Université de Versailles Saint Quentin en Yvelines
MA202

Feuille de TD 3 : Algèbre linéaire

Espaces vectoriels

Exercice 1. Déterminer lesquels de ces ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x - 5y = z\}$
$E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x = 0\}$
$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 1\}$
$E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 - y^2 = 0\}$
$E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ xy = 0\}$

Exercice 2.

1. Décrire les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.
2. Dans $\mathbb{R}^2$ donner un exemple de deux sous-espaces vectoriels dont l'union n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Les vecteurs u suivants sont-ils combinaison linéaire des vecteurs u_i ?

1. dans $\mathbb{R}^2$, $u = (1, 2)$, $u_1 = (1, -2)$, $u_2 = (2, 3)$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, $u = (2, 5, 3)$, $u_1 = (1, 3, 2)$, $u_2 = (1, -1, 4)$.
3. Dans $\mathbb{R}^3$,$u = (3, 1, m)$, $u_1 = (1, 3, 2)$, $u_2 = (1, -1, 4)$ (discuter suivant la valeur de m).

Exercice 4. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. (u, v) avec $u = (1, 2, 3)$ et $v = (-1, 3, 5)$.
2. (X, X^2) dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 5. Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - y + 2z = 0\}.$$

1. Donner une base de F et une base de G et en déduire leur dimension respective.
2. Donner une base de $F \cap G$ et donner sa dimension.

$\boxed{\textbf{Matrices}}$

Exercice 1. Calculs élémentaires.
On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer lorsque c'est possible :

1. AB, BA, A^2, B^2, $A^2 + 2AB + B^2$, $A + B$ et $(A + B)^2$. Que remarque-t-on ?
2. LC, CL, AC.
3. $A + E$, AE, EA, $(E^t)A$,
4. AD, DA. Remarquer les effets de ces produits sur les lignes et les colonnes de A.

Exercice 2.
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & -5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les triplets (a, b, c) afin que A et B commutent, c'est-à-dire $AB = BA$.

Exercice 3. Calcul d'inverse.
Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour montrer que A est inversible et pour calculer son inverse. Vérifier les calculs en effectuant par exemple le produit AA^{-1}.
2. Même question pour B.
3. En déduire par simple produit matriciel l'inverse du produit AB (on demande donc de ne pas inverser AB par la méthode de Gauss-Jordan).

Exercice 4. Calcul d'inverse.
Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}, \text{ avec } a \neq 0.$$

Utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour montrer que M est inversible et pour calculer son inverse. Vérifier les calculs en effectuant par exemple le produit MM^{-1}.
Exercice 5. Inverse et système linéaire.
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour montrer que A est inversible et pour calculer son inverse. Vérifier les calculs en effectuant par exemple le produit AA^{-1}.

2. En déduire alors la résolution du système

$$\begin{cases} x & + & y & + & 2z & = a \\ 2x & + & y & + & z & = b \\ 2x & + & y & + & 3z & = c \end{cases}$$

   pour $(a, b, c) = (1, 2, 3)$ puis pour $(a, b, c) = (-1, 4, 2)$.

Exercice 6. Application pratique.
Une entreprise de jouets fabrique chaque jour trois types de jouets différents A, B et C et utilise les quantités de matières premières données dans le tableau suivant :

	Jouet A	Jouet B	Jouet C
Bois en dm^3	1	3	2
Métal en kg	0,4	0,6	0,2
Plastique en kg	0,1	0,1	0,1

Un programme de production journalière s'exprime par un vecteur $X^t = (x_1, x_2, x_3)$, où x_1, x_2 et x_3 désignent respectivement le nombre de jouets A, B et C fabriqués. Pour réaliser un programme de production, on utilise y_1 dm^3 de bois, y_2 kg de métal et y_3 kg de plastique ce que l'on représente par le vecteur $Y^t = (y_1, y_2, y_3)$.

1. Ecrire la matrice M telle que $MX = Y$.

2. Déterminer les quantités de matières pour un programme de production $X^t = (10, 20, 30)$.

3. Déterminer la matrice qui permet d'obtenir la production journalière en fonction des quantités de matières premières.

4. En déduire les quantités de jouets de chaque type si on a utilisé 180 dm^3 de bois, 30 kg de métal et 9 kg de plastique.

Exercice 7. Puissances de matrice.
Le but de cet exercice est de pouvoir calculer B^n où

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n + 2$ et les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer u_n en fonction de n (on pourra montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + 1$ est une suite géométrique, en déduire son expression en fonction de n puis conclure).

2. (a) Vérifier que $B = 2A + I$.

(b) Calculer A^2

(c) Montrer par récurrence qu'il existe une suite réelle (a_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = a_n A + I$. On donnera alors la relation entre a_{n+1} et a_n.

3. Déduire des questions précédentes l'expression de B^n en fonction de A, I et n.

Exercice 8 Matrice diagonale dominante
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale dominante, i.e. pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, on a $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que la matrice A est inversible.

Exercice 9 Un sous-espace vectoriel de matrices
Soit E le sous-ensemble de $M_3(\mathbb{R})$ défini par

$$E = \{M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}, \ a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ stable pour la multiplication des matrices. Calculer $\dim E$.

Applications linaires

Exercice 1. Changement de bases.
On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.

1. Soit $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 1, 1)$ trois vecteurs de E.
   (a) Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de E, qu'on notera $\mathcal{B}$.
   (b) Déterminer $P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}}$ la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_c$ vers $\mathcal{B}$. Soit x le vecteur de E tel que les composantes de x dans $\mathcal{B}$ soient $X_{\mathcal{B}} = (2, 3, 4)^t$. Exprimer x dans la base canonique $\mathcal{B}_c$.
   (c) Calculer $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c}$ de deux méthodes différentes :
      i. première méthode : en exprimant les vecteurs e_1, e_2, e_3 en fonction des vecteurs u_1, u_2, u_3,
      ii. deuxième méthode : en inversant la matrice $P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}}$.
      iii. Vérifier alors que $P_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c} = I_3$.
   (d) Soit $y = (1, 2, 3)$ un vecteur de E. Calculer les composantes de y dans la base $\mathcal{B}$.
2. Mêmes questions en changeant uniquement les vecteurs u_1, u_2, u_3 : $u_1 = (1, -1, -1)$, $u_2 = (1, 2, 1)$ et $u_3 = (0, 1, 1)$.

Exercice 2. Exemples d'applications linéaires ou non linéaires.

1. Les applications suivantes de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ (p et n à préciser) sont-elles linéaires ?
   $f_1 : x \mapsto 2x^2$,
   $f_2 : x \mapsto 4x - 3$,
   $f_3 : x \mapsto 4x$,
   $f_4 : x \mapsto \sqrt{x^2}$;
   $f_5 : (x, y) \mapsto 3x + 5y$,
   $f_6 : (x, y) \mapsto 3x + 5y - 1$,
   $f_7 : (x, y, z) \mapsto (2x - 3y + z, x - y + \frac{z}{3})$,
   $f_8 : (x, y, z, t) \mapsto (2x, -t, 3y + t - 2x, z - 3x)$,
   $f_9 : (x, y, z, t) \mapsto (-x, y + 3x + t, |z|)$.
2. Pour les applications précédentes qui sont **linéaires**, donner leur expression dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ (p et n sont à préciser).

Exercice 3. Matrices d'une application linéaire.
Soit $f : (x, y) \mapsto (x + y, 2x - 3y, 3x - y, y)$ une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$. On note $\mathcal{B}_c^2$ et $\mathcal{B}_c^4$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$ respectivement et $\mathcal{D}^2 = (u_1, u_2)$ où $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (0, 2)$, $\mathcal{D}^4 = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ où $v_1 = (1, 0, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 1)$, et $v_4 = (1, 1, 1, 1)$.

1. Montrer que $\mathcal{D}^2$ et $\mathcal{D}^4$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$ respectivement (à faire à la maison).
2. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$.
3. Déterminer la matrice $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_c^2}^{\mathcal{B}_c^4} f$ de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$ respectivement.
4. Déterminer $P_{\mathcal{B}_c^2,\mathcal{D}^2}$ la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_c^2$ vers $\mathcal{D}^2$ et $P_{\mathcal{B}_c^4,\mathcal{D}^4}$ la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_c^4$ vers $\mathcal{D}^4$.
5. En déduire la matrice $B = \mathrm{mat}_{\mathcal{D}^2}^{\mathcal{D}^4} f$ de f dans les bases $\mathcal{D}^2$ et $\mathcal{D}^4$ respectivement.

Exercice 4 Application linéaire définie par une matrice.
Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$
On considère $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 0)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit f l'application linéaire définie par la donnée de sa matrice A la représentant dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ et la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
   (b) Calculer $f(1, -2, 3)$.
   (c) Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, expliciter $f(x, y, z)$.

Exercice 5. Noyau, image et rang.
Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
et soit f l'application linéaire définie par la donnée de sa matrice A la représentant dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, expliciter $f(x, y, z, t)$.
2. Calculer le noyau de f et sa dimension.
3. En déduire le rang de f.

Exercice 6. Endomorphisme.
Dans tout l'exercice, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $f^2 = 0$ (on rappelle que $f^2 = f \circ f$).

1. Montrer que $Im(f) \subset Ker(f)$.
2. Montrer que $dim(Ker(f)) \geq \frac{n}{2}$ et $rang(f) \leq \frac{n}{2}$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la dimension de $Ker(f)$ pour que $Ker(f) = Im(f)$.

Exercice 7. Somme directe, projecteur, symétrie.
Soient $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x+y-z = 0\}$ et $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x-2y+z = 0, x-y-z = 0\}$.
On désigne par $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner une base (u_1, u_2) de P et une base (u_3) de D. Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ puis que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit p la projection de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ puis $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(p)$. Vérifier que $A^2 = A$.
3. Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à P parallèlement à D. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$ puis $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(s)$. Vérifier que $B^2 = I$, $AB = A$ et $BA = A$.

Exercice 8. Isométrie vectorielle.
On considère l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(x, y, z) = \frac{1}{3}(-x - 2y + 2z, 2x + y + 2z, -2x + 2y + z)$.

1. Déterminer la matrice A représentant f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que pour tout u de $\mathbb{R}^3$, $\|f(u)\| = \|u\|$ (norme euclidienne). On dit que f est une isométrie de l'espace.
3. Déterminer $Ker(f - Id)$, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel des vecteurs u tel que $f(u) = u$. De quelle dimension est cet espace ?
4. On donne $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 0)$ et $u_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(0, -1, 1)$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer la matrice B représentant f dans la base (u_1, u_2, u_3) et montrer qu'on peut écrire la matrice B sous la forme :
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$
où θ est un réel de $]-\pi; +\pi]$ dont on donnera une valeur approchée en radian.
6. Interpréter géométriquement l'application f.

Exercice 9 Formule du rang.
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Imf et $Kerf$ sont supplémentaires dans E ;
2. $E = Imf + Kerf$;
3. $Imf^2 = Imf$;
4. $Kerf^2 = Kerf$.