# Groupes et géométrie,
# feuille 12

N. Perrin

## À rendre le mercredi 06.05.2020

## Correction le mardi 07.05.2020

**Exercice 1 (80 Points)** Soit $G$ un groupe simple d'ordre 60.

(i) Supposons qu'il existe $G' \subset G$ un sous-groupe d'ordre 20 et soit $G'_5$ un 5-sous-groupe de Sylow de $G'$. Montrer que $G'_5 \lhd G'$.

(ii) Montrer que $G' \subset N_G(G'_5)$ et en déduire que $N_G(G'_5)$ est d'ordre 20 ou 60.

(iii) En utilisant les théorèmes de Sylow (et le fait que le nombre de 5-Sylow est $[G : N_G(G'_5)]$, cf. feuille 11, exercice 4), montrer que $G$ n'admet pas de sous-groupe d'ordre 20.

(iv) Montrer que si $G$ admet un sous-groupe $K$ d'ordre 12, alors $K$ admet 4 3-sous-groupes de Sylow (si $K$ a un unique 3-sous-groupe de Sylow $K_3$, on pourra procéder comme ci-dessus en considérant $N_G(K_3)$).

(v) Soient $H$ et $H'$ deux sous-groupes distincts d'ordre 4.

   (a) On suppose que $H \cap H' = \langle a \rangle$ est d'ordre 2 (donc $a$ est d'ordre 2). Montrer que $H \cup H' \subset C_G(a) = \{g \in G \mid ga = ag\}$.

   (b) Montrer que $C_G(a)$ contient au moins 6 éléments et est d'ordre divisible par 4.

   (c) En déduire que $|C_G(a)|$ vaut 12, 20 ou 60.

   (d) Montrer qu'aucun des cas n'est possible et que $H \cap H' = \{1\}$.

(vi) Soit $H$ est un 2-Sylow, supposons $H = N_G(H)$.

   (a) Calculer le nombre de 2-Sylow de $G$ (on pourra utiliser et le fait que le nombre de 2-Sylow est $[G : N_G(H)]$, cf. feuille 11, exercice 4)

   (b) En comptant le nombre d'éléments d'ordre 2 et 5, montrer que $H \neq N_G(H)$.

(vii) Montrer que $G$ possède 5 2-sous-groupes de Sylow (on pourra déterminer le cardinal de $N_G(H)$ pour $H$ un 2-Sylow.

(viii) Montrer que $G \simeq \mathfrak{A}_5$ en considérant l'action de $G$ par conjugaison sur les 2-Sylow.

**Exercice 2 (20 Points)** Soit $G$ un $p$-groupe fini.

(i) On suppose que $G$ agit sur un ensemble fini $X$ et on note $X^G = \{x \in X \mid g \cdot x = x \text{ pour tout } g \in G\}$ l'ensemble des points fixes de $X$ sous $G$. Monter que l'on a

$$|X| \equiv |X^G| \pmod p.$$

(ii) En faisant agir $G$ sur lui-même par conjugaison : $G \times G \to G; (g, x) \mapsto g \cdot x = gxg^{-1}$, montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe non trivial de $G$ (*i.e* $Z(G) \neq \{1\}$).