Groupes et géométrie, Test 2

N. Perrin

Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible de changer

Exercice 1 (16 Points) Soit G un groupe d'ordre 12.

(i) On suppose que G est commutatif à quels groupes G peut-il être isomorphe ?

(ii) On suppose que G n'est pas commutatif et on note H un 3-sous-groupe de Sylow de G

(a) Donner le nombre possible de 3-sous-groupes de Sylow de G.

(b) On considère l'action $G \times G/H \to G/H, (g, [g']) \mapsto [gg']$ de G sur G/H par translation à gauche et le morphisme de groupes $\varphi : G \to \mathrm{Bij}(G/H)$ correspondant. Montrer que l'on a

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \bigcap_{x \in G} xHx^{-1}.$$

(c) Montrer que φ est injectif si et seulement si H n'est pas distingué dans G.

(d) Montrer que si H n'est pas distingué dans G, alors G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$, à quel sous-groupe G est-il isomorphe ?

(e) On suppose maintenant que H est distingué dans G et on note $H = \{1, a, a^2\}$ les éléments de H.

i. On suppose que G contient un élément b d'ordre 4 et on pose $K = \langle b \rangle$. Montrer que $G = HK$ et que $H \cap K = \{1\}$.

ii. Montrer que l'on a $G \simeq H \rtimes K$. Le produit semi-direct peut-il être un produit direct ? Ce cas est-il possible ?

(f) On suppose maintenant que H est distingué dans G et que G ne contient pas d'élément d'ordre 4.

i. Si S est un 2-sous-groupe de Sylow, à quel groupe S doit-il être isomorphe ?

ii. Combien le groupe G peut-il contenir de 2-sous-groupes de Sylow ?

iii. Supposons que G contienne un autre 2-sous-groupe de Sylow S' et que $S \cap S' = \{1\}$. Quel est le cardinal de SS' ?

iv. En déduire que l'on doit avoir $S \cap S' \neq \{1\}$. Quel est l'ordre de $S \cap S'$?

v. Donner le nombre maximal d'éléments d'ordre 2 de G.

vi. Montrer que G a un élément τ d'ordre 6.

vii. Montrer qu'il existe un élément σ d'ordre 2 tel que $\sigma \in G \setminus \langle \tau \rangle$.

viii. Montrer que dans ce cas G est isomorphe au groupe diédral D_{12}.

(iii) Donner la liste des groupes d'ordre 12 à isomorphisme près.

Exercice 2 (4 Points) Soit G un groupe d'ordre 56. On suppose que G est simple.

(i) Donner le nombre de ses 7-sous-groupes de Sylow.

(ii) Donner le nombre d'éléments d'ordre 7 de G.

(iii) Montrer que G a un unique 2-sous-groupe de Sylow.

(iv) Un tel groupe peut-il exister ?