Université de Versailles Saint Quentin en Yvelines
MA202

Feuille de TD 3 : Algèbre linéaire

Espaces vectoriels

Exercice 1. Déterminer lesquels de ces ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x - 5y = z\}$
$E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x = 0\}$
$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 1\}$
$E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 - y^2 = 0\}$
$E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ xy = 0\}$

Correction. Rappel, un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel s'il vérifie les trois conditions suivantes :

1. $0 \in E$;
2. si $u, v \in E$, alors $u + v \in E$;
3. si $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u \in E$.

A. Montrons que E_1 est un espace vectoriel. On vérifie les trois points ci-dessus.
1. On a $0 = (0, 0, 0) \in E_1$ car $2 \times 0 - 5 \times 0 = 0$.
2. Soient $u, v \in E_1$. On a $u = (x, y, z)$ avec $2x-5y = z$ et $v = (x', y', z')$ avec $2x'-5y' = z'$. On a $u + v = (x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$. Par ailleurs, on a

$$2(x + x') - 5(y + y') = (2x - 5y) + (2x' - 5y') = z + z'.$$

Donc $u + v \in E_1$.
3. Soit $u \in E_1$ et $\lambda \in R$. On a $u = (x, y, z)$ avec $2x - 5y = z$ et $\lambda u = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$. Par ailleurs, on a

$$2(\lambda x) - 5(\lambda y) = \lambda(2x - 5y) = \lambda z.$$

Donc $\lambda u \in E_1$.

B. Montrons que E_2 est un espace vectoriel. On vérifie les trois points ci-dessus.
1. On a $0 = (0, 0) \in E_2$ (car $0 = 0$).
2. Soient $u, v \in E_2$. On a $u = (x, y)$ avec $x = 0$ et $v = (x', y')$ avec $x' = 0$. On a $u + v = (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$. Par ailleurs, on a

$$(x + x') = x + x' = 0.$$

Donc $u + v \in E_2$.
3. Soit $u \in E_2$ et $\lambda \in R$. On a $u = (x, y)$ avec $x = 0$ et $\lambda u = (\lambda x, \lambda y)$. Par ailleurs, on a

$$\lambda x = 0.$$

Donc $\lambda u \in E_2$.

C Montrons que E_3 n'est pas un espace vectoriel. Il suffit de vérifier que l'un des trois points ci-dessus est faux.
1. On a $0 = (0, 0, 0) \notin E_3$ (car $0 + 0 + 0 \neq 1$).

D Montrons que E_4 n'est pas un espace vectoriel. Il suffit de vérifier que l'un des trois points ci-dessus est faux.

2. On a $u = (1, 1, 0) \in E_4$ car $1^2 - 1^2 = 0$ et $v = (1, -1, 0) \in E_4$ car $1^2 - (-1)^2 = 0$. Cependant, on a $u + v = (2, 0, 0)$ et comme $2^2 - 0^2 \neq 0$, on a $u + v \notin E_4$.

E Montrons que E_5 n'est pas un espace vectoriel. Il suffit de vérifier que l'un des trois points ci-dessus est faux.
2. On a $u = (1, 0, 0) \in E_5$ car $1 \times 0 = 0$ et $v = (0, 1, 0) \in E_4$ car $0 \times 1 = 0$. Cependant, on a $u + v = (1, 1, 0)$ et comme $1 \times 1 \neq 0$, on a $u + v \notin E_5$.

Exercice 2.

1. Décrire les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.
2. Dans $\mathbb{R}^2$ donner un exemple de deux sous-espaces vectoriels dont l'union n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Correction.

1. L'espace vectoriel $\mathbb{R}$ n'a que deux sous-espaces vectoriels : $\{0\}$ et $\mathbb{R}$.
Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$ et toutes les droites vectorielles.
Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont $\{0\}$, $\mathbb{R}^3$, toutes les droites vectorielles et tous les plans vectoriels.
2. On va montrer que la réunion de deux droites distinctes de $\mathbb{R}^2$ n'est pas un sous-espace vectoriel. Soit $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ et $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$. On a vu à l'exercice 1 que E_1 est un sous-espace vectoriel (ensemble E_2 de l'exercice 1). En échangeant les rôles de x et y on obtient que E_2 est aussi un sous espace vectoriel. Montrons que $E = E_1 \cup E_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel. On a $u = (0, 1) \in E_1 \subset E$ et $v = (1, 0) \in E_2 \subset E$. Cependant $u + v = (1, 1)$ n'est ni dans E_1 ni dans E_2 donc $u + v \notin E$ et E n'est pas un sous-espace vectoriel.

Exercice 3. Les vecteurs u suivants sont-ils combinaison linéaire des vecteurs u_i ?

1. dans $\mathbb{R}^2$, $u = (1, 2)$, $u_1 = (1, -2)$, $u_2 = (2, 3)$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, $u = (2, 5, 3)$, $u_1 = (1, 3, 2)$, $u_2 = (1, -1, 4)$.
3. Dans $\mathbb{R}^3$,$u = (3, 1, m)$, $u_1 = (1, 3, 2)$, $u_2 = (1, -1, 4)$ (discuter suivant la valeur de m).

Correction.

Rappelons que le vecteur u est combinaison linéaire de u_1 et u_2 s'il existe des réels λ et μ tels que $u = \lambda u_1 + \mu u_2$.
1. On cherche des réels λ et μ tels que $u = \lambda u_1 + \mu u_2$ c'est-à-dire $(1, 2) = \lambda(1, -2) + \mu(2, 3) = (\lambda + 2\mu, -2\lambda + 3\mu)$. On obtient donc le système :

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = 1 \\ -2\lambda + 3\mu = 2. \end{cases}$$

On résoud le système en remplaçant la seconde ligne par elle-même plus deux fois la première $(L_2 \to L_2 + 2L_1)$. On obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = 1 \\ 7\mu = 4. \end{cases}$$

On a donc $\mu = \frac{4}{7}$ et en remplaçant dans le première équation, on obtient $\lambda = -\frac{1}{7}$. On a donc trouvé des réels qui vérifient les conditions souhaitées et on conclue que u est bien combinaison linéaire de u_1 et u_2.

2. On cherche des réels λ et μ tels que $u = \lambda u_1 + \mu u_2$ c'est-à-dire $(2,5,3) = \lambda(1,3,2) + \mu(1,-1,4) = (\lambda+\mu, 3\lambda-\mu, 2\lambda+4\mu)$. On obtient donc le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ 3\lambda - \mu = 5 \\ 2\lambda + 4\mu = 3 \end{cases}$$

On effectue les opérations : $L_2 \to L_2 - 3L_1$ et $L_3 \to L_3 - 2L_1$. On obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ -4\mu = -1 \\ 2\mu = -1. \end{cases}$$

On obtient $\mu = \frac{1}{4}$ et $\mu = -\frac{1}{2}$ ce qui est impossible. Il n'y a donc pas de solution et u n'est pas combinaison linéaire de u_1 et u_2.

3. On cherche des réels λ et μ tels que $u = \lambda u_1 + \mu u_2$ c'est-à-dire $(3,1,m) = \lambda(1,3,2) + \mu(1,-1,4) = (\lambda+\mu, 3\lambda-\mu, 2\lambda+4\mu)$. On obtient donc le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ 3\lambda - \mu = 1 \\ 2\lambda + 4\mu = m \end{cases}$$

On effectue les opérations : $L_2 \to L_2 - 3L_1$ et $L_3 \to L_3 - 2L_1$. On obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ -4\mu = -8 \\ 2\mu = m - 6. \end{cases}$$

On obtient $\mu = 2$ et $\mu = \frac{m-6}{2}$. Ceci est possible si et seulement si $2 = \frac{m-6}{2}$ ou encore $m - 6 = 4$ et de manière équivalente, $m = 10$. On a alors $\mu = 2$ et $\lambda = 1$. En conclusion, il y a pas une solution si et seulement si $m = 10$ donc u est pas combinaison linéaire de u_1 et u_2 si et seulement si $m = 10$.

Exercice 4. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. (u, v) avec $u = (1,2,3)$ et $v = (-1,3,5)$.
2. (X, X^2) dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Correction.

Rappelons qu'une famille $(u_1, \cdots, u_r)$ de vecteurs est libre si pour toute famille de réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r = 0$, on a $\lambda_1 = \ cdots = \lambda_r = 0$.

1. Soient λ et μ des réels tels que $\lambda u + \mu v = 0$. La famille est libre si les seuls réels λ et μ qui vérifient cette conditions sont $\lambda = \mu = 0$. Montrons que c'est le cas. On a $0 = \lambda u + \mu v = \lambda(1,2,3) + \mu(-1,3,5) = (\lambda - \mu, 2\lambda + 3\mu, 3\lambda + 5\mu)$. On obtient donc le système :

$$\begin{cases} \lambda - \mu = 0 \\ 2\lambda + 3\mu = 0 \\ 3\lambda + 5\mu = 0 \end{cases}$$

On effectue les opérations : $L_2 \to L_2 - 2L_1$ et $L_3 \to L_3 - 3L_1$. On obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda - \mu = 0 \\ 5\mu = 0 \\ 8\mu = 0. \end{cases}$$

On obtient donc $\mu = 0$ puis $\lambda = 0$ ce qui montre que la famille (u, v) est libre.

1. Soient λ et μ des réels tels que $\lambda X + \mu X^2 = 0$. La famille est libre si les seuls réels λ et μ qui vérifient cette conditions sont $\lambda = \mu = 0$. Montrons que c'est le cas (c'est un cas particulier d'identification polynômiale). En posant $X = 1$ et $X = -1$, on obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases}$$

On effectue les opérations : $L_2 \to L_2 - L_1$. On obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -2\mu = 0. \end{cases}$$

On obtient donc $\mu = 0$ puis $\lambda = 0$ ce qui montre que la famille (X, X^2) est libre.

Exercice 5. Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - y + 2z = 0\}.$$

1. Donner une base de F et une base de G et en déduire leur dimension respective.
2. Donner une base de $F \cap G$ et donner sa dimension.

Correction.

Rappelons qu'une base est un famille libre et génératrice. Rappelons aussi que la dimension d'un espace vectoriel est le nombre d'éléments d'une (quelconque) de ses bases.

De manière empirique la dimension d'un espace vectoriel E est le nombre de paramètres nécessaires pour décrire un vecteur général de E. Nous allons voir que cette technique empirique est très efficace.

1. Soit $u = (x, y, z) \in F$ un vecteur de F. On a $x - 2y + z = 0$. Dans $\mathbb{R}^3$, un vecteur a trois paramètres (ses coordonnées x, y et z). Un vecteur de F en a une de moins. En effet, on peut par exemple exprimer z en fonction des autres coordonnées : on a $z = -x + 2y$. Ainsi on a seulement besoin des coordonnées x et y pour écrire le vecteur u : $u = (x, y, -x + 2y)$. Montrons que ceci nous fournit une base. On a

$$u = (x, y, -x + 2y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, 2).$$

Posons $u_1 = (1, 0, -1)$ et $u_2 = (0, 1, 2)$ et montrons que (u_1, u_2) est une base de F.

On commence par vérifier que u_1 et u_2 sont dans F. On a $1 - 2 \times 0 + (-1) = 0$ donc $u_1 \in F$ et $0 - 2 \times 1 + 2 = 0$ donc $u_2 \in F$.

Montrons que (u_1, u_2) est génératrice pour F. Il faut montrer que tout vecteur $u \in F$ est combinaison linéaire de $u1$ et u_2. Mais on a vu que tout vecteur $u = (x, y, z) \in F$ s'écrit $u = x(1, 0, -1) + y(0, 1, 2) = xu_1 + yu_2$ et est donc bien combinaison linéaire de u_1 et u_2.

Montrons finalement que (u_1, u_2) est libre. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda u_1 + \mu u_2 = 0$. On obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ -\lambda + 2\mu = 0 \end{cases}$$

On obtient directement $\lambda = \mu = 0$ et la famille est libre. C'est donc une base. On a trouvé une base avec 2 éléments pour F donc $\dim F = 2$.

On passe au sous-espace G. Soit $u = (x, y, z) \in G$ un vecteur de G. On a $2x - y + 2z = 0$. Dans $\mathbb{R}^3$, un vecteur a trois paramètres (ses coordonnées x, y et z). Un vecteur de G en a une de moins. En effet, on peut par exemple exprimer y en fonction des autres coordonnées : on a $y = 2x + 2z$. Ainsi on a seulement besoin des coordonnées x et z pour écrire le vecteur u : $u = (x, 2x + 2z, z)$. Montrons que ceci nous fournit une base. On a

$$u = (x, 2x + 2z, z) = x(1, 2, 0) + y(0, 2, 1).$$

Posons $v_1 = (1, 2, 0)$ et $v_2 = (0, 2, 1)$ et montrons que (v_1, v_2) est une base de G.

On commence par vérifier que v_1 et v_2 sont dans G. On a $2 \times 1 - 2 + 0 = 0$ donc $v_1 \in G$ et $0 - 2 + 2 \times 1 = 0$ donc $v_2 \in G$.

Montrons que (v_1, v_2) est génératrice pour G. Il faut montrer que tout vecteur $u \in G$ est combinaison linéaire de $u1$ et v_2. Mais on a vu que tout vecteur $u = (x, y, z) \in G$ s'écrit $u = x(1, 2, 0) + z(0, 2, 1) = xv_1 + zv_2$ et est donc bien combinaison linéaire de v_1 et v_2.

Montrons finalement que (v_1, v_2) est libre. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda v_1 + \mu v_2 = 0$. On obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ 2\lambda + 2\mu = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

On obtient directement $\lambda = \mu = 0$ et la famille est libre. C'est donc une base. On a trouvé une base avec 2 éléments pour G donc $\dim G = 2$.

2. On proc`ede de la même manière avec $F \cap G$. On a

$$F \cap G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0 \text{ et } 2x - y + 2z = 0\}.$$

On voit qu'un vecteur $u = (x, y, z) \in F \cap G$ doit véfier les deux conditions $x - 2y + z = 0$ et $2x - y + 2z = 0\}$. Intuitivement, si ces deux conditions sont "indépendantes", on devrait avoir que u ne dépend plus que d'un paramètre. On va voir que ceci se vérifie. Les coordonnées de u vérifient le système

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

En effectuant l'opération $L_2 \to L_2 - 2L_1$, on obtient le système

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3y = 0 \end{cases}$$

On doit donc avoir $y = 0$ et on obtient $z = -x$. Ainsi le vecteur $u = (x, y, z) \in F \cap G$ est de la forme $u = (x, 0, -x) = x(1, 0, -1)$.

Posons $u_1 = (1, 0, -1)$ et montrons que u_1 est une base de $F \cap G$. Montrons tout d'abord que $u_1 \in F \cap G$. C'est vrai car $1 - 2 \times 0 + (-1) = 0$ et $(2 \times 1 - 0 + 2 \times (-1) = 0$.

On a vu que tout vecteur $u = (x, y, z) \in F \cap G$ s'écrit $yu = x(1, 0, -1) = xu_1$ donc u_1 est génératrice pour $F \cap G$.

Finalement montrons que u_1 est libre. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda u_1 = 0$. Alors on a $\lambda = 0$ donc u_1 est libre et forme une base de $F \cap G$. On a donc une base de $F \cap G$ avec un élément et $\dim(F \cap G) = 1$.