Groupes et géométrie, Test 3

N. Perrin

Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible de changer

Exercice 1 (13 Points) Soit $G = \mathfrak{A}_n \subset \mathfrak{S}_n$ le groupe alterné. On rappelle :

- le groupe $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles ;
- tous les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$;
- le groupe $\mathfrak{A}_5$ est simple.

On cherche à déterminer pour quelles valeurs de n le groupe $\mathfrak{A}_n$ est simple. On fixe $H \lhd G$ un sous-groupe distingué et on suppose que l'on a $H \neq \{\mathrm{Id}\}$.

(i) Donner le cardinal de $\mathfrak{A}_n$ et montrer que $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ et $\mathfrak{A}_3$ sont simples.

(ii) Le groupe $\mathfrak{A}_4$ est-il simple ?

(iii) On suppose que H contient un 3-cycle. Montrer que $H = G$.

On suppose désormais que $n \geq 6$. On prend $\sigma \in H$ avec $\sigma \neq \mathrm{Id}$. Il existe alors $a, b \in [1, n]$ avec $a \neq b$ et $\sigma(a) = b$. On choisit $c \in [1, n] \setminus \{a, b, \sigma(a), \sigma(b)\}$.

(iv) Montrer que l'ensemble $\{a, b, c, \sigma(a), \sigma(b), \sigma(c)\}$ a au plus 5 éléments.

On choisit un sous-ensemble F de $[1, n]$ contenant $\{a, b, c, \sigma(a), \sigma(b), \sigma(c)\}$ et ayant exactement 5 éléments. On pose $\tau = [abc] \in \mathfrak{A}_n$ et on définit $\theta = (\tau, \sigma) = \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}$.

(v) Montrer que $\theta \in H$.

(vi) Montrer que $\theta(x) = x$ pour tout $x \in [1, n] \setminus F$.

(vii) Calculer $\theta(b)$ et montrer que $\theta \neq \mathrm{Id}$.

(viii) Montrer que $\theta(F) = F$.

On note $K = \{g \in \mathfrak{A}_n \mid g(x) = x \text{ pour tout } x \in [1, n] \setminus F\}$.

(ix) Montrer que K est un sous-groupe de $\mathfrak{A}_n$.

(x) Montrer que $(H \cap K) \lhd K$ et que $\theta \in H \cap K$.

(xi) Montrer que si $u \in K$ alors $u(F) = F$ et que u induit une bijection de F dans F que l'on note $u|_F : F \to F$.

On considère l'application $\varphi : K \to \mathrm{Bij}(F)$ définie par $\varphi(u) = u|_F$.

(xii) Montrer que φ est un morphisme de groupes injectif.

(xiii) On identifie $\mathrm{Bij}(F)$ à $\mathfrak{S}_5$. Montrer que l'image de φ est égale à $\mathfrak{A}_5$.

(xiv) Montrer que K est simple et isomorphe à $\mathfrak{A}_5$.

(xv) Montrer que $H \cap K = K$ c'est-à-dire que $K \subset H$.

(xvi) Montrer que H contient un 3-cycle puis que $H = \mathfrak{A}_n$.

(xvii) Pour quelles valeurs de n le groupe $\mathfrak{A}_n$ est-il simple ?

Exercice 2 (7 Points) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et soit $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ l'espace affine associé. On définit les quatre points suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On considère le tétraèdre $X = \{A, B, C, D\}$. On note $G \subset \mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ le sous-groupe des isométrie du tétraèdre c'est-à-dire le stabilisateur de X ou encore

$$G = \{f \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E}) \mid f(X) = X\}.$$

(i) Montrer que tous les éléments de G fixent un même point O, lequel ?

(ii) Montrer que G agit sur X.

Soit $\varphi : G \to \mathrm{Bij}(X)$ le morphisme de groupes associé à cette représentation.

(iii) Le morphisme φ est-il injectif ?

(iv) Montrer que l'image de φ contient toutes les transpositions de deux sommets.

(v) À quel groupe est isomorphe le groupe G ?

(vi) Soit $H = G \cap \mathrm{Isom}^+(\mathcal{E}) = \{g \in G \mid \det(\vec{g}) = 1\}$. A-t-on $H \lhd G$?

(vii) À quel groupe est isomorphe le groupe H ?