Université de Versailles Saint Quentin en Yvelines
MA202

Feuille de TD 3 : Algèbre linéaire

Espaces vectoriels

Exercice 1. Déterminer lesquels de ces ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x - 5y = z\}$
$E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x = 0\}$
$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 1\}$
$E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 - y^2 = 0\}$
$E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ xy = 0\}$

Correction. Rappel, un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel s'il vérifie les trois conditions suivantes :

1. $0 \in E$;
2. si $u, v \in E$, alors $u + v \in E$;
3. si $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u \in E$.

A. Montrons que E_1 est un espace vectoriel. On vérifie les trois points ci-dessus.
1. On a $0 = (0, 0, 0) \in E_1$ car $2 \times 0 - 5 \times 0 = 0$.
2. Soient $u, v \in E_1$. On a $u = (x, y, z)$ avec $2x - 5y = z$ et $v = (x', y', z')$ avec $2x' - 5y' = z'$. On a $u + v = (x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$. Par ailleurs, on a

$$2(x + x') - 5(y + y') = (2x - 5y) + (2x' - 5y') = z + z'.$$

Donc $u + v \in E_1$.
3. Soit $u \in E_1$ et $\lambda \in R$. On a $u = (x, y, z)$ avec $2x - 5y = z$ et $\lambda u = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$. Par ailleurs, on a

$$2(\lambda x) - 5(\lambda y) = \lambda(2x - 5y) = \lambda z.$$

Donc $\lambda u \in E_1$.

B. Notons que E_2 n'est pas un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ donc il ne peut être un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Montrons cependant que E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. On vérifie les trois points ci-dessus.
1. On a $0 = (0, 0) \in E_2$ (car $0 = 0$).
2. Soient $u, v \in E_2$. On a $u = (x, y)$ avec $x = 0$ et $v = (x', y')$ avec $x' = 0$. On a $u + v = (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$. Par ailleurs, on a

$$(x + x') = x + x' = 0.$$

Donc $u + v \in E_2$.
3. Soit $u \in E_2$ et $\lambda \in R$. On a $u = (x, y)$ avec $x = 0$ et $\lambda u = (\lambda x, \lambda y)$. Par ailleurs, on a

$$\lambda x = 0.$$

Donc $\lambda u \in E_2$.

C Montrons que E_3 n'est pas un espace vectoriel. Il suffit de vérifier que l'un des trois points ci-dessus est faux.
1. On a $0 = (0, 0, 0) \notin E_3$ (car $0 + 0 + 0 \neq 1$).

D Montrons que E_4 n'est pas un espace vectoriel. Il suffit de vérifier que l'un des trois points ci-dessus est faux.

2. On a $u = (1, 1, 0) \in E_4$ car $1^2 - 1^2 = 0$ et $v = (1, -1, 0) \in E_4$ car $1^2 - (-1)^2 = 0$. Cependant, on a $u + v = (2, 0, 0)$ et comme $2^2 - 0^2 \neq 0$, on a $u + v \notin E_4$.

E Montrons que E_5 n'est pas un espace vectoriel. Il suffit de vérifier que l'un des trois points ci-dessus est faux.

2. On a $u = (1, 0, 0) \in E_5$ car $1 \times 0 = 0$ et $v = (0, 1, 0) \in E_4$ car $0 \times 1 = 0$. Cependant, on a $u + v = (1, 1, 0)$ et comme $1 \times 1 \neq 0$, on a $u + v \notin E_5$.

Exercice 2.

1. Décrire les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.
2. Dans $\mathbb{R}^2$ donner un exemple de deux sous-espaces vectoriels dont l'union n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Correction.

1. L'espace vectoriel $\mathbb{R}$ n'a que deux sous-espaces vectoriels : $\{0\}$ et $\mathbb{R}$.
Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$ et toutes les droites vectorielles.
Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont $\{0\}$, $\mathbb{R}^3$, toutes les droites vectorielles et tous les plans vectoriels.

2. On va montrer que la réunion de deux droites distinctes de $\mathbb{R}^2$ n'est pas un sous-espace vectoriel. Soit $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ et $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$. On a vu à l'exercice 1 que E_1 est un sous-espace vectoriel (ensemble E_2 de l'exercice 1). En échangeant les rôles de x et y on obtient que E_2 est aussi un sous espace vectoriel. Montrons que $E = E_1 \cup E_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel. On a $u = (0, 1) \in E_1 \subset E$ et $v = (1, 0) \in E_2 \subset E$. Cependant $u + v = (1, 1)$ n'est ni dans E_1 ni dans E_2 donc $u + v \notin E$ et E n'est pas un sous-espace vectoriel.

Exercice 3. Les vecteurs u suivants sont-ils combinaison linéaire des vecteurs u_i ?

1. dans $\mathbb{R}^2$, $u = (1, 2)$, $u_1 = (1, -2)$, $u_2 = (2, 3)$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, $u = (2, 5, 3)$, $u_1 = (1, 3, 2)$, $u_2 = (1, -1, 4)$.
3. Dans $\mathbb{R}^3$,$u = (3, 1, m)$, $u_1 = (1, 3, 2)$, $u_2 = (1, -1, 4)$ (discuter suivant la valeur de m).

Correction.

Rappelons que le vecteur u est combinaison linéaire de u_1 et u_2 s'il existe des réels λ et μ tels que $u = \lambda u_1 + \mu u_2$.

1. On cherche des réels λ et μ tels que $u = \lambda u_1 + \mu u_2$ c'est-à-dire $(1, 2) = \lambda(1, -2) + \mu(2, 3) = (\lambda + 2\mu, -2\lambda + 3\mu)$. On obtient donc le système :

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = 1 \\ -2\lambda + 3\mu = 2. \end{cases}$$

On résoud le système en remplaçant la seconde ligne par elle-même plus deux fois la première $(L_2 \to L_2 + 2L_1)$. On obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = 1 \\ 7\mu = 4. \end{cases}$$

On a donc $\mu = \frac{4}{7}$ et en remplaçant dans le première équation, on obtient $\lambda = -\frac{1}{7}$. On a donc trouvé des réels qui vérifient les conditions souhaitées et on conclue que u est bien combinaison linéaire de u_1 et u_2.

2. On cherche des réels λ et μ tels que $u = \lambda u_1 + \mu u_2$ c'est-à-dire $(2, 5, 3) = \lambda(1, 3, 2) + \mu(1, -1, 4) = (\lambda + \mu, 3\lambda - \mu, 2\lambda + 4\mu)$. On obtient donc le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ 3\lambda - \mu = 5 \\ 2\lambda + 4\mu = 3 \end{cases}$$

On effectue les opérations : $L_2 \to L_2 - 3L_1$ et $L_3 \to L_3 - 2L_1$. On obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ -4\mu = -1 \\ 2\mu = -1. \end{cases}$$

On obtient $\mu = \frac{1}{4}$ et $\mu = -\frac{1}{2}$ ce qui est impossible. Il n'y a donc pas de solution et u n'est pas combinaison linéaire de u_1 et u_2.

3. On cherche des réels λ et μ tels que $u = \lambda u_1 + \mu u_2$ c'est-à-dire $(3, 1, m) = \lambda(1, 3, 2) + \mu(1, -1, 4) = (\lambda + \mu, 3\lambda - \mu, 2\lambda + 4\mu)$. On obtient donc le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ 3\lambda - \mu = 1 \\ 2\lambda + 4\mu = m \end{cases}$$

On effectue les opérations : $L_2 \to L_2 - 3L_1$ et $L_3 \to L_3 - 2L_1$. On obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ -4\mu = -8 \\ 2\mu = m - 6. \end{cases}$$

On obtient $\mu = 2$ et $\mu = \frac{m-6}{2}$. Ceci est possible si et seulement si $2 = \frac{m-6}{2}$ ou encore $m - 6 = 4$ et de manière équivalente, $m = 10$. On a alors $\mu = 2$ et $\lambda = 1$. En conclusion, il y a pas une solution si et seulement si $m = 10$ donc u est pas combinaison linéaire de u_1 et u_2 si et seulement si $m = 10$.

Exercice 4. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. (u, v) avec $u = (1, 2, 3)$ et $v = (-1, 3, 5)$.
2. (X, X^2) dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Correction.

Rappelons qu'une famille $(u_1, \cdots, u_r)$ de vecteurs est libre si pour toute famille de réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r = 0$, on a $\lambda_1 = \ cdots = \lambda_r = 0$.

1. Soient λ et μ des réels tels que $\lambda u + \mu v = 0$. La famille est libre si les seuls réels λ et μ qui vérifient cette conditions sont $\lambda = \mu = 0$. Montrons que c'est le cas. On a $0 = \lambda u + \mu v = \lambda(1, 2, 3) + \mu(-1, 3, 5) = (\lambda - \mu, 2\lambda + 3\mu, 3\lambda + 5\mu)$. On obtient donc le système :

$$\begin{cases} \lambda - \mu = 0 \\ 2\lambda + 3\mu = 0 \\ 3\lambda + 5\mu = 0 \end{cases}$$

On effectue les opérations : $L_2 \to L_2 - 2L_1$ et $L_3 \to L_3 - 3L_1$. On obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda - \mu = 0 \\ 5\mu = 0 \\ 8\mu = 0. \end{cases}$$

On obtient donc $\mu = 0$ puis $\lambda = 0$ ce qui montre que la famille (u, v) est libre.

1. Soient λ et μ des réels tels que $\lambda X + \mu X^2 = 0$. La famille est libre si les seuls réels λ et μ qui vérifient cette conditions sont $\lambda = \mu = 0$. Montrons que c'est le cas (c'est un cas particulier d'identification polynômiale). En posant $X = 1$ et $X = -1$, on obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases}$$

On effectue les opérations : $L_2 \to L_2 - L_1$. On obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -2\mu = 0. \end{cases}$$

On obtient donc $\mu = 0$ puis $\lambda = 0$ ce qui montre que la famille (X, X^2) est libre.

Exercice 5. Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - y + 2z = 0\}.$$

1. Donner une base de F et une base de G et en déduire leur dimension respective.
2. Donner une base de $F \cap G$ et donner sa dimension.

Correction.

Rappelons qu'une base est un famille libre et génératrice. Rappelons aussi que la dimension d'un espace vectoriel est le nombre d'éléments d'une (quelconque) de ses bases.

De manière empirique la dimension d'un espace vectoriel E est le nombre de paramètres nécessaires pour décrire un vecteur général de E. Nous allons voir que cette technique empirique est très efficace.

1. Soit $u = (x, y, z) \in F$ un vecteur de F. On a $x - 2y + z = 0$. Dans $\mathbb{R}^3$, un vecteur a trois paramètres (ses coordonnées x, y et z). Un vecteur de F en a une de moins. En effet, on peut par exemple exprimer z en fonction des autres coordonnées : on a $z = -x + 2y$. Ainsi on a seulement besoin des coordonnées x et y pour écrire le vecteur u : $u = (x, y, -x + 2y)$. Montrons que ceci nous fournit une base. On a

$$u = (x, y, -x + 2y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, 2).$$

Posons $u_1 = (1, 0, -1)$ et $u_2 = (0, 1, 2)$ et montrons que (u_1, u_2) est une base de F.

On commence par vérifier que u_1 et u_2 sont dans F. On a $1 - 2 \times 0 + (-1) = 0$ donc $u_1 \in F$ et $0 - 2 \times 1 + 2 = 0$ donc $u_2 \in F$.

Montrons que (u_1, u_2) est génératrice pour F. Il faut montrer que tout vecteur $u \in F$ est combinaison linéaire de u_1 et u_2. Mais on a vu que tout vecteur $u = (x, y, z) \in F$ s'écrit $u = x(1, 0, -1) + y(0, 1, 2) = xu_1 + yu_2$ et est donc bien combinaison linéaire de u_1 et u_2.

Montrons finalement que (u_1, u_2) est libre. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda u_1 + \mu u_2 = 0$. On obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ -\lambda + 2\mu = 0 \end{cases}$$

On obtient directement $\lambda = \mu = 0$ et la famille est libre. C'est donc une base. On a trouvé une base avec 2 éléments pour F donc $\dim F = 2$.

On passe au sous-espace G. Soit $u = (x, y, z) \in G$ un vecteur de G. On a $2x - y + 2z = 0$. Dans $\mathbb{R}^3$, un vecteur a trois paramètres (ses coordonnées x, y et z). Un vecteur de G en a une de moins. En effet, on peut par exemple exprimer y en fonction des autres coordonnées : on a $y = 2x + 2z$. Ainsi on a seulement besoin des coordonnées x et z pour écrire le vecteur u : $u = (x, 2x + 2z, z)$. Montrons que ceci nous fournit une base. On a

$$u = (x, 2x + 2z, z) = x(1, 2, 0) + z(0, 2, 1).$$

Posons $v_1 = (1, 2, 0)$ et $v_2 = (0, 2, 1)$ et montrons que (v_1, v_2) est une base de G.

On commence par vérifier que v_1 et v_2 sont dans G. On a $2 \times 1 - 2 + 0 = 0$ donc $v_1 \in G$ et $0 - 2 + 2 \times 1 = 0$ donc $v_2 \in G$.

Montrons que (v_1, v_2) est génératrice pour G. Il faut montrer que tout vecteur $u \in G$ est combinaison linéaire de u_1 et v_2. Mais on a vu que tout vecteur $u = (x, y, z) \in G$ s'écrit $u = x(1, 2, 0) + z(0, 2, 1) = xv_1 + zv_2$ et est donc bien combinaison linéaire de v_1 et v_2.

Montrons finalement que (v_1, v_2) est libre. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda v_1 + \mu v_2 = 0$. On obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ 2\lambda + 2\mu = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

On obtient directement $\lambda = \mu = 0$ et la famille est libre. C'est donc une base. On a trouvé une base avec 2 éléments pour G donc $\dim G = 2$.

2. On proc`ede de la même manière avec $F \cap G$. On a

$$F \cap G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0 \text{ et } 2x - y + 2z = 0\}.$$

On voit qu'un vecteur $u = (x, y, z) \in F \cap G$ doit véfier les deux conditions $x - 2y + z = 0$ et $2x - y + 2z = 0\}$. Intuitivement, si ces deux conditions sont "indépendantes", on devrait avoir que u ne dépend plus que d'un paramètre. On va voir que ceci se vérifie. Les coordonnées de u vérifient le système

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

En effectuant l'opération $L_2 \to L_2 - 2L_1$, on obtient le système

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3y = 0 \end{cases}$$

On doit donc avoir $y = 0$ et on obtient $z = -x$. Ainsi le vecteur $u = (x, y, z) \in F \cap G$ est de la forme $u = (x, 0, -x) = x(1, 0, -1)$.

Posons $u_1 = (1, 0, -1)$ et montrons que u_1 est une base de $F \cap G$. Montrons tout d'abord que $u_1 \in F \cap G$. C'est vrai car $1 - 2 \times 0 + (-1) = 0$ et $(2 \times 1 - 0 + 2 \times (-1) = 0$.

On a vu que tout vecteur $u = (x, y, z) \in F \cap G$ s'écrit $yu = x(1, 0, -1) = xu_1$ donc u_1 est génératrice pour $F \cap G$.

Finalement montrons que u_1 est libre. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda u_1 = 0$. Alors on a $\lambda = 0$ donc u_1 est libre et forme une base de $F \cap G$. On a donc une base de $F \cap G$ avec un élément et $\dim(F \cap G) = 1$.

$\boxed{\textbf{Matrices}}$

Exercice 1. Calculs élémentaires.
On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer lorsque c'est possible :

1. AB, BA, A^2, B^2, $A^2 + 2AB + B^2$, $A + B$ et $(A + B)^2$. Que remarque-t-on ?
2. LC, CL, AC.
3. $A + E$, AE, EA, $(E^t)A$,
4. AD, DA. Remarquer les effets de ces produits sur les lignes et les colonnes de A.

Correction. 1. On obtient :

$$AB = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 7 \\ 12 & 7 & 30 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ BA = \begin{pmatrix} -5 & -8 & -3 \\ 6 & 11 & 0 \\ 15 & 3 & 15 \end{pmatrix}, \ A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -9 & -9 \\ 36 & 23 & 42 \\ 6 & 1 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -7 \\ 2 & 5 & 12 \\ 13 & 2 & 15 \end{pmatrix}, \ A + B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & 8 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 27 & -12 & -2 \\ 62 & 42 & 114 \\ 19 & 1 & 27 \end{pmatrix}, (A + B)^2 = \begin{pmatrix} 8 & -20 & -12 \\ 56 & 46 & 84 \\ 34 & 5 & 42 \end{pmatrix}.$$

On remarque que l'on a $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$. Ceci vient du fait que $AB \neq BA$. En effet, on a

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2+AB+BA+B^2 \neq A^2+AB+AB+B^2 = A^2+2AB+B^2.$$

2. Le produit LC n'existe pas. On a

$$CL = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ AC = \begin{pmatrix} -3 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3. La somme $A + E$ et le produit EA n'existent pas. On a

$$AE = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 32 & 31 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \ (E^t)A = \begin{pmatrix} 15 & 11 & 15 \\ 12 & 4 & 12 \end{pmatrix}.$$

4. On a
$$AD = \begin{pmatrix} a & -2b & 3c \\ 4a & 5b & 6c \\ 2a & b & 0 \end{pmatrix}, \; DA = \begin{pmatrix} a & -2a & 3a \\ 4b & 5b & 6b \\ 2c & c & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que multiplier A à droite par D revient à remplacer la première colonne de A par a fois celle-ci, la deuxième colonne de A par b fois celle-ci et la troisième colonne de A par c fois celle-ci.

Par contre, multiplier A à gauche par D revient à remplacer la première ligne de A par a fois celle-ci, la deuxième ligne de A par b fois celle-ci et la troisième ligne de A par c fois celle-ci.

Exercice 2. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & -5 \end{pmatrix}.$$
Déterminer les triplets (a, b, c) afin que A et B commutent, c'est-à-dire $AB = BA$.

Correction. On calcule
$$AB = \begin{pmatrix} a+2b & c-10 \\ a-b & c+5 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} a+c & 2a-c \\ b-5 & 2b+5 \end{pmatrix}$$
Pour que $AB = BA$, les réels (a, b, c) doivent donc être solution du système
$$\begin{cases} a+2b = a+c \\ c-10 = 2a-c \\ a-b = b-5 \\ c+5 = 2b+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b-c = 0 \\ -2a+2c = 10 \\ a-2b = -5 \\ -2b+c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2b = -5 \\ 2b-c = 0 \\ -2a+2c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2b = 5 \\ 2b-c = 0 \\ -4b+2c = 0. \end{cases}$$
La deuxième équivalence est obtenue en mettant la ligne 3 en haut du système et en supprimant la dernière ligne qui est l'opposé de la première. La dernière est obtenue par $L_3 \to L_3 + 2L_1$. Comme la dernière ligne du système obtenu est égale à deux fois la ligne précédente, ce système est équivalent à
$$\begin{cases} a-2b = -5 \\ 2b-c = 0 \end{cases}$$
et on obtient $a = 2b-5$ et $c = 2b$. Les triplets possibles sont donc les $(2b-5, b, 2b)$ pour tout $b \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Calcul d'inverse.
Soient
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour montrer que A est inversible et pour calculer son inverse. Vérifier les calculs en effectuant par exemple le produit AA^{-1}.

2. Même question pour B.

3. En déduire par simple produit matriciel l'inverse du produit AB (on demande donc de ne pas inverser AB par la méthode de Gauss-Jordan).

Correction. 1. On applique la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Pour la première équivalence, on a fait les opérations : $L_2 \to L_2 - L_1$ et $L_3 \to L_3 - L_1$. Pour la deuxème équivalence, on a fait l'opération : $L_3 \to L_3 + 2L_2$. Pour la troisième équivalence, on a fait l'opération : $L_3 \to \frac{1}{4}L_3$. L'équivalence suivante est obtenue par les opérations : $L_1 \to L_1 - L_3$ et $L_2 \to L_2 - L_3$. La dernière équivalence est obtenue par $L_1 \to L_1 - L_2$.

On obtient donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On applique la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} & \frac{5}{11} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{13}{11} & -\frac{3}{11} & -\frac{5}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} & \frac{5}{11} \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{11} & -\frac{6}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} & \frac{5}{11} \end{array}\right)$$

Pour la première équivalence, on a fait les opérations : $L_2 \to L_2 + L_1$ et $L_3 \to L_3 - L_1$. Pour la deuxème équivalence, on a fait l'opération : $L_2 \to \frac{1}{5}L_2$. Pour la troisième équivalence, on a fait l'opération : $L_3 \to L_3 + 3L_2$. L'équivalence suivante est obtenue par l' opération : $L_3 \to \frac{5}{11}L_3$, puis on fait $L_1 \to L_1 - L_3$ et $L_2 \to L_2 - \frac{2}{5}L_3$. La dernière équivalence est obtenue par $L_1 \to L_1 - 3L_2$.

On obtient donc

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{6}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. On a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ et il suffit de multiplier les deux matrices obtenues aux question 2 et 1 pour obtenir le résultat :

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{35}{44} & -\frac{13}{22} & \frac{7}{44} \\ \frac{29}{44} & -\frac{7}{22} & -\frac{3}{44} \\ -\frac{17}{22} & \frac{6}{11} & \frac{1}{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{44}\begin{pmatrix} 35 & -26 & 7 \\ 29 & -14 & -3 \\ -34 & 24 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Calcul d'inverse. Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}, \text{ avec } a \neq 0.$$

Utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour montrer que M est inversible et pour calculer son inverse. Vérifier les calculs en effectuant par exemple le produit MM^{-1}.

Correction. On applique la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & -b & 1 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & a & \frac{b^2}{a} & -\frac{b}{a} & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & a & \frac{b^2}{a^2} & -\frac{b}{a^2} & \frac{1}{a} \end{array}\right)$$

Pour la première équivalence, on a fait l'opération : $L_2 \to L_2 - bL_1$. Pour la deuxème équivalence, on a fait l'opération : $L_2 \to \frac{1}{a}L_2$. Pour la troisième équivalence, on a fait l'opération : $L_3 \to L_3 - bL_2$. La dernière équivalence est obtenue par $L_3 \to \frac{1}{a}L_3$.

On obtient donc

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{b^2}{a^2} & -\frac{b}{a^2} & \frac{1}{a} \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ -ab & a & 0 \\ b^2 & -b & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Inverse et système linéaire. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour montrer que A est inversible et pour calculer son inverse. Vérifier les calculs en effectuant par exemple le produit AA^{-1}.

2. En déduire alors la résolution du système

$$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ 2x + y + z = b \\ 2x + y + 3z = c \end{cases}$$

pour $(a, b, c) = (1, 2, 3)$ puis pour $(a, b, c) = (-1, 4, 2)$.

Correction. On applique la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Pour la première équivalence, on a fait les opérations : $L_2 \to L_2 - 2L_1$ et $L_3 \to L_3 - 2L_1$. Pour la deuxème équivalence, on a fait l'opération : $L_2 \to -L_2$. Pour la troisième équivalence, on a fait l'opération : $L_3 \to L_3 + L_2$. Pour la suivante, on fait $L_3 \to \frac{1}{2}L_3$ puis on fait $L_1 \to L_1 - 2L_3$ et $L_2 \to L_2 - 3L_3$. Pour la dernière, on fait $L_1 \to L_1 - L_2$.

On obtient donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On remarque que (x, y, z) est solution du système si et seulement si

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

En multipliant à gauche par A^{-1}, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

On trouve ainsi la solution suivante pour $(a, b, c) = (1, 2, 3)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

De même, on trouve la solution suivante pour $(a, b, c) = (-1, 4, 2)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Application pratique.
Une entreprise de jouets fabrique chaque jour trois types de jouets différents A, B et C et utilise les quantités de matières premières données dans le tableau suivant :

	Jouet A	Jouet B	Jouet C
Bois en dm^3	1	3	2
Métal en kg	0,4	0,6	0,2
Plastique en kg	0,1	0,1	0,1

Un programme de production journalière s'exprime par un vecteur $X^t = (x_1, x_2, x_3)$, où x_1, x_2 et x_3 désignent respectivement le nombre de jouets A, B et C fabriqués. Pour réaliser un programme de production, on utilise y_1 dm^3 de bois, y_2 kg de métal et y_3 kg de plastique ce que l'on représente par le vecteur $Y^t = (y_1, y_2, y_3)$.

1. Ecrire la matrice M telle que $MX = Y$.
2. Déterminer les quantités de matières pour un programme de production $X^t = (10, 20, 30)$.
3. Déterminer la matrice qui permet d'obtenir la production journalière en fonction des quantités de matières premières.
4. En déduire les quantités de jouets de chaque type si on a utilisé 180 dm^3 de bois, 30 kg de métal et 9 kg de plastique.

Correction. 1. La matrice M est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0,4 & 0,6 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

2. Il suffit de calculer $Y = MX$. On obtient

$$Y = \begin{pmatrix} 130 \\ 22 \\ 6 \end{pmatrix}$$

3. Il s'agit de la matrice inverse M^{-1} car on a $X = M^{-1}Y$. On applique la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,6 & 0,2 & 0 & 1 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,6 & -0,6 & -0,4 & 1 & 0 \\ 0 & -0,2 & -0,1 & -0,1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & -0,2 & -0,1 & -0,1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & \frac{1}{30} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{10}{3} & 10 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{20}{3} & -20 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{10}{3} & 10 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & 10 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{10}{3} & 10 \end{array}\right)$$

Pour la première équivalence, on a fait les opérations : $L_2 \to L_2 - 0,4L_1$ et $L_3 \to L_3 - 0,1L_1$. Pour la deuxème équivalence, on a fait l'opération : $L_2 \to -\frac{10}{6}L_2$. Pour la troisième équivalence, on a fait l'opération : $L_3 \to L_3 + 0,2L_2$. Pour la suivante, on fait $L_3 \to 10L_3$ puis on fait $L_1 \to L_1 - 2L_3$ et $L_2 \to L_2 - L_3$. Pour la dernière, on fait $L_1 \to L_1 - 3L_2$.

On obtient donc

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & 10 \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -10 \\ \frac{1}{3} & -\frac{10}{3} & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 5 & 30 \\ 1 & 5 & -30 \\ 1 & -10 & 30 \end{pmatrix}.$$

4. On cherche $X = (x, y, z)^t$ tel que

$$MX = \begin{pmatrix} 180 \\ 30 \\ 9 \end{pmatrix} = Y.$$

Il suffit donc de calculer $X = M^{-1}Y$, on obtient

$$X = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Puissances de matrice.
Le but de cet exercice est de pouvoir calculer B^n où

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n + 2$ et les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer u_n en fonction de n (on pourra montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + 1$ est une suite géométrique, en déduire son expression en fonction de n puis conclure).
2. (a) Vérifier que $B = 2A + I$.
   (b) Calculer A^2
   (c) Montrer par récurrence qu'il existe une suite réelle (a_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = a_nA + I$. On donnera alors la relation entre a_{n+1} et a_n.
3. Déduire des questions précédentes l'expression de B^n en fonction de A, I et n.

Correction. 1. On a $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = (3u_n + 2) + 1 = 3u_n + 3 = 3(u_n + 1) = 3v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison 3. On a donc $v_n = 3^{n-1}v_1$ et $v_1 = u_1 + 1 = 3$. Finalement $v_n = 3^n$ et $u_n = v_n - 1 = 3^n - 1$.

Remarque : la suite (u_n) est une suite arthmético-géométrique, c'est-à-dire de la forme $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$ (sinon c'est une suite arithmétique). Ici $a = 3$ et $b = 2$. On calcule facilement tous les termes de telles suites de la manière suivante :

1. On cherche la limite possible ℓ de la suite qui doit vérifier $\ell = a\ell + b$ (faire tendre n vers $+\infty$ dans l'équation $u_{n+1} = au_n + b$). On obtient $\ell = \frac{b}{1-a}$.

2. On considère la suite auxiliaire $v_n = u_n - \ell$. C'est une suite géométrique de raison a (le vérifier!) donc $v_n = a^n v_0$.

3. On obtient u_n par la formule

$$u_n = v_n + \ell = a^n v_0 + \frac{b}{1-a} = a^n(u_0 - \frac{b}{1-a}) + \frac{b}{1-a}.$$

2.(a). C'est un calcul direct.
2.(b). On a $A^2 = A$.
2.(c). C'est vrai pour $n = 1$: on a $B = 2A + I$ donc $a_1 = 2$. Supposons par hypothère de récurrence qu'il existe a_n tel que $B^n = a_n A + I$. Alors on a

$$B^{n+1} = BB^n = (2A+I)(a_nA+I) = 2a_nA^2+2A+a_nA+I = 2a_nA+2A+a_nA+I = (3a_n+2)A+I$$

et en posant $a_{n+1} = 3a_n + 2$, on a le résultat. De plus, on remarque que $a_n = u_n$. On a donc $a_n = 3^n - 1$ et on obtient

$$B^n = (3^n - 1)A + I = \begin{pmatrix} 2(3^n-1)+1 & 0 & 2(3^n-1) \\ 1-3^n & 1 & 1-3^n \\ 1-3^n & 0 & 2-3^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 Matrice diagonale dominante
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale dominante, i.e. pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, on a $|a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que la matrice A est inversible.

Correction (plus difficile). Il suffit de montrer que $\ker A = \{0\}$ c'est-à-dire qu'il n'existe aucun vecteur non nul $X = (x_1, \cdots, x_n)^t$ tel que $AX = 0$. Si un tel vecteur existe, on doit avoir

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n = 0 \end{cases}$$

Soit $i_0 \in [1, n]$ tel que $|x_{i_0}| = \max\{|x_i| \mid i \in [1, n]\}$. On regarde l'équation donnée par la ligne i_0. C'est l'équation

$$a_{i_0,1}x_1 + \cdots + a_{i_0,i_0-1}x_{i_0-1} + a_{i_0,i_0}x_{i_0} + a_{i_0,i_0+1}x_{i_0+1} + \cdots + a_{i_0,n}x_n = 0.$$

En isolant le terme avec x_{i_0}, on obtient

$$a_{i_0,i_0}x_{i_0} = -\sum_{j\neq i_O} a_{i_0,j}x_j.$$

Supposons $|x_{i_0}| \neq 0$. Par l'inégalité triangulaire, on a

$$|a_{i_0,i_0}||x_{i_0}| = \left| -\sum_{j\neq i_O} a_{i_0,j}x_j \right| \leq \sum_{j\neq i_O} |a_{i_0,j}||x_j| \leq \sum_{j\neq i_O} |a_{i_0,j}||x_{i_0}| = |x_{i_0}| \sum_{j\neq i_O} |a_{i_0,j}| < |x_{i_0}||a_{i_0,i_0}|.$$

C'est une contradition. Donc $|x_{i_0}| = 0$ et donc $x_i = 0$ pour tout i, c'est ce qu'on voulait démontrer.

Exercice 9 Un sous-espace vectoriel de matrices
Soit E le sous-ensemble de $M_3(\mathbb{R})$ défini par

$$E = \{M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}, \ a,b,c \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ stable pour la multiplication des matrices. Calculer $\dim E$.

Correction. En prenant $a = b = c = 0$, on a bien que la matrice nulle est dans E. Soient

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} \text{ et } M(a',b',c') = \begin{pmatrix} a' & 0 & c' \\ 0 & b' & 0 \\ c' & 0 & a' \end{pmatrix}$$

deux éléments de E. On a

$$M(a,b,c) + M(a',b',c') \begin{pmatrix} a+a' & 0 & c+c' \\ 0 & b+b' & 0 \\ c+c' & 0 & a+a' \end{pmatrix} = M(a+a', b+b', c+c') \in E$$

et pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda M(a,b,c) = \begin{pmatrix} \lambda a & 0 & \lambda c \\ 0 & \lambda b & 0 \\ \lambda c & 0 & \lambda a \end{pmatrix} = M(\lambda a, \lambda b, \lambda c) \in E.$$

Ainsi E est bien un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

Montrons que E est stable par multiplication, il suffit de calculer

$$M(a,b,c)M(a',b',c') = \begin{pmatrix} aa' + cc' & 0 & ac' + ca' \\ 0 & bb' & 0 \\ ca' + ac' & 0 & cc' + aa' \end{pmatrix} = M(aa' + cc', bb', ac' + ca') \in E.$$

Finalement, on cherche une base de E. On a besoin de trois param/'etres a, b, c donc on s'attend à une dimension 3. Vérifions celà. On vérifie que $(M(1,0,0), M(0,1,0), M(0,0,1))$ forme une base de E. C'est une famille génératrice car $M(a,b,c) = aM((1,0,0) + bM(0,1,0) + cM(0,0,1)$. Montrons que la famille est libre. Si on a des scalaires $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $aM((1,0,0) + bM(0,1,0) + cM(0,0,1) = 0$, alors on a $M(a,b,c) = aM((1,0,0) + bM(0,1,0) + cM(0,0,1) = 0$ mais ceci impose $a = b = c = 0$. C'est donc une base et $\dim E = 3$.

Applications linéaires

Exercice 1. Changement de bases.
On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.

1. Soit $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 1, 1)$ trois vecteurs de E.
   (a) Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de E, qu'on notera $\mathcal{B}$.
   (b) Déterminer $P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}}$ la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_c$ vers $\mathcal{B}$. Soit x le vecteur de E tel que les composantes de x dans $\mathcal{B}$ soient $X_{\mathcal{B}} = (2, 3, 4)^t$. Exprimer x dans la base canonique $\mathcal{B}_c$.
   (c) Calculer $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c}$ de deux méthodes différentes :
      i. première méthode : en exprimant les vecteurs e_1, e_2, e_3 en fonction des vecteurs u_1, u_2, u_3,
      ii. deuxième méthode : en inversant la matrice $P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}}$.
      iii. Vérifier alors que $P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c} = I_3$.
   (d) Soit $y = (1, 2, 3)$ un vecteur de E. Calculer les composantes de y dans la base $\mathcal{B}$.
2. Mêmes questions en changeant uniquement les vecteurs u_1, u_2, u_3 : $u_1 = (1, -1, -1)$, $u_2 = (1, 2, 1)$ et $u_3 = (0, 1, 1)$.

Correction. 1.(a). Comme on est dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3, pour montrer qu'une famille de 3 vecteurs (par exemple (u_1, u_2, u_3)) est une base, il suffit de montrer qu'elle est soit génératrice, soit libre. On va montrer que (u_1, u_2, u_3) est libre. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $xu_1 + yu_2 + zu_3 = 0$. On veut montrer que $x = y = z = 0$. On a

$$0 = (0, 0, 0) = xu_1 + yu_2 + zu_3 = x(1, 1, 0) + y(1, 0, 1) + z(1, 1, 1) = (x + y + z, x + z, y + z).$$

On obtient ainsi le système que l'on résoud par Gauss

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=0 \\ x+z=0 \\ y+z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=0 \\ -y=0 \\ -x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} z=0 \\ y=0 \\ x=0. \end{array}\right.$$

On a obtenu le résultat. La famille (u_1, u_2, u_3) est donc libre et comme elle a $3 = \dim \mathbb{R}^3$ vecteurs, c'est une base.

1.(b). Il s'agit d'écrire la base $\mathcal{B}$ dans la base canonique. Il suffit donc d'écrire les vecteurs u_1, u_2, u_2 en colonne. On a

$$P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pout trouver le vecteur recherché, il suffit de multiplier la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}}$ et $X_{\mathcal{B}}$. Ainsi

$$x = P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}}X_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

1.(c).i On a $e_1 = u_1 + u_2 - u_3$, $e_2 = -u_2 + u_3$ et $e_3 = -u_1 + u_3$. On écrit les coordonnées de e_1 dans la base $\mathcal{B}$ dans la première colonne, celles de e_2 dans la deuxième colonne et celle de e_3 dans la dernière. On obtient

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.(c).ii On applique l'algorithme de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Pour la première équivalence, on a fait les opérations : $L_2 \to L_2 - L_1$. Pour la deuxème équivalence, on a fait l'opération : $L_2 \to -L_2$. Pour la troisième équivalence, on a fait l'opération : $L_3 \to L_3 - L_2$. Pour la suivante, on fait $L_1 \to L_1 - L_3$. Pour la dernière, on fait $L_1 \to L_1 - L_2$.

On obtient donc

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c} = P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.(c).iii On obtient bien le résultat.

1.(d). Comme à la question 1.(b), pour trouver les composantes de y dans $\mathcal{B}$ c'est-à-dire le vecteur $Y_{\mathcal{B}}$, il suffit de multiplier la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c}$ et y. Ainsi, on a

$$Y_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c} y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On a donc $y = -2u_1 - u_2 + 4u_3$.

2.(a). Comme on est dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3, pour montrer qu'une famille de 3 vecteurs (par exemple (u_1, u_2, u_3)) est une base, il suffit de montrer qu'elle est soit génératrice, soit libre. On va montrer que (u_1, u_2, u_3) est libre. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $xu_1 + yu_2 + zu_3 = 0$. On veut montrer que $x = y = z = 0$. On a

$$0 = (0,0,0) = xu_1 + yu_2 + zu_3 = x(1,-1,-1) + y(1,2,1) + z(0,1,1) = (x+y, -x+2y+z, -x+y+z).$$

On obtient ainsi le système que l'on résoud par Gauss

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 0 \\ 2y + z = 0. \end{cases}$$

On obtient $x = y = z = 0$ et la famille (u_1, u_2, u_3) est donc libre et comme elle a $3 = \dim \mathbb{R}^3$ vecteurs, c'est une base.

2.(b). Il s'agit d'écrire la base $\mathcal{B}$ dans la base canonique. Il suffit donc d'écrire les vecteurs u_1, u_2, u_2 en colonne. On a

$$P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pout trouver le vecteur recherché, il suffit de multiplier la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}}$ et $X_{\mathcal{B}}$. Ainsi

$$x = P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}} X_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1.(c).i La première méthode pour calculer $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c}$ est maintenant plus difficile car il est dur de trouver une écriture des vecteurs e_1, e_2, e_3 en fonction des u_1, u_2, u_3. Pour celà il faut résoudre un système et donc appliquer l'algorithme de Gauss c'est-à-dire plus ou moins faire la seconde méthode. On ne va donc faire qu'une méthode, la seconde et appliquer l'algorithme de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Pour la première équivalence, on a fait les opérations : $L_2 \to L_2 + L_1$ et $L_3 \to L_3 + L_1$. Pour la deuxème équivalence, on a fait l'opération : $L_2 \to \frac{1}{3}L_2$. Pour la troisième équivalence, on a fait l'opération : $L_3 \to L_3 - 2L_2$. Pour la suivante, on fait $L_3 \to 3L_3$ puis on fait $L_2 \to L_2 - \frac{1}{3}L_3$. Pour la dernière, on fait $L_1 \to L_1 - L_2$.

On obtient donc

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c} = P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.(c).iii On obtient bien le résultat.

2.(d). Comme à la question 1.(b), pour trouver les composantes de y dans $\mathcal{B}$ c'est-à-dire le vecteur $Y_{\mathcal{B}}$, il suffit de multiplier la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c}$ et y. Ainsi, on a

$$Y_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c} y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

On a donc $y = 2u_1 - u_2 + 6u_3$.

Exercice 2. Exemples d'applications linéaires ou non linéaires.

1. Les applications suivantes de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ (p et n à préciser) sont-elles linéaires ?
   $f_1 : x \mapsto 2x^2$,
   $f_2 : x \mapsto 4x - 3$,
   $f_3 : x \mapsto 4x$,
   $f_4 : x \mapsto \sqrt{x^2}$;
   $f_5 : (x, y) \mapsto 3x + 5y$,
   $f_6 : (x, y) \mapsto 3x + 5y - 1$,
   $f_7 : (x, y, z) \mapsto (2x - 3y + z, x - y + \frac{z}{3})$,
   $f_8 : (x, y, z, t) \mapsto (2x, -t, 3y + t - 2x, z - 3x)$,
   $f_9 : (x, y, z, t) \mapsto (-x, y + 3x + t, |z|)$.
2. Pour les applications précédentes qui sont **linéaires**, donner leur expression dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ (p et n sont à préciser).

Correction. Rappelons qu'une application $f : E \to F$ est linéaire si E et F sont des espaces vectoriels et si pour tout $u, v \in E$ et tout $\lambda \in R$, on a $f(u+v) = f(u)+f(v)$ et $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

1. Applications linéaires ou pas.

- On voit que $f_1(2x) = 2(2x)^2 = 8x^2 \neq 4x^2 = 2f_1(x)$ donc f_1 n'est pas linéaire.

- On voit que $f_2(2x) = 4(2x) - 3 = 8x - 3 \neq 8x - 6 = 2(4x - 3) = 2f_2(x)$ donc f_2 n'est pas linéaire.

- Soient $x, y \in R$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $f_3(x + y) = 4(x + y) = 4x + 4y = f_3(x) + f_3(y)$ et $f_3(\lambda x) = 4(\lambda x) = \lambda(4x) = \lambda f_3(x)$. Donc f_3 est linéaire.

- On voit que $f_4(-x) = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2} = f_4(x) \neq f_4(x)$ donc f_4 n'est pas linéaire (en fait, on a $f_4(x) = |x|$).

- Soient $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ deux vecteurs et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. On a $f_5(u + v) = f_5((x, y) + (x', y')) = f_5(x + x', y + y') = 3(x + x' + 5(y + y') = 3x + 5y + 3x' + 5y' = f_5(x, y) + f_5(x', y')$. On a aussi $f_5(\lambda u) = f_5(\lambda(x, y)) = f_5(\lambda x, \lambda y) = 3(\lambda x) + 5(\lambda y) = \lambda(3x + 5y) = \lambda f_5(x, y) = \lambda f_5(u)$ donc f_5 est linéaire.

- On voit que $f_6(2(x, y)) = f_6(2x, 2y) = 3(2x)+5(2y)-1 = 6x+10y-1 \neq 6x+10y-2 = 2(3x + 5y - 1) = 2_6f(x, y)$. Donc f_6 n'est pas linéaire.

- Soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ deux vecteurs et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. On a $f_7(u+v) = f_7((x, y, z)+(x', y', z')) = f_7(x+x', y+y', z+z') = (2(x+x')-3(y+y')+(z+z'), (x+x')-(y+y')+\frac{z+z'}{3}) = (2x-3y+z+2x'-3y'+z', x-y+\frac{z}{3}+x'-y'+\frac{z'}{3}) = (2x-3y+z, x-y+\frac{z}{3})+(2x'-3y'+z', x'-y'+\frac{z'}{3}) = f_7(x, y, z)+f_7(x', y', z') = f_7(u)+f_7(v)$. On a aussi $f_7(\lambda u) = f_7(\lambda(x, y, z)) = f_7(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (2(\lambda x) - 3(\lambda y) + (\lambda z), (\lambda x) - (\lambda y) + \frac{\lambda z}{3}) = \lambda(2x - 3y + z, x - y + \frac{z}{3}) = \lambda f_7(x, y, z) = \lambda f_7(u)$ donc f_7 est linéaire.

- Soient $u = (x, y, z, t)$ et $v = (x', y', z', t')$ deux vecteurs et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. On a $f_8(u + v) = f_8((x, y, z, t) + (x', y', z', t')) = f_8(x + x', y + y', z + z', t + t') = (2(x + x'), -(t + t'), 3(y + y') + (t + t') - 2(x + x'), (z + z') - 3(x + x')) = (2x + 2x', -t + (-t'), 3y + t - 2x + 3y' + t' - 2x', z - 3x + z' - 3x') = (2x, -t, 3y + t - 2x, z - 3x) + (2x', -t', 3y' + t' - 2x', z' - 3x') = f_8(x, y, z, t) + f_8(x', y', z', t') = f_8(u) + f_8(v)$. On a aussi $f_8(\lambda u) = f_8(\lambda(x, y, z, t)) = f_8(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t) = (2(\lambda x), -(\lambda t), 3(\lambda y) + (\lambda t) - 2(\lambda x), (\lambda z) - 3(\lambda x)) = \lambda(2x, -t, 3y + t - 2x, z - 3x) = \lambda f_8(x, y, z, t) = \lambda f_7(u)$ donc f_8 est linéaire.

- On a $f_9(-(0, 0, 1, 0)) = f_9(0, 0, -z, 0) = (0, 0, |-1|) = (0, 0, 1) \neq (0, 0, -1) = -(0, 0, 1) = -f_9(0, 0, 1)$ fonc f_9 n'est pas linéaire.

2. Les applications qui sont linéaires sont $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_7 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $f_8 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.

Rappel : pour trouver la matrice $\mathrm{Mat}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f)$ d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ dans les bases, $(e_1, \cdots, e_p) = \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^p$ et $(f_1, \cdots, f_n) = \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$, on procède comme suit : pour chaque élément e_i, on exprime $f(e_i)$ dans la base $\mathcal{C}$. Les coefficients forment la colonne i de la matrice.

On travaille dans les bases canoniques.

- Matrice de $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La base canonique $\mathcal{B}_{c,\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}$ est formé du seul vecteur $e_1 = 1 \in \mathbb{R}$. On a $f_3(e_1) = f_3(1) = 4 = 4e_1$. Ainsi, on a

$$\mathrm{Mat}^{\mathcal{B}_{c,\mathbb{R}}}_{\mathcal{B}_{c,\mathbb{R}}}(f_3) = (4).$$

- Matrice de $f_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. La base canonique $\mathcal{B}_{c,\mathbb{R}^2}$ de $\mathbb{R}^2$ est (e_1, e_2) avec $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$. La base canonique $\mathcal{B}_{c,\mathbb{R}^2}$ de $\mathbb{R}$ est formé du seul vecteur $f_1 = 1 \in \mathbb{R}$. On a $f_5(e_1) = f_5(1,0) = 3 = 3f_1$ et $f_5(e_2) = f_5(0,1) = 5 = 5f_1$. Ainsi, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{c,\mathbb{R}^2}}^{\mathcal{B}_{c,\mathbb{R}}}(f_5) = (3,5).$$

- Matrice de $f_7 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. La base canonique $\mathcal{B}_{c,\mathbb{R}^3}$ de $\mathbb{R}^3$ est (e_1, e_2, e_3) avec $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. La base canonique $\mathcal{B}_{c,\mathbb{R}^2}$ de $\mathbb{R}^2$ est (f_1, f_2) avec $f_1 = (1,0)$ et $f_2 = (0,1)$. On a $f_7(e_1) = f_7(1,0,0) = (2,1) = 2f_1 + f_2$, $f_7(e_2) = f_7(0,1,0) = (-3,-1) = -3f_1 - f_2$ et $f_7(e_3) = f_7(0,0,1) = (1, \frac{}{3}) = f_1 + \frac{1}{3}f_2$. Ainsi, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{c,\mathbb{R}^3}}^{\mathcal{B}_{c,\mathbb{R}^2}}(f_7) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

- Matrice de $f_8 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$. La base canonique $\mathcal{B}_{c,\mathbb{R}^4}$ de $\mathbb{R}^4$ est (e_1, e_2, e_3, e_4) avec $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$ et $e_4 = (0,0,0,1)$. On a $f_8(e_1) = f_8(1,0,0,0) = (2,0,-2,-3) = 2e_1 - 2e_3 - 3e_4$, $f_8(e_2) = f_8(0,1,0,0) = (0,0,3,0) = 3e_3$, $f_8(e_3) = (0,0,0,1) = e_4$ et $f_8(e_4) = f_7(0,0,0,1) = (0,-1,1,0) = -e_2 + e_3$. Ainsi, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{c,\mathbb{R}^4}}^{\mathcal{B}_{c,\mathbb{R}^4}}(f_8) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Matrices d'une application linéaire.
Soit $f : (x,y) \mapsto (x+y, 2x-3y, 3x-y, y)$ une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$. On note $\mathcal{B}_c^2$ et $\mathcal{B}_c^4$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$ respectivement et $\mathcal{D}^2 = (u_1, u_2)$ où $u_1 = (1,1)$ et $u_2 = (0,2)$, $\mathcal{D}^4 = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ où $v_1 = (1,0,0,0)$, $v_2 = (0,1,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,1)$, et $v_4 = (1,1,1,1)$.

1. Montrer que $\mathcal{D}^2$ et $\mathcal{D}^4$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$ respectivement (à faire à la maison).
2. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$.
3. Déterminer la matrice $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_c^2}^{\mathcal{B}_c^4} f$ de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$ respectivement.
4. Déterminer $P_{\mathcal{B}_c^2,\mathcal{D}^2}$ la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_c^2$ vers $\mathcal{D}^2$ et $P_{\mathcal{B}_c^4,\mathcal{D}^4}$ la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_c^4$ vers $\mathcal{D}^4$.
5. En déduire la matrice $B = \mathrm{mat}_{\mathcal{D}^2}^{\mathcal{D}^4} f$ de f dans les bases $\mathcal{D}^2$ et $\mathcal{D}^4$ respectivement.

Correction. 1. La famille $\mathcal{D}^2 = (u_1, u_2)$ a $2 = \dim \mathbb{R}^2$ éléments donc il suffit de montrer qu'elle est libre (ou génératrice) pour montrer qu c'est une base. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $xu_1 + yu_2 = 0$. On obtient le système

$$\begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 0. \end{cases}$$

On obtient directement $x = 0$ puis $y = 0$ par substitution dans la seconde équation. La famille est donc libre et c'est une base.

La famille $\mathcal{D}^4 = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ a $4 = \dim \mathbb{R}^4$ éléments donc il suffit de montrer qu'elle est libre (ou génératrice) pour montrer qu c'est une base. Soient $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ tels que $xv_1 + yv_2 + zv_3 + tv_4 = 0$. On obtient le système

$$\left\{\begin{array}{l} x+t=0 \\ y+z+t=0 \\ y+t=0 \\ z+t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+t=0 \\ y+z+t=0 \\ -z=0 \\ -y=0. \end{array}\right.$$

L'équivalence est obtenu par $L_3 \to L_3 - L_2$ et $L_4 - L_4 - L_2$. On obtient directement $y = z = 0$ puis $t = 0$ par substitution dans la deuxième équation et enfin $x = 0$ par substitution dans la première. La famille est donc libre et c'est une base.

2. Soient $u = (x, y)$ et $v = (x', v')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. On a $f(u+v) = f((x,y)+(x',y')) = f(x+x', y+y') = ((x+x')+(y+y'), 2(x+x')-3(y+y'), 3(x+x')-(y+y'), y+y') = (x+y+x'+y', 2x-3y+2x'-3y', 3x-y+3x'-y', y+y') = (x+y, 2x-3y, 3x-y, y)+(x'+y', 2x'-3y', 3x'-y', y') = f(u)+f(v)$ et $f(\lambda u) = f(\lambda(x,y)) = f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + \lambda y, 2(\lambda x) - 3(\lambda y), 3(\lambda x) - \lambda y, \lambda y) = \lambda(x+y, 2x-3y, 3x-y, y) = \lambda f(u)$ donc $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ est linéaire.

3. On note $\mathcal{B}_c^2 = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{B}_c^4 = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$. On a $f(e_1) = f(1,0) = (1,2,3,0) = f_1 + 2f_2 + 3f_3$ et $f(e_2) = f(0,1) = (1,-3,-1,1) = f_1 - 3f_2 - f_3 + f_4$. Ainsi, on a

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c^2}^{\mathcal{B}_c^4}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. On a

$$P_{\mathcal{B}_c^2, \mathcal{D}^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P_{\mathcal{B}_c^2, \mathcal{D}^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. La formule de changement de base est la suivante :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}^2}^{\mathcal{D}^4}(f) = P_{\mathcal{D}^4, \mathcal{B}_c^4} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c^2}^{\mathcal{B}_c^4}(f) P_{\mathcal{B}_c^2, \mathcal{D}^2} = P_{\mathcal{B}_c^4, \mathcal{D}^4}^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c^2}^{\mathcal{B}_c^4}(f) P_{\mathcal{B}_c^2, \mathcal{D}^2}.$$

Il reste donc à calculer $P_{\mathcal{B}_c^2, \mathcal{D}^2}^{-1}$ par l'algorithme de Gauss puis de multiplier ces matrices. L'algorithme de Gauss donne :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Pour la première équivalence, on a fait les opérations : $L_3 \to L_3 - L_2$. Pour la deuxème équivalence, on a fait l'opération : $L_3 \to -L_3$. Pour la troisième équivalence, on a fait l'opération : $L_4 \to L_4 - L_3$. Pour la suivante, on fait $L_1 \to L_1 - L_4$ et $L_2 \to L_2 - L_4$. Pour la dernière, on fait $L_2 \to L_2 - L_3$.

On obtient donc

$$P^{-1}_{\mathcal{B}_c^4,\mathcal{D}^4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et finalement

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}^2}^{\mathcal{D}^4}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 Application linéaire définie par une matrice.
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

On considère $u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$ et $u_3 = (1,1,0)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit f l'application linéaire définie par la donnée de sa matrice A la représentant dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ et la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
   (b) Calculer $f(1,-2,3)$.
   (c) Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, expliciter $f(x,y,z)$.

Correction. 1. La famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ a $3 = \dim \mathbb{R}^3$ éléments donc il suffit de montrer qu'elle est libre (ou génératrice) pour montrer qu c'est une base. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $xu_1 + yu_2 + zu_3 = 0$. On obtient le système

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

On obtient directement $z = -y$ avec la première équation puis en substituant dans la seconde, on a $y = x$ ce qui en substituant dans la troisième donne $x = 0$. En remplaçant dans les équations précédentes, on obtient $y = 0$ puis $z = 0$ doc la famille est libre et c'est une base.

2. On a $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_c^2}(f)$.

2.(a). Il faut appliquer la formule de changement de base.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c^3}^{\mathcal{B}_c^2}(f) = P_{\mathcal{B}_c^2,\mathcal{B}_c^2}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_c^2}(f)P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c^3} = P_{\mathcal{B}_c^2,\mathcal{B}_c^2}AP_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c^3}.$$

De plus, on a $P_{\mathcal{B}_c^2,\mathcal{B}_c^2} = I_2$ et $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c^3} = P^{-1}_{\mathcal{B}_c^3,\mathcal{B}}$. De plus, on a

$$P_{\mathcal{B}_c^3,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il reste donc à calculer $P^{-1}_{\mathcal{B}_c^3,\mathcal{B}}$ par l'algorithme de Gauss puis de multiplier ces matrices. L'algorithme de Gauss donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Pour la première équivalence, on a fait les opérations : $L_3 \to L_1$ et $L_1 \to L_3$. Pour la deuxème équivalence, on a fait l'opération : $L_2 \to L_1 - L_2$. Pour la troisième équivalence, on a fait l'opération : $L_2 \to -L_2$. Pour la suivante, on fait $L_3 \to L_3 - L_2$. Ensuite, on fait $L_3 \to \frac{1}{2}L_3$. Ensuite, on fait $L_2 \to L_2 + L_3$. Pour la dernière, on fait $L_1 \to L_1 - L_2$.

On obtient donc

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c^3} = P^{-1}_{\mathcal{B}_c^3,\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Puis en multipliant, on obtient

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c^3}^{\mathcal{B}_c^2}(f) = P_{\mathcal{B}_c^2,\mathcal{B}_c^2}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_c^2}(f)P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c^3} = I_2 A P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c^3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c^3}^{\mathcal{B}_c^2}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.(b). Il s'agit de calculer

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c^3}^{\mathcal{B}_c^2}(f)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

2.(c). Il s'agit de calculer

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c^3}^{\mathcal{B}_c^2}(f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y \\ -2x-y+4z \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Noyau, image et rang.
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et soit f l'application linéaire définie par la donnée de sa matrice A la représentant dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, expliciter $f(x, y, z, t)$.
2. Calculer le noyau de f et sa dimension.
3. En déduire le rang de f.

Correction. 1. Il suffit de multiplier les matrices, on a

$$f(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x + 2y + z + t, y, y + z + t).$$

2. Le noyau est l'ensemble des vecteurs (x, y, z, t) tels que $f(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$. Il s'agit donc de résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 2z + 2t = 0 \\ y = 0 \\ y + z + t = 0 \end{cases}$$

On remarque que la deuxième ligne est égale à la somme de la première et de la dernière et peut donc être supprimée. On obtient le système

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y = 0 \\ y + z + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ y + z + t = 0 \end{cases}$$

L'équivalence est obtenue en faisant $L_1 \to L_1 - L_3$ On obtient donc

$$\ker(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y = z + t = 0\} == \{(0, 0, z, -z) \in \mathbb{R}^4 \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

Montrons que $u = (0, 0, 1, -1)$ est une base de $\ker(f)$. En prenant $z = 1$ ci-desusus, on voit que $u \in \ker(f)$. Comme $u \neq 0$, c'est une famille libre et si $(x, y, z, t) \in \ker(f)$, alors $(x, y, z, t) = (0, 0, z, -z) = z(0, 0, 1, -1) = zu$ donc u est génératrice de $\ker(f)$. On a donc que (u) est une base de $\ker(f)$ et $\dim\ker(f) = 1$.

3. Par le théorème du rang, on a $\text{Rang}(f) = 4 - dim\ker(f) = 4 - 1 = 3$.

Exercice 6. Endomorphisme.
Dans tout l'exercice, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $f^2 = 0$ (on rappelle que $f^2 = f \circ f$).

1. Montrer que $Im(f) \subset Ker(f)$.
2. Montrer que $dim(Ker(f)) \geq \frac{n}{2}$ et $rang(f) \leq \frac{n}{2}$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la dimension de $Ker(f)$ pour que $Ker(f) = Im(f)$.

Correction. 1. Soit $v \in \text{Im}(f)$. Il existe donc $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $v = f(u)$. On veut montrer que $v \in \ker f$. On a $f(v) = f(f(u)) = f^2(u) = 0$ car f^2 est l'application nulle. On a donc bien $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$.

2. Par le théorème du rang, on a $n = \dim\ker(f) + \text{Rang}(f) = \dim\ker(f) + \dim\text{Im}(f)$. Mais comme $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$, on a aussi $\text{Rang}(f) = \dim\text{Im}(f) \leq \dim\ker(f)$. On obtient

$$2\text{Rang}(f) \leq \text{Rang}(f) + \dim\ker(f) = n \leq 2\dim\ker(f).$$

On obtient les inégalités recherchées.

3. On a $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si $\dim\ker(f) = n/2$. En effet, si $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$, alors on a

$$\dim\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Rang}(f) \leq n/2 \leq \dim\ker(f)$$

et comme les deux valeurs extrèmes sont les mêmes, toutes les inégalités sont des égalités donc $\dim\ker(f) = n/2$. Réciproquement, si $\dim\ker(f) = n/2$, alors par le théorème du rang, on a $\dim\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Rang}(f) = n/2 = \dim\ker(f)$. Comme $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$ l'égalité des dimensions impose $\mathrm{Im}(f) = \ker(f)$.

Exercice 7. Somme directe, projecteur, symétrie.
Soient $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2x+y-z = 0\}$ et $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2x-2y+z = 0, x-y-z = 0\}$. On désigne par $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner une base (u_1, u_2) de P et une base (u_3) de D. Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ puis que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p la projection de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ puis $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(p)$. Vérifier que $A^2 = A$.
3. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à P parallèlement à D. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$ puis $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(s)$. Vérifier que $B^2 = I$, $AB = A$ et $BA = A$.

Correction. 1. Soient $u_1 = (1,0,2)$ et $u_2 = (0,1,1)$. On vérifie que (u_1, u_2) est une base de P. On vérifie aisément que u_1 et u_2 sont dans P. De plus si (x,y,z) est dans P, alors on a $z = 2x + y$ donc $(x,y,z) = (x,y,2x+y) = x(1,0,2) + y(0,1,1) = xu_1 + yu_2$ donc (u_1, u_2) est génératrice de P. Il reste à montrer que (u_1, u_2) forme une famille libre. Si $xu_1 + yu_2 = 0$, alors on a le système :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

On obtient directement $x = y = 0$ donc la famille est libre et c'est une base de P (on a donc $\dim P = 2$).

Soit $u_3 = (1,1,0)$. Montrons que (u_3) est une base de D. On a $u_3 \neq 0$ donc (u_3) est libre. Montrons que u_3 est génératrice pour D. Soit $(x,y,z) \in D$. On a le système :

$$\begin{cases} 2x - 2y + z \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = y. \end{cases}$$

Le première equivalence est obtenue en faisant $L_1 \to L_1 - 2L_2$. Ainsi $(x,y,z) = (x,x,0) = x(1,1,0) = xu_3$ donc (u_3) est génératrice et c'est une base de D.

Pour montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ nous devons montrer que les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- $P \cap D = \{0\}$
- $\mathbb{R}^3 = P + D$ c'est-à-dire que tout vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ s'écrit comme $v = v_P + v_D$ avec $v_D \in P$ et $v_D \in D$.

On va montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et on verra que les deux conditions ci-dessous en découlent facilement. Comme (u_1, u_2, u_3) a $3 = \dim\mathbb{R}^3$ éléments, il suffit de montrer que c'est une famille libre. Soient donc $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $xu_1 + yu_2 + zu_3 = 0$, on veut montrer que $x = y = z = 0$. On obtient le système

$$\left\{\begin{array}{l} x+z=0 \\ y+z=0 \\ 2x+y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+z=0 \\ y+z=0 \\ y-2z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+z=0 \\ y+z=0 \\ -3z=0 \end{array}\right.$$

La première équivalence est obtenue par $L_3 \to L_3 - 2L_1$ et la seconde par $L_3 \to L_3 - L_2$. On obtient $z = 0$ puis en remontant dans les égalités, on $y = 0$ et $x = 0$. La famille (u_1, u_2, u_3) est libre donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Montrons que ceci impose les deux conditions ci-dessus pour que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

Commençons par $P \cap D = 0$. Soit donc $v \in P \cap D$. Comme $v \in P$, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $v = \lambda u_1 + \mu u_2$ (car (u_1, u_2) est une base de P). De même, comme $v \in D$, il existe $\nu \in \mathbb{R}$ tel que $v = \nu u_3$ (car (u_3) est une base de D). On a donc $\lambda u_1 + \mu u_2 = v = \nu u_3$ et on obtient $\lambda u_1 + \mu u_2 - \nu u_3 = 0$. Mais (u_1, u_2, u_3) est une base donc libre et donc $\lambda = \mu = \nu = 0$ ce qui donne $v = 0$, c'est ce qu'on voulait démontrer.

Montrons maintenant que $\mathbb{R}^3 = P + D$ c'est-à-dire que tout vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ s'écrit comme $v = v_P + v_D$ avec $v_D \in P$ et $v_D \in D$. Soit donc $v \in \mathbb{R}^3$. Comme (u_1, u_2, u_3) est une base, c'est une famille génératrice et donc il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $v = xu_1 + yu_2 + zu_3$. On pose $v_P = xu_1 + yu_2$ et $v_D = zu_3$. On a bien $v_P \in P$, $v_D \in D$ (car $(u_1, u_2$ base de P et u_3 base de $D)$ et $v = v_P + v_D$.

2. La projection p sur P parallèlement à D est définie de la manière suivante. Soit $v \in \mathbb{R}^3$, on écrit $v = v_P + v_D$ avec $v_P \in P$ et $v_D \in D$. Alors $p(v) = v_P$. Donnons la matrice de p dans la base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$.

On calcule $p(u_1)$, $p(u_2)$ et $p(u_3)$. Comme $u_1, u_2 \in P$, on a $p(u_1) = u_1$ et $p(u_2) = u_2$. Comme $u_3 \in D$, on a $p(u_3) = 0$. On obtient donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer A, il faut appliquer la formule de changement de base:

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c^3}^{\mathcal{B}_c^3}(p) = P_{\mathcal{B}_c^3,\mathcal{B}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(p) P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c^3} = P_{\mathcal{B}_c^3,\mathcal{B}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(p) P_{\mathcal{B}_c^3,\mathcal{B}}^{-1}$$

De plus, on a

$$P_{\mathcal{B}_c^3,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il reste donc à calculer $P_{\mathcal{B}_c^3,\mathcal{B}}^{-1}$ par l'algorithme de Gauss puis à multiplier ces matrices. L'algorithme de Gauss donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Pour la première équivalence, on a fait les opérations : $L_3 \to L_3 + 2L_1$ et $L_3 \to L_3 - L_1$. Pour la deuxème équivalence, on a fait l'opération : $L_3 \to L_3 - L_2$ puis $L_3 \to \frac{1}{3}L_3$. La dernière équivalence est obtenue par $L_1 \to L_1 - L_3$ et $L_2 \to L_2 - L_3$.

On obtient donc

$$P^{-1}_{\mathcal{B}_c^3,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et finalement

$$A = P_{\mathcal{B}_c^3,\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(p)P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c^3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie bien que $A^2 = A$.

3. La symétrie s de $\mathbb{R}^3$ par rapport à P parallèlement à D est définie de la manière suivante. Si $v\imath\mathbb{R}^3$, on écrit $v = v_P + v_D$ avec $v_P \in P$ et $v_D \in D$. On a $s(v) = s(v_P + v_D) = v_P - v_D$. On commence par déterminer la matrice de s dans la base $\mathcal{B}$. On a $u_1, u_2 \in P$ donc $s(u_1) = u_1$ et $s(u_2) = u_3$. On a $u_3 \in D$ donc $s(u_3) = -u_3$). Ainsi on obtient

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer B, il faut appliquer la formule de changement de base:

$$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c^3}^{\mathcal{B}_c^3}(s) = P_{\mathcal{B}_c^3,\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(p)P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c^3} = P_{\mathcal{B}_c^3,\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(p)P^{-1}_{\mathcal{B}_c^3,\mathcal{B}}.$$

On obtient

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $B^2 = I_3$, $AB = A$ et $BA = A$.

Exercice 8. Isométrie vectorielle.
On considère l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(x,y,z) = \frac{1}{3}(-x-2y+2z, 2x+y+2z, -2x+2y+z)$.

1. Déterminer la matrice A représentant f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que pour tout u de $\mathbb{R}^3$, $\|f(u)\| = \|u\|$ (norme euclidienne). On dit que f est une isométrie de l'espace.
3. Déterminer $Ker(f - Id)$, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel des vecteurs u tel que $f(u) = u$. De quelle dimension est cet espace ?
4. On donne $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,1)$, $u_2 = (1,0,0)$ et $u_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(0,-1,1)$. Montrer que (u_1,u_2,u_3) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer la matrice B représentant f dans la base (u_1,u_2,u_3) et montrer qu'on peut écrire la matrice B sous la forme :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

où θ est un réel de $]-\pi;+\pi]$ dont on donnera une valeur approchée en radian.

6. Interpréter géométriquement l'application f.

Correction.

1. On note $\mathcal{B}_c^3 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a $f(e_1) = \frac{1}{3}(-1, 2, -2) = \frac{1}{3}(-e_1 + 2e_2 - 2e_3)$, $f(e_2) = \frac{1}{3}(-2, 1, 2) = \frac{1}{3}(-2e_1 + e_2 + 2e_3)$ et $f(e_3) = \frac{1}{3}(2, 2, 1) = \frac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 + e_3)$. On obtient

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c^3}^{\mathcal{B}_c^3}(f) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On calcule

$$\begin{aligned} ||f(x,y,z)||^2 &= \tfrac{1}{9}((-x-2y+2z)^2 + (2x+y+2z)^2 + (-2x+2y+z)^2) \\ &= \tfrac{1}{9}((x^2+4y^2+4z^2+4xy-4xz-8yz) + (4x^2+y^2+4z^2+4xy+8xz+4yz) \\ &\quad +(4x^2+4y^2+z^2-8xy-4xz+4yz)) \\ &= \tfrac{1}{9}(9x^2+9y^2+9z^2) = x^2+y^2+z^2 \\ &= ||(x,y,z)||^2. \end{aligned}$$

3. On cherche $\ker(f - \mathrm{Id})$. Il s'agit donc de résoudre le système suivant

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3}(-x-2y+2z) = x \\ \frac{1}{3}(2x+y+2z) = y \\ \frac{1}{3}(-2x+2y+z) = z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x-2y+2z = 3x \\ 2x+y+2z = 3y \\ -2x+2y+z = 3z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -4x-2y+2z = 0 \\ 2x-2y+2z = 0 \\ -2x+2y-2z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} -2x-y+z = 0 \\ x-y+z = 0 \\ -x+y-z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3x = 0 \\ x-y+z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

Ainsi $(x, y, z) \in \ker(f - \mathrm{Id})$ si et seulement si $x = 0$ et $y = z$, c'est-à-dire $(x, y, z) = (0, y, y)$. On voit que $(0, 1, 1)$ est une base de cet espace qui est donc de dimension 1.

4. Une famille (u_1, u_2, u_3) est orthonormale, si on a $||u_1|| = ||u_2|| = ||u_3|| = 1$ et si les trois vecteurs sont deux à deux orthogonaux. On vérifie ces conditions :

$$||u_1||^2 = \frac{2}{4}(0^2+1^2+1^2) = 1 \ ; \ ||u_2||^2 = (1^2+0^2+0^2) = 1 \ ; \ ||u_3||^2 = \frac{2}{4}(0^2+(-1)^2+1^2) = 1$$

$$(u_1,u_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}(0{\cdot}1+1{\cdot}0+1{\cdot}0) = 0 \ ; \ (u_1,u_3) = \frac{2}{4}(0^2+1{\cdot}(-1)+1^2) = 0 \ ; \ (u_2,u_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1{\cdot}0+0{\cdot}(-1)+0{\cdot}1) = 0.$$

5. On calcule $f(u_1) = \frac{\sqrt{2}}{6}(0, 3, 3) = u_1$. Puis $f(u_2) = \frac{1}{3}(-1, 2, -2) = -\frac{1}{3}u_2 + \frac{-4}{3\sqrt{2}}u_3$. Enfin $f(u_3) = \frac{\sqrt{2}}{6}(4, 1, -1) = \frac{2\sqrt{2}}{3}u_2 - \frac{1}{3}u_3$. Remarquons que $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-4}{3\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{16}{18} = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} = 1$. Ainsi il existe $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ et $\sin\theta = \frac{-4}{3\sqrt{2}}$. On a alors $-\sin\theta = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. On a donc bien

$$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer θ, on commence par remarquer que comme $\sin\theta = -\frac{4}{3\sqrt{2}} < 0$, on doit avoir $\theta < 0$ et comme $\cos\theta = -\frac{1}{3}$, on doit aussi avoir $\theta \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[$. On calcule ensuite $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = 1.91063323624902$ et on obtient $\theta = -1.91063323624902$.

Exercice 9 Formule du rang.
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Imf et $Kerf$ sont supplémentaires dans E ;
2. $E = Imf + Kerf$;
3. $Imf^2 = Imf$;
4. $Kerf^2 = Kerf$.

Correction. On va montrer les implications suivantes qui permettent de conclure : $(1 \Rightarrow 2)$, $(2 \Rightarrow 3)$, $(3 \Rightarrow 4)$ et $(4 \Rightarrow 1)$.

$(1 \Rightarrow 2)$. Si $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires, on a $E = \mathrm{Im}(f) + \ker(f)$ par définition.

$(2 \Rightarrow 3)$. Soit $u \in \mathrm{Im}(f^2)$. Alors il existe $v \in E$ tel que $u = f^2(v) = f(f(v))$ donc $u \in \mathrm{Im}(f)$. On a donc $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$. Soit maintenant $u \in \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe $v \in E$ tel que $u = f(v)$. Comme $E = \mathrm{Im}(f) + \ker(f)$, il existe $x \in \mathrm{Im}(f)$ et $y \in \ker(f)$ tel que $v = x + y$. On obtient $u = f(v) = f(x+y) = f(x) + f(y) = f(x)$ car $y \in \ker(f)$. De plus $x \in \mathrm{Im}(f)$ donc il existe $z \in E$ tel que $x = f(z)$. On a alors $u = f(v) = f(x) = f(f(z)) = f^2(z)$ et $u \in \mathrm{Im}(f^2)$. On a donc bien $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

$(3 \Rightarrow 4)$. Soit $u \in \ker(f)$. On a $f(u) = 0$ donc $f^2(u) = f(f(u)) = f(0) = 0$ et $u \in \ker(f^2)$. Ainsi, on a $\ker(f) \subset \ker(f^2)$. Par ailleurs, par le théorème du rang, on a

$$\begin{aligned}\dim\ker(f) &= \dim E - \mathrm{Rang}(f) = \dim E - \dim\mathrm{Im}(f)\\ &= \dim E - \dim\mathrm{Im}(f^2) = \dim E - \mathrm{Rang}(f^2) = \dim\ker(f^2).\end{aligned}$$

Ainsi $\ker(f)$ et $\ker(f^2)$ ont la même dimension et comme l'un est contenu dans l'autre, ils sont égaux.

$(4 \Rightarrow 1)$. On commence par montrer que $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$. Soit $u \in \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f)$. Alors il existe $v \in E$ tel que $u = f(v)$ et comme $u \in \ker(f)$, on a $0 = f(u) = f(f(v)) = f^2(v)$ donc $v \in ker(f^2) = \ker(f)$. Donc $u = f(v) = 0$.

On sait donc que $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont en somme directe. Posons $F = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f)$. On a $F \subset E$ et $\dim F = \dim\mathrm{Im}(f) + \dim\ker(f) = \mathrm{Rang}(f) + \dim\ker(f) = \dim E$ donc $F = E$ et on a terminé.