'après la remarque 3.23) contenu dans π dont le caractère simple attaché est θ, alors $\mathbf{J}^u = \mathbf{J}$ et $\boldsymbol{\lambda}^u$ est isomorphe à $\boldsymbol{\lambda}^\vee$.

(4) Un élément $v \in \mathfrak{a}^\times$ vérifie $\theta^v = \theta^{-1}$ et $\beta^v = -\beta$ si et seulement si $uv^{-1} \in \mathbf{J} \cap B^\times$.

4.2.

En niveau non nul, nous aurons besoin de la version raffinée suivante du théorème 4.1.

Proposition 4.3. — *Soit* $\boldsymbol{\Theta}$ *une* F*-endo-classe autoduale non nulle de degré divisant* $2n$*, et soit* θ *un caractère simple maximal dans* G *d'endo-classe* $\boldsymbol{\Theta}$*. Il existe une strate simple* $[\mathfrak{a}, \beta]$ *dans* A *telle que* $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ *et un élément* $u \in \mathfrak{a}^\times$ *tel que :*

(1) *on a* $\theta^u = \theta^{-1}$ *et* $\beta^u = -\beta$*,*

(2) *on a* $u^2 = 1$ *et les valeurs propres* -1 *et* 1 *de* u *ont la même multiplicité* n*,*

(3) *posant* $E = F[\beta]$ *et* $m = 2n/[E : F]$*, il y a un isomorphisme de* F*-algèbres* $\phi \in \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \beta)$ *de* A *dans* $\mathbf{M}_m(\mathrm{End}_F(E))$ *tel que* $\phi(u) = \mathrm{diag}(v, \ldots, v)$ *pour un* $v \in \mathrm{End}_F(E)$*.*

Démonstration. — Soit $[\mathfrak{a}', \beta']$ une strate simple maximale dans A telle que $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}', \beta')$. Posons $E' = F[\beta']$ et notons $\theta' \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}_{E'/F}, \beta')$ le transfert de θ au groupe $G' = \mathrm{GL}_F(E')$, où $\mathfrak{a}_{E'/F}$ désigne l'unique ordre héréditaire de $\mathrm{End}_F(E')$ normalisé par $E'^\times$. D'après [**8**] Lemma 7.2, il existe une représentation irréductible cuspidale autoduale π' de G' contenant θ'. Le théorème 4.1 appliqué à π' fournit une strate simple $[\mathfrak{a}_1, \beta_1]$ dans $\mathrm{End}_F(E')$, un caractère simple $\vartheta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}_1, \beta_1)$ et un $z \in \mathfrak{a}_1^\times$ tels que $\vartheta^z = \vartheta^{-1}$ et $\beta_1^z = -\beta_1$. Le caractère ϑ étant contenu dans π', il est G'-conjugué à θ' d'après la proposition 3.19. Quitte à conjuguer $[\mathfrak{a}_1, \beta_1]$ et ϑ, on peut donc supposer que ϑ est égal à θ'. D'après la proposition 3.6, on a alors $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_{E'/F}$, et on a $e_{E'/F} = e_{E/F}$ et $f_{E'/F} = f_{E/F}$, où l'on a posé $E = F[\beta_1]$.

Passons maintenant de $\mathrm{End}_F(E')$ à $\mathrm{End}_F(E)$. Pour cela, considérons le plongement canonique de F-algèbres de E dans $\mathrm{End}_F(E)$, et notons θ_1 le transfert de ϑ à $\mathcal{C}(\mathfrak{a}_{E/F}, \beta_1)$. D'après le théorème de Skolem-Noether, il existe un isomorphisme ξ de F-algèbres de $\mathrm{End}_F(E')$ dans $\mathrm{End}_F(E)$ prolongeant l'identité sur E. Il envoie $\mathfrak{a}_1$ sur $\mathfrak{a}_{E/F}$ et, si l'on note $v = \xi(z)$, on a $\beta_1^v = -\beta_1$ et le lemme 3.25 assure que $\theta_1^v = \theta_1^{-1}$.

Passons maintenant de $\mathrm{End}_F(E)$ à $\mathbf{M}_m(\mathrm{End}_F(E))$. Notons $\mathfrak{a}_2$ l'ordre héréditaire $\mathbf{M}_m(\mathfrak{a}_{E/F})$ et β_2 l'élément $\mathrm{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_1)$ dans la F-algèbre $\mathbf{M}_m(\mathrm{End}_F(E))$. Si l'on pose $w = \mathrm{diag}(v, \ldots, v)$, on a $w \in \mathfrak{a}_2^\times$ et $\beta_2^w = -\beta_2$. Invoquant à nouveau le lemme 3.25, le transfert θ_2 de θ_1 à $\mathcal{C}(\mathfrak{a}_2, \beta_2)$ vérifie $\theta_2^w = \theta_2^{-1}$.

Passons enfin de $\mathbf{M}_m(\mathrm{End}_F(E))$ à A. Fixons un isomorphisme de F-algèbres $\phi \in \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \beta)$ de A dans $\mathbf{M}_m(\mathrm{End}_F(E))$ et définissons une strate simple $[\mathfrak{a}, \beta]$ en posant $\mathfrak{a} = \phi^{-1}(\mathfrak{a}_2)$ et $\beta = \phi^{-1}(\beta_2)$. Notons θ_3 le transfert de θ_2 à $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$. Les extensions E et E' ayant le même indice de ramification e, les ordres $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ ont la même période, égale à e. Ils sont donc conjugués par un $g \in G$. Quitte à conjuguer ϕ par g, on peut donc supposer que $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ sont égaux. Les caractères simples θ_3 et θ étant (maximaux et) endo-équivalents puisqu'ils ont des transferts ϑ et θ' qui s'entrelacent (et qui sont même égaux), ils sont conjugués sous $\mathfrak{a}^\times$. Quitte à conjuguer à nouveau ϕ, on peut donc supposer qu'ils sont égaux, de sorte que $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$. La strate simple $[\mathfrak{a}, \beta]$ et $u = \phi^{-1}(w)$ vérifient les propriétés (1) et (3).

Il reste à prouver que l'on peut choisir u tel que $u^2 = 1$ et tel que les valeurs propres -1 et 1 aient la même multiplicité, ce qu'il suffit de faire pour l'élément $z \in \mathfrak{a}_1^\times$ ci-dessus, c'est-à-dire lorsque $m = 1$. Supposons que ce soit le cas, et identifions la F-algèbre A à $\mathrm{End}_F(E)$ et l'ordre $\mathfrak{a}$ à $\mathfrak{a}_{E/F}$. La décomposition $E = E_0 \oplus \beta E_0$ induit un isomorphisme de F-algèbres :

$$\mathrm{End}_F(E) \simeq \mathbf{M}_2(\mathrm{End}_F(E_0)).$$

Le centralisateur de E_0 dans A s'identifie à $\mathbf{M}_2(E_0)$, à l'intérieur de quoi E est formé des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} x & y \\ \beta^2 y & x \end{pmatrix}, \quad x, y \in E_0.$$

Posant :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(E_0) \subseteq A,$$

on observe d'une part que $z\sigma^{-1}$ appartient à $\mathfrak{a}^\times$ par construction, d'autre part qu'il appartient au centralisateur B de E car z et σ agissent par conjugaison sur E de la même façon. On a donc $v\sigma^{-1} \in \mathfrak{a}^\times \cap B^\times$ (notons que $B = E$ car E est maximale dans A) et il suit de la remarque 4.2(4) qu'on a les propriétés voulues. $\square$

4.3.

Nous allons réinterpréter les résultats des deux paragraphes précédents en changeant de point de vue.

Soit σ un élément de G tel que $\sigma^2 = 1$ et dont les valeurs propres -1 et 1 aient la même multiplicité n, c'est-à-dire que le centralisateur de σ dans G est conjugué à $\mathrm{GL}_n(F) \times \mathrm{GL}_n(F)$, ou encore que le polynôme caractéristique de σ sur F est égal à $(X^2-1)^n$. L'automorphisme intérieur $\mathrm{Ad}(\sigma)$ de G sera simplement noté σ. Ainsi, on notera $\sigma(x) = \sigma x \sigma^{-1}$ pour tout $x \in G$.

Définition 4.4. — (1) Un caractère simple θ dans G est σ-*autodual* si $\theta \circ \sigma = \theta^{-1}$.

(2) Un type $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ dans G est σ-*autodual* si $\mathbf{J}$ est stable par σ et $\boldsymbol{\lambda}^\sigma$ est isomorphe à $\boldsymbol{\lambda}^\vee$.

(3) Une strate simple $[\mathfrak{a}, \beta]$ dans A est σ-*autoduale* si $\mathfrak{a}$ est stable par σ et $\sigma(\beta) = -\beta$.

On a le résultat suivant.

Proposition 4.5. — *Soit* $\boldsymbol{\Theta}$ *une* F*-endo-classe autoduale non nulle de degré divisant* $2n$*. Il y a une strate simple maximale* σ*-autoduale* $[\mathfrak{a}, \beta]$ *dans* A *possédant les propriétés suivantes :*

(1) *L'ensemble* $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ *contient un caractère simple* σ*-autodual d'endo-classe* $\boldsymbol{\Theta}$*.*

(2) *Posons* $E = F[\beta]$*,* $E_0 = F[\beta^2]$ *et* $m = 2n/[E : F]$*. Il existe un isomorphisme de* F*-algèbres* $\phi \in \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \beta)$ *tel que* σ *agisse sur* $B^\times$*, identifié à* $\mathrm{GL}_m(E)$ *par* ϕ*, comme l'automorphisme non trivial de* $\mathrm{Gal}(E/E_0)$*.*

(3) *Pour tout* ϕ *comme en* (2)*, notant* $\boldsymbol{l}$ *le corps résiduel de* E *et* $\boldsymbol{l}_0$ *celui de* E_0*, l'action induite par* σ *sur le groupe fini* $\mathbf{J}^0(\mathfrak{a}, \beta)/\mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta) \simeq \mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$ *est celle du générateur de* $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{l}/\boldsymbol{l}_0)$*.*

Démonstration. — Fixons un caractère simple maximal θ dans G d'endo-classe $\boldsymbol{\Theta}$. D'après la proposition 4.3, il existe une strate simple $[\mathfrak{a}, \beta]$ dans A et un $u \in \mathfrak{a}^\times$ tels que $u^2 = 1$, le polynôme caractéristique de u sur F soit égal à $(X^2-1)^n$ et la strate simple $[\mathfrak{a}, \beta]$ et le caractère simple θ

soient u-autoduaux. En outre, il existe un $\phi \in \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \beta)$ tel que $\phi(u)$ soit de la forme $\mathrm{diag}(v, \dots, v)$ pour un $v \in \mathrm{End}_F(E)$. Comme σ et u ont le même polynôme caractéristique $(X^2 - 1)^n$ et le même polynôme minimal $X^2 - 1$, il existe un $x \in G$ tel que $u = x\sigma x^{-1}$. Remplaçant $[\mathfrak{a}, \beta]$ et θ par leurs conjugués par x, les propriétés (1) et (2) sont vérifiées. Enfin, la dernière propriété suit de ce que σ agit sur $\mathbf{J}^0(\mathfrak{a}, \beta)/\mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta) \simeq \mathfrak{b}^\times/\mathbf{U}^1(\mathfrak{b})$ comme $\phi(\sigma)$ agit sur $\mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_E)/(1 + \mathbf{M}_m(\mathfrak{p}_E))$, qui est naturellement isomorphe à $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$. □

On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 4.6. — *Soit π une représentation irréductible cuspidale de G. Alors π est autoduale si et seulement si elle contient un type σ-autodual.*

Démonstration. — Si π contient un type σ-autodual $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ de G, sa contragrédiente $\pi^\vee$ contient le type $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda}^\vee)$. On a donc :

$$\pi^\vee \simeq \mathrm{ind}_{\mathbf{J}}^G(\boldsymbol{\lambda}^\vee) \simeq \mathrm{ind}_{\mathbf{J}}^G(\boldsymbol{\lambda}^\sigma) \simeq \pi.$$

Supposons maintenant que π soit autoduale.

Si la représentation π est de niveau 0, elle contient un type $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ avec $\mathbf{J} = F^\times \mathrm{GL}_{2n}(\mathcal{O}_F)$. On peut supposer que σ est diagonal, auquel cas il normalise $\mathbf{J}$. Alors π contient à la fois $\boldsymbol{\lambda} \simeq \boldsymbol{\lambda}^\sigma$ et $\boldsymbol{\lambda}^\vee$, qui sont donc conjugués par un élément $g \in G$ normalisant $\mathbf{J}$. On a donc $g \in \mathbf{J}$, et il s'ensuit que $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ est σ-autodual.

Supposons maintenant que π soit de niveau non nul. Son endo-classe est non nulle et autoduale. D'après la proposition 4.5, elle contient un caractère simple σ-autodual $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ pour une strate simple σ-autoduale $[\mathfrak{a}, \beta]$ dans A. Le normalisateur $\mathbf{J}$ de θ dans G est donc normalisé par σ. Soit $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ un type attaché à θ et contenu dans π. Alors $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda}^\sigma)$ et $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda}^\vee)$ sont tous deux des types contenus dans π et contenant le caractère simple $\theta^\sigma = \theta^{-1}$. Ils sont donc conjugués par un $g \in G$ normalisant ce caractère, donc $g \in \mathbf{J}$, c'est-à-dire que $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ est σ-autodual. □

Remarque 4.7. — La preuve du corollaire 4.6 montre que toute représentation cuspidale autoduale de G de niveau non nul contient non seulement un type σ-autodual, mais plus précisément un type σ-autodual associé à une strate simple σ-autoduale $[\mathfrak{a}, \beta]$ dans A possédant les propriétés de la proposition 4.5.

Compte tenu de cette remarque, il est naturel de se demander si un caractère simple maximal (ou un type) σ-autodual est toujours associé à une strate σ-autoduale. Le lemme 5.4 répondra à cette question dans un cadre plus général. Une telle strate ne vérifiera cependant pas toujours les propriétés (2) et (3) de la proposition 4.5 : voir la proposition 5.24.

4.4.

Soit $\boldsymbol{\Theta}$ une F-endo-classe autoduale non nulle de degré divisant $2n$. D'après la proposition 4.5, il existe une strate simple maximale σ-autoduale $[\mathfrak{a}, \beta]$ dans A et un caractère simple σ-autodual $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ d'endo-classe $\boldsymbol{\Theta}$. Posons $E = F[\beta]$ et $E_0 = F[\beta^2]$. Soit T la sous-extension modérément ramifiée maximale de E sur F. Alors $T_0 = T \cap E_0$ est la sous-extension modérément ramifiée maximale de E_0 sur F, et l'extension T/T_0 est quadratique.

Proposition 4.8. — (1) *La classe de F-isomorphisme de T/T_0 dépend uniquement de $\boldsymbol{\Theta}$, et pas de l'entier n, ni du choix de $[\mathfrak{a}, \beta]$.*

(2) *L'extension T/T_0 est ramifiée si et seulement si E/E_0 est ramifiée.*

(3) *On a $\mathrm{N}_{E/E_0}(E^\times) \cap F^\times = \mathrm{N}_{T/T_0}(T^\times) \cap F^\times$.*

Démonstration. — La première assertion suit de [**8**] Proposition 6.7, et les deux autres du fait que E est totalement sauvagement ramifiée sur T et que $p \neq 2$. □

Nous terminons cette section par le résultat suivant, qui jouera un rôle important par la suite.

Lemme 4.9. — *Soit π une représentation cuspidale autoduale de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ de niveau non nul et d'endo-classe $\boldsymbol{\Theta}$. Soit T/T_0 l'extension quadratique associée à $\boldsymbol{\Theta}$, et soit $m = 2n/\deg(\boldsymbol{\Theta})$.*

(1) *Si T/T_0 est non ramifiée, alors m est impair.*

(2) *Si T/T_0 est ramifiée, alors m est soit pair, soit égal à 1.*

Démonstration. — D'après la remarque 4.7, la représentation cuspidale π contient un caractère simple σ-autodual θ associé à une strate simple σ-autoduale $[\mathfrak{a}, \beta]$ dans A possédant les propriétés de la proposition 4.5. Posons $E = F[\beta]$ et $E_0 = F[\beta^2]$. Le degré de $\boldsymbol{\Theta}$ et égal à $[E : F]$, et T/T_0 est ramifiée si et seulement si E/E_0 est ramifiée. Notons $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathfrak{a}, \beta)$ le normalisateur de θ dans G, ainsi que $\mathbf{J}^0 = \mathbf{J}^0(\mathfrak{a}, \beta)$ et $\mathbf{J}^1 = \mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta)$.

Soit η la représentation de Heisenberg de $\mathbf{J}^1$ associée au caractère simple θ. Le fait que θ soit σ-autodual et la propriété d'unicité de η impliquent que $\eta^{\sigma\vee}$ est isomorphe à η. Si $\boldsymbol{\kappa}$ prolonge η à $\mathbf{J}$, il existe donc, compte tenu de la proposition 3.9(1), un unique caractère μ de $\mathbf{J}$ trivial sur $\mathbf{J}^1$ tel que $\boldsymbol{\kappa}^{\sigma\vee}$ soit isomorphe à $\boldsymbol{\kappa}\mu$, et l'unicité de μ implique que $\mu \circ \sigma = \mu$. Il existe aussi une unique représentation irréductible $\boldsymbol{\rho}$ de $\mathbf{J}$ triviale sur $\mathbf{J}^1$ telle que $\boldsymbol{\lambda}$ soit isomorphe à $\boldsymbol{\kappa} \otimes \boldsymbol{\rho}$. Il s'ensuit que $\boldsymbol{\rho}^{\sigma\vee}$ est isomorphe à $\boldsymbol{\rho}\mu^{-1}$.

Notons ρ la représentation de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$ obtenue en restreignant $\boldsymbol{\rho}$ à $\mathbf{J}^0$. Faisant de même avec μ, on obtient un caractère de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$ de la forme $\chi \circ \det$, où χ est un caractère de $\boldsymbol{l}^\times$. Soit une extension $\boldsymbol{t}$ de $\boldsymbol{l}$ de degré m dans $\mathsf{M}_m(\boldsymbol{l})$, et considérons $\boldsymbol{t}^\times$ comme un tore maximal de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$. Fixons un caractère $\boldsymbol{l}$-régulier ξ de $\boldsymbol{t}^\times$ (c'est-à-dire que ses conjugués sous $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{t}/\boldsymbol{l})$ sont distincts deux à deux) paramétrant la représentation cuspidale ρ au sens de [**32**], c'est-à-dire que :

$$\mathrm{tr}\ \rho(x) = (-1)^{m-1} \cdot \sum_{\gamma} \xi^{\gamma}(x) \tag{4.1}$$

pour tout $x \in \boldsymbol{t}^\times$ dont le polynôme caractéristique est irréductible sur $\boldsymbol{l}$, la somme étant prise sur $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{t}/\boldsymbol{l})$. Notons $\mathrm{N}_{\boldsymbol{t}/\boldsymbol{l}}$ la norme de $\boldsymbol{t}^\times$ vers $\boldsymbol{l}^\times$. L'action de σ sur $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$ est celle du générateur de $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{l}/\boldsymbol{l}_0)$.

Supposons d'abord que E/E_0 soit ramifiée, et notons q le cardinal du corps résiduel de E. La relation $\rho^{\sigma\vee} \simeq \rho(\chi^{-1} \circ \det)$ implique l'existence d'un entier $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ tel que :

$$\xi^{q^i+1} = \chi \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{t}/\boldsymbol{l}}.$$

Il s'ensuit que $\xi = \xi^{q^{2i}}$. Le caractère ξ étant $\boldsymbol{l}$-régulier, m divise $2i$. Si i est non nul, on obtient $m = 2i$. Sinon, à nouveau par régularité de ξ, on trouve que $m \leqslant 2$.

Supposons maintenant que E/E_0 soit non ramifiée, et notons q_0 le cardinal du corps résiduel de E_0. On a donc $q = q_0^2$. De façon analogue au cas ramifié, il existe un $i \in \{0, \dots, m-1\}$ tel que $\xi^{q^i+q_0} = \chi \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{t}/\boldsymbol{l}}$. Observons que la relation $\mu \circ \sigma = \mu$ entraîne que $\chi^{q_0} = \chi$, et par conséquent $\xi^q = \xi^{q^{2i}}$. Le caractère ξ étant $\boldsymbol{l}$-régulier, m divise $2i-1$, et il est donc impair. Ceci met fin à la preuve du lemme 4.9. □

5. Involutions intérieures sur les formes intérieures de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$

Dans cette section, nous élargissons le cadre de notre étude en remplaçant le groupe $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ par une forme intérieure et l'involution σ par une involution plus générale. Ce nouveau cadre est fixé au paragraphe 5.1.

5.1.

Soit A une F-algèbre centrale simple de degré réduit $2n$. Fixons un A-module à gauche simple V, et notons D la F-algèbre opposée à $\mathrm{End}_A(V)$. C'est une F-algèbre à division centrale, V est un D-espace vectoriel à droite et A s'identifie naturellement à la F-algèbre $\mathrm{End}_D(V)$. Notons r la dimension de V sur D et d le degré réduit de D sur F, de sorte que $2n = rd$.

Posons $G = A^\times$, fixons un $\alpha \in F^\times$ et fixons un $\kappa \in G$ non central tel que $\kappa^2 = \alpha$. Ceci définit une involution $\tau : g \mapsto \kappa g \kappa^{-1}$ du groupe G. Remplacer κ par $x\kappa x^{-1}$ pour un $x \in G$ a pour effet de changer τ en l'involution conjuguée :

$$x \cdot \tau = \mathrm{Ad}(x) \circ \tau \circ \mathrm{Ad}(x)^{-1}$$

et on a $G^{x\cdot\tau} = xG^\tau x^{-1}$. Par ailleurs, remplacer κ par $\lambda\kappa$ pour un $\lambda \in F^\times$ a pour effet de changer α en $\alpha\lambda^2$ sans changer τ. On peut donc considérer α modulo le sous-groupe $F^{\times 2}$.

Lemme 5.1. — *Soit $\mathcal{O}(\alpha)$ l'ensemble des éléments $\kappa \in G$ non centraux tels que $\kappa^2 = \alpha$.*

(1) *Si α n'est pas un carré de $F^\times$, alors $\mathcal{O}(\alpha)$ est formé d'une seule classe de G-conjugaison.*

(2) *S'il existe un $\lambda \in F^\times$ tel que $\alpha = \lambda^2$, alors pour tout entier $i \in \{1, \dots, r-1\}$, il existe une unique classe de G-conjugaison dans $\mathcal{O}(\alpha)$ dont le polynôme caractéristique réduit sur F soit égal à $(X+\lambda)^{di}(X-\lambda)^{d(r-i)}$.*

Démonstration. — L'assertion (1) est une conséquence du théorème de Skolem-Noether. S'il y a un $\lambda \in F^\times$ tel que $\alpha = \lambda^2$, on se ramène au cas où $\alpha = 1$ en appliquant $\kappa \mapsto \kappa\lambda^{-1}$. Supposons donc que $\alpha = 1$, et soit $\kappa \in G$ tel que $\kappa^2 = 1$. Considéré comme un F-endomorphisme de V, il définit une décomposition $V = \mathrm{Ker}(\kappa - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(\kappa + \mathrm{id})$ en sous-F-espaces propres. Comme κ est D-linéaire, ces F-espaces propres sont des D-espaces vectoriels. Le polynôme caractéristique réduit de κ sur F est donc de la forme :

$$\mathrm{Pcrd}_{A/F}(\kappa) = (X+1)^{di}(X-1)^{d(r-i)} \in F[X]$$

pour un unique $i \in \{0, \dots, r\}$, les éléments centraux correspondant à $i = 0$ et $i = r$. Ceci prouve l'assertion (2). □

Remarque 5.2. — On observera en particulier que, si A est une algèbre à division, c'est-à-dire si $r = 1$, les seuls $\sigma \in G$ tels que $\sigma^2 = 1$ sont 1 et -1, c'est-à-dire que $\mathcal{O}(1)$ est vide.

5.2.

Fixons un $\alpha \in F^\times$ et un $\kappa \in G$ non central tel que $\kappa^2 = \alpha$, définissant une involution τ de G. La définition suivante généralise naturellement la définition 4.4.

Définition 5.3. — (1) Un caractère simple θ dans G est τ-*autodual* si $\theta \circ \tau = \theta^{-1}$.

(2) Un type $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ dans G est τ-*autodual* si $\mathbf{J}$ est stable par τ et $\boldsymbol{\lambda}^\tau$ est isomorphe à $\boldsymbol{\lambda}^\vee$.

(3) Une strate simple $[\mathfrak{a}, \beta]$ dans A est τ-*autoduale* si $\mathfrak{a}$ est stable par τ et $\tau(\beta) = -\beta$.

Nous donnons maintenant une condition nécessaire d'existence dans G d'un caractère simple maximal τ-autodual.

Lemme 5.4. — *Soit θ un caractère simple maximal τ-autodual dans G. Alors il y a une strate simple maximale τ-autoduale $[\mathfrak{a}, \beta]$ dans A telle que $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$.*

Démonstration. — Soit θ un caractère simple maximal dans G, et soit $[\mathfrak{a}, \beta_0]$ une strate simple dans A telle que $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta_0)$. Alors $[\tau(\mathfrak{a}), -\tau(\beta_0)]$ est une strate simple dans A, et le caractère $\theta^{-1} \circ \tau$ appartient à $\mathcal{C}(\tau(\mathfrak{a}), -\tau(\beta_0))$. Supposons maintenant que θ soit τ-autodual. La proposition 3.6 implique que $\mathfrak{a}$ est stable par τ. Adaptant [**61**], Proposition 1.10, Theorem 6.3 au cas de τ, on en déduit qu'il existe un $\beta \in A$ tel que $[\mathfrak{a}, \beta]$ soit une strate simple τ-autoduale dans A et $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$. □

Posons $E = F[\beta]$ et $E_0 = F[\beta^2]$, et notons B le centralisateur de E dans A. Supposons que θ soit non trivial, c'est-à-dire que E/E_0 est quadratique. Du lemme 5.4 on déduit que :

– la conjugaison par κ induit sur E l'automorphisme non trivial de E/E_0, et sur son centralisateur B une E_0-involution,

– l'intersection $\mathfrak{a} \cap B$ est un ordre maximal de B stable par τ.

La majeure partie de cette section est consacrée à l'établissement d'une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un caractère simple maximal τ-autodual dans une représentation cuspidale autoduale de G de niveau non nul (voir le théorème 5.18). La cas des représentations de niveau 0 sera traité à la section 8.

Dans le cas où α est un carré de $F^\times$, nous adopterons dorénavant la convention suivante.

Convention 5.5. — *Par la suite, si α est un carré de $F^\times$, nous supposerons que $\alpha = 1$ et que r est pair, et que κ est un élément tel que $\kappa^2 = 1$ et $\mathrm{Pcrd}_{A/F}(\kappa) = (X^2 - 1)^n$. Nous adopterons la même notation qu'au paragraphe 4.3, c'est-à-dire que nous noterons σ aussi bien l'élément κ que l'automorphisme intérieur de conjugaison par κ.*

5.3.

Dans ce paragraphe, A est une F-algèbre centrale simple de degré réduit $2n$. Les notations du paragraphe 5.1 sont en vigueur. Fixons un $\alpha \in F^\times$ et un $\kappa \in G$ non central tels que $\kappa^2 = \alpha$. Soit E_0 une extension finie de F de degré divisant n, et soit E une extension quadratique de E_0.

Nous commençons par traiter le cas où α est un carré de $F^\times$ (voir la convention 5.5).

Lemme 5.6. — *Supposons que $r = 2k$ et fixons un élément $\sigma \in G$ tel que $\sigma^2 = 1$ et de polynôme caractéristique réduit $(X^2 - 1)^n$. Il existe un plongement de F-algèbres de E dans A tel que la conjugaison par σ induise sur E l'automorphisme non trivial de E/E_0.*

Démonstration. — Fixons un générateur β de E sur E_0 tel que $\beta^2 \in E_0$, et identifions A à la F-algèbre $\mathbf{M}_r(D)$ de façon que :

$$\sigma = \begin{pmatrix} -\mathrm{id} & 0 \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_k(D) \times \mathbf{M}_k(D) \subseteq A$$

où id est l'identité de $\mathbf{M}_k(D)$. La F-algèbre A^σ s'identifie donc à $\mathbf{M}_k(D) \times \mathbf{M}_k(D)$ dans laquelle il suffit de plonger E_0 diagonalement, ce qui est possible car $[E_0 : F]$ divise $kd = n$. Il suffit alors de plonger E de façon que l'image de β soit de la forme :

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

pour un $\gamma \in E_0^\times$. □

Nous traitons maintenant le cas plus difficile où α n'est pas un carré de $F^\times$, en commençant par un cas particulier.

Lemme 5.7. — *Supposons que α ne soit pas un carré de $F^\times$ et que $E_0 = F$. Pour qu'il existe un plongement de F-algèbres de E dans A tel que la conjugaison par κ induise sur E l'automorphisme non trivial de E/F, il faut et suffit qu'une des conditions suivantes soit vérifiée :*

(1) *ou bien $\alpha \in \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$ et r est pair,*
(2) *ou bien $\alpha \notin \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$ et r, n ont même parité.*

Démonstration. — Fixons un élément $\beta \in E^\times$ tel que $\gamma = \beta^2 \in F^\times$, et notons H la F-algèbre de dimension 4 de base $(1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ avec les relations :

$$\boldsymbol{i}^2 = \alpha, \quad \boldsymbol{j}^2 = \gamma, \quad \boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k}.$$

C'est une F-algèbre centrale simple de degré réduit 2. Notant $(\alpha, \gamma)_F$ le symbole de Hilbert de α et γ sur F, elle est déployée si $(\alpha, \gamma)_F = 1$, c'est-à-dire si $\alpha \in \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$, et c'est une algèbre à division si $(\alpha, \gamma)_F = -1$, c'est-à-dire si $\alpha \notin \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$. Pour qu'il y ait un plongement de F-algèbres de E dans A vérifiant la condition demandée, il faut et suffit qu'il existe un plongement de F-algèbres ϕ de H dans A tel que $\phi(\boldsymbol{i}) = \kappa$ et $\phi(\boldsymbol{j}) = \beta$. Comme α n'est pas un carré dans $F^\times$, le théorème de Skolem-Noether assure que deux éléments de A de carré égal à α sont conjugués sous G. Nous aurons donc résolu notre problème une fois déterminées les conditions auxquelles il existe un plongement de F-algèbres de H dans A.

Lemme 5.8. — *Soit un entier $k \geqslant 1$. Il y a un plongement de $\mathbf{M}_k(F)$ dans A si et seulement si k divise r.*

Démonstration. — C'est certainement une condition suffisante. Supposons que $\mathbf{M}_k(F)$ se plonge dans A. Son centralisateur C étant de même classe de Brauer que A, il est isomorphe à $\mathbf{M}_s(D)$ pour un certain $s \geqslant 1$, et son degré réduit $N = sd$ vérifie $kN = rd$, donc k divise r. □

Cela traite le cas où H est déployée, c'est-à-dire le cas où $\alpha \in \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$. Supposons maintenant que H soit une algèbre à division.

Lemme 5.9. — *Il y a un plongement de H dans A si et seulement s'il y a un plongement de $\mathsf{M}_4(F)$ dans $A \otimes_F H$.*

Démonstration. — C'est une condition nécessaire car $H \otimes_F H \simeq \mathsf{M}_4(F)$. Supposons que $\mathsf{M}_4(F)$ se plonge dans $A \otimes_F H$. Tensorisant par H, il s'ensuit que $\mathsf{M}_4(H)$ se plonge dans $\mathsf{M}_4(A)$. Soit C son centralisateur. On a un isomorphisme de F-algèbres $\mathsf{M}_4(A) \simeq \mathsf{M}_4(H) \otimes_F C$. Considérons maintenant $H \otimes_F C$. C'est une F-algèbre centrale simple de même dimension et de même classe de Brauer que A, de sorte qu'elle lui est isomorphe. La F-algèbre H se plonge donc dans A. □

Notons $h/d \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ l'invariant de Hasse de D, où h est un entier premier à d. Alors $A \otimes_F H$ est isomorphe à $\mathsf{M}_v(U)$ où U est une F-algèbre à division de degré réduit $u = 2d/(2d, 2h+d)$ et où $uv = 2rd$. D'après le lemme 5.8, $\mathsf{M}_4(F)$ se plonge dedans si et seulement si $v = r(2d, 2h+d)$ est divisible par 4. C'est le cas si et seulement si 4 divise r, ou si r et d sont pairs, ou si d est divisible par 2 mais pas par 4, c'est-à-dire si et seulement si r et $n = rd/2$ ont même parité. □

Remarque 5.10. — S'il existe un plongement de F-algèbres de E dans A satisfaisant aux conditions du lemme 5.7, le centralisateur de son image dans A, c'est-à-dire le centralisateur de κ et β dans A, est une F-algèbre centrale simple de même classe de Brauer que $A \otimes_F H$, isomorphe à $\mathsf{M}_l(U)$ avec :

$$u = \begin{cases} d & \text{si } \alpha \in \mathrm{N}_{E/F}(E^\times) \text{ ou si 4 divise } d \text{ (donc } r \text{ est pair)}, \\ 2d & \text{si } \alpha \notin \mathrm{N}_{E/F}(E^\times) \text{ et } d \text{ est impair (donc 4 divise } r), \\ d/2 & \text{si } \alpha \notin \mathrm{N}_{E/F}(E^\times) \text{ et } d \text{ est pair et } d/2 \text{ est impair,} \end{cases}$$

et $v = 4l$.

Nous traitons maintenant le cas général.

Corollaire 5.11. — *Pour qu'il existe un plongement de F-algèbres de E dans A tel que la conjugaison par κ induise sur E l'automorphisme non trivial de E/E_0, il faut et suffit qu'une des conditions suivantes soit vérifiée :*

(1) *si r est pair, alors $\alpha \in \mathrm{N}_{E/E_0}(E^\times)$ ou $2n/[E:F]$ est pair,*
(2) *si r est impair, alors $\alpha \notin \mathrm{N}_{E/E_0}(E^\times)$ et $2n/[E:F]$ est impair.*

Démonstration. — Le cas où α est un carré dans $F^\times$ découle du lemme 5.6 (et de la convention 5.5). Traitons maintenant le cas où α n'est pas un carré dans $F^\times$. Il faut d'abord plonger E_0 dans le centralisateur de κ dans A. La F-algèbre $K = F[\kappa]$ étant une extension quadratique, son centralisateur dans A est une K-algèbre centrale simple S de degré réduit n. Y plonger E_0 équivaut à fixer un morphisme de K-algèbres de $K \otimes_F E_0$ dans S. Soit E_1 un facteur direct de $K \otimes_F E_0$. C'est une extension de K de degré $[E_0 : F]$ ou $[E_0 : F]/2$. Dans les deux cas, on peut la plonger dans S car $[E_0 : F]$ divise n. Une fois ceci fait, il reste à plonger E comme E_0-algèbre dans le centralisateur A_0 de E_0 dans A, qui est une E_0-algèbre centrale simple contenant κ, de degré réduit $2n/[E_0 : F]$. Pour cela, on applique le lemme 5.7 en remplaçant F, A par E_0, A_0, le rôle de r étant joué par $t = 2n/\mathrm{ppcm}(d, [E_0 : F])$. On obtient donc les conditions :

(1) ou bien $\alpha \in \mathrm{N}_{E/E_0}(E^\times)$ et t est pair,
(2) ou bien $\alpha \notin \mathrm{N}_{E/E_0}(E^\times)$ et t, $2n/[E:F]$ ont même parité.

Il ne reste plus qu'à observer que t est pair si et seulement si $\mathrm{ppcm}(d,[E_0:F])$ divise n, c'est-à-dire si et seulement si d divise $n = rd/2$, c'est-à-dire si et seulement si r est pair. □

Remarque 5.12. — Selon la remarque 5.10, si l'on pose $g = [E_0 : F]$ et s'il y a un plongement de F-algèbres de E dans A satisfaisant aux conditions du corollaire 5.11, le centralisateur B_0 de κ et β dans A est une E_0-algèbre centrale simple isomorphe à $\mathbf{M}_l(C_0)$, où C_0 est une E_0-algèbre à division de degré réduit c_0 donné par le formulaire :

$$c_0 = \begin{cases} d/(d,g) & \text{si } \alpha \in \mathrm{N}_{E/E_0}(E^\times) \text{ ou si 4 divise } d/(d,g) \text{ (donc } t \text{ est pair)}, \\ 2d/(d,g) & \text{si } \alpha \notin \mathrm{N}_{E/E_0}(E^\times) \text{ et } d/(d,g) \text{ est impair (donc 4 divise } t), \\ d/2(d,g) & \text{si } \alpha \notin \mathrm{N}_{E/E_0}(E^\times) \text{ et } d/(d,g) \text{ est pair et } d/2(d,g) \text{ est impair.} \end{cases}$$

On observe que c_0 est impair uniquement dans le troisième et dernier cas.

5.4.

Dans ce qui suit, E est une extension finie de F et B une E-algèbre centrale simple munie d'une F-involution ι. Le centre E de B est stable par ι, et on note E_0 le sous-corps de ses éléments invariants par ι. On suppose que E quadratique sur E_0, c'est-à-dire que ι n'est pas triviale sur E.

Lemme 5.13. — *La sous-algèbre B_0 des éléments de B invariants par ι est une E_0-algèbre centrale simple, et le morphisme naturel de E-algèbres de $B_0 \otimes_{E_0} E$ dans B est un isomorphisme.*

Démonstration. — D'après [**29**] Lemma 2.2.2, il suffit de prouver que $B_0 \otimes_{E_0} E$ est isomorphe à B. Fixons un $\beta \in E$ tel que $\beta \notin E_0$ et $\beta^2 \in E_0$. Tout $x \in B$ s'écrit $x' + \beta x''$ avec :

$$x' = \frac{x + \iota(x)}{2} \in B_0, \quad x'' = \frac{x - \iota(x)}{2\beta} \in B_0.$$

Le morphisme naturel de E-algèbres de $B_0 \otimes_{E_0} E$ dans B est donc surjectif. Ces deux E-algèbres ayant la même dimension, c'est un isomorphisme. □

De par l'isomorphisme naturel entre $B_0 \otimes_{E_0} E$ et B, l'action de ι sur B s'identifie à l'action du générateur de $\mathrm{Gal}(E/E_0)$ sur $B_0 \otimes_{E_0} E$. Par abus de notation, nous noterons ι le générateur de $\mathrm{Gal}(E/E_0)$.

Fixons une algèbre à division C_0 de centre E_0 et un entier $l \geqslant 1$ tels que B_0 soit isomorphe à la E_0-algèbre $\mathbf{M}_l(C_0)$. Notons c_0 le degré réduit de C_0 sur E_0. Si c_0 est impair, alors $C = C_0 \otimes_{E_0} E$ est une E-algèbre à division de degré réduit c_0. Si c_0 est pair, $C_0 \otimes_{E_0} E$ est isomorphe à $\mathbf{M}_2(C)$, où C est une E-algèbre à division de degré réduit $c_0/2$.

Lemme 5.14. — *Pour qu'il existe un ordre maximal stable par ι dans B, il faut et suffit que c_0 soit impair, ou que c_0 soit pair et que E soit ramifié sur E_0.*

Démonstration. — Un ordre héréditaire de B est stable par ι si et seulement s'il existe un ordre héréditaire $\mathfrak{b}_0$ de B_0 tel que $\mathfrak{b}$ soit isomorphe à $\mathfrak{b}_0 \otimes \mathcal{O}_E$, le produit tensoriel étant pris sur $\mathcal{O}_{E_0}$. Pour qu'un tel ordre soit maximal, il faut que $\mathfrak{b}_0$ le soit dans B_0. Identifions B_0 à la E_0-algèbre

$\mathsf{M}_l(C_0)$ et $\mathfrak{b}_0$ à l'ordre maximal standard des matrices à coefficients dans $\mathcal{O}_{C_0}$. L'ordre $\mathfrak{b}_0 \otimes \mathcal{O}_E$ est alors maximal dans B si et seulement si $\mathcal{O}_{C_0} \otimes \mathcal{O}_E$ est maximal dans $C_0 \otimes_{E_0} E$.

Si c_0 est impair, $\mathcal{O}_{C_0} \otimes \mathcal{O}_E$ est isomorphe à $\mathcal{O}_C$, qui est l'unique ordre de l'algèbre à division C. Supposons maintenant que c_0 soit pair. Un simple calcul montre que la période de $\mathcal{O}_{C_0} \otimes \mathcal{O}_E$ sur $\mathcal{O}_E$ est égale à cf_{E/E_0}, c'est-à-dire qu'il est maximal dans $C_0 \otimes_{E_0} E$ si et seulement si E est ramifiée sur E_0. ☐

5.5.

Nous sommes toujours dans la situation du paragraphe 5.4. Supposons en outre que B admette un ordre maximal stable par ι. Identifions B_0 à $\mathsf{M}_l(C_0)$ et notons $\boldsymbol{l}_0$ le corps résiduel de C_0. Fixons une E-algèbre à division C et un entier $m \geqslant 1$ tels que B soit isomorphe à $\mathsf{M}_m(C)$. Notons c le degré réduit de C sur E et $\boldsymbol{l}$ le corps résiduel de C. On a donc $lc_0 = mc$.

Si c_0 est impair, alors $m = l$ et $c = c_0$. On peut supposer que $C = C_0 \otimes_{E_0} E$, ce qui fait naturellement de $\boldsymbol{l}$ une extension de $\boldsymbol{l}_0$ de degré f_{E/E_0}, le degré résiduel de E/E_0.

Si c_0 est pair, alors $m = 2l$ et $c = c_0/2$. On peut plonger E dans C_0 et supposer que C est le centralisateur de E dans C_0. L'extension E/E_0 étant ramifiée d'après le lemme 5.14, ceci fait de $\boldsymbol{l}_0$ une extension quadratique de $\boldsymbol{l}$.

Lemme 5.15. — *Il y a un ordre maximal $\mathfrak{b}$ stable par ι et un isomorphisme de E-algèbres de B dans $\mathsf{M}_m(C)$ tels que :*

(1) *l'image de $\mathfrak{b}$ soit l'ordre maximal standard des matrices à coefficients dans $\mathcal{O}_C$, et*
(2) *l'action induite par ι sur $\mathfrak{b}^\times/\mathbf{U}^1(\mathfrak{b}) \simeq \mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$ soit :*
   (a) *l'action du générateur de $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{l}/\boldsymbol{l}_0)$ si c_0 est impair,*
   (b) *l'action par conjugaison d'un $\upsilon \in \mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$ tel que $\upsilon^2 \in \boldsymbol{l}^\times$ et $\upsilon^2 \notin \boldsymbol{l}^{\times 2}$ si c_0 est pair.*

Démonstration. — Soit ϕ_0 un isomorphisme de E_0-algèbres entre B_0 et $\mathsf{M}_l(C_0)$ et soit $\mathfrak{b}_0$ l'ordre maximal de B_0 correspondant par ϕ_0 à l'ordre maximal standard des matrices à coefficients dans $\mathcal{O}_{C_0}$. Soit ϕ l'isomorphisme de E-algèbres de B dans $\mathsf{M}_l(C_0 \otimes_{E_0} E)$ obtenu à partir de ϕ_0.

Si c_0 est impair, on a $C = C_0 \otimes_{E_0} E$. L'ordre $\mathfrak{b}_0 \otimes \mathcal{O}_E$ et l'isomorphisme ϕ satisfont donc aux conditions requises. Supposons maintenant que c_0 est pair. Plongeons E dans C_0 et C_0 dans la E_0-algèbre $D_0 = C_0 \otimes_{E_0} \mathrm{End}_{E_0}(E)$, et fixons une base de E sur E_0. Ceci permet d'identifier D_0 à $\mathsf{M}_2(C_0)$ et d'obtenir un isomorphisme de E-algèbres $\xi : C_0 \otimes_{E_0} E \to \mathsf{M}_2(C)$, qu'on peut supposer envoyer $\mathcal{O}_{C_0} \otimes \mathcal{O}_E$ sur l'ordre maximal standard $\mathsf{M}_2(\mathcal{O}_C)$. L'involution ι agissant sur $\mathsf{M}_2(\boldsymbol{l})$ de façon $\boldsymbol{l}$-linéaire, le théorème de Skolem-Noether assure qu'elle agit par conjugaison par un $\upsilon \in \mathrm{GL}_2(\boldsymbol{l})$ tel que $\upsilon^2 \in \boldsymbol{l}^\times$. Comme les points fixes s'identifient à $\boldsymbol{l}_0^\times$, on a $\upsilon^2 \notin \boldsymbol{l}^{\times 2}$. ☐

5.6.

Avant d'en arriver au théorème principal de cette section, voici le lemme suivant, qui généralise le lemme 4.9.

Soit $\mathbf{\Theta}$ une F-endo-classe autoduale de degré divisant $2n$. Dans le cas où $\mathbf{\Theta}$ est non nulle, on note T/T_0 l'extension quadratique qui lui a été associée au paragraphe 4.4. Le degré paramétrique d'une représentation cuspidale de G a été défini à la définition 3.14. C'est un multiple de $\deg(\mathbf{\Theta})$.

Lemme 5.16. — *Soit $N \geqslant 1$ un entier, et posons $\delta = N \cdot \deg(\mathbf{\Theta})$. Pour qu'il existe une représentation cuspidale autoduale de G d'endo-classe $\mathbf{\Theta}$ et de degré paramétrique δ, il faut et suffit que $\delta = r(d, \delta)$ et que :*

(1) *si $\mathbf{\Theta}$ est non nulle et T/T_0 est non ramifiée, alors N est impair,*
(2) *si $\mathbf{\Theta}$ est non nulle et T/T_0 est ramifiée, alors N est pair ou égal à 1,*
(3) *si $\mathbf{\Theta}$ est nulle, alors N est pair ou égal à 1.*

Démonstration. — Soit π une représentation cuspidale de G d'endo-classe $\mathbf{\Theta}$ et de degré paramétrique δ. Son transfert de Jacquet-Langlands à $G' = \mathrm{GL}_{2n}(F)$ est une représentation essentiellement de carré intégrable notée π'. D'après [**66**] Theorem 9.3, il existe un unique diviseur s de $2n$ et une unique représentation cuspidale π'_0 de $\mathrm{GL}_{2n/s}(F)$ telle que π' soit isomorphe à l'unique quotient irréductible $L(\pi'_0, s)$ de l'induite parabolique :

$$\mathrm{Ind}_P^{\mathrm{GL}_{2n}(F)}(\pi'_0\nu^{(1-s)/2} \otimes \cdots \otimes \pi'_0\nu^{(s-1)/2}), \tag{5.1}$$

l'induction étant normalisée et prise par rapport au sous-groupe parabolique standard triangulaire supérieur par blocs, et ν désignant le caractère non ramifié “valeur absolue du déterminant” de $\mathrm{GL}_{2n/s}(F)$. D'après [**47**] Proposition 12.2, on a l'égalité $\delta s = 2n$. La représentation cuspidale π'_0 est autoduale si et seulement si π l'est. Enfin, on a le résultat suivant, dû à [**59, 18, 58**] et [**25**] Theorem 4.9.

Théorème 5.17. — *Les représentations π et π'_0 ont la même endo-classe.*

Supposons maintenant que π (donc π'_0) soit autoduale. La condition sur N est une conséquence du lemme 4.9 si $\mathbf{\Theta}$ est non nulle. Quand $\mathbf{\Theta}$ est nulle c'est une conséquence de [**1**] Theorem 7.1 (qui omet le cas de $F^\times$, qui a quatre représentations cuspidales autoduales). Enfin, la proposition 3.15 assure que s est premier à r, c'est-à-dire que $\delta = r(d, \delta)$.

Inversement, supposons vérifiées les conditions du lemme. En vertu de [**8**] Lemma 7.2, le groupe $\mathrm{GL}_\delta(F)$ a une représentation cuspidale autoduale π'_0 d'endo-classe $\mathbf{\Theta}$. Posons $s = d/(d, \delta)$ et formons la représentation essentiellement de carré intégrable $L(\pi'_0, s)$ de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$. D'après par exemple [**47**] Proposition 12.2, le transfert de Jacquet-Langlands de $L(\pi'_0, s)$ à G est une représentation cuspidale, qui est autoduale car π'_0 l'est, et son endo-classe est égale à $\mathbf{\Theta}$ d'après le théorème 5.17. □

5.7.

Nous en arrivons au résultat principal de cette section, qui donne une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un caractère simple τ-autodual dans une représentation cuspidale autoduale de G. Nous traitons ici le cas des représentations de niveau non nul. Le cas des représentations de niveau 0 sera traité à la section 8.

Dorénavant, et ce jusqu'à la fin de cette section, $\mathbf{\Theta}$ est une F-endo-classe autoduale *non nulle* de degré divisant $2n$ et T/T_0 est l'extension quadratique qui lui est associée.

Théorème 5.18. — *Soit π une représentation cuspidale autoduale de G d'endo-classe $\mathbf{\Theta}$. Pour que π contienne un caractère simple τ-autodual, il faut et suffit que les conditions suivantes soit vérifiées :*

(1) *Si r est impair, alors $\alpha \notin \mathrm{N}_{T/T_0}(T^\times)$ et $2n/\deg(\mathbf{\Theta})$ est impair.*
(2) *Si r est pair, alors $\alpha \in \mathrm{N}_{T/T_0}(T^\times)$ ou $2n/\deg(\mathbf{\Theta})$ est pair.*

Démonstration. — Soit $\sigma \in \mathrm{GL}_{2n}(F)$ comme au paragraphe 4.3, c'est-à-dire que $\sigma^2 = 1$ et que le polynôme caractéristique de σ est égal à $(X^2 - 1)^n$. Partons d'un caractère simple $\vartheta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}_1, \beta)$ maximal et σ-autodual dans $\mathrm{GL}_{2n}(F)$, où $[\mathfrak{a}_1, \beta]$ est une strate simple σ-autoduale dans $\mathbf{M}_{2n}(F)$, dont l'existence est assurée par la proposition 4.5. Posons $E = F[\beta]$ et $E_0 = F[\beta^2]$. Le degré de $\mathbf{\Theta}$ est égal à $[E : F]$. D'après la proposition 4.8, l'extension T/T_0 est ramifiée si et seulement si E/E_0 est ramifiée, et $\alpha \in \mathrm{N}_{T/T_0}(T^\times)$ si et seulement si $\alpha \in \mathrm{N}_{E/E_0}(E^\times)$. Notons δ le degré paramétrique de π, et posons $s = 2n/\delta$ et $t = \delta/\deg(\mathbf{\Theta})$.

D'après le corollaire 5.11, les conditions du théorème sont équivalentes à l'existence d'un plongement de E dans A tel que la conjugaison par κ induise l'automorphisme non trivial de E/E_0. Fixons un tel plongement. Le centralisateur B de E dans A muni de l'involution τ entre dans le cadre du paragraphe 5.4. La E-algèbre centrale simple B est isomorphe à $\mathbf{M}_m(C)$, où C est une E-algèbre à division de degré réduit c, où m et c sont donnés par (3.2). Compte tenu de la définition 3.14, l'entier s divise c. Par ailleurs, la E_0-algèbre centrale simple $B_0 = B^\tau$ est isomorphe à $\mathbf{M}_l(C_0)$ où C_0 est une E_0-algèbre à division de degré réduit noté c_0 et où $l \geqslant 1$. Rappelons (voir le paragraphe 5.5) que :

(1) si c_0 est impair, alors $c_0 = c$ et $m = l$,
(2) si c_0 est pair, alors $c_0 = 2c$ et $m = 2l$.

Nous allons prouver, en utilisant le lemme 5.14, qu'il existe un ordre maximal stable par τ dans B. Il s'agit de prouver que, si E/E_0 est non ramifiée, alors c_0 est impair. Supposons à l'inverse que E/E_0 soit non ramifiée et que c_0 soit pair. On a alors $m = 2l$. L'entier t, qui est un multiple de m puisque s divise c, est donc pair, ce qui contredit le lemme 5.16.

Soit $\mathfrak{b}$ un ordre maximal de B stable par τ. L'unique ordre héréditaire $\mathfrak{a}$ de A normalisé par $E^\times$ et tel que $\mathfrak{a} \cap B = \mathfrak{b}$ est donc stable par τ lui aussi, c'est-à-dire que la strate simple maximale $[\mathfrak{a}, \beta]$ est τ-autoduale. Il ne reste qu'à appliquer le lemme 3.25 pour en déduire que le transfert θ de ϑ à $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ est τ-autodual.

Il reste à prouver que les conditions du théorème sont nécessaires. C'est une conséquence du lemme 5.4 et de la discussion qui le suit, ainsi que du corollaire 5.11. □

On tire de cette preuve le corollaire suivant, qui précise le lemme 5.16.

Corollaire 5.19. — *Soit π une représentation cuspidale autoduale de G d'endo-classe $\mathbf{\Theta}$. On pose :*

$$c = \frac{d}{(d, \deg(\mathbf{\Theta}))}, \quad m = \frac{2n}{c \cdot \deg(\mathbf{\Theta})}. \tag{5.2}$$

Supposons que π contienne un caractère simple τ-autodual.

(1) *Si T/T_0 est non ramifiée, alors m et c sont impairs.*
(2) *Si T/T_0 est ramifiée, alors m est pair ou égal à 1.*
(3) *Si r est impair, alors m et c sont impairs.*

Démonstration. — Reprenons les notations de la preuve du théorème 5.18, et définissons un entier b par $c = bs$. On a donc $t = mb$. Si T/T_0 est non ramifiée, t est impair, donc m aussi. Si c_0 était pair, $m = 2l$ serait pair. Donc c_0 est impair, donc $c = c_0$ l'est aussi. Si T/T_0 est ramifiée, mb est pair ou égal à 1. Si c_0 est pair, $m = 2l$ est pair. Si c_0 est impair, $c = c_0$ aussi, donc m est pair ou égal à 1. Enfin, si r est impair, alors m est impair, donc c_0 est impair, donc $c = c_0$ l'est aussi, donc mc est impair. □

Remarque 5.20. — Voici un exemple de représentation cuspidale autoduale ne contenant pas de caractère simple τ-autodual, et pour laquelle les conclusions du corollaire 5.19 ne sont pas vérifiées. Supposons que T/T_0 soit non ramifiée, choisissons un entier n tel que $2n/\deg(\boldsymbol{\Theta})$ soit pair et supposons que $r = 1$. D'après le lemme 5.16, il y a une représentation cuspidale autoduale π de G d'endo-classe $\boldsymbol{\Theta}$ et de degré paramétrique $\deg(\boldsymbol{\Theta})$. D'après le théorème 5.18, la représentation π ne contient pas de caractère simple τ-autodual, quel que soit α. Enfin, $c = 2n/\deg(\boldsymbol{\Theta})$ est pair.

Remarque 5.21. — Voici un exemple de caractère simple τ-autodual dans G qui n'est contenu dans aucune représentation cuspidale autoduale. Soit D une F-algèbre à division de degré réduit 2 et soit $A = \mathbf{M}_2(D)$. Supposons que T/T_0 soit non ramifiée et que $\boldsymbol{\Theta}$ soit de degré 2, de sorte que $E = T$ et $E_0 = T_0 = F$. Choisissons $\alpha \notin \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$ et soit $\kappa \in D$ tel que $\kappa^2 = \alpha$. D'après le lemme 5.7, il existe un plongement de E dans D tel que la conjugaison par κ induise sur E l'automorphisme non trivial de E/F. On a $B = \mathbf{M}_2(E)$ et $B^\tau = \mathbf{M}_2(F)$, et il existe un ordre maximal stable par τ dans B. Reprenant l'argument de transfert de la preuve du théorème 5.18, il existe un caractère simple τ-autodual dans G. Mais il ne peut pas exister de représentation cuspidale autoduale le contenant, sans quoi le corollaire 5.19 serait contredit car $mc = 2$.

5.8.

Une conséquence frappante du théorème 5.18 est que, étant donné une représentation irréductible cuspidale autoduale π de G, le fait de contenir un caractère simple τ-autodual ne dépend que de l'endo-classe de π. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Corollaire 5.22. — *Soit π une représentation irréductible cuspidale autoduale de G, d'endo-classe non nulle $\boldsymbol{\Theta}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *La représentation π contient un caractère simple τ-autodual.*
(2) *Toute représentation cuspidale autoduale de G d'endo-classe $\boldsymbol{\Theta}$ contient un caractère simple τ-autodual.*

Voici une autre conséquence, simple mais importante, du théorème 5.18. Rappelons que, si r est pair, on note σ un élément de G comme dans la convention 5.5.

Corollaire 5.23. — (1) *Supposons que r soit pair. Toute représentation cuspidale autoduale de niveau non nul de G contient un caractère simple σ-autodual.*

(2) *Supposons que m soit pair. Toute représentation cuspidale autoduale de niveau non nul de G contient un caractère simple τ-autodual, quel que soit $\alpha \in F^\times$.*

Démonstration. — La première assertion est une conséquence immédiate du théorème 5.18 dans le cas où r est pair et α est un carré dans $F^\times$.

Considérons la seconde assertion. Si m est pair, alors r est pair et $mc = 2n/\deg(\boldsymbol{\Theta})$ est pair. La condition (2) du théorème 5.18 est donc toujours satisfaite. □

5.9.

Classons maintenant, à conjugaison près par G^τ, les caractères simples τ-autoduaux contenus dans une représentation cuspidale autoduale de niveau non nul de G. L'endo-classe $\boldsymbol{\Theta}$ est toujours celle qui a été fixée au paragraphe 5.7.

Soit π une représentation irréductible cuspidale autoduale de G d'endo-classe $\boldsymbol{\Theta}$. On suppose que π contient un caractère simple τ-autodual. Les conditions du théorème 5.18 sont donc vérifiées. On peut donc lui associer un entier c_0 par le formulaire de la remarque 5.12, et on note m et c les entiers définis par (5.2).

Pour la définition de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathfrak{a},\beta)$ associé à une strate simple maximale $[\mathfrak{a},\beta]$, on renvoie au paragraphe 3.2.

Proposition 5.24. — (1) *Si T/T_0 est non ramifiée, ou si T/T_0 est ramifiée et c_0 est pair, il y a une unique classe de G^τ-conjugaison de caractères simples τ-autoduaux dans π.*

(2) *En outre, si $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a},\beta)$ est un tel caractère et si $[\mathfrak{a},\beta]$ est τ-autoduale, il existe un isomorphisme de F-algèbres $\phi \in \mathcal{P}(\mathfrak{a},\beta)$ identifiant l'action de τ sur $\mathbf{J}^0(\mathfrak{a},\beta)/\mathbf{J}^1(\mathfrak{a},\beta) \simeq \mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$ à :*

(a) *l'action du générateur de $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{l}/\boldsymbol{l}_0)$ si T/T_0 est non ramifiée,*

(b) *l'action par conjugaison d'un $v \in \mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$ tel que $v^2 \in \boldsymbol{l}^\times$ et $v^2 \notin \boldsymbol{l}^{\times 2}$ sinon.*

(3) *Supposons que T/T_0 soit ramifiée et que c_0 soit impair.*

(a) *Il y a exactement $\lfloor m/2 \rfloor + 1$ classes de G^τ-conjugaison de caractères simples τ-autoduaux contenus dans π.*

(b) *Si $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a},\beta)$ est un tel caractère et si $[\mathfrak{a},\beta]$ est τ-autoduale, il existe un unique entier $i \in \{0,\dots,\lfloor m/2 \rfloor\}$ et un isomorphisme de F-algèbres $\phi \in \mathcal{P}(\mathfrak{a},\beta)$ identifiant l'action de τ sur $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$ à l'action par conjugaison de :*

$$\sigma_i = \mathrm{diag}(-1,\dots,-1,1,\dots,1) \in \mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l}) \tag{5.3}$$

où -1 apparait avec multiplicité i.

Définition 5.25. — L'entier i de (3.b) est appelé l'*indice* de θ. Il ne dépend que de sa classe de G^τ-conjugaison, et est déterminé par le fait que $(\mathbf{J}^0(\mathfrak{a},\beta)/\mathbf{J}^1(\mathfrak{a},\beta))^\tau \simeq \mathrm{GL}_i(\boldsymbol{l}) \times \mathrm{GL}_{m-i}(\boldsymbol{l})$.

Démonstration. — Fixons un caractère simple τ-autodual $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a},\beta)$ contenu dans π. D'après le lemme 5.4, on peut supposer que la strate simple $[\mathfrak{a},\beta]$ est τ-autoduale. Posons $E = F[\beta]$ et notons B son centralisateur dans A. Munie de l'involution τ, la E-algèbre B entre dans le cadre du paragraphe 5.4 dont on emprunte les notations. L'ordre maximal $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap B$ est stable par τ.

Quitte à conjuguer θ par un élément de $B^\times$, on peut supposer que $\mathfrak{b}$ est comme dans le lemme 5.15, c'est-à-dire qu'il y a un isomorphisme de F-algèbres $\phi \in \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \beta)$ induisant un isomorphisme de F-algèbres entre B et $\mathbf{M}_m(C)$ ayant les propriétés décrites dans ce lemme.

La proposition 3.19 dit qu'un caractère simple est contenu dans π si et seulement s'il est conjugué à θ sous G et, étant donné un $y \in G$, le caractère simple θ^y est τ-autodual si et seulement si $w = \tau(y)y^{-1}$ appartient au normalisateur $\mathbf{J}$ de θ dans G. Comme $\tau(w) = w^{-1}$, cela équivaut même à ce que w appartienne à $\mathbf{J}^0 = \mathbf{J}^0(\mathfrak{a}, \beta)$. Posons $\mathbf{J}^1 = \mathbf{J}^1(\mathfrak{a}, \beta)$, et notons u l'image de w dans $\mathbf{J}^0/\mathbf{J}^1$, qui a été identifié au groupe $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$ muni d'une action de l'involution τ décrite par le lemme 5.15.

Si c_0 est impair et si E est non ramifiée sur E_0, l'involution τ agit sur $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$ comme l'automophisme non trivial de $\boldsymbol{l}/\boldsymbol{l}_0$. Comme $u\tau(u) = 1$, il y a un $z \in \mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$ tel que $u = z\tau(z)^{-1}$. Ensuite, si c_0 est pair et si E est ramifiée sur E_0, l'involution τ agit sur $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$ par conjugaison par un élément v tel que $v^2 \in \boldsymbol{l}^\times$ et $v^2 \notin \boldsymbol{l}^{\times 2}$. Le théorème de Skolem-Noether assure l'existence d'un $z \in \mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$ tel que $u = z\tau(z)^{-1}$. Dans les deux cas, remplaçant w par jw où j est un relèvement de $\tau(z)$ à $\mathbf{J}^0$, on peut supposer que $w \in \mathbf{J}^1$. Comme le premier ensemble de cohomologie de $\langle\tau\rangle$ dans $\mathbf{J}^1$ est trivial, il y a un $u \in \mathbf{J}^1$ tel que $w = \tau(u)u^{-1}$. Le caractère θ^y est donc conjugué à θ sous G^τ, et on déduit l'assertion (2) du lemme 5.15.

Supposons maintenant que c_0 soit impair et que E/E_0 soit ramifiée. L'action de τ sur $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$ étant triviale, on a $u^2 = 1$, c'est-à-dire qu'il y a un $z \in \mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$ et un $i \in \{0, \dots, m\}$ tels que :

$$zuz^{-1} = \sigma_i$$

où σ_i est la matrice diagonale définie par (5.3). Remplaçant w par jw où $j \in \mathbf{J}^0$ est un relèvement de z, on peut supposer que $s_i w \in \mathbf{J}^1$, où s_i est la matrice $\mathrm{diag}(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1) \in \mathbf{J}^0$ relevant σ_i. Fixons une uniformisante ϖ de C telle que $\tau(\varpi) = -\varpi$ (par exemple une raciné carrée d'une uniformisante de C_0) et posons :

$$t_i = \mathrm{diag}(\varpi, \dots, \varpi, 1, \dots, 1) \in B^\times = \mathrm{GL}_m(C),$$

où ϖ apparaît i fois. On remarque que $s_i t_i = \tau(t_i)$. Comme $\mathbf{J}^{1t_i}$ est un pro-p-groupe τ-stable, le premier ensemble de cohomologie de $\langle\tau\rangle$ dans $\mathbf{J}^{1t_i}$ est trivial. Il s'ensuit que θ^y est conjugué à $\theta_i = \theta^{t_i}$ sous G^τ. Enfin, pour vérifier que θ_i et θ_k sont G^τ-conjugués si et seulement si $i = k$ ou $i + k = m$, on raisonne comme dans la preuve de [**3**] Lemma 4.25. □

5.10.

Avant de clore cette section, voici un résultat faisant pendant au corollaire 5.23(1). L'endoclasse $\boldsymbol{\Theta}$ est toujours celle qui a été fixée au paragraphe 5.7.

Proposition 5.26. — *Soit π une représentation cuspidale autoduale de G d'endo-classe $\boldsymbol{\Theta}$. On suppose que r est impair et que T/T_0 est non ramifiée. Il existe un caractère simple θ dans π et un $u \in G$ tels que $\theta^{-1} = \theta^u$ et tels que $\mathbf{J}$ soit engendré par u^2 et $\mathbf{J}^0$.*

Démonstration. — Observons d'abord que, r étant impair et comme $rd = 2n$, l'entier d est pair. Comme dans la preuve du théorème 5.18, fixons un $\sigma \in \mathrm{GL}_{2n}(F)$ tel que $\sigma^2 = 1$ avec un polynôme caractéristique égal à $(X^2-1)^n$. Partons d'un caractère simple $\vartheta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}_1, \beta)$ maximal et σ-autodual, où $[\mathfrak{a}_1, \beta]$ est une strate simple σ-autoduale dans $\mathbf{M}_{2n}(F)$, dont l'existence est assurée par la proposition 4.5. Posons $E = F[\beta]$ et $E_0 = F[\beta^2]$. Fixons arbitrairement un plongement de F-algèbres de E_0 dans A. Identifions son centralisateur A_0 dans A à la E_0-algèbre $\mathbf{M}_k(U_0)$ où $k \geqslant 1$ et U_0 est une E_0-algèbre à division dont le degré réduit $u_0 = d/(d, [E_0 : F])$ est pair. On peut donc plonger E dans U_0 comme E_0-algèbre. Soit C le centralisateur de E dans U_0. C'est une E-algèbre à division de degré réduit c. Le centralisateur B de E dans A s'identifie donc à $\mathbf{M}_k(C)$. On a donc $k = m$.

Comme T/T_0 est non ramifiée, E/E_0 l'est aussi. Fixons une extension non ramifiée maximale L_0/E_0 dans U_0 contenant E, et soit ϖ_0 une uniformisante de U_0 induisant par conjugaison sur L_0 un générateur de $\mathrm{Gal}(L_0/E_0)$. Ainsi le sous-corps des points fixes de ϖ_0^2 dans L_0 est E, donc $\varpi_0\beta\varpi_0^{-1} = -\beta$. Observons que ϖ_0 normalise $\mathcal{O}_C$, donc aussi l'ordre maximal standard $\mathfrak{b}$ de B. Soit $\mathfrak{a}$ l'unique ordre héréditaire de A normalisé par $E^\times$ tel que $\mathfrak{a} \cap B = \mathfrak{b}$. Le lemme 3.25 dit que le transfert $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ de ϑ vérifie $\theta^{-1} = \theta^{\varpi_0}$. Enfin, ϖ_0^2 est une uniformisante de C, donc $\mathbf{J}$ est engendré par $\mathbf{J}^0$ et ϖ_0^2. □

Remarque 5.27. — On n'a pas cherché la généralité maximale ; on s'est contenté du cas qui nous sera utile au paragraphe 6.3.

6. Caractères simples τ-autoduaux et distinction

Dans cette section, on suppose être dans la situation introduite dans la section 5. On a donc une F-algèbre centrale simple A de degré réduit $2n$, un élément $\alpha \in F^\times$ et un $\kappa \in A^\times$ non central tel que $\kappa^2 = \alpha$. On pose $G = A^\times$ et on note τ l'automorphisme involutif de conjugaison par κ. Rappelons que, compte tenu de la convention 5.5, dans le cas où α est un carré dans $F^\times$, on supposera que $\alpha = 1$, que r est pair et que le polynôme caractéristique réduit de κ sur F est égal à $(X^2-1)^n$. Nous allons prouver deux résultats essentiels pour la suite, faisant tous deux un lien entre distinction par G^τ et existence d'un caractère simple τ-autodual :

– nous prouvons d'abord, dans le paragraphe 6.3, que toute représentation cuspidale autoduale G^τ-distinguée de niveau non nul de G contient un caractère simple τ-autodual ;

– nous prouvons ensuite, dans le paragraphe 6.12, que l'ensemble des représentations cuspidales autoduales de G d'endo-classe non nulle donnée, s'il contient une représentation G^τ-distinguée, en est constitué au moins pour moitié.

Nous ne considérerons, dans toute cette section, que des représentations de niveau non nul de G. Le cas de représentations de niveau 0 sera traité dans la section 8.

6.1.

Le résultat suivant jouera un rôle important aux paragraphes 6.7 et 6.8.

Théorème 6.1. — *Toute représentation cuspidale G^τ-distinguée de G est autoduale.*

Démonstration. — Lorsque α n'est pas un carré de $F^\times$, le résultat est initialement dû à Guo [**33**] si $d \leqslant 2$ et si F est de caractéristique nulle. Dans le cas d'une forme intérieure quelconque et d'un corps F de caractéristique résiduelle $p \neq 2$, il est prouvé par Chommaux-Matringe [**23**] Proposition 3.2.

Lorsque α est un carré dans $F^\times$, le résultat est dû à Jacquet-Rallis [**40**] Theorem 1.1 si G est déployé et F est de caractéristique nulle. Pour traiter le cas d'une forme intérieure quelconque sur un corps F de caractéristique résiduelle impaire, il suffit d'utiliser un argument de globalisation similaire à celui de [**10**] et [**23**].

Soit k un corps global possédant une place w divisant p pour laquelle k_w soit isomorphe à F, et soit l une extension quadratique de k telle que $l_w = l \otimes_k k_w$ soit décomposée sur k_w. Soit $\mathbf{A}$ l'anneau des adèles de k. Fixons des isomorphismes $k_w \simeq F$ et $l_w \simeq F \oplus F$. Selon [**48**] Theorem 1.12, il y a une k-algèbre à division $\mathbb{D}$ telle que $\mathbb{D} \otimes_k F \simeq A$. Fixons un plongement de l dans $\mathbb{D}$, posons $\mathbb{G} = (\mathbb{D} \otimes_k \mathbf{A})^\times$ et notons $\mathbb{H}$ le centralisateur de l dans $\mathbb{G}$. À la place w, on a donc $\mathbb{G}_w \simeq \mathrm{GL}_r(D)$ avec $r = 2s$, et $\mathbb{H}_w \simeq \mathrm{GL}_s(D) \times \mathrm{GL}_s(D)$.

Soit π une représentation cuspidale de $G \simeq \mathbb{G}_w$ distinguée par $G^\sigma \simeq \mathbb{H}_w$. D'après [**49**] Theorem 4.1 et [**27**] Theorem 1.3, il existe une représentation automorphe cuspidale Π de $\mathbb{G}$ telle que la composante locale de Π en w soit isomorphe à π, et telle que Π ait une période non nulle relativement à $\mathbb{H}$. Pour toute place finie v de k, la composante locale Π_v de Π en v est distinguée par $\mathbb{H}_v$. En presque toute place finie v, le groupe $\mathbb{G}_v$ est isomorphe à $\mathrm{GL}_{2n}(k_v)$ et $\mathbb{H}_v$ est isomorphe à $\mathrm{GL}_n(k_v) \times \mathrm{GL}_n(k_v)$ ou à $\mathrm{GL}_n(l_v)$ (selon que v est décomposée ou inerte dans l), et Π_v est générique et non ramifiée. Ainsi [**23**] Proposition 3.1 entraîne que Π_v est autoduale en presque toute place finie v. Appliquant le théorème de multiplicité 1 forte pour les formes intérieures de GL_n sur k (voir [**4**] Theorem 5.1 en caractéristique nulle et [**5**] Theorem 3.3 en caractéristique p), on en déduit que les représentations automorphes cuspidales Π et $\Pi^\vee$ sont isomorphes. En particulier, la représentation $\Pi_w \simeq \pi$ est autoduale. □

6.2.

Commençons par prouver la variante(1) suivante de [**55**] Lemma 6.5.

Lemme 6.2. — *Soit ι une involution de G, soit H un pro-p-sous-groupe ouvert compact de G et soit χ un caractère de H. Supposons qu'il y ait un élément $w \in G$ tel que :*

$$\iota(H) = H^w \quad et \quad \chi^{-1} \circ \iota = \chi^w.$$

Pour tout $g \in G$, le caractère χ^g est trivial sur $H^g \cap G^\iota$ si et seulement si $w\iota(g)g^{-1}$ entrelace χ.

Démonstration. — Soit $g \in G$. Exactement comme dans la preuve de [**55**] Lemma 6.5, on prouve que χ^g est trivial sur $H^g \cap G^\iota$ si et seulement si :

$$\chi^g(\iota(x)) = \chi^g(x)^{-1}, \quad \text{pour tout } x \in H^g \cap \iota(H^g). \tag{6.1}$$

Ensuite, par hypothèse sur χ, on a :

$$\chi^g \circ \iota = (\chi \circ \iota)^{\iota(g)} = (\chi^{-1})^{w\iota(g)} = (\chi^{w\iota(g)})^{-1}$$

sur $H^{w\iota(g)}$. Si l'on pose $\gamma = w\iota(g)g^{-1}$, alors (6.1) est équivalent à l'identité $\chi(h) = \chi^\gamma(h)$ pour tout $h \in H \cap H^\gamma$, c'est-à-dire que γ entrelace χ. □

(1) Je remercie Jiandi Zou d'avoir attiré mon attention sur le fait qu'une telle variante est possible.

6.3.

On en déduit le résultat suivant, qui fournit une première condition nécessaire de G^τ-distinction pour les représentations cuspidales autoduales de G, et qui est le premier résultat principal de cette section.

Proposition 6.3. — *Toute représentation cuspidale autoduale G^τ-distinguée de niveau non nul de G contient un caractère simple τ-autodual.*

Démonstration. — Soit π une représentation cuspidale autoduale G^τ-distinguée de niveau non nul de G. Soit $\boldsymbol{\Theta}$ son endo-classe, et posons $c = d/(d, \deg(\boldsymbol{\Theta}))$ et $mc = 2n/\deg(\boldsymbol{\Theta})$. Observons que, si m est pair, le résultat suit du corollaire 5.23. Nous supposerons donc par la suite que m est impair.

Soit $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$ un caractère simple contenu dans π. Notons $\mathbf{J}_\theta$ le normalisateur de θ dans G et $\mathbf{J}^0$ son sous-groupe compact maximal. Par réciprocité de Frobenius, l'induite compacte de θ à G, dont π est un quotient, est G^τ-distinguée. Appliquant la formule de Mackey, il y a un $g \in G$ tel que θ^g soit trivial sur $H^1(\mathfrak{a}, \beta)^g \cap G^\tau$. D'autre part, comme π est autoduale, elle contient le caractère simple $\theta^{-1} \circ \tau$. Il y a donc, d'après la proposition 3.19, un $w \in G$ tel que $\theta^{-1} \circ \tau = \theta^w$. Appliquant le lemme 6.2 au caractère θ et à l'involution τ, on en déduit que $\gamma = w\tau(g)g^{-1}$ entrelace θ, c'est-à-dire, d'après la proposition 3.1(3), que $\gamma \in \mathbf{J}_\theta B^\times \mathbf{J}_\theta$, où B est le centralisateur de $E = F[\beta]$ dans A. Si $m = 1$, on en déduit que $\gamma \in \mathbf{J}_\theta$, donc que θ^g est un caractère simple τ-autodual contenu dans π. Supposons donc par la suite que $m > 1$ (et est impair). L'élément γ vérifie :

$$w\tau(\gamma)w^{-1} = w\tau(w) \cdot \gamma^{-1} \tag{6.2}$$

et on note que $w\tau(w) \in \mathbf{J}_\theta$.

D'après le lemme 5.16, l'extension quadratique T/T_0 associée à $\boldsymbol{\Theta}$ est non ramifiée. Par conséquent, $\alpha \in \mathrm{N}_{T/T_0}(T^\times)$ si et seulement si $\mathrm{val}_T(\alpha)$ est paire. Pour prouver que π contient un caractère simple τ-autodual, il s'agit donc, en vertu du théorème 5.18, et compte tenu du fait que $2n = mc \cdot \deg(\boldsymbol{\Theta})$, de prouver que $mc \cdot \mathrm{val}_T(\alpha)$ est de même parité que r. Posons $u = w\kappa^{-1}$, de sorte que $\theta^{-1} = \theta^u$. La relation (6.2) devient :

$$u\gamma u^{-1} = \alpha u^2 \gamma^{-1}. \tag{6.3}$$

Fixons un élément $b \in B^\times$ tel que $\gamma \in \mathbf{J}^0 b \mathbf{J}^0$. Le groupe $\mathbf{J}_\theta$ étant stable par u (car c'est à la fois le normalisateur de θ et de $\theta^{-1} = \theta^u$), on a $\mathbf{J}^0 u\gamma u^{-1} \mathbf{J}^0 = \mathbf{J}^0 \alpha u^2 b^{-1} \mathbf{J}^0$. Prenant la valuation de la norme réduite dans A de l'identité (6.3), on trouve que :

$$\mathrm{val}_F(\mathrm{Nrd}_{A/F}(\alpha)) + \mathrm{val}_F(\mathrm{Nrd}_{A/F}(u^2)) = 2 \cdot \mathrm{val}_F(\mathrm{Nrd}_{A/F}(b)).$$

La restriction de $\mathrm{Nrd}_{A/F}$ à B étant égale à $\mathrm{N}_{E/F} \circ \mathrm{Nrd}_{B/E}$, le membre de droite est un multiple de $2f$, où $f = f_{E/F}$ est le degré résiduel de E/F. Par ailleurs, on a :

$$\mathrm{val}_F(\mathrm{Nrd}_{A/F}(\alpha)) = 2n \cdot \mathrm{val}_F(\alpha) = f \cdot e_{E/T} \cdot mc \cdot \mathrm{val}_T(\alpha).$$

Sachant que $e_{E/T}$ est une puissance de $p \neq 2$, il reste à analyser la quantité $\mathrm{val}_F(\mathrm{Nrd}_{A/F}(u^2))$. Nous allons prouver qu'on peut choisir θ et u de façon que cette valuation soit :

– nulle si r est pair,
– égale à mf si r est impair.

Dans tous les cas, on déduira que $mc \cdot \mathrm{val}_T(\alpha)$ est de même parité que r, comme voulu.

Si r est pair, le corollaire 5.23 dit qu'on peut choisir pour u un élément de G tel que $u^2 = 1$ et $\mathrm{Pcrd}_{A/F}(u) = (X^2 - 1)^n$, ce qui donne $\mathrm{val}_F(\mathrm{Nrd}_{A/F}(u^2)) = 0$.

Si r est impair, la proposition 5.26 dit qu'on peut choisir pour u un élément de G tel que u^2 et $\mathbf{J}^0$ engendrent $\mathbf{J}_\theta$, c'est-à-dire que $\mathrm{val}_F(\mathrm{Nrd}_{A/F}(u^2)) = mf$.

Ceci met fin à la démonstration. □

6.4.

Dans ce paragraphe, on fixe un caractère simple maximal τ-autodual non trivial θ dans G. On note H^1 le groupe sur lequel θ est défini, $\mathbf{J}_\theta$ le normalisateur de θ dans G, $\mathbf{J}^0$ le sous-groupe compact maximal de $\mathbf{J}_\theta$ et $\mathbf{J}^1$ son pro-p-sous-groupe normal maximal.

Lemme 6.4. — *Soit η la représentation de Heisenberg de $\mathbf{J}^1$ associée au caractère simple θ.*

(1) *La représentation $\eta^{\vee\tau}$ est isomorphe à η.*
(2) *Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathbf{J}^1 \cap G^\tau}(\eta, \mathbb{C})$ est de dimension 1.*

Démonstration. — La preuve est la même que pour [**55**] Proposition 6.12. □

Lemme 6.5. — *Soit $\boldsymbol{\kappa}$ une représentation de $\mathbf{J}_\theta$ prolongeant η, et soit $\boldsymbol{\rho}$ la représentation de $\mathbf{J}_\theta$ triviale sur $\mathbf{J}^1$ telle que $\boldsymbol{\lambda}$ soit isomorphe à $\boldsymbol{\kappa} \otimes \boldsymbol{\rho}$.*

(1) *Il y a un unique caractère μ de $\mathbf{J}_\theta$ trivial sur $\mathbf{J}^1$ tel que $\boldsymbol{\kappa}^{\vee\tau} \simeq \boldsymbol{\kappa}\mu$, et il vérifie $\mu \circ \tau = \mu$.*
(2) *Il y a un unique caractère χ de $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ trivial sur $\mathbf{J}^1 \cap G^\tau$ tel que :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{J}^1 \cap G^\tau}(\eta, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau}(\boldsymbol{\kappa}, \chi^{-1})$$

et la restriction de μ à $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ est égale à χ^2.

(3) *L'application linéaire canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{J}^1 \cap G^\tau}(\eta, \mathbb{C}) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau}(\boldsymbol{\rho}, \chi) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbb{C})$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — La preuve de (1) et (3) et de la première partie de l'assertion (2) est la même que pour [**55**] Lemma 6.20. Pour prouver la partie restante, on écrit :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{J}^1 \cap G^\tau}(\eta, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau}(\boldsymbol{\kappa}, \chi^{-1}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau}(\chi, \boldsymbol{\kappa}^{\vee\tau}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau}(\chi\mu^{-1}, \boldsymbol{\kappa})$$

le premier isomorphisme étant obtenu par application du foncteur $\pi \mapsto \pi^{\vee\tau}$, et on conclut grâce au fait que $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ est compact mod le centre et à l'unicité de χ. □

L'objectif des paragraphes 6.5 à 6.8 suivants est de montrer que, sous certaines hypothèses, la représentation de Heisenberg η admet un prolongement à $\mathbf{J}_\theta$, ou à certains sous-groupes d'indice fini de $\mathbf{J}_\theta$, possédant des propriétés remarquables vis-à-vis de τ : voir les corollaires 6.12 et 6.16.

6.5.

On fixe une strate simple τ-autoduale $[\mathfrak{a}, \beta]$ telle que $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$, dont l'existence est assurée par le lemme 5.4, et on utilise les notations de la section 5. On pose en particulier $E = F[\beta]$ et $E_0 = F[\beta_0]$, et on note B le centralisateur de E dans A. On note $\boldsymbol{l}$ et $\boldsymbol{l}_0$ les corps finis définis au paragraphe 5.5, on note m, c les entiers définis par (3.2) et c_0 l'entier défini au paragraphe 5.4. Rappelons que :

– $\boldsymbol{l}$ est une extension quadratique de $\boldsymbol{l}_0$ si E/E_0 est non ramifiée,
– $\boldsymbol{l}_0$ est une extension quadratique de $\boldsymbol{l}$ si E/E_0 est ramifiée et c_0 est pair,
– $\boldsymbol{l}$ et $\boldsymbol{l}_0$ sont égaux si E/E_0 est ramifiée et c_0 est impair.

D'après la proposition 5.24, on peut identifier $\mathbf{J}^0/\mathbf{J}^1$ au groupe $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$ de façon que l'action de τ soit :

(1) l'action du générateur de $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{l}/\boldsymbol{l}_0)$ si E/E_0 est non ramifiée,
(2) l'action par conjugaison d'un élément $v \in \mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$ si E/E_0 est ramifiée, avec :
  (a) $v \in \boldsymbol{l}_0$, $v \notin \boldsymbol{l}$ et $v^2 \in \boldsymbol{l}$ si c_0 est pair,
  (b) v est diagonal, $v^2 = 1$ et les multiplicités des valeurs propres -1 et 1 sont respectivement i et $m - i$, avec $i \in \{0, \dots, \lfloor m/2 \rfloor\}$, si c_0 est impair.

Commençons par décrire le groupe $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$.

Lemme 6.6. — *Il existe un élément $\varpi \in \mathbf{J}_\theta \cap B^\times$ possédant les propriétés suivantes :*
(1) *le groupe $\mathbf{J}_\theta$ est engendré par $\mathbf{J}^0$ et ϖ,*
(2) *ϖ^c est une uniformisante de E et :*

$$\tau(\varpi) = \begin{cases} -\varpi & \text{si } E/E_0 \text{ est ramifiée et } c_0 \text{ est impair,} \\ \varpi & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6.4}$$

Démonstration. — Identifions B à $\mathsf{M}_m(C)$ et fixons une uniformisante ϖ de C telle que ϖ^c soit une uniformisante de E. Si c_0 est impair, on peut supposer que $C = C_0 \otimes_{E_0} E$ et on a $c_0 = c$, donc $\varpi^{e_{E/E_0}}$ est une uniformisante de C_0. Si c_0 est pair, on peut supposer que E est inclus dans C_0 et que C est le centralisateur de E dans C_0, et $c_0 = 2c$, auquel cas on peut supposer que ϖ est une uniformisante de C_0. □

Fixons un élément $\varpi \in \mathbf{J}_\theta \cap B^\times$ comme dans le lemme 6.6.

Lemme 6.7. — *Le groupe $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ est engendré par $\mathbf{J}^0 \cap G^\tau$ et un élément ϖ' tel que :*
(1) *$\varpi' = \varpi$ si E/E_0 est non ramifiée, ou si E/E_0 est ramifiée et c_0 est pair,*
(2) *$\varpi' = \varpi^2$ si E/E_0 est ramifiée, c_0 est impair et $m = 1$,*
(3) *$\varpi' = \varpi t$ avec :*

$$t = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id} \\ \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{J}^0 \cap B^\times \subseteq \mathrm{GL}_m(C) \tag{6.5}$$

si E/E_0 est ramifiée, c_0 est impair et $m = 2l$, où id *est l'identité de* $\mathrm{GL}_l(C)$.

Démonstration. — Soit un élément $x \in \mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$, qu'on écrit sous la forme $\varpi^k y$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbf{J}^0$. Si E/E_0 est non ramifiée, ou si E/E_0 est ramifiée et c_0 est pair, ϖ^k est invariant par τ, donc y l'est aussi, ce qui traite le cas (1). Si E/E_0 est ramifiée et c_0 est impair, on a $\tau(\varpi) = -\varpi$. Par conséquent, ou bien k est pair et $\tau(y) = y$, ou bien k est impair et $\tau(y) = -y$. Ce dernier cas implique l'existence d'un élément anti-invariant par τ dans $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$, ce qui n'est pas possible si $m = 1$, ce qui traite le cas (2). Il reste à traiter le cas (3). Écrivons x sous la forme $\varpi'^k z$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbf{J}^0$. Comme ϖ'^k est invariant par τ, l'élément z l'est aussi. □

6.6.

La situation est la même qu'au paragraphe 6.5. Observons une fois pour toutes que, comme $p \neq 2$, tout caractère de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$ se factorise par le déterminant.

Proposition 6.8. — *Il existe une représentation τ-autoduale de $\mathbf{J}_\theta$ prolongeant η.*

Démonstration. — Soit $\varpi \in \mathbf{J}_\theta \cap B^\times$ un élément comme dans le lemme 6.6. Raisonnant comme au début de la preuve de [**55**] Lemma 7.7, on peut supposer que, dans le cas où E/E_0 est ramifiée et c_0 est impair, on a $i = 0$. Soit $\boldsymbol{\kappa}$ une représentation de $\mathbf{J}_\theta$ prolongeant η. D'après le lemme 6.5, il lui est associé :

– d'une part un caractère μ de $\mathbf{J}_\theta$ trivial sur $\mathbf{J}^1$ tel que $\boldsymbol{\kappa}^{\vee\tau} \simeq \boldsymbol{\kappa}\mu$,

– d'autre part un caractère χ de $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ trivial sur $\mathbf{J}^1 \cap G^\tau$ tel que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau}(\boldsymbol{\kappa}, \chi^{-1})$ soit non nul.

On a $\mu = \mu \circ \tau$ et la restriction de μ à $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ est égale à χ^2. Les représentations de $\mathbf{J}_\theta$ prolongeant η étant tordues les unes des autres par un caractère de $\mathbf{J}_\theta$ trivial sur $\mathbf{J}^1$, nous aurons prouvé la proposition 6.8 une fois prouvée l'existence d'un caractère ω de $\mathbf{J}_\theta$ trivial sur $\mathbf{J}^1$ tel que $\boldsymbol{\kappa}\omega$ soit τ-autodual, c'est-à-dire tel que $\mu = \omega(\omega \circ \tau)$. Restreignant à $\mathbf{J}^0$ et réduisant mod $\mathbf{J}^1$, écrivons $\mu = \overline{\mu} \circ \det$ et $\omega = \overline{\omega} \circ \det$ sur $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$, où $\overline{\mu}$ et $\overline{\omega}$ sont des caractères de $\boldsymbol{l}^\times$. La relation $\mu = \omega(\omega \circ \tau)$ est vérifiée si et seulement si :

(1) d'une part $\overline{\mu} = \overline{\omega}(\overline{\omega} \circ \tau)$ sur $\boldsymbol{l}^\times$, c'est-à-dire :

  (a) si E/E_0 est non ramifiée, alors $\overline{\mu} = \overline{\omega} \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{l}/\boldsymbol{l}_0}$, où $\mathrm{N}_{\boldsymbol{l}/\boldsymbol{l}_0}$ est la norme de $\boldsymbol{l}$ sur $\boldsymbol{l}_0$,

  (b) si E/E_0 est ramifiée, alors $\overline{\mu} = \overline{\omega}^2$,

(2) d'autre part $\omega(\varpi)^2 = \mu(\varpi)\omega(\epsilon)$, où $\epsilon \in \{-1, 1\}$ est défini par $\tau(\varpi) = \epsilon\varpi$.

Nous allons prouver l'existence d'un caractère $\overline{\omega}$ de $\boldsymbol{l}^\times$ vérifiant la condition (1). Pour obtenir un caractère ω comme voulu, il suffira alors que la condition (2) soit vérifiée, c'est-à-dire qu'il suffira de choisir pour valeur de ω en ϖ une racine carrée de $\mu(\varpi)\overline{\omega}(\det(\epsilon))$. Rappelons que $\mu \circ \tau = \mu$, ce qui entraîne que $\mu(\epsilon) = 1$ et $\overline{\mu} = \overline{\mu} \circ \tau$.

Si E/E_0 est non ramifiée, le caractère $\overline{\mu}$ est $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{l}/\boldsymbol{l}_0)$-invariant. Il y a donc un caractère $\overline{\omega}$ de $\boldsymbol{l}_0^\times$ vérifiant (1.a), qu'il suffit ensuite de prolonger à $\boldsymbol{l}^\times$. Si E/E_0 est ramifiée et c_0 est impair, on écrit $\chi = \overline{\chi} \circ \det$ sur $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})^\tau = \mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$, où $\overline{\chi}$ est un caractère de $\boldsymbol{l}^\times$. On obtient alors $\overline{\mu} = \overline{\chi}^2$, c'est-à-dire que le caractère $\overline{\omega} = \overline{\chi}$ vérifie la condition (1.b).

Supposons maintenant que E/E_0 soit ramifiée et que c_0 soit pair. On écrit $\chi = \overline{\chi} \circ \det$ sur le groupe $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})^\tau = \mathrm{GL}_{m/2}(\boldsymbol{l}_0)$, où $\overline{\chi}$ est un caractère de $\boldsymbol{l}_0^\times$. Le caractère $\overline{\mu} \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{l}_0/\boldsymbol{l}}$ est alors égal à $\overline{\chi}^2$. Par conséquent, la condition (1.b) est vérifiée pour un caractère $\overline{\omega}$ de $\boldsymbol{l}^\times$ si et seulement si le caractère $\overline{\chi}$ se factorise par $\mathrm{N}_{\boldsymbol{l}_0/\boldsymbol{l}}$. D'après le théorème de Skolem-Noether, l'automorphisme de Frobenius de $\boldsymbol{l}_0$ sur $\boldsymbol{l}$ s'étend en un automorphisme intérieur de $\boldsymbol{l}$-algèbres de $\mathsf{M}_m(\boldsymbol{l})$, que l'on note $\mathrm{Ad}(\overline{y})$ pour un élément $\overline{y} \in \mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$.

Lemme 6.9. — *Il existe un relèvement y de $\overline{y}$ à $\mathbf{J}^0 \cap B^\times$ tel que $y^{-1}\tau(y)$ centralise $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$.*

Démonstration. — Soit v un générateur de $\boldsymbol{l}_0$ sur $\boldsymbol{l}$ tel que $v^2 \in \boldsymbol{l}$, et posons $u = v^2$. On peut supposer que :

$$v = \begin{pmatrix} 0 & u \cdot \mathrm{id} \\ \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{y} = \begin{pmatrix} -\mathrm{id} & 0 \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}$$

dans $\mathsf{M}_m(\boldsymbol{l})$, où id est l'identité de $\mathsf{M}_l(\boldsymbol{l})$ avec $m = 2l$. Soit alors :

$$y = \begin{pmatrix} -\mathrm{id} & 0 \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_m(C) = B,$$

où id est maintenant l'identité de $\mathsf{M}_l(C)$. On a $y \in \mathbf{J}^0 \cap B^\times$ et l'élément $y^{-1}\tau(y) = -1$ centralise le groupe $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$. □

Fixons un relèvement y de $\overline{y}$ à $\mathbf{J}^0 \cap B^\times$ comme au lemme 6.9. On a donc $\boldsymbol{\kappa}^y \simeq \boldsymbol{\kappa}$ et, comme y normalise $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau}(\boldsymbol{\kappa}, \chi^{-1}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau}(\boldsymbol{\kappa}, (\chi^y)^{-1}).$$

Par unicité de χ, cela donne $\chi^y = \chi$, c'est-à-dire qu'il existe un caractère $\overline{\varpi}$ de $\boldsymbol{l}^\times$ tel que $\overline{\chi}$ soit égal à $\overline{\varpi} \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{l}_0/\boldsymbol{l}}$, comme voulu. □

6.7.

La situation est la même qu'au paragraphe 6.5. Lorsque E/E_0 est ramifiée et c_0 est impair, l'indice d'un caractère simple τ-autodual a été défini à la définition 5.25.

Proposition 6.10. — *Supposons que l'on soit dans l'un des cas suivants :*

(1) *E/E_0 est non ramifiée, ou E/E_0 est ramifiée et c_0 est pair,*

(2) *E/E_0 est ramifiée, c_0 est impair, m est pair ou égal à 1 et θ est d'indice $i = \lfloor m/2 \rfloor$.*

Alors il existe une représentation $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$-distinguée de $\mathbf{J}_\theta$ prolongeant η.

Démonstration. — Soit $\boldsymbol{\kappa}$ une représentation τ-autoduale de $\mathbf{J}_\theta$ prolongeant η, dont l'existence est assurée par la proposition 6.8. On cherche un caractère ω de $\mathbf{J}_\theta$ trivial sur $\mathbf{J}^1$ tel que $\boldsymbol{\kappa}\omega$ soit $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$-distinguée, c'est-à-dire telle que la restriction de ω à $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ soit égale à χ. Comme $\boldsymbol{\kappa}$ est τ-autoduale, χ^2 est trivial. Soit $\varpi \in \mathbf{J}_\theta \cap B^\times$ comme dans le lemme 6.6.

Si E/E_0 est non ramifiée, on écrit $\chi = \overline{\chi} \circ \det$ sur $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l}_0)$ où $\overline{\chi}$ est un caractère quadratique de $\boldsymbol{l}_0^\times$, et on fixe un caractère $\overline{\varpi}$ de $\boldsymbol{l}^\times$ prolongeant $\overline{\chi}$. Si E/E_0 est ramifiée et c_0 est pair, on écrit $\chi = \overline{\chi} \circ \det$ sur $\mathrm{GL}_{m/2}(\boldsymbol{l}_0)$, et on note $\overline{\varpi}$ l'unique caractère de $\boldsymbol{l}^\times$ tel que $\overline{\chi} = \overline{\varpi} \circ \mathrm{N}_{\boldsymbol{l}_0/\boldsymbol{l}}$. Dans ces deux cas, on définit ω comme l'unique caractère de $\mathbf{J}_\theta$ trivial sur $\mathbf{J}^1$ tel que $\omega = \overline{\varpi} \circ \det$ sur $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$ et $\omega(\varpi) = \chi(\varpi)$.

Dans le cas (2), on a $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})^\tau = \mathrm{GL}_i(\boldsymbol{l}) \times \mathrm{GL}_{m-i}(\boldsymbol{l})$ avec $i = \lfloor m/2 \rfloor$, et on suit l'argument de la preuve de [**55**] Lemma 7.10. Dans le cas où $m = 1$, il suffit de choisir pour ω un caractère de $\mathbf{J}_\theta$ coïncidant avec χ sur $\boldsymbol{l}^{\times\tau} = \boldsymbol{l}^\times$ et tel que $\omega(\varpi)^2 = \chi(\varpi^2)$. Lorsque m est pair, on suit l'argument de [**55**] p. 1719. □

Dans le cas où E/E_0 est ramifiée, on en déduit le résultat suivant.

Proposition 6.11. — *Supposons que l'on soit dans l'un des cas suivants :*

(1) *E/E_0 est ramifiée et c_0 est pair,*

(2) *E/E_0 est ramifiée, c_0 est impair, m est pair ou égal à 1 et θ est d'indice $i = \lfloor m/2 \rfloor$.*

Alors toute représentation $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$-distinguée de $\mathbf{J}_\theta$ prolongeant η est τ-autoduale.

Démonstration. — Soit $\boldsymbol{\kappa}$ une représentation $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$-distinguée de $\mathbf{J}_\theta$ prolongeant η et écrivons $\boldsymbol{\kappa}^{\vee\tau} \simeq \boldsymbol{\kappa}\mu$. La restriction de μ à $\mathbf{J} \cap G^\tau$ est triviale et $\mu \circ \tau = \mu$. Soit $\varpi \in \mathbf{J}_\theta \cap B^\times$ comme dans le lemme 6.6. Il s'agit de prouver que μ est trivial sur $\mathbf{J}_\theta$, c'est-à-dire que $\mu(\varpi) = 1$ et $\overline{\mu} = 1$.

Commençons par traiter le cas (1). Dans ce cas, $\overline{\mu} \circ \det$ est trivial sur $\mathrm{GL}_{m/2}(\boldsymbol{l}_0)$, donc $\overline{\mu}$ est trivial, et $\mu(\varpi) = 1$ d'après le lemme 6.7.

Passons au cas (2). Dans ce cas, $\overline{\mu} \circ \det$ est trivial sur $\mathrm{GL}_i(\boldsymbol{l}) \times \mathrm{GL}_{m-i}(\boldsymbol{l})$ donc $\overline{\mu}$ est trivial, puis $\mu(\varpi') = 1$ d'après le lemme 6.7. Si m est pair, on a $\varpi' = \varpi t$ et $\mu(t) = 1$, on obtient donc $\mu(\varpi) = 1$. Si $m = 1$, la paire $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\kappa})$ est un type $\mathbf{J} \cap G^\tau$-distingué de G. Son induite compacte π est donc une représentation cuspidale G^τ-distinguée de G. D'après le théorème 6.1, la représentation π est autoduale. Par conséquent, les types $\boldsymbol{\kappa}$ et $\boldsymbol{\kappa}^{\vee\tau} \simeq \boldsymbol{\kappa}\mu$ sont tous les deux contenus dans π, ce dont on déduit que $\mu = 1$. □

Nous en déduisons l'existence et l'unicité d'un prolongement remarquable de η au groupe $\mathbf{J}_\theta$.

Corollaire 6.12. — *Supposons que l'on soit dans l'un des cas considérés à la proposition 6.11.*

(1) *Le nombre de représentations de $\mathbf{J}_\theta$ prolongeant η étant à la fois τ-autoduale et $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$-distinguée est égal à 2 si E/E_0 est ramifiée, c_0 est impair et $m = 1$; il est égal à 1 sinon.*

(2) *Dans tous les cas, il y a une unique représentation $\boldsymbol{\kappa}_p$ de $\mathbf{J}_\theta$ prolongeant η étant à la fois τ-autoduale et $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$-distinguée, et dont le déterminant soit d'ordre une puissance de p.*

Démonstration. — Soit $\boldsymbol{\kappa}$ une représentation de $\mathbf{J}_\theta$ prolongeant η qui soit à la fois τ-autoduale et $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$-distinguée. Son déterminant est un caractère τ-autodual de $\mathbf{J}_\theta$ trivial sur $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$. Le lemme 6.7 assure qu'il est d'ordre fini. Il se décompose donc de façon unique comme le produit d'un caractère d'ordre une puissance de p et d'un caractère d'ordre premier à p. Notons ω ce dernier : c'est un caractère de $\mathbf{J}_\theta$ trivial sur $(\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau)\mathbf{J}^1$ et τ-autodual. Soit un entier $a \geqslant 1$ tel que $a \cdot \dim \boldsymbol{\kappa}$ soit congru à 1 modulo l'ordre de ω. (Rappelons que la dimension de η, donc de $\boldsymbol{\kappa}$, est une puissance de p). On vérifie alors que la représentation $\boldsymbol{\kappa}\omega^{-a}$ est à la fois τ-autoduale et $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$-distinguée, et que son déterminant est d'ordre une puissance de p. Notons $\boldsymbol{\kappa}_p$ une telle représentation.

Une représentation de $\mathbf{J}_\theta$ prolongeant η à la fois τ-autoduale et $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$-distinguée sera donc de la forme $\boldsymbol{\kappa}_p\omega$ pour un caractère ω de $\mathbf{J}_\theta$ trivial sur $(\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau)\mathbf{J}^1$ et τ-autodual. Dans tous les cas, on vérifie que le fait que ω soit trivial sur $\mathbf{J}^0 \cap G^\tau$ entraîne que ω est non ramifié. Ensuite, d'après le lemme 6.7, on a :

(1) $\omega(\varpi) = 1$ si E/E_0 est ramifiée et c_0 est pair,

(2) $\omega(\varpi t) = 1$ si E/E_0 est ramifiée, c_0 est impair et m est pair,

(3) $\omega(\varpi^2) = 1$ si E/E_0 est ramifiée, c_0 est impair et $m = 1$.

Dans les deux premiers cas, le caractère ω est trivial (dans le second cas car $\omega(t) = 1$ puisque ω est non ramifié). Dans le troisième et dernier cas, ω est quadratique et non ramifié ; il existe exactement deux tels caractères, dont un seul qui soit d'ordre une puissance de p. □

6.8.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au cas où E/E_0 est non ramifiée. Si ρ est une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$, on note $s(\rho)$ l'ordre du stabilisateur de la classe d'isomorphisme de ρ sous l'action de $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{l}/\boldsymbol{k}_E)$. D'après [**47**] Corollaire 3.9, c'est un diviseur de c premier à m.

Lemme 6.13. — *On suppose que mc est impair. Soit un entier $s \geqslant 1$. Pour qu'il existe une représentation cuspidale τ-autoduale ρ de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$ telle $s(\rho) = s$, il faut et suffit que s soit un diviseur de c premier à m.*

Démonstration. — Comme $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{l}/\boldsymbol{k}_E)$ est d'ordre c, le fait que s divise c est certainement une condition nécessaire. Supposons donc désormais que s divise c. Soit $\boldsymbol{t}$ une extension de $\boldsymbol{l}$ de degré m dans $\mathsf{M}_m(\boldsymbol{l})$, et considérons $\boldsymbol{t}^\times$ comme un tore maximal de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$. Notons q_0 le cardinal du corps résiduel de E_0. Si ξ est un caractère $\boldsymbol{l}$-régulier de $\boldsymbol{t}^\times$ et si ρ est la représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$ qui lui correspond via la relation (4.1), alors [**55**] Lemma 2.3 (et plus précisément sa preuve) assure que ρ est τ-autoduale si et seulement si l'ordre de ξ divise $q_0^{mc} + 1$.

Écrivons $c = bs$ et fixons un caractère ξ de $\boldsymbol{t}^\times$ d'ordre $q_0^{mb} + 1$, ce qui est possible car $q_0^{mb} + 1$ divise l'ordre de $\boldsymbol{t}^\times$. L'entier c (donc s) étant impair, $q_0^{mb} + 1$ divise $q_0^{mc} + 1$. L'ordre de q_0^2 dans $(\mathbb{Z}/(q_0^{mb} + 1)\mathbb{Z})^\times$ est égal à mb, donc celui de q_0^{2c} est égal à $mb/(mb, c) = m$ car s est premier à m. Par conséquent, le caractère ξ est $\boldsymbol{l}$-régulier, la représentation cuspidale ρ qui lui correspond est τ-autoduale et $s(\rho)$ est égal à s. □

Proposition 6.14. — *On suppose que mc est impair. Soit b un diviseur de c tel que c/b soit premier à m, et soit $\mathbf{J}_b$ le sous-groupe de $\mathbf{J}_\theta$ engendré par ϖ^b et $\mathbf{J}^0$. Il existe une représentation de $\mathbf{J}_b$ prolongeant η qui est à la fois τ-autoduale et $\mathbf{J}_b \cap G^\tau$-distinguée.*

Démonstration. — Nous allons suivre l'argument de la preuve de [**55**] Proposition 9.4. Soit $\boldsymbol{\kappa}$ une représentation τ-autoduale de $\mathbf{J}_\theta$ prolongeant η. D'après le lemme 6.13, il existe une représentation cuspidale τ-autoduale ρ de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$ telle $s(\rho) = c/b$. D'après [**30**], la représentation ρ est $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l}_0)$-distinguée. Notant encore ρ son inflation à $\mathbf{J}^0$, son normalisateur dans $\mathbf{J}_\theta$ est égal à $\mathbf{J}_b$ car l'action de ϖ par conjugaison induit sur $\boldsymbol{l}$ l'action d'un générateur de $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{l}/\boldsymbol{k}_E)$.

Lemme 6.15. — *Il existe une représentation de $\mathbf{J}_b$ prolongeant ρ qui est à la fois τ-autoduale et $\mathbf{J}_b \cap G^\tau$-distinguée.*

Démonstration. — Soit $\boldsymbol{\rho}$ une représentation de $\mathbf{J}_b$ prolongeant ρ. Tout autre prolongement de ρ à $\mathbf{J}_b$ s'obtient en tordant $\boldsymbol{\rho}$ par un caractère non ramifié de $\mathbf{J}_b$. Quitte à tordre par un caractère non ramifié convenable, on peut donc supposer que $\boldsymbol{\rho}$ est τ-autoduale, ce que nous ferons. Ensuite, raisonnant comme dans la preuve du lemme 6.5, il existe un unique caractère non ramifié ζ de $\mathbf{J}_b \cap G^\tau$ tel que :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})^\tau}(\rho, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}_b \cap G^\tau}(\boldsymbol{\rho}, \zeta)$$

et, par unicité de ζ et comme $\boldsymbol{\rho}$ est τ-autoduale, on a $\zeta^2 = 1$. Soit $\boldsymbol{\rho}^*$ le prolongement τ-autodual de ρ obtenu en tordant $\boldsymbol{\rho}$ par le caractère non ramifié de $\mathbf{J}_b$ d'ordre 2. Alors l'une des représentations $\boldsymbol{\rho}$ et $\boldsymbol{\rho}^*$ est $\mathbf{J}_b \cap G^\tau$-distinguée (et même une seule des deux car $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(\mathfrak{l})^\tau}(\rho, \mathbb{C})$ est de dimension 1). □

Soit $\boldsymbol{\rho}$ une représentation comme au lemme 6.15, et soit $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\kappa} \otimes \boldsymbol{\rho}$. La paire $(\mathbf{J}_b, \boldsymbol{\lambda})$ est un type τ-autodual. Soit χ le caractère de $\mathbf{J}_\theta \cap G^\tau$ associé à $\boldsymbol{\kappa}$ par le lemme 6.5. On a alors :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{J}_b \cap G^\tau}(\boldsymbol{\lambda}, \chi^{-1}) \neq \{0\}.$$

Comme dans [**55**] Lemma 9.2, on prouve que tout caractère de $\mathbf{J}_b \cap G^\tau$ trivial sur $\mathbf{J}^1 \cap G^\tau$ se prolonge en un caractère de $\mathbf{J}_b$ trivial sur $\mathbf{J}^1$. Soit donc ω un tel caractère de $\mathbf{J}_b$ trivial sur $\mathbf{J}^1$, et posons $\boldsymbol{\lambda}' = \boldsymbol{\lambda}\omega^{-1}$. La paire $(\mathbf{J}_b, \boldsymbol{\lambda}')$ est un type $\mathbf{J}_b \cap G^\tau$-distingué. Son induite compacte à G, notée π', est une représentation irréductible cuspidale G^τ-distinguée. D'après le théorème 6.1, elle est autoduale. Elle contient donc à la fois $\boldsymbol{\lambda}'$ et $\boldsymbol{\lambda}'^{\vee\tau} \simeq \boldsymbol{\lambda}'\omega(\omega \circ \tau)$, ce dont on déduit que le caractère $\omega(\omega \circ \tau)$ est trivial sur $\mathbf{J}_b$. Il s'ensuit que la représentation $\boldsymbol{\kappa}' = \boldsymbol{\kappa}\omega^{-1}$ prolonge η, et est à la fois τ-autoduale et $\mathbf{J}_b \cap G^\tau$-distinguée. □

Le corollaire suivant fait pendant au corollaire 6.12.

Corollaire 6.16. — *Il existe une unique représentation $\boldsymbol{\kappa}_p$ de $\mathbf{J}_b$ prolongeant η étant à la fois τ-autoduale et $\mathbf{J}_b \cap G^\tau$-distinguée, et dont le déterminant soit d'ordre une puissance de p.*

Démonstration. — Pour prouver l'existence de $\boldsymbol{\kappa}_p$, on raisonne exactement comme au début de la preuve du corollaire 6.12. Prouvons maintenant l'unicité. Si une représentation $\boldsymbol{\kappa}$ de $\mathbf{J}_b$ a les mêmes propriétés que $\boldsymbol{\kappa}_p$, alors elle est de la forme $\boldsymbol{\kappa}_p\omega$ où ω est un caractère de $\mathbf{J}_b$ trivial sur $(\mathbf{J}_b \cap G^\tau)\mathbf{J}^1$, d'ordre une puissance de p et τ-autodual. Le groupe $\mathbf{J}^0/\mathbf{J}^1$ étant d'ordre premier à p, le caractère ω est trivial sur $\mathbf{J}^0$. Enfin, d'après le lemme 6.7, on a $\omega(\varpi^b) = 1$, ce qui implique que ω est trivial. □

6.9.

Nous discutons maintenant l'existence de types τ-autoduaux dans une représentation cuspidale autoduale de G de niveau non nul. Le cas du niveau 0 sera traité dans la section 8.

La proposition suivante généralise le corollaire 4.6.

Proposition 6.17. — *Une représentation cuspidale autoduale de G de niveau non nul contient un caractère simple τ-autodual si et seulement si elle contient un type τ-autodual.*

Démonstration. — L'une de ces implications est immédiate, car le caractère simple attaché à un type τ-autodual est τ-autodual. Soit maintenant π une représentation cuspidale autoduale de G contenant un caractère simple τ-autodual $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$. D'après le lemme 5.4, on peut supposer que la strate simple $[\mathfrak{a}, \beta]$ est τ-autoduale, ce que nous ferons. Soit $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ un type contenu dans π dont le caractère simple attaché soit θ. Alors τ stabilise le normalisateur $\mathbf{J}_\theta$ de θ, donc aussi son sous-groupe compact maximal $\mathbf{J}^0$. Le quotient de $\mathbf{J}_\theta$ par $F^\times\mathbf{J}^0$ étant cyclique, il possède un unique sous-groupe d'indice donné, donc τ normalise $\mathbf{J}$. Aussi le type $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda}^{\vee\tau})$, qui est contenu dans π, est conjugué à $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ par un $g \in G$ normalisant $\mathbf{J}$. Comme le caractère simple qui lui est attaché est $\theta^{-1}\circ\tau=\theta$, on a $g\in\mathbf{J}_\theta$. Notons b l'indice de $\mathbf{J}$ dans $\mathbf{J}_\theta$, et fixons un $\varpi\in\mathbf{J}_\theta\cap B^\times$ tel que $\mathbf{J}_\theta$ soit engendré par $\mathbf{J}^0$ et ϖ comme au lemme 6.6. Par conséquent, $\mathbf{J}$ est engendré par ϖ^b et $\mathbf{J}^0$. On peut donc supposer que $g=\varpi^i$ pour un $i\in\{0,\dots,b-1\}$ tel que $\varpi^i\tau(\varpi^i)\in\mathbf{J}$, c'est-à-dire que b divise $2i$. Si b est impair, alors $i=0$ et $(\mathbf{J},\boldsymbol{\lambda})$ est τ-autodual.

Supposons maintenant que b soit pair et posons $\varpi'=\varpi^{b/2}$. Fixons une représentation $\boldsymbol{\kappa}$ de $\mathbf{J}$ prolongeant η et notons $\boldsymbol{\rho}$ la représentation de $\mathbf{J}$ triviale sur $\mathbf{J}^1$ telle que $\boldsymbol{\lambda}\simeq\boldsymbol{\kappa}\otimes\boldsymbol{\rho}$. Quoique ce ne soit pas indispensable dans ce qui suit, nous supposerons que $\boldsymbol{\kappa}$ est τ-autoduale, comme nous y autorise la proposition 6.8. Supposons que $(\mathbf{J},\boldsymbol{\lambda})$ ne soit pas τ-autodual. Alors la représentation $\boldsymbol{\lambda}^{\vee\tau}$ est isomorphe à $\boldsymbol{\lambda}^{\varpi'}$ et, comme ϖ' normalise $\boldsymbol{\kappa}$, on en déduit que $\boldsymbol{\rho}^{\vee\tau}$ est isomorphe à $\boldsymbol{\rho}^{\varpi'}$. D'autre part, le fait que b soit pair implique que c l'est aussi. On est donc dans le cas où $c=c_0/2$ et $m=2l$, donc E/E_0 est ramifiée et m est pair, avec les notations des paragraphes 5.4 et 5.5.

Identifions maintenant les groupes $\mathbf{J}^0/\mathbf{J}^1\simeq\mathfrak{b}^\times/\mathbf{U}^1(\mathfrak{b})$ et $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$. Quitte à conjuguer θ par un élément de $B^\times$, on peut supposer que τ agit sur $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$ de la façon décrite à la proposition 5.24, c'est-à-dire par conjugaison par un élément $v\in\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$ tel que $v^2\in\boldsymbol{l}^\times$ et $v^2\notin\boldsymbol{l}^{\times2}$. Soit ρ la représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$ définie par $\boldsymbol{\rho}$. La conjugaison par ϖ agit sur $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$ comme un générateur γ de $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{l}/\boldsymbol{k}_E)$ dépendant de l'invariant de Hasse de C. L'élément ϖ' agit donc comme l'élément $\gamma'=\gamma^{b/2}$. Compte tenu de la définition de b à la remarque 3.11, la représentation $\rho^{\gamma'}$ est isomorphe à $\overline{\rho}$, le conjugué de ρ par l'unique élément de $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{l}/\boldsymbol{k}_E)$ d'ordre 2. La relation $\boldsymbol{\rho}^{\tau\vee}\simeq\boldsymbol{\rho}^{\varpi'}$ entraîne donc $\rho^\vee\simeq\overline{\rho}$. Raisonnant comme dans la preuve du lemme 4.9, ou bien d'après [**55**] Lemma 2.3, on en déduit que m est impair : contradiction. Ainsi le type $(\mathbf{J},\boldsymbol{\lambda})$ est τ-autodual. □

Il est intéressant de noter que ce résultat est faux en niveau 0 : nous verrons dans la section 8 qu'une représentation cuspidale de niveau 0 de G peut contenir un caractère simple τ-autodual sans contenir de type τ-autodual.

6.10.

La situation est la même qu'au paragraphe 6.5 : on a fixé un caractère simple maximal τ-autodual θ et une strate simple τ-autoduale $[\mathfrak{a},\beta]$ telle que $\theta\in\mathcal{C}(\mathfrak{a},\beta)$. Supposons en outre qu'on est dans l'un des cas suivants :

- E/E_0 est ramifiée et mc est impair,
- E/E_0 est ramifiée, c_0 est impair, m est pair ou égal à 1 et θ est d'indice $i=\lfloor m/2\rfloor$,
- E/E_0 est ramifiée et c_0 est pair.

Notons $\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\Omega}_\theta$ l'ensemble des couples $(\mathbf{J},\boldsymbol{\rho})$ tels que :

(1) $F^\times\mathbf{J}^0\subseteq\mathbf{J}\subseteq\mathbf{J}_\theta$ et $\boldsymbol{\rho}$ est une classe d'isomorphisme de représentation irréductible τ-autoduale de $\mathbf{J}$ triviale sur $\mathbf{J}^1$,

(2) le normalisateur de $\boldsymbol{\rho}$ dans $\mathbf{J}_\theta$ est égal à $\mathbf{J}$,

(3) la restriction de $\boldsymbol{\rho}$ à $\mathbf{J}^0$ est l'inflation d'une représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$.

Cela signifie donc que, si $\boldsymbol{\kappa}$ est une représentation de $\mathbf{J}_\theta$ prolongeant η, alors $(\mathbf{J},\boldsymbol{\kappa}\otimes\boldsymbol{\rho})$ est un type de G.

Étant donné $(\mathbf{J},\boldsymbol{\rho})\in\boldsymbol{\Omega}$, notons $b=b(\mathbf{J},\boldsymbol{\rho})$ l'indice de $\mathbf{J}$ dans $\mathbf{J}_\theta$. D'après la proposition 3.9(4) et le début du paragraphe 6.8, c'est un diviseur de c et c/b est premier à m.

Lemme 6.18. — *L'ensemble $\boldsymbol{\Omega}$ est fini, et il existe un sous-ensemble $\boldsymbol{\Omega}^+\subseteq\boldsymbol{\Omega}$ tel que :*

(1) *le cardinal de $\boldsymbol{\Omega}$ est le double de celui de $\boldsymbol{\Omega}^+$,*
(2) *pour tout $(\mathbf{J},\boldsymbol{\rho})\in\boldsymbol{\Omega}^+$, la représentation $\boldsymbol{\rho}$ est $\mathbf{J}\cap G^\tau$-distinguée.*

Démonstration. — Pour prouver que $\boldsymbol{\Omega}$ est fini, il suffit de prouver qu'une représentation cuspidale τ-autoduale ρ de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$ n'admet qu'un nombre fini de prolongements τ-autoduaux à son normalisateur $\mathbf{J}$ dans $\mathbf{J}_\theta$. Or, si $\boldsymbol{\rho}$ est un tel prolongement, les autres sont de la forme $\boldsymbol{\rho}\chi$ où χ est un caractère quadratique non ramifié de $\mathbf{J}$.

Soit $(\mathbf{J},\boldsymbol{\rho})$ une paire de $\boldsymbol{\Omega}$ et soit ρ la représentation cuspidale τ-autoduale de $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$ qu'elle définit. D'après [**30**] si E/E_0 est non ramifiée, [**35**] Proposition 6.1 si E/E_0 est ramifiée et c_0 est impair, et enfin [**24**] Lemme 4.3.11 si E/E_0 est ramifiée et c_0 est pair, ρ est $\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})^\tau$-distinguée et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})^\tau}(\rho,\mathbb{C})$ est de dimension 1. Il existe donc un unique caractère ζ de $\mathbf{J}\cap G^\tau$ trivial sur $\mathbf{J}^0\cap G^\tau$ tel que :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})^\tau}(\rho,\mathbb{C})=\mathrm{Hom}_{\mathbf{J}\cap G^\tau}(\boldsymbol{\rho},\zeta)$$

et, par unicité de ζ et comme $\boldsymbol{\rho}$ est τ-autoduale, on a $\zeta^2=1$.

Soit ω l'unique caractère non ramifié de $\mathbf{J}$ d'ordre 2. Posons $\boldsymbol{\rho}^*=\boldsymbol{\rho}\omega$. Alors $(\mathbf{J},\boldsymbol{\rho}^*)\in\boldsymbol{\Omega}$ et :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{J}\cap G^\tau}(\boldsymbol{\rho},\zeta)=\mathrm{Hom}_{\mathbf{J}\cap G^\tau}(\boldsymbol{\rho}^*,\zeta\omega).$$

Supposons que E/E_0 soit ramifiée ou que $m>1$. Alors $\mathbf{J}_\theta\cap G^\tau$ est engendré par ϖ' et $\mathbf{J}^0\cap G^\tau$, où ϖ' est défini par le lemme 6.7, donc $\mathbf{J}\cap G^\tau$ est engendré par ϖ'^b et $\mathbf{J}^0\cap G^\tau$. Alors ω est non trivial sur $\mathbf{J}\cap G^\tau$. Par conséquent, exactement une représentation parmi $\boldsymbol{\rho}$ et $\boldsymbol{\rho}^*$ est distinguée par $\mathbf{J}\cap G^\tau$.

Supposons enfin que E/E_0 soit ramifiée, que c_0 soit impair et que $m=1$. Le groupe $\mathbf{J}_\theta\cap G^\tau$ est engendré par ϖ^2 et $\mathbf{J}^0\cap G^\tau$, donc ω est trivial sur $\mathbf{J}\cap G^\tau$. Soit υ le caractère quadratique non trivial de $\boldsymbol{l}^\times$ prolongé à $\mathbf{J}$ en posant $\upsilon(\varpi^b)=1$. Alors $\boldsymbol{\Omega}$ est constitué des quatre caractères 1, ω, υ et $\upsilon\omega$. Ceux qui sont distingués par $\mathbf{J}\cap G^\tau=\langle\varpi^{2b},\mathbf{J}^0\cap G^\tau\rangle$ sont 1 et ω. □

6.11.

Dans ce paragraphe, on note $\boldsymbol{\Theta}$ l'endo-classe du caractère simple maximal τ-autodual θ fixé au paragraphe 6.4 et T/T_0 l'extension quadratique qui lui est associée. On suppose qu'il existe une représentation cuspidale autoduale de G d'endo-classe $\boldsymbol{\Theta}$ contenant θ, qu'on peut supposer être d'indice $\lfloor m/2\rfloor$ si T/T_0 est ramifiée et c_0 est impair d'après la proposition 5.24. D'après le corollaire 5.19, on en déduit que :

(1) si T/T_0 est non ramifiée, alors mc est impair,
(2) si T/T_0 est ramifiée, alors m est pair ou égal à 1.

Nous sommes donc dans le champ d'application des résultats des paragraphes 6.7 à 6.10.

Soit une paire $(\mathbf{J},\boldsymbol{\rho})\in\boldsymbol{\Omega}$. Notons b l'indice de $\mathbf{J}$ dans $\mathbf{J}_\theta$. D'après les corollaires 6.12 et 6.16, il y a une unique représentation $\boldsymbol{\kappa}_p$ de $\mathbf{J}_b$ prolongeant η, étant à la fois τ-autoduale et distinguée par $\mathbf{J}_b \cap G^\tau$, et dont le déterminant soit d'ordre une puissance de p. On pose :

$$\Pi(\mathbf{J}, \boldsymbol{\rho}) = \mathrm{ind}_{\mathbf{J}}^{G}(\boldsymbol{\kappa}_p \otimes \boldsymbol{\rho}).$$

La paire $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\kappa}_p \otimes \boldsymbol{\rho})$ étant par construction un type τ-autodual de G, la représentation $\Pi(\mathbf{J}, \boldsymbol{\rho})$ est une représentation cuspidale autoduale de G d'endo-classe $\boldsymbol{\Theta}$.

Notons maintenant $\mathsf{A}(G, \boldsymbol{\Theta})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations cuspidales autoduales de G d'endo-classe $\boldsymbol{\Theta}$.

Proposition 6.19. — (1) *L'application* $\Pi : (\mathbf{J}, \boldsymbol{\rho}) \mapsto \Pi(\mathbf{J}, \boldsymbol{\rho})$ *de* $\boldsymbol{\Omega}$ *dans* $\mathsf{A}(G, \boldsymbol{\Theta})$ *est surjective.*

(2) *Deux paires* $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\rho})$ *et* $(\mathbf{J}', \boldsymbol{\rho}')$ *de* $\boldsymbol{\Omega}$ *ont la même image par* Π *si et seulement si* $\mathbf{J}' = \mathbf{J}$ *et les représentations* $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\rho}'$ *sont conjuguées sous* $\mathbf{J}_\theta$.

(3) *Si* $\boldsymbol{\rho}$ *est* $\mathbf{J} \cap G^\tau$*-distinguée, alors* $\Pi(\mathbf{J}, \boldsymbol{\rho})$ *est* G^τ*-distinguée.*

Démonstration. — Commençons par prouver la surjectivité. Soit π une représentation cuspidale autoduale de G d'endo-classe $\boldsymbol{\Theta}$. Elle contient le caractère simple θ. D'après la proposition 6.17, elle contient donc un type τ-autodual $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$, et la représentation $\boldsymbol{\lambda}$ se décompose sous la forme $\boldsymbol{\kappa}_p \otimes \boldsymbol{\rho}$. Comme $\boldsymbol{\kappa}_p$ est τ-autoduale, $\boldsymbol{\rho}$ l'est aussi. Par conséquent, la paire $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\rho})$ appartient à $\boldsymbol{\Omega}$ et π est isomorphe à $\Pi(\mathbf{J}, \boldsymbol{\rho})$.

Soient ensuite $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\rho})$ et $(\mathbf{J}', \boldsymbol{\rho}')$ deux paires de $\boldsymbol{\Omega}$ donnant lieu à la même représentation cuspidale autoduale π de G. Alors les types $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\kappa}_p \otimes \boldsymbol{\rho})$ et $(\mathbf{J}', \boldsymbol{\kappa}_p \otimes \boldsymbol{\rho}')$ sont conjugués par un élément $g \in G$ normalisant non seulement $\mathbf{J}$, mais aussi le caractère simple θ attaché à ces types. On en déduit que $g \in \mathbf{J}_\theta$.

Prouvons le point (3). Si $\boldsymbol{\rho}$ est $\mathbf{J} \cap G^\tau$-distinguée, alors $\boldsymbol{\kappa}_p \otimes \boldsymbol{\rho}$ est $\mathbf{J} \cap G^\tau$-distinguée car $\boldsymbol{\kappa}_p$ est $\mathbf{J} \cap G^\tau$-distinguée. Son induite compacte $\Pi(\mathbf{J}, \boldsymbol{\rho})$ est donc G^τ-distinguée. □

6.12.

Le résultat suivant met un terme à cette section. Fixons une F-endo-classe autoduale non nulle $\boldsymbol{\Theta}$ de degré divisant $2n$, et notons $\mathsf{A}(G, \boldsymbol{\Theta})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations cuspidales autoduales de G d'endo-classe $\boldsymbol{\Theta}$.

Proposition 6.20. — (1) *L'ensemble* $\mathsf{A}(G, \boldsymbol{\Theta})$ *est fini.*

(2) *Le sous-ensemble* $\mathsf{A}^+(G, \boldsymbol{\Theta})$ *de* $\mathsf{A}(G, \boldsymbol{\Theta})$ *formé des représentations* G^τ*-distinguées est soit vide, soit de cardinal au moins égal à la moitié de celui de* $\mathsf{A}(G, \boldsymbol{\Theta})$.

(3) *Pour que* $\mathsf{A}^+(G, \boldsymbol{\Theta})$ *soit non vide, il faut et suffit qu'une représentation cuspidale autoduale de* G *d'endo-classe* $\boldsymbol{\Theta}$ *contienne un caractère simple* τ*-autodual.*

Démonstration. — Il n'existe qu'un nombre fini de classes d'inertie de représentations cuspidales d'endo-classe fixée. Pour prouver la finitude de $\mathsf{A}(G, \boldsymbol{\Theta})$, il suffit donc de prouver qu'il n'existe qu'un nombre fini de représentations cuspidales autoduales de classes d'inertie fixée. Or si π est une représentation cuspidale autoduale, les représentations autoduales qui lui sont inertiellement équivalentes sont de la forme $\pi\chi$ où χ est un caractère non ramifié de G tel que $\pi\chi^2 \simeq \pi$, ce qui assure que χ est d'ordre fini.

Si $\mathsf{A}^+(G,\boldsymbol{\Theta})$ est non vide, la proposition 6.3 assure qu'il existe une représentation cuspidale autoduale de G d'endo-classe $\boldsymbol{\Theta}$ contenant un caractère simple τ-autodual. Inversement, s'il y a une représentation cuspidale autoduale de G d'endo-classe $\boldsymbol{\Theta}$ contenant un caractère simple θ τ-autodual, la proposition 6.19 et le lemme 6.18 montrent que :

$$\{\Pi(\mathbf{J},\boldsymbol{\rho}) \mid (\mathbf{J},\boldsymbol{\rho}) \in \boldsymbol{\Omega}^+\} \subseteq \mathsf{A}^+(G,\boldsymbol{\Theta}).$$

En outre, notant $[\boldsymbol{\Omega}]$ l'ensemble des classes de $\mathbf{J}_\theta$-conjugaison de $\boldsymbol{\Omega}$ et $[\boldsymbol{\Omega}^+]$ l'analogue pour $\boldsymbol{\Omega}^+$, le cardinal du membre de gauche est égal à celui de $[\boldsymbol{\Omega}^+]$. Comme $\mathsf{A}(G,\boldsymbol{\Theta})$ et $[\boldsymbol{\Omega}]$ ont le même cardinal, il ne reste qu'à prouver que le cardinal de $[\boldsymbol{\Omega}^+]$ est au moins égal à la moitié de celui de $[\boldsymbol{\Omega}]$, ce qui se déduit du lemme 6.18(1). □

7. Calcul du facteur epsilon

Le résultat principal de cette section est le théorème 7.17, qui interprète le théorème 5.18 en fonctio du facteur epsilon du paragraphe 1.1.

Fixons un entier $n \geqslant 1$, une clôture séparable $\overline{F}$ de F et une extension quadratique K de F incluse dans $\overline{F}$. Notons $\mathcal{W}_F$ le groupe de Weil de $\overline{F}$ sur F. Rappelons qu'on a fixé à la section 2 un caractère additif ψ de F, trivial sur $\mathfrak{p}_F$ mais pas sur $\mathcal{O}_F$. On pose $\psi_K = \psi \circ \mathrm{tr}_{K/F}$, caractère de K trivial sur $\mathfrak{p}_K$ mais pas sur $\mathcal{O}_K$. Notons $\boldsymbol{\omega}_{K/F}$ le caractère de $F^\times$ de noyau $\mathrm{N}_{K/F}(K^\times)$.

7.1.

Dans un premier temps, et ce jusqu'au paragraphe 7.8, on pose $G = \mathrm{GL}_{2n}(F)$ et on fixe une représentation irréductible cuspidale autoduale π de G. Notons c_π son caractère central : c'est un caractère de $F^\times$. Notons ϕ son paramètre de Langlands, qui est une représentation irréductible de dimension $2n$ de $\mathcal{W}_F$, et ϕ_K la restriction de ϕ à $\mathcal{W}_K$. Rappelons (voir [**63**]) qu'il correspond à ϕ_K un facteur epsilon, que l'on note $\epsilon(s,\phi_K,\psi_K)$. On pose :

$$\mathsf{e}_K(\pi) = \mathsf{e}_K(\phi) = \epsilon\left(\frac{1}{2},\phi_K,\psi_K\right), \tag{7.1}$$

qui ne dépend pas du choix de ψ. Nous allons calculer cette constante, puis faire le lien avec les résultats que nous avons obtenus dans les sections 5 et 6.

Comme au paragraphe 4.3, nous fixons un élément $\sigma \in G$ tel que $\sigma^2 = 1$ et de polynôme caractéristique $(X^2-1)^n$, et notons encore σ l'automorphisme intérieur de conjugaison par σ.

7.2.

La première étape dans ce calcul est le théorème suivant, exprimant $\mathsf{e}_K(\pi)$ en fonction de données relevant de la description de π en termes de types simples. D'après la proposition 4.5, il y a une strate simple maximale σ-autoduale $[\mathfrak{a},\beta]$ dans $\mathsf{M}_{2n}(F)$ telle que π contienne un caractère simple σ-autodual $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a},\beta)$. Notons $\boldsymbol{\Theta}$ son endo-classe ; elle est autoduale.

Il sera commode de poser $\mathsf{e}_F(V) = \epsilon(1/2,V,\psi)$ pour n'importe quelle représentation V de dimension finie de $\mathcal{W}_F$.

Théorème 7.1. — *Pour toute représentation irréductible cuspidale autoduale π de niveau non nul de* $\mathrm{GL}_{2n}(F)$, *on a :*

$$\mathsf{e}_K(\pi) = c_\pi(-1) \cdot \boldsymbol{\omega}_{K/F}(-1)^n \cdot \boldsymbol{\omega}_{K/F}(\det \beta). \tag{7.2}$$

Démonstration. — Écrivons d'abord ([**17**] (30.4.2)) :

$$\mathsf{e}_F(\mathrm{Ind}_{K/F}(\phi_K)) = \boldsymbol{\lambda}_{K/F}^{\dim(\phi_K)} \cdot \mathsf{e}_K(\phi_K) = \boldsymbol{\lambda}_{K/F}^{2n} \cdot \mathsf{e}_K(\pi) \tag{7.3}$$

où $\boldsymbol{\lambda}_{K/F}$ désigne la constante de Langlands. Le carré de celle-ci étant égal à $\boldsymbol{\omega}_{K/F}(-1)$ (voir par exemple [**17**] (30.4.3)), on voit que (7.3) est égal à $\boldsymbol{\omega}_{K/F}(-1)^n \cdot \mathsf{e}_K(\pi)$. D'un autre côté, on a :

$$\mathsf{e}_F(\mathrm{Ind}_{K/F}(\phi_K)) = \mathsf{e}_F(\phi \otimes \mathrm{Ind}_{K/F}(1)) = \mathsf{e}_F(\phi) \cdot \mathsf{e}_F(\phi\boldsymbol{\omega}_{K/F}) = \mathsf{e}_F(\pi) \cdot \mathsf{e}_F(\pi\boldsymbol{\omega}_{K/F}),$$

où $\boldsymbol{\omega}_{K/F}$ est considéré à la fois comme caractère de $F^\times$ et de $\mathcal{W}_F$ *via* le morphisme de réciprocité d'Artin de la théorie du corps de classes. Invoquant [**13**] Théorème 4.1, on a :

$$\mathsf{e}_F(\pi\chi) = \chi(\det \beta)^{-1} \cdot \mathsf{e}_F(\pi),$$

pour tout caractère modérément ramifié χ de $F^\times$. Appliquant ce résultat au caractère quadratique $\boldsymbol{\omega}_{K/F}$, on trouve que $\mathsf{e}_F(\pi\boldsymbol{\omega}_{K/F})$ est égal à $\boldsymbol{\omega}_{K/F}(\det \beta) \cdot \mathsf{e}_F(\pi)$. Utilisant le fait que π est autoduale et l'identité $\mathsf{e}_F(\pi) \cdot \mathsf{e}_F(\pi^\vee) = c_\pi(-1)$, on obtient le résultat annoncé. □

Remarque 7.2. — (1) Dans le cas où la restriction ϕ_K du paramètre de Langlands ϕ de π à $\mathcal{W}_K$ est réductible, on peut facilement prouver que :

$$\mathsf{e}_K(\pi) = c_\pi(-1) \cdot \boldsymbol{\omega}_{K/F}(-1)^n. \tag{7.4}$$

(2) Posons $E = F[\beta]$ et $m = 2n/[E : F]$, et soit P une extension non ramifiée de E de degré m dans $\mathbf{M}_{2n}(F)$. Il sera utile dans la suite de remarquer que :

$$\det \beta = \mathrm{N}_{P/F}(\beta) = \mathrm{N}_{E/F}(\beta)^m. \tag{7.5}$$

(3) La valeur de $\mathsf{e}_K(\pi)$ dépend uniquement de n, de l'extension K/F, du caractère central de la représentation π et de son endo-classe $\boldsymbol{\Theta}$.

Dans le cas où π est de niveau 0, la constante $\mathsf{e}_K(\pi)$ a été calculée dans [**23**]. Les auteurs utilisent une normalisation différente, c'est-à-dire qu'ils calculent :

$$\mathsf{e}_F(\mathrm{Ind}_{K/F}(\phi_K)) = \boldsymbol{\omega}_{K/F}(-1)^n \cdot \mathsf{e}_K(\pi).$$

Ils supposent aussi que le caractère central de π est trivial.

Théorème 7.3 **([23] Theorem 6.1)**. — *Soit π une représentation cuspidale autoduale de niveau* 0 *de* $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ *et de caractère central trivial. On a :*

$$\mathsf{e}_K(\pi) = (-1)^{f_{K/F}}.$$

Dans toute la suite de cette section, nous supposons donc que π est *de niveau non nul.*

7.3.

Pour alléger les formules, et comme c'est le cas où π a un caractère central trivial qui nous intéressera dans la section 9, nous posons :

$$\mathsf{w}_K(\pi) = c_\pi(-1) \cdot \mathsf{e}_K(\pi) = \boldsymbol{\omega}_{K/F}((-1)^n \cdot \det \beta). \tag{7.6}$$

Posons $E = F[\beta]$ et $E_0 = F[\beta^2]$. Fixons dans toute la suite de cette section une extension non ramifiée P de E de degré m, comme à la remarque 7.2(2), et une uniformisante $\varpi \in E$ telle que $\sigma(\varpi)$ soit égale à ϖ si E/E_0 est non ramifiée, et à $-\varpi$ sinon.

Comme π est autoduale de niveau non nul, son endo-classe $\boldsymbol{\Theta}$ est autoduale non nulle, et il lui correspond une extension quadratique T/T_0. Rappelons (proposition 4.8) que E/E_0 est ramifiée si et seulement si T/T_0 est ramifiée. Commençons par calculer $\mathsf{w}_K(\pi)$ dans deux cas simples.

Lemme 7.4. — *Supposons que K se plonge dans P comme F-algèbre. Alors :*

$$\mathsf{w}_K(\pi) = \boldsymbol{\omega}_{K/F}(-1)^n.$$

Démonstration. — C'est une conséquence du fait que $\mathrm{N}_{P/F}(\beta) = \mathrm{N}_{K/F}(\mathrm{N}_{P/K}(\beta))$ et de l'identité (7.5) de la remarque 7.2. □

Le résultat simple suivant nous sera utile à plusieurs reprises dans cette section.

Lemme 7.5. — *Si E/E_0 est ramifiée, alors $\mathrm{val}_E(\beta)$ est impair.*

Démonstration. — Supposons que E/E_0 soit ramifiée et $\mathrm{val}_E(\beta)$ pair, et écrivons :

$$\beta = \varpi^v \cdot \zeta \cdot u, \quad v = \mathrm{val}_E(\beta) \in \mathbb{Z}, \quad u \in \mathbf{U}^1_E,$$

où ζ est une racine de l'unité d'ordre premier à p dans E. Le fait que E/E_0 soit ramifiée implique que ζ est invariante par σ, puis le fait que $\sigma(\beta) = -\beta$ implique que $\sigma(u) = -u$, ce qui est impossible car $p \neq 2$. □

Lemme 7.6. — *Supposons que K soit non ramifiée sur F, et notons $t(\pi)$ le nombre de caractère non ramifiés χ de G tels que $\pi\chi \simeq \pi$. Alors $\mathsf{w}_K(\pi) = (-1)^{t(\pi)}$.*

Démonstration. — Comme K est non ramifiée sur F, le caractère $\boldsymbol{\omega}_{K/F}$ est non ramifié. Compte tenu de (7.6), il s'agit donc de calculer la valuation de $\det \beta$. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{val}_F(\det \beta) &= m \cdot \mathrm{val}_F(\mathrm{N}_{E/F}(\beta)) \\ &= m \cdot \mathrm{val}_E(\beta) \cdot \mathrm{val}_F(\mathrm{N}_{E/F}(\varpi)) \\ &= m f_{E/F} \cdot \mathrm{val}_E(\beta) \end{aligned}$$

ce qui est égal à $t(\pi) \cdot \mathrm{val}_E(\beta)$ d'après [**21**] Lemma 6.2.5. Si $t(\pi)$ est pair, on a le résultat voulu. Si $t(\pi)$ est impair, alors en particulier $f_{E/F}$ est impair, ce qui implique que E/E_0 est ramifiée, donc que $\mathrm{val}_E(\beta)$ est impair d'après le lemme 7.5 : à nouveau, le résultat s'ensuit. □

Corollaire 7.7. — *Supposons que K soit non ramifiée sur F. Alors $\mathsf{w}_K(\pi) = 1$ si et seulement si K se plonge dans P comme F-algèbre.*

Démonstration. — Ceci découle du lemme précédent, et du fait que K se plonge dans P si et seulement si $f_{P/F} = t(\pi)$ est pair. □

Remarque 7.8. — L'entier $t(\pi) \cdot \mathrm{val}_E(\beta)$ qui apparaît ci-dessus est égal à $2n \cdot l(\pi)$, où $l(\pi)$ est le *niveau normalisé* (ou la *profondeur*) de π. C'est aussi le conducteur $f(\pi)$ de π, défini par :

$$\epsilon(s,\pi,\psi) = q_F^{-f(\pi)(s-1/2)} \cdot \mathsf{e}_F(\pi)$$

où q_F est le cardinal du corps résiduel de F et $\mathsf{e}_F(\pi)$ la valeur du facteur epsilon en 1/2.

7.4.

Il nous faut maintenant calculer $\mathsf{w}_K(\pi)$ dans le cas où K est ramifiée sur F, ce que nous supposerons désormais. Dans les calculs qui suivent, nous désignerons par $\equiv$ la relation de congruence modulo $\mathrm{N}_{K/F}(K^\times)$ sur $F^\times$. Il faut garder en tête que $\mathrm{N}_{K/F}(K^\times)$ contient le sous-groupe $F^{\times 2}$ des carrés de $F^\times$, donc celui $\mathbf{U}_F^1$ des unités principales. Notons $\boldsymbol{\mu}_E$ le sous-groupe de $E^\times$ formé des racines de l'unité d'ordre premier à p, qui s'identifie naturellement à $\boldsymbol{k}_E^\times$ par réduction mod $\mathfrak{p}_E$. Comme dans la section 4, nous noterons $\boldsymbol{l}$ le corps résiduel de E et $\boldsymbol{l}_0$ celui de E_0. Ecrivons β sous la forme :

$$\beta = \varpi^v \cdot \zeta \cdot u, \quad v = \mathrm{val}_E(\beta) \in \mathbb{Z}, \quad \zeta \in \boldsymbol{\mu}_E, \quad u \in \mathbf{U}_E^1.$$

Appliquant $\mathrm{N}_{P/F}$, on obtient :

$$\det\beta \equiv \mathrm{N}_{E/F}(\varpi)^{mv} \cdot \mathrm{N}_{E/F}(\zeta)^m \equiv \mathrm{N}_{E/F}(\varpi)^{mv} \cdot \mathrm{N}_{\boldsymbol{l}/\boldsymbol{k}_F}(\zeta)^{me_{E/F}}. \tag{7.7}$$

Nous allons distinguer plusieurs cas, à commencer par le suivant.

Lemme 7.9. — *Supposons que K/F soit ramifiée et que E/E_0 soit non ramifiée. Alors :*

$$\mathsf{w}_K(\pi) = (-1)^{e_{E/F}}.$$

Démonstration. — D'abord, le fait que E/E_0 soit non ramifiée implique que l'entier m est impair (lemme 4.9) et que la norme $\mathrm{N}_{E/F}(\varpi) = \mathrm{N}_{E_0/F}(\varpi)^2$ est un carré de $F^\times$. Compte tenu de (7.7), on a donc :

$$\det\beta \equiv \mathrm{N}_{\boldsymbol{l}/\boldsymbol{k}_F}(\zeta)^{e_{E/F}}.$$

Comme $\sigma(\beta) = -\beta$ et $\varpi \in E_0$, on a $\mathrm{N}_{\boldsymbol{l}/\boldsymbol{l}_0}(\zeta) = -\zeta^2$, donc :

$$\mathrm{N}_{\boldsymbol{l}/\boldsymbol{k}_F}(\zeta) = \mathrm{N}_{\boldsymbol{l}_0/\boldsymbol{k}_F}(-\zeta^2) = (-1)^{f_{E_0/F}} \cdot \mathrm{N}_{\boldsymbol{l}_0/\boldsymbol{k}_F}(\zeta^2).$$

D'autre part, notant q le cardinal de $\boldsymbol{k}_F$ et Q_0 celui de $\boldsymbol{l}_0$, on a :

$$\mathrm{N}_{\boldsymbol{l}_0/\boldsymbol{k}_F}(\zeta^2)^{(q-1)/2} = \zeta^{Q_0-1} = -1$$

c'est-à-dire que $\mathrm{N}_{\boldsymbol{l}_0/\boldsymbol{k}_F}(\zeta^2)$ n'est pas un carré dans $\boldsymbol{k}_F^\times$. Il s'ensuit que :

$$\boldsymbol{\omega}_{K/F}(\det\beta) = \boldsymbol{\omega}_{K/F}(-1)^{[E_0:F]} \cdot (-1)^{e_{E/F}} = \boldsymbol{\omega}_{K/F}(-1)^n \cdot (-1)^{e_{E/F}},$$

la dernière égalité venant du fait que m est impair et $m[E_0:F] = n$. Le résultat s'ensuit. □

7.5.

Rappelons que le degré sur F de l'extension P fixée au paragraphe 7.3 est égal à $2n$.

Lemme 7.10. — (1) *Si $f_{P/F}$ est impair, alors P contient une seule extension quadratique, et elle est ramifiée.*

(2) *Si $f_{P/F}$ est pair, alors P contient l'extension quadratique non ramifiée, ainsi que soit aucune, soit deux extensions quadratiques ramifiées.*

Démonstration. — Tout d'abord, l'extension quadratique non ramifiée de F se plonge dans P si et seulement si $f_{P/F}$ est pair. Ensuite, si P contient une extension quadratique ramifiée de F, alors elle contient l'autre si et seulement si un non-carré de $\boldsymbol{k}_F^\times$ est carré dans $\boldsymbol{k}_P^\times$, c'est-à-dire si et seulement si $f_{P/F}$ est pair. Ceci prouve (2), et aussi le fait que, si $f_{P/F}$ est impair, P contient au plus une extension quadratique ramifiée de F. Il reste à prouver que, si $f_{P/F}$ est impair, P contient une extension quadratique ramifiée de F.

Si $f_{P/F}$ est impair, son indice de ramification $e_{P/F}$ est pair car P est de degré pair sur F. On peut donc fixer une uniformisante ϖ_F de F et écrire $e_{P/F} = 2r$ et :

$$\varpi^{2r} = \varpi_F \cdot \xi \cdot u, \quad \xi \in \boldsymbol{\mu}_P, \quad u \in \mathbf{U}_E^1.$$

Si ϖ_F est un carré dans P, alors P contient l'extension quadratique de F engendrée par une de ses racines carrées. Sinon, ξ n'est pas un carré dans $\boldsymbol{\mu}_P$. Écrivant alors $x = \varpi^r \zeta v^{-1}$ pour une racine de l'unité $\zeta \in \boldsymbol{\mu}_P$ et avec $v \in \mathbf{U}_E^1$ tel que $v^2 = u$, on trouve que $x^2 = \varpi_F \cdot \xi\zeta^2$. Si $\eta \in \boldsymbol{\mu}_F$ est un non-carré de $F^\times$, alors P contient l'extension quadratique de F engendrée par une racine carrée de $\varpi_F\eta$ si et seulement si $\eta\xi$ est un carré de $\boldsymbol{\mu}_P$, c'est-à-dire si et seulement si $\xi \in \boldsymbol{\mu}_F\boldsymbol{\mu}_P^2$. Notant $f = f_{P/F}$, l'ordre de ce groupe cyclique est :

$$\operatorname{ppcm}\left(q-1, \frac{q^f-1}{2}\right) = \frac{q^f-1}{\operatorname{pgcd}(2,f)} = q^f - 1$$

car f est impair. Autrement dit, $\boldsymbol{\mu}_F\boldsymbol{\mu}_P^2$ est égal à $\boldsymbol{\mu}_P$ tout entier, ce qui prouve (1). □

7.6.

On suppose dans ce paragraphe que K est ramifiée sur F et que E/E_0 est ramifiée. La valuation v de β dans E est donc impaire (lemme 7.5), et la formule (7.7) devient :

$$\det\beta \equiv \mathrm{N}_{E/F}(\varpi)^m = \mathrm{N}_{P/F}(\varpi). \tag{7.8}$$

L'objectif de ce paragraphe est de prouver le résultat suivant.

Proposition 7.11. — *Supposons que K/F et E/E_0 soient ramifiées. Alors :*

$$\mathsf{w}_K(\pi) = \begin{cases} \boldsymbol{\omega}_{K/F}(-1)^n & \textit{si } K \textit{ se plonge dans } P, \\ -\boldsymbol{\omega}_{K/F}(-1)^n & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Le cas où K se plonge dans P étant déjà traité, nous supposerons dans le reste du paragraphe que K ne se plonge pas dans P. Il s'agit alors de prouver que $\boldsymbol{\omega}_{K/F}(\det\beta) = -1$. Commençons par traiter le cas suivant.

Lemme 7.12. — *Supposons que $f_{P/F}$ soit impair. Alors la proposition* 7.11 *est vraie.*

Démonstration. — Notons M l'extension quadratique ramifiée de F qui n'est pas F-isomorphe à K, c'est-à-dire l'extension engendrée par une racine carrée de $\alpha\eta$, où $\eta \in \boldsymbol{\mu}_F$ n'est pas un carré dans $\boldsymbol{\mu}_F$. D'après le lemme 7.10, la F-algèbre P contient M. Ainsi $\det\beta = \mathrm{N}_{M/F}(\mathrm{N}_{P/M}(\beta))$ est une M/F-norme, qu'on peut donc écrire :

$$\det\beta = (-\alpha\eta)^k \cdot u, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad u \in \mathcal{O}_F^{\times 2}.$$

Pour des raisons de valuation, on a $k = f_{P/F}v$ qui est impair. Ensuite, comme $-\alpha \in \mathrm{N}_{K/F}(K^\times)$, on a $\det\beta \equiv \eta$. Comme η n'est pas un carré dans $\boldsymbol{\mu}_F$, on obtient le résultat escompté. □

Traitons maintenant le cas restant, c'est-à-dire le cas où $f_{P/F}$ est pair. Observons que, dans ce cas, $\det\beta$ est une K/F-norme si et seulement si c'est un carré dans $F^\times$, ce qui est une question indépendante de l'extension quadratique ramifiée K. Écrivons :

$$\varpi^{e_{E/F}} = \alpha \cdot \xi \cdot u, \quad \xi \in \boldsymbol{\mu}_E, \quad u \in \mathbf{U}_E^1. \tag{7.9}$$

Comme K ne se plonge pas dans P, cet élément ξ n'est pas un carré dans $\boldsymbol{\mu}_P$. Par conséquent, $m = f_{P/E}$ est impair. Comme E/E_0 est ramifiée, on a même $m = 1$, c'est-à-dire que $P = E$ et $[E_0 : F] = n$. L'identité (7.8) entraîne :

$$\det\beta \equiv \mathrm{N}_{E/F}(\varpi). \tag{7.10}$$

Pour prouver la proposition 7.11, il ne reste donc plus qu'à prouver le lemme suivant.

Lemme 7.13. — *Soit L_0 une extension finie de F de degré résiduel pair, et soit L une extension quadratique ramifiée de L_0. On suppose que L ne contient aucune extension quadratique ramifiée de F. Alors, pour toute uniformisante w de L, la norme $\mathrm{N}_{L/F}(w)$ n'est pas un carré dans $F^\times$.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur la valuation 2-adique de l'entier $e_{L_0/F}$.

Commençons par le cas où $e_{L_0/F}$ est impair. Le résultat cherché ne dépendant pas de l'uniformisante w choisie, et L/L_0 étant modérée, on peut supposer que $w_0 = w^2$ est une uniformisante de L_0. On a donc $\mathrm{N}_{L/L_0}(w) = -w_0$, ce qui entraîne :

$$\mathrm{N}_{L/F}(w) = (-1)^{[L_0:F]} \cdot \mathrm{N}_{L_0/F}(w_0) = \mathrm{N}_{L_0/F}(w_0).$$

Écrivons par ailleurs :

$$w^{e_{L/F}} = w_F \cdot \xi \cdot u, \quad \xi \in \boldsymbol{\mu}_L, \quad u \in \mathbf{U}_L^1, \tag{7.11}$$

où w_F est une uniformisante fixée de F. Comme aucune extension quadratique ramifiée de F ne se plonge dans L, ni ξ ni $\eta\xi$ ne sont des carrés dans $\boldsymbol{\mu}_L$, où η est un élément de $\boldsymbol{\mu}_F$ qui n'est pas un carré dans $\boldsymbol{\mu}_F$. Appliquant $\mathrm{N}_{L_0/F}$ à l'identité (7.11), et comme $r = e_{L_0/F}$ est impair, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}_{L/F}(w) &\equiv \mathrm{N}_{L_0/F}(w_0)^r \mod F^{\times 2} \\ &\equiv w_F^{[L_0:F]} \cdot \mathrm{N}_{\boldsymbol{k}_L/\boldsymbol{k}_F}(\xi)^r \mod F^{\times 2} \\ &\equiv \mathrm{N}_{\boldsymbol{k}_L/\boldsymbol{k}_F}(\xi) \mod F^{\times 2}. \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{N}_{\boldsymbol{k}_L/\boldsymbol{k}_F}(\xi)$ n'est pas un carré dans $\boldsymbol{\mu}_F$, on obtient le résultat voulu.

Supposons maintenant que le résultat a été prouvé lorsque la valuation $\mathrm{val}_2(e_{L_0/F})$ est égale à un entier fixé $i \geqslant 0$. Prouvons-le lorsque cette valuation vaut $i+1$. Soit F' l'extension quadratique ramifiée de F engendrée par une racine carré de w_F. Comme elle ne se plonge pas dans L, la F'-algèbre $L' = L \otimes_F M$ est un corps. Notons aussi $L'_0 = L_0 \otimes F'$. Observons que L' est une extension quadratique non ramifiée de L et une extension quadratique ramifiée de L'_0, que $f_{L'/F'} = 2f_{L/F}$ est pair, et que $e_{L'_0/F'} = e_{L_0/F}/2$, de sorte que $\mathrm{val}_2(e_{L'_0/F'}) = i$. En outre, comme w est une uniformisante de L', on a $\mathrm{N}_{L/F}(w) = \mathrm{N}_{L'/F'}(w)$. Pour pouvoir appliquer l'hypothèse de récurrence, il faut prouver que L' ne contient aucune extension quadratique ramifiée de F'. Pour cela, écrivons :

$$w^{e_{L'/F'}} = w_{F'} \cdot \zeta \cdot u', \quad \zeta \in \boldsymbol{\mu}_{L'}, \quad u' \in \mathbf{U}^1_{L'},$$

où $w_{F'}$ est une racine carrée fixée de w_F. Mettant au carré et comparant avec (7.11), on trouve que $\zeta^2 = \xi$. Pour prouver que L' ne contient aucune extension quadratique ramifiée de F', et $f_{L'/F'}$ étant pair, il s'agit de prouver que ζ n'est pas un carré dans $\boldsymbol{\mu}_{L'}$. Notons Q le cardinal de $\boldsymbol{k}_L$ et $Q' = Q^2$ celui de $\boldsymbol{k}_{L'}$. Comme ξ n'est pas un carré dans $\boldsymbol{\mu}_L$, on a $\xi^{(Q-1)/2} = -1$, donc :

$$\zeta^{(Q'-1)/2} = \xi^{(Q^2-1)/4} = (-1)^{(Q+1)/2}.$$

Il ne reste plus qu'à prouver que $(Q+1)/2$ est impair, ce qui se déduit du fait que q est impair et Q est égal à $q^{f_{L/F}}$ avec $f_{L/F}$ pair.

Par hypothèse de récurrence, $\mathrm{N}_{L/F}(w) = \mathrm{N}_{L'/F'}(w)$ n'est pas un carré dans $F'^{\times}$. Écrivons :

$$\mathrm{N}_{L/F}(w) = w_F^{f_{L/F}} \cdot \lambda \cdot y$$

avec $\lambda \in \boldsymbol{\mu}_{F'} = \boldsymbol{\mu}_F$ et $y \in \mathbf{U}^1_{F'}$. Comme $f_{L/F}$ est pair, λ n'est pas un carré dans $\boldsymbol{\mu}_{F'}$, donc dans $\boldsymbol{\mu}_F$ non plus. Il s'ensuit que $\mathrm{N}_{L/F}(w)$ n'est pas un carré dans $F^{\times}$. □

7.7.

Rappelons qu'on a fixé au paragraphe 7.1 une représentation irréductible cuspidale autoduale π du groupe $G = \mathrm{GL}_{2n}(F)$ d'endo-classe $\boldsymbol{\Theta}$ supposée non nulle, et que l'extension P a été fixée au paragraphe 7.3. Soit T/T_0 l'extension quadratique associée à $\boldsymbol{\Theta}$ comme au paragraphe 4.4.

Soit $\kappa \in K$ un générateur de K sur F tel que $\alpha = \kappa^2 \in F$. Fixons un plongement de K dans $\mathbf{M}_{2n}(F)$ et notons τ l'involution $\mathrm{Ad}(\kappa)$ de G.

Lemme 7.14. — *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *La représentation π contient un caractère simple τ-autodual.*

(2) *Soit $\alpha \in \mathrm{N}_{T/T_0}(T^{\times})$, soit $\alpha \notin \mathrm{N}_{T/T_0}(T^{\times})$ et m est pair.*

(3) *La valuation $\mathrm{val}_T(\alpha)$ est paire et, pour toute uniformisante ϖ_T de T, la réduction de :*

$$\alpha \cdot \mathrm{N}_{T/T_0}(\varpi_T)^{-\mathrm{val}_T(\alpha)/2} \tag{7.12}$$

dans $\boldsymbol{l}_0^{\times}$ est un carré dans $\boldsymbol{k}_P^{\times}$.

Démonstration. — L'équivalence entre (1) et (2) vient du théorème 5.18. D'après le lemme 5.16, l'entier $m = 2n/\deg(\boldsymbol{\Theta})$ est impair si T/T_0 est non ramifiée, et il est pair ou égal à 1 sinon. Si α appartient à $\mathrm{N}_{T/T_0}(T^{\times})$, alors $\mathrm{val}_T(\alpha)$ est pair, et si l'entier m est pair, alors T/T_0 est ramifiée, donc $\mathrm{val}_T(\alpha) = 2 \cdot \mathrm{val}_{T_0}(\alpha)$ est pair. Dorénavant, nous supposerons que $\mathrm{val}_T(\alpha)$ est pair, ce que nous écrirons $\mathrm{val}_T(\alpha) = 2r$. Notons u la quantité (7.12) et notons $\varkappa$ sa réduction dans $\boldsymbol{l}_0^\times$. Bien sûr, $\alpha \in \mathrm{N}_{T/T_0}(T^\times)$ si et seulement si $u \in \mathrm{N}_{T/T_0}(T^\times)$, ce dernier étant aussi équivalent à :

($\bigstar$) il existe un $v \in \boldsymbol{l}^\times$ tel que $v\overline{v} = \varkappa$

(où $\overline{v}$ désigne le conjugué de v sous $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{l}/\boldsymbol{l}_0)$) ou encore à :

($\bigstar\bigstar$) soit T/T_0 est non ramifiée, soit T/T_0 est ramifiée et $\varkappa$ est un carré dans $\boldsymbol{l}^\times$.

Observons que le corps résiduel de P est de degré m sur $\boldsymbol{l}$. Supposons que $\varkappa$ ne soit pas un carré dans $\boldsymbol{k}_P^\times$. Alors le degré :

$$[\boldsymbol{k}_P : \boldsymbol{l}_0] = mf_{T/T_0}$$

est impair, donc l'extension T/T_0 est ramifiée et $m = 1$, ce qui prouve que (2) implique (3).

Supposons maintenant que $\varkappa$ soit un carré dans $\boldsymbol{k}_P^\times$ et que m soit impair. Alors soit f_{T/T_0} est pair, c'est-à-dire que T/T_0 est non ramifiée, soit T/T_0 est ramifiée et $\varkappa$ est un carré dans $\boldsymbol{l}^\times$. La condition ($\bigstar\bigstar$) est donc vérifiée. □

Nous prouvons le résultat suivant, qui fait le lien entre cette section et la section 5.

Proposition 7.15. — *La représentation π contient un caractère simple maximal τ-autodual si et seulement si $\mathsf{w}_K(\pi) = 1$.*

Démonstration. — Rappelons que T/T_0 est ramifiée si et seulement si E/E_0 est ramifiée, et que $e_{E/T}$ est une puissance de p, donc est impair. Par conséquent, les valuations $\mathrm{val}_E(\alpha)$ et $\mathrm{val}_T(\alpha)$ ont même parité. Nous décomposons la preuve en quatre cas, à commencer par celui où K/F est non ramifiée. Dans ce cas, on peut supposer que α est une unité de F, et on note $\varkappa$ son image dans $\boldsymbol{\mu}_F$, qui n'est pas un carré. D'après le lemme 7.14, on a :

$$\begin{aligned} \pi \text{ contient un caractère simple } \tau\text{-autodual} \quad &\Leftrightarrow \quad \varkappa \text{ est un carré dans } \boldsymbol{k}_P^\times \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha \text{ est un carré dans } P^\times \\ &\Leftrightarrow \quad K \text{ se plonge dans } P \end{aligned}$$

ce qui équivaut à $\mathsf{w}_K(\pi) = 1$ d'après le corollaire 7.7.

Supposons maintenant que K/F soit ramifiée et que E/E_0 soit non ramifiée. Dans ce cas, on a $\mathrm{val}_E(\alpha) = e_{E/F}$ et m est impair, donc π contient un caractère simple τ-autodual si et seulement si $\mathrm{val}_E(\alpha)$ est pair d'après le lemme 7.14, c'est-à-dire si et seulement si $\mathsf{w}_K(\pi) = 1$ d'après le lemme 7.9.

Supposons dorénavant que K/F et E/E_0 soient ramifiées. Dans ce cas, on peut supposer que $\mathrm{val}_F(\alpha) = 1$, et $\mathrm{val}_E(\alpha) = e_{E/F}$ est pair, et on l'écrit $2r$.

Lemme 7.16. — *On suppose que K/F et E/E_0 sont ramifiées, et on écrit $e_{E/F} = 2r$. Alors π contient un caractère simple τ-autodual si et seulement si $(-1)^r\alpha$ est un carré dans P.*

Démonstration. — D'après le lemme 7.14, et compte tenu du fait que $\mathrm{val}_T(\alpha)$ est paire, π contient un caractère simple τ-autodual si et seulement si $\varkappa$, l'image de $u = \alpha \cdot \mathrm{N}_{T/T_0}(\varpi_T)^{-r}$ dans $\boldsymbol{l}^\times$, est un carré dans $\boldsymbol{k}_P^\times$. Relevant à l'anneau des entiers de P, cela équivaut à l'existence d'un $v \in \mathcal{O}_P^\times$ tel que $v^2 = u$. Fixons une uniformisante ϖ_T de T et observons que $\mathrm{N}_{T/T_0}(\varpi_T) = -\varpi_T^2$

car T/T_0 est ramifiée. Alors u est un carré dans P si et seulement si $u\varpi_T^{2r} = (-1)^r\alpha$ est un carré dans P. $\square$

Supposons d'abord que K se plonge dans P, c'est-à-dire que α est un carré dans $P^\times$. Observons que $rmf_{E/F} = n$ et $[\boldsymbol{k}_P : \boldsymbol{k}_F] = mf_{E/F}$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} \pi \text{ contient un caractère simple } \tau\text{-autodual} & \Leftrightarrow & (-1)^r\alpha \text{ est un carré dans } P^\times \\ & \Leftrightarrow & (-1)^r \text{ est un carré dans } \boldsymbol{k}_P^\times \\ & \Leftrightarrow & (-1)^n \text{ est un carré dans } \boldsymbol{k}_F^\times \\ & \Leftrightarrow & \boldsymbol{\omega}_{K/F}(-1)^n = 1 \end{array}$$

ce qui équivaut à $\mathsf{w}_K(\pi) = 1$ d'après le lemme 7.4. Supposons pour finir que K ne se plonge pas dans P. Écrivons :

$$\varpi_T^{2r} = \alpha \cdot \xi \cdot u, \quad \xi \in \boldsymbol{\mu}_T, \quad u \in \mathbf{U}_T^1.$$

Comme K ne se plonge pas dans P, l'élément ξ n'est pas un carré dans $\boldsymbol{\mu}_P$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \pi \text{ contient un caractère simple } \tau\text{-autodual} & \Leftrightarrow & (-1)^r\alpha \text{ est un carré dans } P^\times \\ & \Leftrightarrow & (-1)^r\xi \text{ est un carré dans } \boldsymbol{\mu}_P \\ & \Leftrightarrow & (-1)^r \text{ n'est pas un carré dans } \boldsymbol{k}_F^\times \\ & \Leftrightarrow & (-1)^n \text{ n'est pas un carré dans } \boldsymbol{k}_F^\times \\ & \Leftrightarrow & \boldsymbol{\omega}_{K/F}(-1)^n = -1 \end{array}$$

ce qui équivaut à $\mathsf{w}_K(\pi) = 1$ d'après la proposition 7.11. $\square$

7.8.

Dans ce paragraphe, on suppose maintenant que G est une forme intérieure de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$, et que π est une représentation cuspidale autoduale de G d'endo-classe (non nulle) $\boldsymbol{\Theta}$. Son transfert de Jacquet-Langlands à $\mathrm{GL}_{2n}(F)$, noté π', est une représentation essentiellement de carré intégrable, d'endo-classe $\boldsymbol{\Theta}$ d'après le théorème 5.17. Notons ϕ son paramètre de Langlands. Comme au lemme 5.16, il existe un unique diviseur s de $2n$ et une unique représentation cuspidale π'_0 de $\mathrm{GL}_{2n/s}(F)$ tels que π' soit isomorphe au quotient irréductible $L(\pi'_0, s)$ de :

$$\mathrm{Ind}_P^{\mathrm{GL}_{2n}(F)}(\pi'_0\nu^{(1-s)/2} \otimes \cdots \otimes \pi'_0\nu^{(s-1)/2}),$$

l'induction étant normalisée et prise par rapport au sous-groupe parabolique standard triangulaire supérieur par blocs, et ν désignant le caractère non ramifié “valeur absolue du déterminant” de $\mathrm{GL}_{2n/s}(F)$. La représentation π étant de niveau non nul, c'est aussi le cas de π' et de π'_0. Ce dernier n'est donc pas un caractère non ramifié de $F^\times$, ce qui implique que $\mathsf{e}_F(\pi') = \mathsf{e}_F(\pi'_0)^s$, et on a un résultat similaire pour $\pi'\boldsymbol{\omega}_{K/F}$. Notant $\mathsf{e}_K(\pi) = \mathsf{e}_K(\pi') = \mathsf{e}_K(\phi)$, on a donc :

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{e}_K(\pi) & = & \mathsf{e}_F(\pi')\mathsf{e}_F(\pi'\boldsymbol{\omega}_{K/F}) \\ & = & \mathsf{e}_F(\pi'_0)^s\mathsf{e}_F(\pi'_0\boldsymbol{\omega}_{K/F})^s \\ & = & \mathsf{e}_K(\pi'_0)^s. \end{array}$$

Appliquant le théorème 7.1 à la représentation cuspidale autoduale π_0', et compte tenu du fait que π et π_0' ont même endo-classe, on a :

$$\mathsf{e}_K(\pi_0') = c_{\pi_0'}(-1) \cdot \boldsymbol{\omega}_{K/F}(-1)^{n/s} \cdot \boldsymbol{\omega}_{K/F}(\det \beta),$$

le déterminant de β étant pris dans $\mathrm{GL}_{2n/s}(F)$. La correspondance de Jacquet-Langlands préservant le caractère central, il s'ensuit que :

$$\mathsf{e}_K(\pi) = c_{\pi_0'}(-1)^s \cdot \boldsymbol{\omega}_{K/F}(-1)^n \cdot \boldsymbol{\omega}_{K/F}(\det \beta) = c_\pi(-1) \cdot \boldsymbol{\omega}_{K/F}(-1)^n \cdot \boldsymbol{\omega}_{K/F}(\det \beta), \tag{7.13}$$

le déterminant de β étant pris cette fois-ci dans $\mathrm{GL}_{2n}(F)$. Le résultat suivant généralise la proposition 7.15. Fixons un plongement de K dans A et notons τ l'involution $\mathrm{Ad}(\kappa)$ de G.

On pose $\mathsf{w}_K(\pi) = c_\pi(-1) \cdot \mathsf{e}_K(\pi)$, comme dans le cas déployé.

Théorème 7.17. — *Soit π une représentation irréductible cuspidale autoduale de G de niveau non nul. Alors π contient un caractère simple τ-autodual si et seulement si $\mathsf{w}_K(\pi) = (-1)^r$.*

Démonstration. — D'après la proposition 5.18, la représentation π contient un caractère simple τ-autodual si et seulement si :

(1) si r est impair, alors $\alpha \notin \mathrm{N}_{T/T_0}(T^\times)$ et $2n/\deg(\boldsymbol{\Theta})$ est impair,
(2) si r est pair, alors $\alpha \in \mathrm{N}_{T/T_0}(T^\times)$ ou $2n/\deg(\boldsymbol{\Theta})$ est pair.

D'après le théorème 7.15 et le théorème 7.1, on a :

$$\alpha \in \mathrm{N}_{T/T_0}(T^\times) \text{ ou } 2n/\deg(\boldsymbol{\Theta}) \text{ est pair} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\omega}_{K/F}(-1)^n \cdot \boldsymbol{\omega}_{K/F}(\det \beta) = 1.$$

Comme la quantité $\boldsymbol{\omega}_{K/F}(-1)^n \cdot \boldsymbol{\omega}_{K/F}(\det \beta)$ vaut 1 ou -1, il s'ensuit que :

$$\alpha \notin \mathrm{N}_{T/T_0}(T^\times) \text{ et } 2n/\deg(\boldsymbol{\Theta}) \text{ est impair} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\omega}_{K/F}(-1)^n \cdot \boldsymbol{\omega}_{K/F}(\det \beta) = -1.$$

Par conséquent, la représentation cuspidale autoduale π contient un caractère simple τ-autodual si et seulement si $\boldsymbol{\omega}_{K/F}(-1)^n \cdot \boldsymbol{\omega}_{K/F}(\det \beta) = (-1)^r$. Il ne reste plus qu'à appliquer (7.13) pour conclure. □

On en déduit le résultat suivant (voir le paragraphe 6.12 pour les notations).

Corollaire 7.18. — *Soit π une représentation irréductible cuspidale autoduale de G de niveau non nul.*

(1) *Si π est distinguée par G^τ, alors $\mathsf{w}_K(\pi) = (-1)^r$.*
(2) *Si $\mathsf{w}_K(\pi) = (-1)^r$, alors $\mathbf{A}^+(G, \boldsymbol{\Theta})$ est non vide et :*

$$|\mathbf{A}^+(G, \boldsymbol{\Theta})| \geqslant \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{A}(G, \boldsymbol{\Theta})|. \tag{7.14}$$

Démonstration. — L'assertion (1) suit de la proposition 6.3 et du théorème 7.17, et l'assertion (2) suit du théorème 7.17 et de la proposition 6.20. □

8. Le niveau 0

Nous traitons dans cette section le cas des représentations de niveau 0. Notons A la F-algèbre centrale simple $\mathbf{M}_r(D)$ et posons $G = A^\times$. Comme au paragraphe 5.1, on fixe un $\alpha \in F^\times$ et un $\kappa \in G$ non central tel que $\kappa^2 = \alpha$, définissant une involution τ de G. Si α est un carré dans $F^\times$, on se place dans le cadre de la convention 5.5. Sinon, on pose $K = F[\kappa]$.

8.1.

En niveau 0, un caractère simple est simplement le caractère trivial d'un sous-groupe ouvert compact de la forme $\mathbf{U}^1(\mathfrak{a})$ où $\mathfrak{a}$ est un ordre héréditaire de A. L'existence d'un caractère simple maximal τ-autodual équivaut donc à celle d'ordre maximal stable par τ dans A.

Lemme 8.1. — *Supposons que α ne soit pas un carré de $F^\times$. Un ordre maximal de A est stable par τ si et seulement s'il est normalisé par $K^\times$.*

Démonstration. — Un ordre de A est stable par τ si et seulement s'il est normalisé par κ. Par conséquent, tout ordre normalisé par $K^\times$ est stable par τ. Inversement, soit $\mathfrak{a}$ un ordre maximal stable par τ. Montrons qu'il est normalisé par $K^\times$. Pour cela, il est commode d'identifier $\mathfrak{a}$ à l'ordre maximal standard. Son normalisateur dans G est engendré par $\mathfrak{a}^\times$ et une uniformisante ϖ de D telle que $\varpi^d \in F$. Aussi peut-on écrire κ sous la forme $\varpi^k u$ pour un unique $k \in \mathbb{Z}$ et un unique $u \in \mathfrak{a}^\times$. Soit maintenant $\lambda = x + y\kappa \in K^\times$ avec $x, y \in F$ qu'on peut supposer non nuls. Montrons que λ normalise $\mathfrak{a}$.

Si $\mathrm{val}_D(x) \neq \mathrm{val}_D(y) + k$, on peut se ramener, en divisant par x ou par $y\kappa$, au cas où λ appartient à $1 + \varpi\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^\times$. Sinon, k est un multiple de d donc $\varpi^k \in F^\times$. On peut alors se ramener au cas où $k = \mathrm{val}_F(x) = \mathrm{val}_F(y) = 0$, donc $\lambda = x + yu \in \mathfrak{a}$. Comme $u^2 = \alpha$ est une unité de F qui n'est pas un carré de F, l'identité $(x + yu)(x - yu) = x^2 - \alpha y^2 \in \mathcal{O}_F^\times$ assure que $\lambda \in \mathfrak{a}^\times$. ☐

Proposition 8.2. — *Pour qu'il existe un ordre maximal dans A stable par τ, il faut et suffit que $\alpha \in F^{\times 2}$, ou que $\alpha \notin F^{\times 2}$ et $e_{K/F}$ divise d.*

Démonstration. — Quand r est pair, on peut supposer σ diagonal, auquel cas il normalise l'ordre maximal standard. Si r est impair et si $\alpha \notin F^{\times 2}$, pour qu'il existe un ordre principal de période e de A normalisé par $K^\times$, il faut et suffit que $e_{K/F}$ divise ed. Le résultat se déduit du fait qu'un ordre est maximal si et seulement s'il est de période 1. ☐

Une représentation de G est de niveau 0 si elle admet un vecteur non nul invariant par un sous-groupe de la forme $\mathbf{U}^1(\mathfrak{a})$, où $\mathfrak{a}$ est un ordre maximal. Les ordres maximaux de G étant tous conjugués sous G, une représentation de niveau 0 contient un caractère simple τ-autodual si et seulement s'il existe un ordre maximal dans A stable par τ. On en déduit immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 8.3. — *Soit π une représentation cuspidale autoduale de niveau 0 de G. Pour que π contienne un caractère simple τ-autodual, il faut et suffit que $\alpha \in F^{\times 2}$ ou que $e_{K/F}$ divise d.*

Remarque 8.4. — Le corollaire 5.22 et la première partie du corollaire 5.23 s'étendent aux représentations cuspidales autoduales de niveau 0.

8.2.

Classons maintenant, à conjugaison près par G^τ, les ordres maximaux de G stables par τ. On suppose qu'il en existe un, c'est-à-dire que les conditions de la proposition 8.2 sont vérifiées.

Proposition 8.5. — (1) *Supposons que K/F soit non ramifiée et que d soit pair, ou que α soit un carré de $F^\times$.*

(a) *Il y a $\lfloor r/2\rfloor + 1$ classes de G^τ-conjugaison d'ordres maximaux de A stables par τ.*

(b) *Si $\mathfrak{a}$ est un tel ordre, il y a un unique entier $i \in \{0, \dots, \lfloor r/2\rfloor\}$ et un isomorphisme de F-algèbres $A \simeq \mathsf{M}_r(D)$ identifiant $\mathfrak{a}$ à l'ordre maximal standard et l'action de τ sur le groupe $\mathfrak{a}^\times/\mathbf{U}^1(\mathfrak{a}) \simeq \mathrm{GL}_r(\boldsymbol{k}_D)$ à l'action par conjugaison de :*

$$\sigma_i = \mathrm{diag}(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1) \in \mathrm{GL}_r(\boldsymbol{k}_D) \tag{8.1}$$

où -1 apparaît avec multiplicité i.

(2) *Si K/F est non ramifiée et d est impair, il existe une unique classe de G^τ-conjugaison d'ordres maximaux de A stables par τ. Si $\mathfrak{a}$ est un tel ordre, il existe un isomorphisme de F-algèbres $A \simeq \mathsf{M}_r(D)$ identifiant $\mathfrak{a}$ à l'ordre maximal standard et l'action de τ sur $\mathrm{GL}_r(\boldsymbol{k}_D)$ à l'action par conjugaison d'un $\upsilon \in \mathrm{GL}_r(\boldsymbol{k}_D)$ tel que $\upsilon^2 \in \boldsymbol{k}_D^\times$ et $\upsilon^2 \notin \boldsymbol{k}_D^{\times 2}$.*

(3) *Si K/F est ramifiée, il y a une unique classe de G^τ-conjugaison d'ordres maximaux de A stables par τ. Si $\mathfrak{a}$ est un tel ordre, il y a un isomorphisme de F-algèbres $A \simeq \mathsf{M}_r(D)$ identifiant $\mathfrak{a}$ à l'ordre maximal standard et l'action de τ sur $\mathrm{GL}_r(\boldsymbol{k}_D)$ à l'action de l'élément d'ordre 2 de $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{k}_D/\boldsymbol{k}_F)$.*

Démonstration. — S'il existe un ordre maximal stable par τ, on peut supposer que c'est l'ordre maximal standard $\mathfrak{a}$. Les autres ordres maximaux sont conjugués à $\mathfrak{a}$ sous G et, étant donné un $y \in G$, l'ordre $\mathfrak{a}^y$ est stable par τ si et seulement si $w = \tau(y)y^{-1} \in \mathfrak{a}^\times$. Notons u l'image de w dans $\mathrm{GL}_r(\boldsymbol{k}_D)$.

Commençons par le cas où α n'est pas un carré de $F^\times$ et d est pair, auquel cas on peut supposer que $K \subseteq D$. Si K/F est ramifiée, on peut supposer que κ est une uniformisante de K dont le carré est une uniformisante de F. Elle induit donc par conjugaison l'unique $\boldsymbol{k}_F$-automorphisme de $\boldsymbol{k}_D$ d'ordre 2. Si K/F est non ramifiée, on peut supposer que κ est une racine de l'unité de $K \subseteq D$. Elle induit donc sur $\mathrm{GL}_r(\boldsymbol{k}_D)$ un automorphisme de conjugaison par un élément central.

Dans les deux cas restant à traiter, r est pair, qu'on écrit $r = 2k$. Si K/F est non ramifiée et d est impair, on peut supposer que $K \subseteq \mathsf{M}_2(F)$ et $\kappa \in \mathsf{M}_2(\mathcal{O}_F)$. Plongeant diagonalement $\mathsf{M}_2(F)$ dans A, la conjugaison par κ induit donc sur $\mathrm{GL}_r(\boldsymbol{k}_D)$ un automorphisme de conjugaison par un élément $\upsilon \in \mathrm{GL}_r(\boldsymbol{k}_D)$ tel que $\upsilon^2 \in \boldsymbol{k}_D^\times$ et $\upsilon^2 \notin \boldsymbol{k}_D^{\times 2}$. Enfin, si α est un carré de $F^\times$, σ induit sur $\mathrm{GL}_r(\boldsymbol{k}_D)$ l'automorphisme de conjugaison par l'élément σ_k défini par (8.1).

À partir de là, pour obtenir la classification des ordres maximaux stables par τ, l'argument est le même que dans la preuve de la proposition 5.24. □

8.3.

Dans ce paragraphe, on suppose qu'il existe un ordre maximal stable par τ, c'est-à-dire que les conditions de la proposition 8.2 sont vérifiées.

En niveau 0, la notion de type se simplifie. Si $\mathfrak{a}$ est un ordre maximal de A, nous noterons $\mathbf{J}_{\mathfrak{a}}$ le normalisateur de $\mathfrak{a}$ dans G. Un couple $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\rho})$ est un type de niveau 0 de G s'il existe un ordre maximal $\mathfrak{a}$ de A tel que :

(1) $F^\times \mathfrak{a}^\times \subseteq \mathbf{J} \subseteq \mathbf{J}_{\mathfrak{a}}$ et $\boldsymbol{\rho}$ est une classe d'isomorphisme de représentations irréductibles de $\mathbf{J}$ triviales sur $\mathbf{U}^1(\mathfrak{a})$,

(2) le normalisateur de $\boldsymbol{\rho}$ dans $\mathbf{J}_{\mathfrak{a}}$ est égal à $\mathbf{J}$,

(3) la restriction de $\boldsymbol{\rho}$ à $\mathfrak{a}^\times$ est l'inflation d'une représentation cuspidale de $\mathfrak{a}^\times/\mathbf{U}^1(\mathfrak{a})$.

L'induite compacte à G d'un type de niveau 0 est une représentation irréductible cuspidale de niveau 0 de G, et toutes s'obtiennent ainsi. Par cohérence avec le cas du niveau non nul, nous noterons $\mathbf{J}^0 = \mathfrak{a}^\times$ et $\mathbf{J}^1 = \mathbf{U}^1(\mathfrak{a})$. De [**37**] Proposition 5.20, on tire le résultat suivant.

Lemme 8.6. — *Soit π une représentation cuspidale de niveau 0 de G. Pour que π soit distinguée par G^τ, il faut et suffit qu'il existe un type $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\rho})$ de niveau 0 tel que :*

(1) *$\mathbf{J}$ soit stable par τ et $\boldsymbol{\rho}$ soit $\mathbf{J} \cap G^\tau$-distinguée,*

(2) *l'induite compacte de $\boldsymbol{\rho}$ à G soit isomorphe à π.*

On en déduit la condition nécessaire suivante de distinction. Les cas **I**, **II** et **III** ci-dessous font référence respectivement aux cas (1), (2) et (3) de la proposition 8.5.

Proposition 8.7. — (1) *Soit $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\rho})$ un type τ-autodual de niveau 0 de G. Alors :*

(a) *dans le cas **I**, l'entier r est pair ou égal à 1, et l'indice i est égal à $\lfloor r/2 \rfloor$,*

(b) *dans le cas **II**, l'entier r est pair,*

(c) *dans le cas **III**, l'entier r est impair.*

(2) *Soit $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\rho})$ un type de niveau 0 de G tel que $\mathbf{J}$ soit stable par τ et la représentation $\boldsymbol{\rho}$ soit distinguée par $\mathbf{J} \cap G^\tau$. Alors $\boldsymbol{\rho}$ est τ-autoduale.*

Démonstration. — Soit $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\rho})$ un type de niveau 0 de G tel que $\mathbf{J}$ soit stable par τ. Notons $\mathfrak{a}$ l'ordre maximal de A tel que $\mathbf{J} \subseteq \mathbf{J}_{\mathfrak{a}}$. Il est stable par τ. Quitte à conjuguer par un élément de G, on peut supposer qu'on est dans l'un des cas décrits par la proposition 8.5. En particulier, on identifiera $\mathfrak{a}$ à l'ordre maximal standard et $\mathfrak{a}^\times/\mathbf{U}^1(\mathfrak{a})$ au groupe $\mathrm{GL}_r(\boldsymbol{k}_D)$, noté $\mathcal{J}$. Notons ρ la représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_r(\boldsymbol{k}_D)$ définie par $\boldsymbol{\rho}$. Dans chacun des cas **I**, **II** et **III**, l'action de τ sur $\mathrm{GL}_r(\boldsymbol{k}_D)$ est décrite par la proposition 8.5.

Dans le cas **I**, le sous-groupe $\mathcal{J}^\tau$ est de la forme $\mathrm{GL}_i(\boldsymbol{k}_D) \times \mathrm{GL}_{r-i}(\boldsymbol{k}_D)$ pour un unique entier i dans $\{0, \dots, \lfloor r/2 \rfloor\}$. D'après par exemple [**55**] Proposition 2.14 et Lemma 2.19, la représentation ρ est distinguée par $\mathcal{J}^\tau$ si et seulement si r est pair ou égal à 1, $i = \lfloor r/2 \rfloor$ et ρ est autoduale.

Dans le cas **II**, l'entier r est pair et le groupe $\mathcal{J}^\tau$ est de la forme $\mathrm{GL}_{r/2}(\boldsymbol{k})$ où $\boldsymbol{k}$ est une extension quadratique de $\boldsymbol{k}_D$ dans $\mathsf{M}_r(\boldsymbol{k}_D)$. D'après [**24**] Lemme 4.3.11, la représentation ρ est distinguée par $\mathcal{J}^\tau$ si et seulement si elle est autoduale.

Dans le cas **III**, l'entier d est pair et $\mathcal{J}^\tau$ est de la forme $\mathrm{GL}_r(\boldsymbol{k})$ où $\boldsymbol{k}$ est l'unique sous-corps de $\boldsymbol{k}_D$ sur lequel celui-ci soit de degré 2. D'après [**30**] (et par exemple [**55**] Lemma 2.3), la représentation ρ est distinguée par $\mathcal{J}^\tau$ si et seulement si r est impair et $\rho^\vee$ est isomorphe au conjugué de ρ par l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{k}_D/\boldsymbol{k})$.

Ceci prouve (1). Supposons maintenant que $\boldsymbol{\rho}$ soit distinguée par $\mathbf{J} \cap G^{\tau}$. Dans tous les cas, la représentation ρ est τ-autoduale, donc les restrictions à $\mathbf{J}^0$ de $\boldsymbol{\rho}^{\tau\vee}$ et $\boldsymbol{\rho}$ sont isomorphes. Il y a donc un caractère non ramifié χ de $\mathbf{J}$ tel que $\boldsymbol{\rho}^{\tau\vee} \simeq \boldsymbol{\rho}\chi$. La représentation π étant autoduale d'après le théorème 6.1, elle contient à la fois $\boldsymbol{\rho}$ et $\boldsymbol{\rho}^{\tau\vee} \simeq \boldsymbol{\rho}\chi$, donc χ est trivial. □

8.4.

Fixons un ordre maximal $\mathfrak{a}$ de A stable par τ, et notons $\boldsymbol{\Omega}_{\mathfrak{a}}$ l'ensemble des types τ-autoduaux $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\rho})$ de niveau 0 de G tels que $\mathbf{J}$ normalise $\mathfrak{a}$.

Lemme 8.8. — *L'ensemble $\boldsymbol{\Omega}_{\mathfrak{a}}$ est fini, et il existe un sous-ensemble $\boldsymbol{\Omega}_{\mathfrak{a}}^{+} \subseteq \boldsymbol{\Omega}_{\mathfrak{a}}$ tel que :*

(1) *le cardinal de $\boldsymbol{\Omega}_{\mathfrak{a}}$ est le double de celui de $\boldsymbol{\Omega}_{\mathfrak{a}}^{+}$,*

(2) *pour tout $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\rho}) \in \boldsymbol{\Omega}_{\mathfrak{a}}^{+}$, la représentation $\boldsymbol{\rho}$ est $\mathbf{J} \cap G^{\tau}$-distinguée.*

Démonstration. — Même preuve qu'en niveau non nul (voir le lemme 6.18). □

Pour tout $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\rho}) \in \boldsymbol{\Omega}_{\mathfrak{a}}$, on pose :

$$\Pi(\mathbf{J}, \boldsymbol{\rho}) = \mathrm{ind}_{\mathbf{J}}^{G}(\boldsymbol{\rho}).$$

La représentation $\Pi(\mathbf{J}, \boldsymbol{\rho})$ est une représentation cuspidale autoduale de niveau 0 de G. Notons $\mathbf{A}(G, \mathbf{0})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations cuspidales autoduales de G de niveau 0.

Proposition 8.9. — (1) *L'application $\Pi : (\mathbf{J}, \boldsymbol{\rho}) \mapsto \Pi(\mathbf{J}, \boldsymbol{\rho})$ de $\boldsymbol{\Omega}_{\mathfrak{a}}$ dans $\mathbf{A}(G, \mathbf{0})$ est surjective.*

(2) *Deux paires $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\rho})$ et $(\mathbf{J}', \boldsymbol{\rho}')$ de $\boldsymbol{\Omega}_{\mathfrak{a}}$ ont la même image par Π si et seulement si $\mathbf{J}' = \mathbf{J}$ et si les représentations $\boldsymbol{\rho}'$ et $\boldsymbol{\rho}$ sont conjuguées sous $\mathbf{J}_{\mathfrak{a}}$.*

(3) *Si $\boldsymbol{\rho}$ est $\mathbf{J} \cap G^{\tau}$-distinguée, alors $\Pi(\mathbf{J}, \boldsymbol{\rho})$ est G^{τ}-distinguée.*

Démonstration. — Même preuve qu'en niveau non nul (voir la proposition 6.19), en remplaçant la proposition 6.17 par le lemme 8.6. □

Enfin, nous avons le résultat suivant.

Proposition 8.10. — (1) *L'ensemble $\mathbf{A}(G, \mathbf{0})$ est fini.*

(2) *Le sous-ensemble $\mathbf{A}^{+}(G, \mathbf{0})$ de $\mathbf{A}(G, \mathbf{0})$ formé des représentations G^{τ}-distinguées est soit vide, soit de cardinal au moins égal à la moitié de celui de $\mathbf{A}(G, \mathbf{0})$.*

(3) *Pour que $\mathbf{A}^{+}(G, \mathbf{0})$ soit non vide, il faut et suffit qu'il existe à la fois une représentation cuspidale autoduale de G de niveau 0 et un ordre maximal dans A stable par τ.*

Démonstration. — Même preuve qu'en niveau non nul (voir la proposition 6.20), en remplaçant la proposition 6.3 par le lemme 8.6. □

Remarque 8.11. — Dans le cas où G est déployé et α n'est pas un carré de $F^{\times}$, Chommaux et Matringe [**23**] donnent directement une condition nécessaire et suffisante pour qu'une représentation cuspidale de niveau 0 de G soit distinguée par G^{τ}, en termes d'objets (appelés paires admissibles modérées) paramétrant les types de niveau 0 de G. Quand G est une forme intérieure quelconque, la preuve de [**23**] Theorem 2.1 reste valable pour les représentations cuspidales dont le transfert à $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ est cuspidal. Pour une représentation cuspidale quelconque, la paramétrisation d'un type de niveau 0 par une paire admissible modérée (voir [**60**]) est moins transparente et ne permet pas une adaptation immédiate de [**23**]. Nous avons préféré procéder ici comme en niveau non nul, de façon à avoir une approche uniforme.

8.5.

Soit π une représentation cuspidale autoduale de G de niveau 0, et soit $s = s(\pi) \geqslant 1$ l'entier associé à π à la proposition 3.15. C'est un diviseur de d premier à r. On suppose dans tout ce paragraphe que α n'est pas un carré de $F^\times$. Notons π' le transfert de Jacquet-Langlands de π à $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ et ϕ son paramètre de Langlands.

Comme au paragraphe 7.8, on pose $\mathsf{e}_K(\pi) = \mathsf{e}_K(\pi') = \mathsf{e}_K(\phi)$ et $\mathsf{w}_K(\pi) = c_\pi(-1) \cdot \mathsf{e}_K(\pi)$.

Proposition 8.12. — *Supposons que π ait un caractère central trivial.*

(1) *Si $s = 2n$, c'est-à-dire si $r = 1$ et π est égal à $\chi \circ \mathrm{Nrd}_{A/F}$ pour un caractère quadratique χ de $F^\times$, alors :*

$$\mathsf{e}_K(\pi) = \begin{cases} -1 & \textit{si } \chi \textit{ est trivial sur } \mathrm{N}_{K/F}(K^\times), \\ 1 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

(2) *Sinon, on a $\mathsf{e}_K(\pi) = (-1)^{sf_{K/F}}$.*

Démonstration. — Dans le premier cas, c'est-à-dire quand $s = 2n$, le transfert de π à $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ est la représentation de Steinberg tordue par le caractère $\chi \circ \det$ et le calcul de $\mathsf{e}_K(\pi')$ a été fait dans [**22**] Section 4. Dans le second cas, π' est de la forme $L(\pi'_0, s)$ pour une représentation cuspidale π'_0 de $\mathrm{GL}_{2n/s}(F)$ qui n'est pas un caractère de $F^\times$. Le raisonnement du début du paragraphe 7.8 est valable, ce qui donne $\mathsf{e}_K(\pi') = \mathsf{e}_K(\pi'_0)^s$. On en déduit le résultat voulu en appliquant le théorème 7.3 à la représentation π'_0. □

Nous en déduisons le résultat suivant.

Corollaire 8.13. — *Soit π une représentation irréductible cuspidale autoduale de G de niveau 0 et de caractère central trivial.*

(1) *Si π est distinguée par G^τ, alors $\mathsf{e}_K(\pi) = (-1)^r$.*

(2) *Si $\mathsf{e}_K(\pi) = (-1)^r$, alors l'ensemble $\mathbf{A}^+(G, \mathbf{0})$ est non vide et :*

$$|\mathbf{A}^+(G, \mathbf{0})| \geqslant \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{A}(G, \mathbf{0})|. \tag{8.2}$$

Démonstration. — Prouvons la première assertion. Supposons d'abord que $s = 2n$, c'est-à-dire que $r = 1$ et π est un caractère de la forme $\chi \circ \mathrm{Nrd}_{A/F}$ pour un caractère quadratique χ de $F^\times$. Le fait que π soit G^τ-distingué signifie que π est trivial sur G^τ, c'est-à-dire que $\chi \circ \mathrm{N}_{K/F}$ est trivial sur $K^\times$. D'après la proposition 8.12, on en déduit que $\mathsf{e}_K(\pi) = -1 = (-1)^r$.

Supposons maintenant que $s \neq 2n$. D'après la proposition 8.12, il s'agit de prouver que :

$$(-1)^{sf_{K/F}} = (-1)^r. \tag{8.3}$$

D'après le lemme 8.6, la représentation π contient un type τ-autodual $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\rho})$ de niveau 0 tel que $\boldsymbol{\rho}$ soit $\mathbf{J} \cap G^\tau$-distingué. Considérons les trois cas de la proposition 8.7. Dans le cas **I**, l'entier r

est pair ou égal à 1. Le cas $r = 1$, qui entraîne que $\boldsymbol{\rho}$ est un caractère quadratique, n'est possible que si $s = 2n$, ce qui a été exclu. Donc r est pair et, $f_{K/F}$ étant pair, l'identité (8.3) est vérifiée. Dans le cas **II**, les deux entiers $f_{K/F}$ et r sont pairs, ce qui donne encore (8.3). Dans le cas **III**, les entiers r et $f_{K/F}$ sont impairs. Il nous reste donc à prouver que s est impair dans ce cas.

Supposons donc que K/F est ramifiée. Notons ρ la représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_r(\boldsymbol{k}_D)$ définie par $\boldsymbol{\rho}$, et notons ξ le caractère $\boldsymbol{k}_D$-régulier de $\boldsymbol{t}^\times$ paramétrant ρ comme dans la preuve du lemme 6.13. Posant $b = d/s$, et notant q le cardinal de $\boldsymbol{k}_F$ et N l'ordre de ξ, on sait que l'ordre de q dans $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ est égal à rb. L'ordre de q^n vaut donc $rb/(rb, n) = 2/(2, s)$, car d est pair. Or d'après la proposition 8.7, la représentation $\rho^\vee$ est isomorphe au conjugué de ρ par l'élément d'ordre 2 de $\mathrm{Gal}(\boldsymbol{k}_D/\boldsymbol{k}_F)$. D'après par exemple [**55**] Lemma 2.3, cela implique que $\xi^{q^n} = \xi^{-1}$, c'est-à-dire que l'ordre de q^n dans $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ est égal à 2. On en déduit que s est impair.

Supposons enfin que $\mathbf{A}^+(G, \mathbf{0})$ soit vide. D'après les propositions 8.10 et 8.2, l'extension K/F est ramifiée et d est impair. Dans ce cas, r est pair et s (qui divise d) est impair, et la proposition 8.12 assure que $\mathsf{w}_K(\pi) \neq (-1)^r$. L'inégalité (8.2) suit alors de la proposition 8.10. □

Remarque 8.14. — La preuve du corollaire 8.13 montre plus précisément que, quand K/F est ramifiée, s est impair pour toute représentation $\pi \in \mathbf{A}(G, \mathbf{0})$. On en déduit que la valeur $\mathsf{e}_K(\pi)$ est la même pour toutes les $\pi \in \mathbf{A}(G, \mathbf{0})$ de caractère central trivial telles que $s \neq 2n$. Lorsque $s = 2n$ en revanche (ce qui ne peut se produire que si $r = 1$), considérons les caractères autoduaux $\pi(\chi) = \chi \circ \mathrm{Nrd}_{A/F}$ où χ est un caractère quadratique de $F^\times$. Ils sont tous les quatre dans $\mathbf{A}(G, \mathbf{0})$, leur caractère central est trivial et leur paramètre de Langlands est symplectique. Mais $\mathsf{e}_K(\pi(\chi)) = -1$ si et seulement si χ est trivial sur $\mathrm{N}_{K/F}(K^\times)$. Voir le lemme 9.3. Ce phénomène ne se produit pas en niveau non nul.

8.6.

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que, contrairement au cas de niveau non nul (proposition 6.17) et à celui de l'involution galoisienne traitée dans [**3**], l'existence d'un caractère simple τ-autodual n'entraîne pas celle d'un type τ-autodual.

Supposons par exemple que $r = 1$ et que K/F soit non ramifiée. Désignons par q le cardinal du corps résiduel de F, et fixons un caractère non quadratique ρ de $\boldsymbol{k}_D^\times$ tel que $\rho^{q^n} = \rho^{-1}$. On note $\mathbf{J}$ son normalisateur dans $D^\times$ et b l'indice de $\mathbf{J}$ dans $D^\times$. Si ϖ est une uniformisante de D telle que ϖ^d soit une uniformisante de F, alors $\mathbf{J}$ est engendré par ϖ^b et le groupe des unités de D. Soit enfin $\boldsymbol{\rho}$ un caractère de $\mathbf{J}$ prolongeant ρ et tel que $\boldsymbol{\rho}(\varpi^b) \in \{-1, 1\}$. Alors $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\rho})$ est un type de niveau 0, son induite compacte π à $D^\times$ est irréductible (de dimension b) et autoduale, et pourtant $\boldsymbol{\rho}$ ne peut pas être τ-autodual car le caractère ρ n'est pas quadratique.

9. La conjecture de Prasad et Takloo-Bighash

Dans cette section, F est de caractéristique nulle et de caractéristique résiduelle $p \neq 2$.

Soit A une F-algèbre centrale simple de degré réduit $2n$, et posons $G = A^\times$. C'est une forme intérieure du groupe $G' = \mathrm{GL}_{2n}(F)$. On fixe une extension quadratique K de F incluse dans $\overline{F}$, et un générateur de κ de K sur F tel que $\alpha = \kappa^2 \in F^\times$. On fixe un plongement de K dans A et on note τ l'involution $\mathrm{Ad}(\kappa)$ de G.

9.1.

On a le résultat suivant, qui sera essentiel dans le preuve du théorème 9.2.

Théorème 9.1. — *Toute représentation cuspidale G^τ-distinguée de G a un paramètre de Langlands autodual symplectique.*

Démonstration. — Soit π une représentation cuspidale G^τ-distinguée de G et soit π' son transfert de Jacquet-Langlands à $\mathrm{GL}_{2n}(F)$. D'après [**65**] Proposition 3.4, la représentation π' est distingué par $\mathrm{GL}_n(F) \times \mathrm{GL}_n(F)$. La suite de l'argument m'a été expliquée par N. Matringe, que je remercie. D'après [**45**] Theorem 5.1, elle admet donc un modèle de Shalika. D'après [**42**] Proposition 3.12, cela implique que le facteur local de carré extérieur $L(\pi', \wedge^2, s)$ de Jacquet-Shalika a un pôle en $s = 0$. Il suit de [**38, 44**] qu'il en est de même de $L(\wedge^2\phi, s)$, le facteur local du carré extérieur du paramètre de Langlands ϕ de π'. Ainsi ϕ est symplectique. $\square$

9.2.

Nous prouvons maintenant le résultat suivant. La notation e_K est définie au paragraphe 7.1.

Théorème 9.2. — *Soit π une représentation irréductible cuspidale de G et soit ϕ son paramètre de Langlands. La représentation π est distinguée par G^τ si et seulement si ϕ est autodual symplectique et $\mathsf{e}_K(\phi) = (-1)^r$.*

Démonstration. — Soit $\boldsymbol{\Theta}$ l'endo-classe de π. Rappelons que $\mathbf{A}(G, \boldsymbol{\Theta})$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations cuspidales autoduales de G d'endo-classe $\boldsymbol{\Theta}$. Nous noterons $\mathbf{A}^+(G, \boldsymbol{\Theta})$ le sous-ensemble formé des classes de représentations G^τ-distinguées. Notons :

– $\mathbf{A}^{\mathrm{sp}}(G, \boldsymbol{\Theta})$ le sous-ensemble de $\mathbf{A}(G, \boldsymbol{\Theta})$ formé des classes de représentations dont le paramètre de Langlands est de type symplectique,

– $\mathbf{A}^{\mathrm{ptb}}(G, \boldsymbol{\Theta})$ le sous-ensemble de $\mathbf{A}^{\mathrm{sp}}(G, \boldsymbol{\Theta})$ formé des π telles que $\mathsf{e}_K(\phi) = (-1)^r$.

L'ensemble $\mathbf{A}(G, \boldsymbol{\Theta})$ est fini et on a les inclusions $\mathbf{A}^{\mathrm{ptb}}(G, \boldsymbol{\Theta}) \subseteq \mathbf{A}^{\mathrm{sp}}(G, \boldsymbol{\Theta}) \subseteq \mathbf{A}(G, \boldsymbol{\Theta})$.

Lemme 9.3. — *On a :*

$$|\mathbf{A}^{\mathrm{sp}}(G, \boldsymbol{\Theta})| = \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{A}(G, \boldsymbol{\Theta})| + \begin{cases} 2 & \textit{si } \boldsymbol{\Theta} \textit{ est nulle et } r = 1, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases} \tag{9.1}$$

Démonstration. — D'après le paragraphe 5.6, la correspondance de Jacquet-Langlands et la classification des représentations essentiellement de carré intégrable de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ induisent une bijection :

$$\mathbf{A}(G, \boldsymbol{\Theta}) \quad \leftrightarrow \quad \coprod_s \mathbf{A}(\mathrm{GL}_{2n/s}(F), \boldsymbol{\Theta})$$

portant sur l'ensemble $\mathbf{S}$ des entiers de la forme $s(\pi)$ pour $\pi \in \mathbf{A}(G, \boldsymbol{\Theta})$ (voir la définition 3.15, et le lemme 5.16 qui décrit précisément l'ensemble $\mathbf{S}$). Étant donné une représentation cuspidale $\pi \in \mathbf{A}(G, \boldsymbol{\Theta})$, son transfert $L(\pi'_0, s)$ à $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ est de parité symplectique si et seulement si :

– ou bien s est impair et π'_0 est de parité symplectique,

– ou bien s est pair et π'_0 est de parité orthogonale.

Notant $\mathbf{A}^{\mathrm{or}}(G,\boldsymbol{\Theta})$ le sous-ensemble de $\mathbf{A}(G,\boldsymbol{\Theta})$ formé des classes de représentations dont le paramètre de Langlands est orthogonal, on en déduit une bijection :

$$\mathbf{A}^{\mathrm{sp}}(G,\boldsymbol{\Theta}) \quad\leftrightarrow\quad \coprod_{s \text{ impair}} \mathbf{A}^{\mathrm{sp}}(\mathrm{GL}_{2n/s}(F),\boldsymbol{\Theta}) \cup \coprod_{s \text{ pair}} \mathbf{A}^{\mathrm{or}}(\mathrm{GL}_{2n/s}(F),\boldsymbol{\Theta}).$$

D'après [**8**] Lemma 7.2 (ou plutôt sa preuve), pour chaque s, les ensembles $\mathbf{A}^{\mathrm{sp}}(\mathrm{GL}_{2n/s}(F),\boldsymbol{\Theta})$ et $\mathbf{A}^{\mathrm{or}}(\mathrm{GL}_{2n/s}(F),\boldsymbol{\Theta})$ ont le même cardinal. Leur réunion est $\mathbf{A}(\mathrm{GL}_{2n/s}(F),\boldsymbol{\Theta})$. Elle est disjointe si et seulement si $s \neq 2n$. Si $s = 2n$ (auquel cas $\boldsymbol{\Theta}$ est nulle et $r = 1$), on a :

$$\mathbf{A}^{\mathrm{sp}}(F^\times,\mathbf{0}) = \mathbf{A}^{\mathrm{or}}(F^\times,\mathbf{0}) = \mathbf{A}(F^\times,\mathbf{0})$$

qui est de cardinal 4. Si $\boldsymbol{\Theta}$ est non nulle ou si $r \neq 1$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}|\mathbf{A}^{\mathrm{sp}}(G,\boldsymbol{\Theta})| &= \sum_{s \text{ impair}} |\mathbf{A}^{\mathrm{sp}}(\mathrm{GL}_{2n/s}(F),\boldsymbol{\Theta})| + \sum_{s \text{ pair}} |\mathbf{A}^{\mathrm{or}}(\mathrm{GL}_{2n/s}(F),\boldsymbol{\Theta})| \\ &= \sum_{s \text{ impair}} \frac{1}{2}\cdot|\mathbf{A}(\mathrm{GL}_{2n/s}(F),\boldsymbol{\Theta})| + \sum_{s \text{ pair}} \frac{1}{2}\cdot|\mathbf{A}(\mathrm{GL}_{2n/s}(F),\boldsymbol{\Theta})| \\ &= \frac{1}{2}\cdot\sum_{s}|\mathbf{A}(\mathrm{GL}_{2n/s}(F),\boldsymbol{\Theta})|\end{aligned}$$

ce qui est égal à $|\mathbf{A}(G,\boldsymbol{\Theta})|/2$, comme voulu. Si $\boldsymbol{\Theta}$ est nulle et $r = 1$, on trouve :

$$|\mathbf{A}^{\mathrm{sp}}(D^\times,\mathbf{0})| = \frac{1}{2}\cdot|\mathbf{A}(D^\times,\mathbf{0})| - \frac{1}{2}\cdot|\mathbf{A}(F^\times,\mathbf{0})| + |\mathbf{A}^{\mathrm{or}}(F^\times,\mathbf{0})|$$

qui est égal à la quantité voulue. □

Le théorème 9.1 assure que $\mathbf{A}^{+}(G,\boldsymbol{\Theta}) \subseteq \mathbf{A}^{\mathrm{sp}}(G,\boldsymbol{\Theta})$, et toute représentation dans $\mathbf{A}^{\mathrm{sp}}(G,\boldsymbol{\Theta})$ a un caractère central trivial. Compte tenu des corollaires 7.18 et 8.13, on en déduit que :

$$\mathbf{A}^{+}(G,\boldsymbol{\Theta}) \subseteq \mathbf{A}^{\mathrm{ptb}}(G,\boldsymbol{\Theta}). \tag{9.2}$$

On en déduit aussi que $\mathbf{A}^{+}(G,\boldsymbol{\Theta})$ est vide si et seulement si $\mathbf{A}^{\mathrm{ptb}}(G,\boldsymbol{\Theta})$ l'est. Si $\mathbf{A}^{+}(G,\boldsymbol{\Theta})$ n'est pas vide, alors :

$$|\mathbf{A}^{+}(G,\boldsymbol{\Theta})| \geqslant \frac{1}{2}\cdot|\mathbf{A}(G,\boldsymbol{\Theta})|. \tag{9.3}$$

Si $\boldsymbol{\Theta}$ est non nulle ou si $r \neq 1$, on déduit le résultat voulu du lemme 9.3 et de (9.2) et (9.3). Si $\boldsymbol{\Theta}$ est nulle et $r = 1$, alors $\mathbf{A}^{+}(D^\times,\mathbf{0}) = \mathbf{A}^{\mathrm{ptb}}(D^\times,\mathbf{0})$ est égal à $\mathbf{A}^{\mathrm{sp}}(D^\times,\mathbf{0})$ privé des deux caractères $\chi\circ\det$ où χ n'est pas trivial sur $\mathrm{N}_{K/F}(K^\times)$ (proposition 8.12 et remarque 8.14). □

Remarque 9.4. — Dans le cas où G est déployé et où π est de niveau 0, voir [**23**] Corollary 6.1 sous l'hypothèse que F est de caractéristique résiduelle impaire. Dans le cas où le transfert de π à $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ est cuspidal, voir [**65**] Theorems 4.1 and 7.3.

9.3.

En guise de corollaire au théorème précédent, donnons le théorème suivant, qui est un analogue autodual de [**55**] Theorem 10.3.

D'abord, par analogie avec [**55**] Definition 1.5, un type τ-autodual $(\mathbf{J},\boldsymbol{\lambda})$ de caractère simple attaché $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a},\beta)$ sera dit *générique* si l'on est dans l'un des cas suivants :

(1) T/T_0 est ramifiée, ou T/T_0 est ramifiée et c_0 est pair,

(2) T/T_0 est ramifiée, c_0 est impair et θ est d'indice $\lfloor m/2 \rfloor$.

Le résultat suivant détermine l'image de $\boldsymbol{\Omega}^+$ par l'application Π définie au paragraphe 6.11.

Théorème 9.5. — *Une représentation irréductible cuspidale de niveau non nul de G est G^τ-distinguée si et seulement si elle contient un type τ-autodual générique $(\mathbf{J},\boldsymbol{\lambda})$ tel que $\boldsymbol{\lambda}$ soit distingué par $\mathbf{J} \cap G^\tau$. S'il existe, un tel type est unique à G^τ-conjugaison près.*

Démonstration. — Si π contient un type τ-autodual $\mathbf{J} \cap G^\tau$-distingué, alors π est autoduale et G^τ-distinguée. Inversement, supposons que π soit une représentation cuspidale G^τ-distinguée de G. D'après le théorème 6.1, elle est autoduale. D'après la proposition 6.3, elle contient un caractère simple τ-autodual θ, d'endo-classe notée $\boldsymbol{\Theta}$. D'après la proposition 6.19, elle est donc de la forme $\Pi(\mathbf{J},\boldsymbol{\rho})$ pour un $(\mathbf{J},\boldsymbol{\rho}) \in \boldsymbol{\Omega}$, et le type $(\mathbf{J},\boldsymbol{\kappa}_p \otimes \boldsymbol{\rho})$ est τ-autodual et générique. Nous allons montrer que $(\mathbf{J},\boldsymbol{\rho}) \in \boldsymbol{\Omega}^+$. Cela provient de ce que :

$$\frac{1}{2} \cdot |[\boldsymbol{\Omega}]| = |[\boldsymbol{\Omega}^+]| \leqslant |\mathsf{A}^+(G,\boldsymbol{\Theta})| = \frac{1}{2} \cdot |\mathsf{A}(G,\boldsymbol{\Theta})| = \frac{1}{2} \cdot |[\boldsymbol{\Omega}]|$$

donc l'image de $\boldsymbol{\Omega}^+$ par Π est exactement $\mathsf{A}^+(G,\boldsymbol{\Theta})$. Enfin, l'unicité du type générique à conjugaison près est une conséquence de la proposition 5.24. □

9.4.

Ce dernier paragraphe est une conséquence non pas du théorème 9.2, mais du travail effectué dans la section 6. Nous l'avons placé ici car nous devons supposer que F est de caractéristique nulle, en raison du résultat suivant. Dans ce paragraphe, G est le groupe $\mathrm{GL}_{2n}(F)$.

Théorème 9.6 **([41] Theorem 1.1)**. — *Une représentation cuspidale autoduale de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ est de parité symplectique si et seulement si elle est distinguée par $\mathrm{GL}_n(F) \times \mathrm{GL}_n(F)$.*

Soit π une représentation cuspidale autoduale de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ de niveau non nul. Il y a une unique représentation cuspidale autoduale de $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ inertiellement équivalente mais non isomorphe à π ; notons-là π^*. Soit $\boldsymbol{\Theta}$ l'endo-classe de π, soit T/T_0 l'extension quadratique qui lui est associée et posons $m = 2n/\deg(\boldsymbol{\Theta})$. On définit σ comme au paragraphe 4.3.

Lorsque T/T_0 est ramifiée et $m = 1$, les représentations π et π^* ont la même parité, et [**8**] 6.8 montre comment déterminer cette parité en termes de types. Dans les autres cas, c'est-à-dire si T/T_0 est non ramifiée, ou si T/T_0 est ramifiée et m est pair, les représentations π et π^* ont des parités différentes, et il s'agit de déterminer laquelle des deux est de parité symplectique en termes de types. Nous donnons ci-dessous une réponse à cette question.

D'après le corollaire 4.6, la représentation π contient un type σ-autodual $(\mathbf{J},\boldsymbol{\lambda})$. Quitte à le conjuguer par un élément de G, on peut supposer qu'il est générique au sens donné au paragraphe

9.3, auquel cas il est unique à G^σ-conjugaison près. Notons θ son caractère simple attaché et η la représentation de Heisenberg de θ. D'après les corollaires 6.12 et 6.16, il existe une unique représentation $\boldsymbol{\kappa}_p$ de $\mathbf{J}$ prolongeant η, qui soit à la fois σ-autoduale et $\mathbf{J} \cap G^\sigma$-distinguée et dont le déterminant soit d'ordre une puissance de p. Soit $\boldsymbol{\rho}$ l'unique représentation de $\mathbf{J}$ triviale sur $\mathbf{J}^1$ telle que $\boldsymbol{\lambda}$ soit isomorphe à $\boldsymbol{\kappa}_p \otimes \boldsymbol{\rho}$.

Notons $\mathcal{Z}$ le centre de $\mathbf{J}/\mathbf{J}^1$. Si $[\mathfrak{a}, \beta]$ est une strate simple σ-autoduale dans $\mathsf{M}_{2n}(F)$ telle que $\theta \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, \beta)$, il est égal à $E^\times \mathbf{J}^1/\mathbf{J}^1$, avec $E = F[\beta]$.

Proposition 9.7. — *Supposons que T/T_0 soit ramifiée. La représentation cuspidale autoduale de niveau non nul π est de parité symplectique si et seulement si :*

(1) *$\boldsymbol{\rho}$ est un caractère non ramifié si $m = 1$,*

(2) *le caractère central de $\boldsymbol{\rho}$ sur $\mathcal{Z}$ est non trivial si m est pair,*

Remarque 9.8. — (1) Dans le cas où $m = 1$, on retrouve le résultat de [**8**] 6.8, c'est-à-dire que π est de parité symplectique si et seulement si elle contient la restriction de la représentation $\boldsymbol{\kappa}_p$ au sous-groupe compact $\mathbf{J}^0$.

(2) Dans le cas où m est pair, le caractère central de $\boldsymbol{\rho}$ sur $\mathcal{Z}$ est toujours un caractère non ramifié d'ordre au plus 2.

Démonstration. — En vertu du théorème 9.6, la représentation π est de parité symplectique si et seulement si elle est distinguée par $\mathrm{GL}_n(F) \times \mathrm{GL}_n(F)$, qui est conjugué à G^σ dans G. Raisonnant comme dans la preuve du théorème 9.5, on voit que c'est le cas si et seulement si le type générique $\boldsymbol{\kappa}_p \otimes \boldsymbol{\rho}$ est distingué par $\mathbf{J} \cap G^\sigma$, c'est-à-dire si et seulement si $\boldsymbol{\rho}$ est $\mathbf{J} \cap G^\sigma$-distinguée, car $\boldsymbol{\kappa}_p$ est elle-même $\mathbf{J} \cap G^\sigma$-distinguée. La représentation $\boldsymbol{\rho}$ étant σ-autoduale, elle est distinguée par $\mathbf{J}^0 \cap G^\sigma$. Le résultat suit de [**35**] Proposition 6.3 (voir aussi [**55**] Lemma 8.2). □

Dans le cas où T/T_0 est non ramifiée, posons $E_0 = F[\beta^2]$ et $\mathcal{Z}_0 = E_0^\times \mathbf{J}^1$. C'est un sous-groupe du centre $\mathcal{Z}$ qui ne dépend pas du choix de la strate $[\mathfrak{a}, \beta]$. En effet, si $[\mathfrak{a}, \beta']$ en est une autre, on a $E'^\times \mathbf{J}^1 = E^\times \mathbf{J}^1$, donc il y a un $x \in \mathbf{J}^1$ tel que $\beta' = \beta x$. De façon similaire à la proposition 9.7, en remplaçant [**35**] Proposition 6.3 par [**55**] Lemma 9.11, on obtient :

Proposition 9.9. — *Supposons que T/T_0 soit non ramifiée. La représentation cuspidale autoduale de niveau non nul π est de parité symplectique si et seulement si le caractère central de $\boldsymbol{\rho}$ est trivial sur $\mathcal{Z}_0$.*

10. Involutions galoisiennes sur les formes intérieures de $\mathrm{GL}_n(F)$

Dans cette section, F est de caractéristique résiduelle $p \neq 2$.

Dans cette section, nous considérons une situation différente de celle introduite à la section 5 et indiquons comment les méthodes développées dans les sections 5 et 6 peuvent s'y appliquer.

10.1.

Fixons une extension quadratique F/F_0, une F_0-algèbre centrale simple A_0 de degré réduit n et posons $A = A_0 \otimes_{F_0} F$. C'est une F-algèbre centrale simple de degré réduit n, qu'on munit de l'action naturelle de $\mathrm{Gal}(F/F_0)$ dont on note σ le générateur. Posons $G = A^\times$. Nous allons montrer que l'étude des représentations cuspidales de G distinguées par G^σ au moyen de la théorie des types offre beaucoup de similarités avec celle traitée dans cet article. Observons que le cas où A_0 est égale à $\mathbf{M}_n(F_0)$, c'est-à-dire le cas des représentations cuspidales de $\mathrm{GL}_n(F)$ distinguées par $\mathrm{GL}_n(F_0)$, a été traité dans [**3, 55**].

10.2.

Fixons un $\alpha \in F_0^\times$ et un $\kappa \in G$ tel que $\kappa\sigma(\kappa) = \alpha$. Ceci définit une involution $\tau = \mathrm{Ad}(\kappa)\circ\sigma$ de G. La F-algèbre centrale simple A munie de l'involution τ entre dans le cadre du paragraphe 5.4 et motamment du lemme 5.13. Par conséquent, A^τ est une F_0-algèbre centrale simple et A s'identifie à $A^\tau \otimes_{F_0} F$, c'est-à-dire que la paire (A^τ, A) relève du cadre fixé au paragraphe 10.1. Nous ne gagnons donc aucune généralité à passer de σ à τ.

10.3.

Une représentation irréductible π de G est dite σ-autoduale si sa contragrédiente $\pi^\vee$ est isomorphe à sa conjuguée π^σ. Nous allons voir que, contrairement à ce qui se passe dans le cas autodual, une représentation cuspidale σ-autoduale de G contient *toujours* un caractère simple maximal σ-autodual. D'abord, c'est vrai dans le cas où $A_0 = \mathbf{M}_n(F_0)$ grâce à [**3**] Theorem 4.1, 4.2. Soit π une représentation cuspidale σ-autoduale de G et soit $\boldsymbol{\Theta}$ son endoclasse. Nous allons suivre la preuve du théorème 5.18. D'abord, il existe dans $\mathrm{GL}_n(F)$ un caractère simple maximal σ-autodual $\theta_1 \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}_1, \beta)$ d'endo-classe $\boldsymbol{\Theta}$, et on peut supposer, d'après [**3**] Corollary 4.21, que la strate simple $[\mathfrak{a}_1, \beta]$ est σ-autoduale. Posons $E = F[\beta]$ et $E_0 = F[\beta^2]$. D'après [**3**] Remark 4.22, l'homomorphisme naturel $E_0 \otimes_{F_0} F \to E$ est un isomorphisme. Pour plonger E dans A de façon que σ induise sur E l'automorphisme non trivial de E/E_0, il suffit donc de plonger E_0 dans A_0 comme une F_0-algèbre, ce qui est toujours possible au vu des degrés réduits, puis d'en déduire un plongement de F-algèbres de E dans A par extension de F_0 à F. Fixons un tel plongement, et notons B le centralisateur de E dans A.

Pour comprendre l'analogie entre les cas autodual et σ-autodual, il faut comprendre que B se comporte ici exactement comme dans le paragraphe 5.4 : c'est une E-algèbre centrale simple munie de la E_0-involution σ. Par conséquent, les conditions d'existence d'un ordre maximal de B stable par σ sont exactement les mêmes que dans le cas autodual. Par ailleurs, le lemme 5.16 reste valable dans le cas σ-autodual en niveau non nul (dans le cas où $\boldsymbol{\Theta}$ est nulle, la condition est que N doit être impair). Pour finir d'adapter la preuve du théorème 5.18, il ne reste donc qu'à adapter le lemme 3.25 au cas σ-autodual.

10.4.

La E-algèbre B se comportant de la même façon qu'on soit dans le cas σ-autodual ou autodual, la classification des caractères simples σ-autoduaux contenus dans une représentation irréductible cuspidale σ-autoduale de G, ainsi que la description de l'action résiduelle de σ sur le groupe $\mathbf{J}^0(\mathfrak{a},\beta)/\mathbf{J}^1(\mathfrak{a},\beta) \simeq \mathrm{GL}_m(\boldsymbol{l})$, est exactement celle donnée par la proposition 5.24. Il s'ensuit que toute l'analyse faite aux paragraphes 6.4 à 6.11 reste valable, quitte à remplacer le théorème 6.1 par une version non déployée de [**55**] Theorem 4.1. Ceci fournit une condition suffisante de distinction par G^σ des représentations cuspidales de G, en termes de théorie des types.

Pour prouver que cette condition est aussi nécessaire, et obtenir du même coup un théorème de dichotomie et de disjonction ([**43, 2**]), il faut analyser la contribution de toutes les doubles classes dans (1.1). Ceci peut être fait en suivant l'approche de [**55**] Section 6.

10.5.

Beuzart-Plessis a montré ([**6**] Theorem 1) qu'une représentation cuspidale (et plus généralement une représentation essentiellement de carré intégrable) de G est G^σ-distinguée si et seulement si son transfert de Jacquet-Langlands au groupe $\mathrm{GL}_n(F)$ est $\mathrm{GL}_n(F_0)$-distingué. Il serait intéressant de savoir si un tel résultat est accessible par les méthodes présentées ici.

Références

1. J. Adler, *Self-contragredient supercuspidal representations of* GL_n, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), n°8, 2471–2479.
2. U. K. Anandavardhanan, A. Kable and R. Tandon, *Distinguished representations and poles of twisted tensor L-functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), n°10, 2875–2883.
3. U. K. Anandavardhanan, R. Kurinczuk, N. Matringe, V. Sécherre et S. Stevens, *Galois self-dual cuspidal types and Asai local factors*, à paraître à J. Eur. Math. Soc.
4. I. Badulescu, *Global Jacquet-Langlands correspondence, multiplicity one and classification of automorphic representations*, Invent. Math. **172** (2008), 383–438. With an appendix by Neven Grbac.
5. I. Badulescu et P. Roche, *Global Jacquet-Langlands correspondence for division algebras in characteristic p*, Int. Math. Res. Not. **7** (2017), 2172–2206.
6. R. Beuzart-Plessis, *On distinguished square-integrable representations for Galois pairs and a conjecture of Prasad*, Invent. Math. **214** (2018), 437–521.
7. C. Blondel, $\mathrm{Sp}(2N)$*-covers for self-contragradient supercuspidal representations of* $\mathrm{GL}(N)$, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **37** (2004), n°4, 533–558.
8. C. Blondel, G. Henniart et S. Stevens, *Jordan blocks of cuspidal representations of symplectic groups*, Algebra Number Theory **12** (2018), n°10, 2327–2386.
9. P. Broussous, *Extension du formalisme de Bushnell et Kutzko and cas d'une algèbre à division*, Proc. London Math. Soc. **77** (1998), n°3, 292–326.
10. P. Broussous et N. Matringe, *Multiplicity one for pairs of Prasad–Takloo-Bighash type*, à paraître à Int. Math. Res. Not.
11. P. Broussous, V. Sécherre et S. Stevens, *Smooth representations of* $\mathrm{GL}_m(D)$*,* V*: endo-classes*, Documenta Math. **17** (2012), 23–77.
12. C. J. Bushnell et G. Henniart, *Local tame lifting for GL(N), I: simple characters*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **83** (1996), 105–233.
13. ———, *Sur le comportement, par torsion, des facteurs epsilon de paires*, Canad. J. Math. **53** (2001), 1141–1173.
14. ———, *Local tame lifting for* GL(N)*,* IV*: simple characters and base change*, JProc; London Math. Soc. (3) **87** (2003), 337–362.
15. ———, *Local tame lifting for* GL(N)*,* III*: explicit base change and Jacquet–Langlands correspondence*, J. reine angew. Math. **580** (2005), 39–100.

16. ———, *The essentially tame local Langlands correspondence, I*, J. Amer. Math. Soc. **18** (2005) n°3, 685–710.
17. ———, *The locla Langlands conjecture for* GL(2), Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 335, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
18. ———, *The essentially tame Jacquet–Langlands correspondence for inner forms of* GL(n), Pure Appl. Math. Q. **7** (2011), n°3, 469–538.
19. ———, *Intertwining of simple characters in* GL(n), Int. Math. Res. Not. **17** (2013), 3977–3987.
20. ———, *To an effective local Langlands correspondence*, Mem. Amer. Math. Soc. **231** (2014).
21. C. J. Bushnell et P. C. Kutzko, *The admissible dual of* GL(N) *via compact open subgroups*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
22. M. Chommaux, *Distinction of the Steinberg representation and a conjecture of Prasad and Takloo-Bighash*, J. Number Theory **202** (2019), 200–2019.
23. M. Chommaux et N. Matringe, *The split case of the Prasad–Takloo-Bighash conjecture for cuspidal representations of level* 0, `https://arxiv.org/abs/2004.05581`.
24. C. Coniglio-Guilloton, *Correspondance de Jacquet-Langlands et distinction : cas des représentations cuspidales de niveau* 0, Bull. Soc. Math. France **144** (2016), n°2, 163–216.
25. A. Dotto, *The inertial Jacquet-Langlands correspondence*, `https://arxiv.org/abs/1707.00635`.
26. B. Feigon, K. Martin et D. Whitehouse, *Periods and non-vanishing of central L-values for* GL($2n$), Israel J. Math. **225** (2018), n°1, 223–266.
27. W. T. Gan et L. Lomelí, *Globalization of supercuspidal representations over function fields and applications*, J. Eur. Math. Soc. **20** (2018), 2813–2858.
28. W. T. Gan et S. Takeda, *The local Langlands conjecture for* GSp(4), Annals of Math. **173** (2011), 1841–1882.
29. P. Gille et T. Szamuely, *Central simple algebras and Galois cohomology*, Cambridge studies in advanced mathematics **101**, Cambridge University Press, 2006.
30. R. Gow, *Two multiplicity-free permutation representations of the general linear group* $\mathrm{GL}(n, q^2)$, Math. Z. **188** (1984), 45–54.
31. M. Grabitz, *Simple characters for principal orders in* $\mathrm{M}_m(D)$, J. Number Theory **126** (2007), n°1, 1–51.
32. J. Green, *The characters of the finite general linear groups*, J. Algebra **184** (1996), n°3, 839–851.
33. J. Guo, *Uniqueness of generalized Waldspurger model for* GL($2n$), Pacific J. Math. **180** (1997), n°2, 273–289.
34. J. Hakim, *Tame supercuspidal representations of* GL_n *distinguished by orthogonal involutions*, Represent. Theory **17** (2013), 120–175.
35. J. Hakim et F. Murnaghan, *Two types of distinguished supercuspidal representations*, Int. Math. Res. Not. **35** (2002), 1857–1889.
36. ———, *Tame supercuspidal representations of* GL_n *distinguished by a unitary group*, Compositio Math. **133** (2002), 199–244.
37. ———, *Distinguished tame supercuspidal representations*, Int. Math. Res. Pap. (2008), n°2.
38. G. Henniart, *Correspondance de Langlands et fonctions L des carrés extérieur et symétrique*, Int. Math. Res. Not. **4** (2010), 633–673.
39. R. Howe, *Tamely ramified supercuspidal representations of* GL_n, Pacific J. Math. **73** (1977), 437–460.
40. H. Jacquet et S. Rallis, *Uniqueness of linear periods*, Compositio Math. **102** (1996), n°1, 65–123.
41. D. Jiang, C. Nien et Y. Qin, *Symplectic supercuspidal representations of* GL($2n$) *over p-adic fields*, Pacific J. Math. **245** (2010), n°2, 273–313.
42. Y. Jo, *Derivatives and exceptional poles of the local exterior square L-gunction for* GL_m, Math. Z. **294** (2020), 1687–1725.

43. A. Kable, *Asai L-functions and Jacquet's conjecture*, Amer. J. Math. **126** (2004), n°4, 789–820.
44. P. K. Kuwat et R. Raghunathan, *On the local and global exterior square L-functions of* GL_n, Math. Res. Lett. **19** (2012), n°4, 785–804.
45. N. Matringe, *Linear and Shakila local periods for the mirabolic group, and some consequences*, J. Number Theory . **138** (2014), 1–19.
46. A. Mínguez et V. Sécherre, *Types modulo* ℓ *pour les formes intérieures de* GL_n *sur un corps local non archimédien.* Proc. London Math. Soc. **109** (2014), n°4, 823–891. Avec un appendice par V. Sécherre et S. Stevens.
47. ———, *Correspondance de Jacquet–Langlands locale et congruences modulo* ℓ, Invent. Math. **208** (2017), n°2, 553–631.
48. V. Platonov et A. Rapinchuk, *Algebraic groups and number theory*, Pure and Applied Mathematics, volume 139, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994.
49. D. Prasad et R. Schulze-Pillot, *Generalised form of a conjecture of Jacquet and a local consequence*, J. Reine Angew. Math. **616** (2008), 219–236.
50. D. Prasad et R. Takloo-Bighash, *Bessel models for* $\mathrm{GSp}(4)$, J. Reine Angew. Math. **655** (2011), 189–243.
51. H. Saito, *On Tunnell's formula for characters of* $\mathrm{GL}(2)$, Compositio Math. **85** (1993), n°1, 99–108.
52. V. Sécherre, *Représentations lisses de* $\mathrm{GL}_m(D)$*,* I *: caractères simples*, Bull. Soc. math. France **132** (2004), n°3, 327–396.
53. ———, *Représentations lisses de* $\mathrm{GL}_m(D)$*,* II *:* β*-extensions*, Compositio Math. **141** (2005), 1531–1550.
54. ———, *Représentations lisses de* $\mathrm{GL}_m(D)$*,* III *: types simples*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **38** (2005), 951–977.
55. ———, *Supercuspidal representations of* $\mathrm{GL}_n(F)$ *distinguished by a Galois involution*, Algebra Number Theory **13** (2019), n°7, 1677–1733.
56. V. Sécherre et S. Stevens, *Représentations lisses de* $\mathrm{GL}_m(D)$*,* IV *: représentations supercuspidales*, J. Inst. Math. Jussieu **7** (2008), n°3, p. 527–574.
57. ———, *Smooth representations of* $\mathrm{GL}_m(D)$*,* VI*: semisimple types*, Int. Math. Res. Not. **13** (2012), 2994–3039.
58. ———, *Towards an explicit local Jacquet-Langlands correspondence beyond the cuspidal case*, Compositio Math. **155** (2019), 1853–1887.
59. A. Silberger et E.-W. Zink, *Weak explicit matching for level zero discrete series of unit groups of* $\mathfrak{p}$*-adic simple algebras*, Canad. J. Math. **55** (2003), n°2, 353–378.
60. ———, *An explicit matching theorem for level zero discrete series of unit groups of* $\mathfrak{p}$*-adic simple algebras*, J. Reine Angew. Math. **585** (2005), 173–235.
61. S. Stevens, *Intertwining and supercuspidal types for p-adic classical groups*, Proc. London Math. Soc. (3), **83** (2001), n°1, 120–140.
62. M. Suzuki, *Classification of* $\mathrm{GL}_n(E)$*-distinguished representations*, prépublication disponible sur le site de l'auteur, `https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~msuzuki/papers.html`.
63. J. Tate, *Number theoretic background*, in *Automorphic forms, representations and L-functions*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, 3–26. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.
64. J. Tunnell, *Local* ϵ*-factors and characters of* $\mathrm{GL}(2)$, Amer. J. Math. **105** (1983), n°6, 1277–1307.
65. H. Xue, *Epsilon dichotomy for linear models*, `https://www.math.arizona.edu/~xuehang`.
66. A. Zelevinski, *Induced representations of reductive* $\mathfrak{p}$*-adic groups. II. On irreducible representations of* $\mathrm{GL}(n)$, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (4) **13** (1980), n°2, 165–210.
67. E.-W. Zink, *More on embeddings of local fields in simple algebras*, J. Number Theory **77** (1999), n°1, 51–61.

68. J. Zou, *Supercuspidal representations of* $\mathrm{GL}_n(F)$ *distinguished by a unitary involution*, prépublication disponible à `https://arxiv.org/abs/1909.10450`.

VINCENT SÉCHERRE, Laboratoire de Mathématiques de Versailles, UVSQ, CNRS, Université Paris-Saclay, 78035, Versailles, France, Institut Universitaire de France • *E-mail :* `vincent.secherre@math.uvsq.fr`