UVSQ **2019/2020**
L1 S2 LSMA202N
Mathématiques générales 2

Feuille de TD n° 2 : Primitives et intégrales (CORRIGÉ)
Version provisoire à vérifier

— Calculs d'intégrales

Exercice 1.

Calculer les intégrales suivantes. $I_1 = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{3}{x^2}\right) \mathrm{d}x$

Primitives : $\int \left(x^2 + \frac{3}{x^2}\right) \mathrm{d}x = \int (x^2 + 3x^{-2}) \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{x} + C \quad (C \in \mathbb{R})$

Intervalles de définition : $]-\infty, 0[$ plus $]0, +\infty[$ (ce n'est pas $\mathbb{R}^*$).

$I_1 = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{3}{x^2}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{x}\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - 3\right) = \frac{23}{6}$

$I_2 = \int_1^2 (2 - 4\mathrm{e}^{3x}) \mathrm{d}x$

Primitives : $\int (2 - 4\mathrm{e}^{3x}) \mathrm{d}x = 2x - 4\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} + C = 2x - \frac{4}{3}\mathrm{e}^{3x} + C \quad (C \in \mathbb{R})$

Intervalles de définition : $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

$I_2 = \int_1^2 (2 - 4\mathrm{e}^{3x}) \mathrm{d}x = \left[2x - \frac{4}{3}\mathrm{e}^{3x}\right]_1^2 = \left(4 - \frac{4}{3}\mathrm{e}^6\right) - \left(2 - \frac{4}{3}\mathrm{e}^3\right) = -\frac{4}{3}\mathrm{e}^6 + \frac{4}{3}\mathrm{e}^3 + 2$

$I_3 = \int_0^1 \frac{t+1}{t^2 + 2t + 5} \mathrm{d}t$

Primitives : Puisque $(t^2 + 2t + 5)' = 2t + 2$, on a
$\int \frac{t+1}{t^2+2t+5} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int \frac{(t^2+2t+5)'}{t^2+2t+5} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \ln|t^2 + 2t + 5| + C = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 2t + 5) + C \quad (C \in \mathbb{R})$ (le discriminant de $t^2 + 2t + 5$ est $\Delta = -16 < 0$ donc $t^2 + 2t + 5 > 0\ \forall\, t \in \mathbb{R}$). Intervalles de définition : $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

$I_3 = \int_0^1 \frac{t+1}{t^2+2t+5} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\ln(t^2 + 2t + 5)\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 8 - \ln 5) = \ln\sqrt{\frac{8}{5}} = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5$

$I_4 = \int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{1/u}}{u^2} \mathrm{d}u$

Primitives : $\int \frac{\mathrm{e}^{1/u}}{u^2} \mathrm{d}u = -\int \mathrm{e}^{1/u}(1/u)' \mathrm{d}u = -\mathrm{e}^{1/u} + C \quad (C \in \mathbb{R})$

Intervalles de définition : $]-\infty, 0[$ plus $]0, +\infty[$ (ce n'est pas $\mathbb{R}^*$).

$I_4 = \int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{1/u}}{u^2} \mathrm{d}u = -\left[\mathrm{e}^{1/u}\right]_1^2 = -(\mathrm{e}^{1/2} - \mathrm{e}^1) = \mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}}$

$I_5 = \int_0^1 (2x+3)\sqrt{x^2 + 3x + 4}\, \mathrm{d}x$

Primitives : $\int (2x+3)\sqrt{x^2+3x+4}\, \mathrm{d}x = \int (x^2 + 3x + 4)^{1/2}(x^2 + 3x + 4)' \mathrm{d}x = \frac{(x^2+3x+4)^{3/2}}{3/2} + C$
$= \frac{2}{3}(x^2 + 3x + 4)^{3/2} + C \quad (C \in \mathbb{R})$

Le discriminant de x^2+3x+4 est $\Delta = -7 < 0$ donc $x^2+3x+4 > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Intervalles de définition : $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

$I_5 = \int_0^1 (2x+3)\sqrt{x^2+3x+4}\, \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\left[(x^2 + 3x + 4)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(8^{3/2} - 4^{3/2}) = \frac{32}{3}\sqrt{2} - \frac{16}{3}$

$I_6 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{1+s^2}$

Primitives : $\int \frac{1}{1+s^2} \mathrm{d}s = \arctan s + C \quad (C \in \mathbb{R})$

Intervalles de définition : $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ (car $1 + s^2 \geqslant 1 > 0\ \forall\, s \in \mathbb{R}$).

$I_6 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{1+s^2} = [\arctan s]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

— Calculs de primitives

Exercice 2.
Pour chaque intervalle I et chaque fonction f, calculer toutes les primitives de f sur I (si possible)[1].

2.1 $I = \mathbb{R}, \quad f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int \mathrm{e}^{x^2}(x^2)'\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Intervalles de définition : $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

2.2 $I =]-\infty, -1[, \quad f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^3}$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\int \frac{(1+x^3)'}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|1+x^3| + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

On a $x^3+1 = (x-1)(x^2-x+1)$. Le discriminant de x^2-x+1 est <0 donc $x^2-x+1>0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.
Les intervalles de définition sont $]-\infty, -1[$ plus $]-1, +\infty[$ (ce n'est pas $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$).

Sur $]-\infty, -1[$, toutes les primitives sont $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\ln(-1-x^3) + C$ $(C \in \mathbb{R})$.

Sur $]-1, +\infty[$, toutes les primitives sont $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\ln(1+x^3) + C$ $(C \in \mathbb{R})$.

2.3 $I =]0, +\infty[, \quad f(u) = \dfrac{\ln u}{u}$

$$\int f(u)\,\mathrm{d}u = \int (\ln u)^1(\ln u)'\,\mathrm{d}u = \frac{(\ln u)^2}{2} + C = \frac{1}{2}\ln^2 u + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Intervalles de définition : $]0, +\infty[= \mathbb{R}$ (car il faut $u > 0$ pour que $\ln u$ soit défini).

2.4 $I = \mathbb{R}, \quad f(t) = \dfrac{t}{\sqrt[3]{1+t^2}}$

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\int (1+t^2)^{-1/3}(1+t^2)'\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\frac{(1+t^2)^{2/3}}{2/3} + C = \frac{3}{4}(1+t^2)^{2/3} + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

On a que $\sqrt[3]{\alpha}$ est défini $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, et $\sqrt[3]{1+t^2} \neq 0\ \forall\, t \in \mathbb{R}$.
Intervalles de définition : $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

2.5 $I =]0, +\infty[, \quad f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1/x}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(\ln x)'}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln|\ln x| + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Il faut $x > 0$ (pour que $\ln x$ soit défini) et $\ln x \neq 0$ (pour le quotient).
Les intervalles de définition sont $]0, 1[$ plus $]1, +\infty[$ (l'énoncé est erroné).

Sur $]0, 1[$, toutes les primitives sont $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(-\ln x) + C$ $(C \in \mathbb{R})$.

Sur $]1, +\infty[$, toutes les primitives sont $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(\ln x) + C$ $(C \in \mathbb{R})$.

2.6 $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[, \quad f(w) = \tan w$

$$\int f(w)\,\mathrm{d}w = -\int \frac{(\cos w)'}{\cos w}\,\mathrm{d}w = -\ln|\cos w| + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Il faut $\cos w \neq 0$, donc les intervalles de définition sont tous ceux ne contenant pas un nombre de $\{\,\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\,\}$.
Ce sont donc $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Par exemple, sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, toutes les primitives sont $\displaystyle\int f(w)\,\mathrm{d}w = -\ln(\cos w) + C$ $(C \in \mathbb{R})$.

Et sur $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, toutes les primitives sont $\displaystyle\int f(w)\,\mathrm{d}w = -\ln(-\cos w) + C$ $(C \in \mathbb{R})$.

1. L'un des intervalles est erroné.

— Intégration par parties

Exercice 3.
À l'aide d'intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes.

$I_1 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x$

On dérive $u(x) = \ln x$, on primitive $v'(x) = 1$. Alors $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = x$ (une primitive quelconque suffit) et
$\displaystyle\int \ln x \,\mathrm{d}x = (\ln x)(x) - \int (\tfrac{1}{x})(x)\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C \ (C \in \mathbb{R})$.
Intervalles de définition : $]0, +\infty[$.
Rappel : Pour pouvoir appliquer la formule de l'intégration par parties, il faut que u et v soient de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle en question.
Ici $u(x) = \ln x$ et $v(x) = x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ qui contient $[1, \mathrm{e}]$.
Donc $I_1 = [x(\ln x - 1)]_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e}\,(\ln \mathrm{e} - 1) - 1(\ln 1 - 1) = 1$.

$I_2 = \displaystyle\int_2^3 \frac{y}{\sqrt{y-1}}\,\mathrm{d}y$

On dérive $u(y) = y$, on primitive $v'(y) = (y-1)^{-1/2}$. Alors $u'(y) = 1$ et $v(y) = \frac{(y-1)^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{y-1}$ donc

$$\begin{aligned}\int \frac{y}{\sqrt{y-1}}\,\mathrm{d}y &= (y)(2\sqrt{y-1}) - \int (1)(2\sqrt{y-1})\,\mathrm{d}y\\ &= 2y\sqrt{y-1} - 2\int (y-1)^{1/2}(y-1)'\,\mathrm{d}y\\ &= 2y\sqrt{y-1} - 2\frac{(y-1)^{3/2}}{3/2} + C\\ &= 2y\sqrt{y-1} - \frac{4}{3}(y-1)^{3/2} + C \qquad (C \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Intervalles de définition : $]1, +\infty[$, car $u, v \in \mathcal{C}^1(]1, +\infty[)$.
Donc $I_2 = \left[2y\sqrt{y-1} - \frac{4}{3}(y-1)^{3/2}\right]_2^3 = (6\sqrt{2} - \frac{4}{3} \times 2^{3/2}) - (4\sqrt{1} - \frac{4}{3} \times 1^{3/2}) = \dfrac{10}{3}\sqrt{2} - \dfrac{8}{3}$.

$I_3 = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}} z^2 \ln z \,\mathrm{d}z$

On dérive $u(z) = \ln z$, on primitive $v'(z) = z^2$. Alors $u'(z) = \frac{1}{z}$ et $v(z) = \frac{z^3}{3}$ donc

$$\begin{aligned}\int z^2 \ln z \,\mathrm{d}z &= (\ln z)(\tfrac{z^3}{3}) - \int (\tfrac{1}{z})(\tfrac{z^3}{3})\,\mathrm{d}x\\ &= \tfrac{1}{3}z^3 \ln z - \tfrac{1}{3}\int z^2\,\mathrm{d}z\\ &= \tfrac{1}{3}z^3 \ln z - \tfrac{1}{3}\frac{z^3}{3} + C = \frac{1}{9}z^3(3\ln z - 1) + C \qquad (C \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Intervalles de définition : $]0, +\infty[$, car $u, v \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[)$.
Donc $I_3 = \frac{1}{9}\left[z^3(3\ln z - 1)\right]_{\mathrm{e}}^{2\mathrm{e}} = \frac{1}{9}\big((2\mathrm{e})^3(3\ln(2\mathrm{e}) - 1) - \mathrm{e}^3(3\ln(\mathrm{e}) - 1)\big) = \dfrac{2}{9}(12\ln 2 + 7)\,\mathrm{e}^3$.

$I_4 = \displaystyle\int_{-1}^{0} (-2a+1)\,\mathrm{e}^{-a}\,\mathrm{d}a$

On dérive $u(a) = -2a + 1$, on primitive $v'(a) = \mathrm{e}^{-a}$. Alors $u'(a) = -2$ et $v(a) = -\mathrm{e}^{-a}$ donc

$$\begin{aligned}\int (-2a+1)\,\mathrm{e}^{-a}\,\mathrm{d}a &= (-2a+1)(-\mathrm{e}^{-a}) - \int (-2)(-\mathrm{e}^{-a})\,\mathrm{d}a\\ &= (2a-1)\,\mathrm{e}^{-a} - 2\int \mathrm{e}^{-a}\,\mathrm{d}a\\ &= (2a-1)\,\mathrm{e}^{-a} + 2\,\mathrm{e}^{-a} + C\\ &= (2a+1)\,\mathrm{e}^{-a} + C \qquad (C \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Intervalles de définition : $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$, car $u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
Donc $I_4 = \left[(2a+1)\,\mathrm{e}^{-a}\right]_{-1}^{0} = 1\,\mathrm{e}^0 - (-1)\,\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} + 1$.

$I_5 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln^2 b \,\mathrm{d}b$

On dérive $u(b) = (\ln b)^2$, on primitive $v'(b) = 1$. Alors $u'(v) = 2(\ln b)\frac{1}{b} = \frac{2\ln b}{b}$ et $v(b) = b$ donc

$$\begin{aligned}\int \ln^2 b \,\mathrm{d}b &= (\ln^2 b)(b) - \int (\tfrac{2\ln b}{b})(b)\,\mathrm{d}b \\ &= b\ln^2 b - 2\int \ln b \,\mathrm{d}b.\end{aligned}$$

On a déjà calculé $\displaystyle\int \ln b \,\mathrm{d}b = b\ln b - b + C$ (par parties aussi), donc

$$\begin{aligned}\int \ln^2 b \,\mathrm{d}b &= b\ln^2 b - 2(b\ln b - b) + C \\ &= b\,(\ln^2 b - 2\ln b + 2) + C \qquad (C \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Intervalles de définition : $]0, +\infty[$, car $u, v \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[)$.
Donc $I_5 = \big[b\,(\ln^2 b - 2\ln b + 2)\big]_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e} \times (\ln^2 \mathrm{e} - 2\ln \mathrm{e} + 2) - 1 \times (\ln^2 1 - 2\ln 1 + 2) = \mathrm{e} - 2.$

$I_6 = \displaystyle\int_0^1 \arctan c \,\mathrm{d}c$

On dérive $u(c) = \arctan c$, on primitive $v'(c) = 1$. Alors $u'(v) = \frac{1}{1+c^2}$ et $v(c) = c$ donc

$$\begin{aligned}\int \arctan c \,\mathrm{d}c &= (\arctan c)(c) - \int (\tfrac{1}{1+c^2})(c)\,\mathrm{d}c \\ &= c\arctan c - \tfrac{1}{2}\int \tfrac{(1+c^2)'}{1+c^2}, \mathrm{d}c \\ &= c\arctan c - \tfrac{1}{2}\ln|1+c^2| + K \\ &= c\arctan c - \tfrac{1}{2}\ln(1+c^2) + K \qquad (K \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

car $1 + c^2 \geqslant 1 > 0 \ \forall\, c \in \mathbb{R}$.
Intervalles de définition : $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$, car $u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
Donc $I_6 = \big[c\arctan c - \frac{1}{2}\ln(1+c^2)\big]_0^1 = \big(1\arctan 1 - \frac{1}{2}\ln(2)\big) - \big(0\arctan 0 - \frac{1}{2}\ln(1)\big) = (1 \times \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2) - (0 \times 0 - 0)$
$= \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\ln 2}{2}.$

$I_7 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^s \cos s \,\mathrm{d}s$

Soient

$$\begin{aligned}I_{\cos} &= \int \mathrm{e}^s \cos s \,\mathrm{d}s \\ I_{\sin} &= \int \mathrm{e}^s \sin s \,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Dans $I_{\cos}$, on dérive $u(s) = \mathrm{e}^s$, on primitive $v'(s) = \cos s$. Alors $u'(s) = \mathrm{e}^s$ et $v(s) = \sin s$ donc

$$\begin{aligned}I_{\cos} &= (\mathrm{e}^s)(\sin s) - \int (\mathrm{e}^s)(\sin s)\,\mathrm{d}s \\ &= \mathrm{e}^s \sin s - I_{\sin} + C_1.\end{aligned}$$

Dans $I_{\sin}$, on dérive $u(s) = \mathrm{e}^s$, on primitive $v'(s) = \sin s$. Alors $u'(s) = \mathrm{e}^s$ et $v(s) = -\cos s$ donc

$$\begin{aligned}I_{\sin} &= (\mathrm{e}^s)(-\cos s) - \int (\mathrm{e}^s)(-\cos s)\,\mathrm{d}s \\ &= -\mathrm{e}^s \cos s + I_{\cos} + C_2.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}I_{\cos} + I_{\sin} &= \mathrm{e}^s \sin s + C_1 \\ I_{\cos} - I_{\sin} &= \mathrm{e}^s \cos s - C_2\end{aligned}$$

ce qui donne (en additionnant/soustrayant les 2 équations)

$$\int \mathrm{e}^s \cos s \,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\mathrm{e}^s(\sin s + \cos s) + C$$
$$\int \mathrm{e}^s \sin s \,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\mathrm{e}^s(\sin s - \cos s) + C$$

($C \in \mathbb{R}$).
Intervalles de définition : $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$, car toutes les fonctions considérées sont de clase $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Donc $I_7 = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^s(\sin s + \cos s)\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\Big(\big(\mathrm{e}^{\pi/2}(\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2})\big) - \big(\mathrm{e}^0(\sin 0 + \cos 0)\big)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\big(\mathrm{e}^{\pi/2}(1+0)\big) - \big(1 \times (0+1)\big)\Big)$
$= \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\pi/2} - 1)$.
$I_8 = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$
On dérive $u(t) = \ln(1+t^2)$, on primitive $v'(t) = 1$. Alors $u'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$ et $v(t) = t$ donc

$$\begin{aligned}
\int \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t &= (\ln(1+t^2))(t) - \int (\tfrac{2t}{1+t^2})(t)\,\mathrm{d}t\\
&= t\ln(1+t^2) - 2\int \tfrac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\
&= t\ln(1+t^2) - 2\int \tfrac{t^2+1-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\
&= t\ln(1+t^2) - 2\int \left(1 - \tfrac{1}{1+t^2}\right)\,\mathrm{d}t\\
&= t\ln(1+t^2) - 2(t - \arctan t) + C\\
&= t\ln(1+t^2) - 2t + 2\arctan t + C \qquad (C \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Intervalles de définition : $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$, car $1+t^2 \geqslant 1 > 0\ \forall\, t \in \mathbb{R}$ donc $u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
Donc $I_8 = \big[t\ln(1+t^2) - 2t + 2\arctan t\big]_0^1 = \big(1 \times \ln(2) - 2 + 2\arctan 1\big) - \big(0 \times \ln(1) - 0 + 2\arctan 0\big)$
$= \big(\ln 2 - 2 + 2\frac{\pi}{4}\big) - \big(0 - 0 + 0\big) = \ln 2 - 2 + \dfrac{\pi}{2}$.
$I_9 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (u^2 + u + 2)\ln u\,\mathrm{d}u$
On dérive $U(u) = \ln u$, on primitive $V'(u) = u^2 + u + 2$. Alors $U'(u) = \frac{1}{u}$ et $V(u) = \frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} + 2u$ donc

$$\begin{aligned}
\int (u^2+u+2)\ln u\,\mathrm{d}u &= (\ln u)(\tfrac{u^3}{3} + \tfrac{u^2}{2} + 2u) - \int (\tfrac{1}{u})(\tfrac{u^3}{3} + \tfrac{u^2}{2} + 2u)\,\mathrm{d}u\\
&= (\tfrac{u^3}{3} + \tfrac{u^2}{2} + 2u)\ln u - \int (\tfrac{1}{3}u^2 + \tfrac{1}{2}u + 2)\,\mathrm{d}u\\
&= (\tfrac{u^3}{3} + \tfrac{u^2}{2} + 2u)\ln u - (\tfrac{1}{3}\tfrac{u^3}{3} + \tfrac{1}{2}\tfrac{u^2}{2} + 2u) + C\\
&= \left(\frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} + 2u\right)\ln u - \frac{u^3}{9} - \frac{u^2}{4} - 2u + C \qquad (C \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Intervalles de définition : $]0, +\infty[$, car $U, V \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[)$.
Donc $I_9 = \left[(\frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} + 2u)\ln u - \frac{u^3}{9} - \frac{u^2}{4} - 2u\right]_1^{\mathrm{e}} = \dfrac{2}{9}\mathrm{e}^3 + \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^2 + \dfrac{85}{36}$.

— Changement de variable

Exercice 4.

4.1 À l'aide d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes.

$I_1 = \displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$

Tout d'abord, cette intégrale a un sens car la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$ est continue sur $]0,+\infty[$ qui contient $[x_1,x_2] = [1,3]$ (remarquer qu'il faut $x \geqslant 0$ pour les racines et qu'alors il faut $x \neq 0$ pour le quotient).
On veut faire $x = \phi(t) = t^2$ afin d'éliminer les racines carrées. Alors $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$; si $x = x_1 = 1 = \phi(t_1) = t_1^2$ on peut prendre $t_1 = 1$; si $x = x_2 = 3 = \phi(t_2) = t_2^2$ on peut prendre $t_2 = \sqrt{3}$.
Rappels : On désigne par $|\alpha,\beta|$ l'intervalle $[\alpha,\beta]$ si $\alpha \leqslant \beta$ ou l'intervalle $[\beta,\alpha]$ si $\alpha \geqslant \beta$.

Pour pouvoir appliquer la formule du changement de variables $\displaystyle\int_{x=\phi(a)}^{x=\phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{t=a}^{t=b} f(\phi(t))\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t$ (correspondant à faire $x = \phi(t)$) il faut que ϕ soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $|a,b|$ et il faut aussi que f soit continue sur $\phi(|a,b|) = \{\,\phi(t) \mid t \in |a,b|\,\}$. Si ϕ est monotone (soit croissante soit décroissante) sur $|a,b|$, alors $\phi(|a,b|) = |\phi(a),\phi(b)|$, mais en général ce sera faux (voir exemple ci-après).

Ici $|t_1,t_2| = [1,\sqrt{3}]$ et $\phi \in \mathcal{C}^1([1,\sqrt{3}])$. D'autre part, $\phi(|t_1,t_2|) = \phi([1,\sqrt{3}]) = [\phi(1),\phi(\sqrt{3})] = [1,3]$ (car ϕ est croissante sur $[1,\sqrt{3}]$) et f est continue sur $[1,3]$ (en fait, $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[)$).

Donc $I_1 = \displaystyle\int_{x=1}^{x=3} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}} = \int_{x=x_1}^{x=x_2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}} = \int_{x=\phi(t_1)}^{x=\phi(t_2)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}} = \int_{t=t_1}^{t=t_2} \frac{2t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2}+\sqrt{(t^2)^3}}$.

Attention à ne pas oublier de ***remplacer*** $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. Or $\sqrt{t^2} = |t| = t$ car $t \geqslant 0$.

Donc $I_1 = \displaystyle\int_{t=1}^{t=\sqrt{3}} \frac{2t\,\mathrm{d}t}{t+t^3} = 2\int_{t=1}^{t=\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\,[\arctan t]_{t=1}^{t=\sqrt{3}} = 2(\arctan\sqrt{3} - \arctan 1) = 2(\tfrac{\pi}{3} - \tfrac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{6}$.

(Toutes les primitives de $f(x)$ sont $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}} = 2\arctan\sqrt{x} + C$ $(C \in \mathbb{R})$, définies sur $]0,+\infty[$.)

Si l'on prend $t_1 = -1$ (possible en principe car $\phi(t_1) = x_1$), alors $\phi(|t_1,t_2|) = \phi([-1,\sqrt{3}]) = [0,3]$. Mais f n'est pas continue sur $[0,3]$ (n'est même pas définie en 0), donc on ne peut pas appliquer la formule avec ce choix.

$I_2 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln u}{u + u\ln^2 u}\,\mathrm{d}u$

Tout d'abord, cette intégrale a un sens car la fonction $f(u) = \frac{\ln u}{u+u\ln^2 u}$ est continue sur $]0,+\infty[$ qui contient $[u_1,u_2] = [1,\mathrm{e}^2]$ (remarquer qu'il faut $u > 0$ et qu'alors $\ln^2 u \geqslant 0$ donc $u + u\ln^2 u = u(1+\ln^2 u) > 0$).
On veut faire $u = \phi(t) = \mathrm{e}^t$ afin d'éliminer les logarithmes. Alors $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$; si $u = u_1 = 1 = \mathrm{e}^{t_1}$ on peut prendre $t_1 = \ln 10$; si $u = u_2 = \mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^{t_2}$ on peut prendre $t_2 = \ln(\mathrm{e}^2) = 2$.
On a $|t_1,t_2| = [0,2]$ et $\phi \in \mathcal{C}^1([0,2])$. Puis $\phi(|t_1,t_2|) = \phi([0,2]) = [\phi(0),\phi(2)] = [1,\mathrm{e}^2]$ (car ϕ est croissante sur $[0,2]$) et f est bien continue sur $[1,\mathrm{e}^2]$ (en fait, $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[)$).

Donc $I_2 = \displaystyle\int_{u=1}^{u=\mathrm{e}^2} \frac{\ln u}{u+u\ln^2 u}\,\mathrm{d}u = \int_{u=u_1}^{u=u_2} \frac{\ln u}{u(1+\ln^2 u)}\,\mathrm{d}u = \int_{u=\phi(t_1)}^{u=\phi(t_2)} \frac{\ln u}{u(1+\ln^2 u)}\,\mathrm{d}u = \int_{t=t_1}^{t=t_2} \frac{\ln \mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t(1+\ln^2 \mathrm{e}^t)}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

Attention à ne pas oublier de ***remplacer*** $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$. Or $\ln \mathrm{e}^t = t\ \forall\, t \in \mathbb{R}$. Donc

$I_2 = \displaystyle\int_{t=0}^{t=2} \frac{t}{\mathrm{e}^t(1+t^2)}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{t=2} \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\int_{t=0}^{t=2} \frac{(1+t^2)'}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_{t=0}^{t=2} = \tfrac{1}{2}(\ln 5 - \ln 1) = \frac{\ln 5}{2} = \ln\sqrt{5}$.

(Toutes les primitives de $f(u)$ sont $\displaystyle\int \frac{\ln u}{u+u\ln^2 u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln(1+\ln^2 u) + C$ $(C \in \mathbb{R})$, définies sur $]0,+\infty[$.)

$I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$

Tout d'abord, cette intégrale a un sens car la fonction $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+1}$ est continue sur $]-\infty,+\infty[$ qui contient $[x_1,x_2] = [0,1]$ (remarquer que $\mathrm{e}^x > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ et qu'alors $\mathrm{e}^x + 1 > 1 > 0$).
On veut faire $x = \phi(t) = \ln t$ afin d'éliminer les exponentielles. Alors $\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$; si $x = x_1 = 0 = \phi(t_1) = \ln t_1$ on peut prendre $t_1 = \mathrm{e}^0 = 1$; si $x = x_2 = 1 = \phi(t_2) = \ln t_2$ on peut prendre $t_2 = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
On a $|t_1,t_2| = [1,\mathrm{e}]$ et $\phi \in \mathcal{C}^1([1,\mathrm{e}])$. Puis $\phi(|t_1,t_2|) = \phi([1,\mathrm{e}]) = [\phi(1),\phi(\mathrm{e})] = [0,1]$ (car ϕ est croissante sur $[1,\mathrm{e}]$) et f est bien continue sur $[0,1]$ (en fait, $\phi \in \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$).

Donc $I_3 = \displaystyle\int_{x=0}^{x=1} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{x=x_1}^{x=x_2} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{x=\phi(t_1)}^{x=\phi(t_2)} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{t=t_1}^{t=t_2} \frac{\mathrm{e}^{2\ln t}}{\mathrm{e}^{\ln t}+1}\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

Attention à ne pas oublier de ***remplacer*** $\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. Or $\mathrm{e}^{2\ln t} = (\mathrm{e}^{\ln t})^2$ et $\mathrm{e}^{\ln t} = t\ \forall\ t > 0$.

Donc $I_3 = \displaystyle\int_{t=1}^{t=\mathrm{e}} \frac{t^2}{t+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{t=1}^{t=\mathrm{e}} \frac{t}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_{t=1}^{t=\mathrm{e}} \frac{t+1-1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_{t=1}^{t=\mathrm{e}} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = [t - \ln(t+1)]_{t=1}^{t=\mathrm{e}}$
$= (\mathrm{e} - \ln(\mathrm{e}+1)) - (1 - \ln 2) = \mathrm{e} - \ln(\mathrm{e}+1) - 1 + \ln 2$.

(Toutes les primitives de $f(x)$ sont $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - \ln(\mathrm{e}^x+1) + C$ $(C \in \mathbb{R})$, définies sur $]-\infty, +\infty[\, = \mathbb{R}$.)

$I_4 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x}$

Cette intégrale a un sens car la fonction $f(x) = \frac{1}{\cos^4 x}$ est continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ qui contient $[x_1, x_2] = [0, \frac{\pi}{4}]$.
On applique les règles de Bioche : Soit $\omega(x) = f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x}$. Alors :

$$\omega(-x) = \frac{\mathrm{d}(-x)}{\cos^4(-x)} = -\frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x} \neq \omega(x)$$
$$\omega(\pi - x) = \frac{\mathrm{d}(\pi - x)}{\cos^4(\pi - x)} = -\frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x} \neq \omega(x)$$
$$\omega(\pi + x) = \frac{\mathrm{d}(\pi + x)}{\cos^4(\pi + x)} = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x} = \omega(x)$$

donc Bioche préconise de faire $t = \tan x$. Alors $x = \phi(t) = \arctan t$ et $\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$; si $x = x_1 = 0 = \phi(t_1) = \arctan t_1$ on peut prendre $t_1 = \tan 0 = 0$; si $x = x_2 = \frac{\pi}{4} = \phi(t_2) = \arctan t_2$ on peut prendre $t_2 = \tan\frac{\pi}{4} = 1$.
On a $|t_1, t_2| = [0, 1]$ et $\phi \in \mathcal{C}^1([0,1])$. Puis $\phi(|t_1, t_2|) = \phi([0,1]) = [\phi(0), \phi(1)] = [0, \frac{\pi}{4}]$ (car ϕ est croissante sur $[0,1]$) et f est bien continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ (en fait, $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout intervalle ne contenant pas un nombre de $\{\,\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\,\}$.)
Par ailleurs, on sait que $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

Donc $I_4 = \displaystyle\int_{x=0}^{x=\pi/4} \frac{1}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=\pi/4} (1+\tan^2 x)^2\,\mathrm{d}x = \int_{x=x_1}^{x=x_2} (1+\tan^2 x)^2\,\mathrm{d}x$
$= \displaystyle\int_{x=\phi(t_1)}^{x=\phi(t_2)} (1+\tan^2 x)^2\,\mathrm{d}x = \int_{t=t_1}^{t=t_2} (1+t^2)^2 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{t=1} (1+t^2)\,\mathrm{d}t = \left[t + \tfrac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{t=1} = (1 + \tfrac{1^3}{3}) - (0 + \tfrac{0^3}{3}) = \frac{4}{3}$.

(Toutes les primitives de $f(x)$ sont $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x} = t + \tfrac{t^3}{3} + C = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$ $(C \in \mathbb{R})$, définies sur n'importe quel intervalle ne contenant pas un nombre de $\{\,\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\,\}$.)

4.2 À l'aide d'un changement de variable, calculer les primitives suivantes sur un intervalle à préciser.

$\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x}\,\mathrm{d}x$

Tout d'abord, la fonction $f(x) = \frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x}$ est continue sur tout intervalle ne contenant pas un nombre de $\{\,2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\,\}$.
Elle admet donc des primitives sur chacun des intervalles $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
On applique les règles de Bioche : Soit $\omega(x) = f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x}\,\mathrm{d}x$. Alors :

$$\omega(-x) = \frac{\sin(-x)\cos(-x)}{1 - \cos(-x)}\mathrm{d}(-x) = \frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x}\,\mathrm{d}x = \omega(x)$$
$$\omega(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)\cos(\pi - x)}{1 - \cos(\pi - x)}\mathrm{d}(\pi - x) = \frac{\sin x \cos x}{1 + \cos x}\,\mathrm{d}x \neq \omega(x)$$
$$\omega(\pi + x) = \frac{\sin(\pi + x)\cos(\pi + x)}{1 - \cos(\pi + x)}\mathrm{d}(\pi + x) = \frac{\sin x \cos x}{1 + \cos x}\,\mathrm{d}x \neq \omega(x)$$

donc Bioche préconise de faire $t = \cos x$. Alors $\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$ (on calcule $\mathrm{d}t$ en fonction de $\mathrm{d}x$ plutôt que le contraire).

Donc $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\cos x}{1 - \cos x}(-\sin x\,\mathrm{d}x) = -\int \frac{t}{1-t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t}{t-1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t-1+1}{t-1}\,\mathrm{d}t$
$= \displaystyle\int \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t = t + \ln|t-1| + C = \cos x + \ln|\cos x - 1| + C = \cos x + \ln(1 - \cos x) + C$ $(C \in \mathbb{R})$,
car $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \implies -2 \leqslant \cos x - 1 \leqslant 0$ donc $|\cos x - 1| = 1 - \cos x$.
Pour vérifier, on dérive : $\big(\cos x + \ln(1 - \cos x) + C\big)' = -\sin x + \frac{(1-\cos x)'}{1-\cos x} = -\sin x + \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \sin x \frac{\cos x}{1 - \cos x} = f(x)$.
Intervalles de définition : chacun des intervalles $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
(Remarquer qu'on ne s'est pas inquiété de $x = \phi(t) = \arccos t$. En effet, on a trouvé une fonction dérivable dont la dérivée est $f(x)$, ce qui est le but de la primitivation.)

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$

Tout d'abord, la fonction $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ est continue sur tout intervalle ne contenant pas un nombre de $\{\,\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\,\}$. Elle admet donc des primitives sur chacun des intervalles $]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$ pour $k\in\mathbb{Z}$.

On applique les règles de Bioche : Soit $\omega(x) = f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$. Alors :

$$\begin{aligned}
\omega(-x) &= \frac{1}{\cos(-x)}\mathrm{d}(-x) = -\frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x \neq \omega(x)\\
\omega(\pi-x) &= \frac{1}{\cos(\pi-x)}\mathrm{d}(\pi-x) = \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \omega(x)\\
\omega(\pi+x) &= \frac{1}{\cos(\pi+x)}\mathrm{d}(\pi+x) = -\frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x \neq \omega(x)
\end{aligned}$$

donc Bioche préconise de faire $t=\sin x$. Alors $\mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x$ (on calcule $\mathrm{d}t$ en fonction de $\mathrm{d}x$ plutôt que le contraire).

Donc $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\cos x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1-\sin^2 x}(\cos x\,\mathrm{d}x) = \int \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{1}{(t-1)(t+1)}\,\mathrm{d}t$

$\displaystyle = -\int\left(\frac{1/2}{t-1}+\frac{-1/2}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\int\left(-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(-\ln|t-1|+\ln|t+1|)+C$

$= \frac{1}{2}(-\ln|\sin x-1|+\ln|\sin x+1|)+C = \frac{1}{2}(-\ln(1-\sin x)+\ln(1+\sin x))+C = \frac{1}{2}\ln(1+\sin x)-\frac{1}{2}\ln(1-\sin x)+C$ $(C\in\mathbb{R})$, car $-1\leqslant \sin x\leqslant 1$ donne $-2\leqslant \sin x-1\leqslant 0$ (donc $|\sin x-1| = 1-\sin x$) et donne aussi $0\leqslant \sin x+1\leqslant 2$ (donc $|\sin x+1| = 1+\sin x$).

Pour vérifier, on dérive : $\frac{1}{2}\big(\ln(1+\sin x)-\ln(1-\sin x)+C\big)' = \frac{1}{2}\big(\frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x}-\frac{(1-\sin x)'}{1-\sin x}\big) = \frac{1}{2}\big(\frac{\cos x}{1+\sin x}-\frac{-\cos x}{1-\sin x}\big) = \frac{1}{2}(\cos x)\big(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\big) = \frac{1}{2}(\cos x)\big(\frac{(1-\sin x)+(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}\big) = \frac{1}{2}(\cos x)\big(\frac{2}{\cos^2 x}\big) = \frac{1}{\cos x} = f(x)$.

Intervalles de définition : chacun des intervalles $]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$ pour $k\in\mathbb{Z}$.

(Remarquer qu'on ne s'est pas inquiété de $x=\phi(t)=\arcsin t$. En effet, on a trouvé une fonction dérivable dont la dérivée est $f(x)$, ce qui est le but de la primitivation.)

$\displaystyle\int\sqrt{\mathrm{e}^y-1}\,\mathrm{d}y$ **(indication : $u=\sqrt{\mathrm{e}^y-1}$)**

Tout d'abord, la fonction $f(y)=\sqrt{\mathrm{e}^y-1}$ est définie et continue sur $[0,+\infty[$ (car il faut $\mathrm{e}^y-1\geqslant 0$). Elle admet donc des primitives sur $[0,+\infty[$.

On nous dit de faire $u=\sqrt{\mathrm{e}^y-1}$. Alors $y=\ln(u^2+1)$ et $\mathrm{d}y = \frac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u$ (on pourrait aussi calculer $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^y}{2\sqrt{\mathrm{e}^y-1}}\,\mathrm{d}y$ mais cela semble plus compliqué).

Donc $\displaystyle\int\sqrt{\mathrm{e}^y-1}\,\mathrm{d}y = \int u\frac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = 2\int\frac{u^2+1-1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = 2\int\left(1-\frac{1}{u^2+1}\right)\mathrm{d}u = 2(u-\arctan u)+C$

$= 2u-2\arctan u+C = 2\sqrt{\mathrm{e}^y-1}-2\arctan\sqrt{\mathrm{e}^y-1}+C$ $(C\in\mathbb{R})$.

Pour vérifier, on dérive : $\displaystyle 2\left(\sqrt{\mathrm{e}^y-1}-\arctan\sqrt{\mathrm{e}^y-1}\right)' = 2\left(\frac{(\mathrm{e}^y-1)'}{2\sqrt{\mathrm{e}^y-1}}-\frac{(\sqrt{\mathrm{e}^y-1})'}{1+(\sqrt{\mathrm{e}^y-1})^2}\right) = 2\left(\frac{\mathrm{e}^y}{2\sqrt{\mathrm{e}^y-1}}-\frac{\frac{\mathrm{e}^y}{2\sqrt{\mathrm{e}^y-1}}}{\mathrm{e}^y}\right)$

$\displaystyle = 2\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}^y-1}}(\mathrm{e}^y-1) = \sqrt{\mathrm{e}^y-1} = f(x)$.

Intervalles de définition : $]0,+\infty[$.

(Remarquer qu'on ne s'est pas inquiété de $y=\phi(u)=\ln(u^2+1)$. En effet, on a trouvé une fonction dérivable dont la dérivée est $f(y)$, ce qui est le but de la primitivation.)

Que se passe-t-il en $y=0$? Chacune des fonctions $2\sqrt{\mathrm{e}^y-1}$ et $2\arctan\sqrt{\mathrm{e}^y-1}$ est définie pour $y\geqslant 0$ mais n'est dérivable que pour $y>0$. Cependant, on peut vérifier que la fonction $2\sqrt{\mathrm{e}^y-1}-2\arctan\sqrt{\mathrm{e}^y-1}$ est définie pour $y\geqslant 0$, continue à droite en $y=0$ et dérivable à droite en $y=0$. Donc l'intervalle de définition est en fait $[0,+\infty[$.

— Décomposition de fractions rationnelles en éléments simples

Exercice 5.
Décomposer chacune des fractions rationnelles suivantes en éléments simples dans $\mathbb{R}$ pour en déduire une primitive (préciser les intervalles de définition).

$q_1(x) = \dfrac{1}{x^2+x-1}$

Le degré du numérateur est $\deg(1) = 0$ qui n'est pas supérieur ou égal au degré du dénominateur $\deg(x^2+x-1) = 2$, donc pas de division.
On factorise le dénominateur. Pour cela, on résout $x^2+x-1 = 0$. On a $\Delta = 5 > 0$ donc 2 racines réelles distinctes $\alpha = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ avec $\alpha < \beta$ ($-\alpha$ est le nombre d'or ; on a $\beta = -\frac{1}{\alpha} = -1-\alpha$). On rappelle que si $ax^2+bx+c = 0$ possède 2 racines réelles distinctes x_1 et x_2, alors on a la factorisation $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$.
Donc ici $x^2+x-1 = 1\,(x-\alpha)(x-\beta)$.
Alors on sait que $\dfrac{1}{x^2+x-1} \equiv \dfrac{A}{x-\alpha} + \dfrac{B}{x-\beta}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$ à trouver (le signe "$\equiv$" indique que c'est une identité et non une équation). Dénominateur commun : $\frac{1}{x^2+x-1} \equiv \frac{A(x-\beta)+B(x-\alpha)}{(x-\alpha)(x-\beta)} \equiv \frac{A(x-\beta)+B(x-\alpha)}{x^2+x-1}$, donc $1 \equiv A(x-\beta)+B(x-\alpha)$.
En faisant $x = \alpha$, on a $1 = A(\alpha-\beta)+B(0)$ donc $A = -\sqrt{5}/5$.
En faisant $x = \beta$, on a $1 = A(0)+B(\beta-\alpha)$ donc $B = \sqrt{5}/5$.
Ainsi $\frac{1}{x^2+x-1} = \frac{-\sqrt{5}/5}{x-\alpha} + \frac{\sqrt{5}/5}{x-\beta}$, donc la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ de $q_1(x)$ est $q_1(x) = \dfrac{-\sqrt{5}/5}{x-\alpha} + \dfrac{\sqrt{5}/5}{x-\beta}$.
Primitives : $\displaystyle\int q_1(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{5}}{5}\int\left(-\frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta}\right)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{5}}{5}(-\ln|x-\alpha| + \ln|x-\beta|) + C$
$= \dfrac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|x + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right| - \dfrac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|x + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right| + C$ ($C \in \mathbb{R}$).
Intervalles de définition : $]-\infty, \alpha[$ plus $]\alpha, \beta[$ plus $]\beta, +\infty[$ (car $\alpha < \beta$),
c'est-à-dire, $]-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}[$ plus $]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}[$ plus $]\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[$.

$q_2(x) = \dfrac{x^2}{(x-2)(x-3)}$

Le degré du numérateur est $\deg(x^2) = 2$ qui est supérieur ou égal au degré du dénominateur $\deg((x-2)(x-3)) = 2$, donc on commence par faire la division euclidienne de x^2 par $(x-2)(x-3) = x^2-5x+6$. On trouve $x^2 = (x^2-5x+6)Q+R$ avec $Q = 1$ et $R = 5x-6$. Donc $\dfrac{x^2}{x^2-5x+6} = \dfrac{(x^2-5x+6)Q+R}{x^2-5x+6} = Q + \dfrac{R}{x^2-5x+6} = 1 + \dfrac{5x+6}{x^2-5x+6}$.
On laisse de côté $Q = 1$, on décompose $\dfrac{5x-6}{x^2-5x+6} = \dfrac{5x-6}{(x-2)(x-3)} \equiv \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-3}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$ à trouver.
Dénominateur commun : $\frac{5x-6}{x^2-5x+6} \equiv \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)} \equiv \frac{A(x-3)+B(x-2)}{x^2-5x+6}$, donc $5x-6 \equiv A(x-3)+B(x-2)$.
En faisant $x = 2$, on a $4 = A(-1)+B(0)$ donc $A = -4$.
En faisant $x = 3$, on a $9 = A(0)+B(1)$ donc $B = 9$.
Ainsi $\frac{5x-6}{x^2-5x+6} = \frac{-4}{x-2} + \frac{9}{x-3}$ donc la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ de $q_2(x)$ est
$q_2(x) = 1 + \dfrac{-4}{x-2} + \dfrac{9}{x-3}$. *Attention à ne pas oublier de* ***rajouter*** $Q = 1$.
Primitives : $\displaystyle\int q_2(x)\,\mathrm{d}x = \int\left(1 - 4\frac{1}{x-2} + 9\frac{1}{x-3}\right)\mathrm{d}x = x - 4\ln|x-2| + 9\ln|x-3| + C$ ($C \in \mathbb{R}$).
Intervalles de définition : $]-\infty, 2[$ plus $]2, 3[$ plus $]3, +\infty[$.

$q_3(t) = \dfrac{2t-1}{t\,(t-1)^2}$

Le degré du numérateur est $\deg(2t-1) = 1$ qui n'est pas supérieur ou égal au degré du dénominateur $\deg(t\,(t-1)^2) = 3$, donc pas de division.
Le dénominateur est déjà factorisé, donc la décomposition sera $\dfrac{2t-1}{t\,(t-1)^2} \equiv \dfrac{A}{t} + \dfrac{B_1}{t-1} + \dfrac{B_2}{(t-1)^2}$ avec $A, B_1, B_2 \in \mathbb{R}$ à trouver.
Dénominateur commun : $\frac{2t-1}{t\,(t-1)^2} \equiv \frac{A(t-1)^2+B_1t(t-1)+B_2t}{t\,(t-1)^2}$, donc $2t-1 \equiv A(t-1)^2+B_1t(t-1)+B_2t$.
En faisant $t = 0$, on a $-1 = A(1)+B_1(0)+B_2(0)$ donc $A = -1$.
En faisant $t = 1$, on a $1 = A(0)+B_1(0)+B_2(1)$ donc $B_2 = 1$.

Pour trouver B_1 :

— Première méthode : On donne une autre valeur à t.
Par exemple, en faisant $t=-1$, on a $-3 = A(4)+B_1(2)+B_2(-1) = -4+2B_1-1$ donc $B_1 = 1$.

— Deuxième méthode : On dérive l'identité et l'on y remplace t par la racine multiple correspondante.
Ici $(2t-1)' \equiv (A(t-1)^2 + B_1 t(t-1) + B_2 t)'$ donne $2 \equiv 2A(t-1) + B_1(2t-1) + B_2$, et en faisant $t=1$, on a $2 = 2A(0) + B_1(1) + B_2 = B_1 + 1$ donc $B_1 = 1$.

— Troisième méthode : On considère les coefficients de la plus grande puissance de la variable.
Ici c'est t^2, et l'on a $0\,t^2 \equiv At^2 + B_1 t^2$ donc $0 = A + B_1$ et $B_1 = -A = 1$.

Ainsi $\frac{2t-1}{t\,(t-1)^2} = \frac{-1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2}$ donc la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ de $q_3(x)$ est
$q_3(x) = \dfrac{-1}{t} + \dfrac{1}{t-1} + \dfrac{1}{(t-1)^2}$.
Primitives : $\displaystyle\int q_3(t)\,\mathrm{d}t = \int\left(-\tfrac{1}{t} + \tfrac{1}{t-1} + \tfrac{1}{(t-1)^2}\right)\mathrm{d}t = -\ln|t| + \ln|t-1| + \int (t-1)^{-2}(t-1)'\,\mathrm{d}t$
$= -\ln|t| + \ln|t-1| + \dfrac{(t-1)^{-1}}{-1} + C = -\ln|t| + \ln|t-1| - \dfrac{1}{t-1} + C$ $(C\in\mathbb{R})$.
Intervalles de définition : $]-\infty, 0[$ plus $]0,1[$ plus $]1,+\infty[$.

$q_4(r) = \dfrac{r^7+1}{r^2-1}$

Le degré du numérateur est $\deg(r^7+1) = 7$ qui est supérieur ou égal au degré du dénominateur $\deg(r^2-1) = 2$, donc on commence par faire la division euclidienne de r^7+1 par r^2-1. On trouve $r^7+1 = (r^2-1)Q+R$ avec $Q = r^5+r^3+r$ et $R = r+1$. Donc $\frac{r^7+1}{r^2-1} = \frac{(r^2-1)Q+R}{r^2-1} = Q + \frac{R}{r^2-1} = r^5+r^3+r+\frac{r+1}{r^2-1}$. On laisse de côté $Q = r^5+r^3+r$, on décompose $\dfrac{r+1}{r^2-1}$. Pour cela, on factorise le dénominateur : $r^2-1 = (r-1)(r+1)$. Alors $\frac{r+1}{r^2-1} = \frac{r+1}{(r-1)(r+1)} = \frac{1}{r-1}$ et c'est fini.
Ainsi, la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ de $q_4(x)$ est $q_4(x) = r^5+r^3+r+\dfrac{1}{r-1}$.
Attention à ne pas oublier de ***rajouter*** $Q = r^5+r^3+r$.
Primitives : $\displaystyle\int q_4(r)\,\mathrm{d}r = \int\left(r^5+r^3+r+\tfrac{1}{r-1}\right)\mathrm{d}r = \frac{r^6}{6} + \frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} + \ln|r-1| + C$ $(C\in\mathbb{R})$.
Intervalles de définition : $]-\infty,1[$ plus $]1,+\infty[$. (En fait, $q_4(-1)$ n'est pas défini en principe, mais c'est évitable car $q_4(r) = \dfrac{(r^6-r^5+r^4-r^3+r^2-r+1)(r+1)}{(r-1)(r+1)} = \dfrac{r^6-r^5+r^4-r^3+r^2-r+1}{r-1}$ et l'on fait $q_4(-1) = -7/2$.)

$q_5(x) = \dfrac{5x^2-2x+3}{(x^2+1)(x-1)}$

Le degré du numérateur est $\deg(5x^2-2x+3) = 2$ qui n'est pas supérieur ou égal au degré du dénominateur $\deg((x^2+1)(x-1)) = 3$, donc pas de division.
On factorise le dénominateur. Le discriminant de x^2+1 est <0, donc x^2+1 est irréductible sur $\mathbb{R}$. Le dénominateur est donc déjà factorisé sur $\mathbb{R}$. La décomposition sera $\dfrac{5x^2-2x+3}{(x-1)(x^2+1)} \equiv \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Mx+N}{x^2+1}$ avec $A, M, N \in \mathbb{R}$ à trouver.
Dénominateur commun : $\frac{5x^2-2x+3}{(x-1)(x^2+1)} \equiv \frac{A(x^2+1)+(Mx+N)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}$, donc $5x^2-2x+3 \equiv A(x^2+1) + (Mx+N)(x-1)$.
En faisant $x=1$, on a $6 = A(2) + (M+N)(0)$ donc $A = 3$.
En faisant $x=0$, on a $3 = A(1) + N(-1) = 3 - N$ donc $N = 0$.
Pour trouver M :

— Première méthode : On donne une autre valeur à x.
Par exemple, en faisant $x=-1$, on a $10 = A(2) + (-M+N)(-2) = 6 + 2M - 0$ donc $M = 2$.

— Deuxième méthode : On considère les coefficients de la plus grande puissance de la variable.
Ici c'est x^2, et l'on a $5\,x^2 \equiv Ax^2 + Mx^2$ donc $5 = A + M$ et $M = 5 - A = 2$.

Ainsi $\frac{5x^2-2x+3}{(x-1)(x^2+1)} \equiv \frac{3}{x-1} + \frac{2x+0}{x^2+1}$ donc la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ de $q_5(x)$ est
$q_5(x) = \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{2x}{x^2+1}$.
Primitives : $\displaystyle\int q_5(x)\,\mathrm{d}x = \int\left(3\tfrac{1}{x-1} + \tfrac{2x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = 3\ln|x-1| + \ln|x^2+1| + C = 3\ln|x-1| + \ln(x^2+1) + C$ $(C\in\mathbb{R})$,
car $x^2+1 \geqslant 1 > 0\ \forall\, x\in\mathbb{R}$.
Intervalles de définition : $]-\infty,1[$ plus $]1,+\infty[$.

$q_6(z) = \dfrac{2z+1}{(z-2)^2\,(z-1)}$

Le degré du numérateur est $\deg(2z+1) = 1$ qui n'est pas supérieur ou égal au degré du dénominateur $\deg((z-2)^2\,(z-1)) = 3$, donc pas de division.

Le dénominateur $(z-2)^2\,(z-1)$ est déjà factorisé sur $\mathbb{R}$.

La décomposition sera $\dfrac{2z+1}{(z-2)^2\,(z-1)} \equiv \dfrac{A_1}{z-2} + \dfrac{A_2}{(z-2)^2} + \dfrac{B}{z-1}$ avec $A_1, A_2, B \in \mathbb{R}$ à trouver.

Dénominateur commun : $\frac{2z+1}{(z-2)^2\,(z-1)} \equiv \frac{A_1(z-2)(z-1)+A_2(z-1)+B(z-2)^2}{(z-2)^2\,(z-1)}$,

donc $2z+1 \equiv A_1(z-2)(z-1) + A_2(z-1) + B(z-2)^2$.

En faisant $z = 2$, on a $5 = A_1(0) + A_2(1) + B(0)$ donc $A_2 = 5$.

En faisant $z = 1$, on a $3 = A_1(0) + A_2(0) + B(1)$ donc $B = 3$.

Pour trouver A_1 :

— Première méthode : On donne une autre valeur à z.
Par exemple, en faisant $z = 0$, on a $1 = A_1(2) + A_2(-1) + B(4) = 2A_1 - 5 + 12$ donc $A_1 = -3$.

— Deuxième méthode : On dérive l'identité et l'on y remplace z par la racine multiple correspondante.
Ici $(2z+1)' \equiv (A_1(z-2)(z-1) + A_2(z-1) + B(z-2)^2)'$ donne $2 \equiv A_1(2z-3) + A_2(1) + B_2(2(z-2))$, et en faisant $z = 2$, on a $2 = A_1(1) + A_2(1) + B(0) = A_1 + 5$ donc $A_1 = -3$.

— Troisième méthode : On considère les coefficients de la plus grande puissance de la variable. Ici c'est z^2, et l'on a $0\,z^2 \equiv A_1 z^2 + Bz^2$ donc $0 = A_1 + B = A_1 + 3$ et $A_1 = -3$.

Ainsi $\dfrac{2z+1}{(z-2)^2\,(z-1)} \equiv \dfrac{-3}{z-2} + \dfrac{5}{(z-2)^2} + \dfrac{3}{z-1}$ donc la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ de $q_6(x)$ est $q_6(z) = \dfrac{-3}{z-2} + \dfrac{5}{(z-2)^2} + \dfrac{3}{z-1}$.

Primitives : $\displaystyle\int q_6(z)\,\mathrm{d}z = \int\left(-3\tfrac{1}{z-2} + 5(z-2)^{-2}(z-2)' + 3\tfrac{1}{z-1}\right)\mathrm{d}x$

$= -3\ln|z-2| + 5\dfrac{(z-2)^{-1}}{-1} + 3\ln|z-1| + C = -3\ln|z-2| - \dfrac{5}{z-2} + 3\ln|z-1| + C$ $(C \in \mathbb{R})$.

Intervalles de définition : $]-\infty, 1[$ plus $]1, 2[$ plus $]2, +\infty[$.

$q_7(s) = \dfrac{1}{s^2+2s+3}$

Le degré du numérateur est $\deg(1) = 0$ qui n'est pas supérieur ou égal au degré du dénominateur $\deg(s^2+2s+3) = 2$, donc pas de division.

On factorise le dénominateur s^2+2s+3. Le discriminant est < 0 donc s^2+2s+3 est irréductible sur $\mathbb{R}$. La décomposition sera $\dfrac{1}{s^2+2s+3} \equiv \dfrac{Ms+N}{s^2+2s+3}$ avec $M, N \in \mathbb{R}$ à trouver. Ici il n'y a rien à faire : $M = 0$ et $N = 1$.

Ainsi, la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ de $q_7(s)$ est $q_7(s) = \dfrac{1}{s^2+2s+3}$.

Primitives : On a $s^2+2s+3 = as^2+bs+c$ avec $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$. Donc le discriminant est $\Delta = -8$. Avec le changement de variable $s = \dfrac{t\sqrt{-\Delta}-b}{2a} = \dfrac{t\sqrt{8}-2}{2} = t\sqrt{2}-1$ on aura $\mathrm{d}s = \sqrt{2}\,\mathrm{d}t$ et $t = \dfrac{s+1}{\sqrt{2}}$, donc

$\displaystyle\int q_7(s)\,\mathrm{d}s = \int \frac{1}{s^2+2s+3}\,\mathrm{d}s = \tfrac{2}{\sqrt{8}}\int\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\arctan t + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{s+1}{\sqrt{2}}\right) + C$ $(C \in \mathbb{R})$.

Intervalles de définition : $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

$q_8(x) = \dfrac{x^2+1}{x\,(x-1)(x^2-2x+4)}$

Le degré du numérateur est $\deg(x^2+1) = 2$ qui n'est pas supérieur ou égal au degré du dénominateur $\deg(x\,(x-1)(x^2-2x+4)) = 4$, donc pas de division.

On factorise le dénominateur $x\,(x-1)(x^2-2x+4)$. Le discriminant de x^2-2x+4 est < 0 donc x^2-2x+4 est irréductible sur $\mathbb{R}$. Le dénominateur $x\,(x-1)(x^2-2x+4)$ est déjà factorisé sur $\mathbb{R}$.

La décomposition sera $\dfrac{x^2+1}{x\,(x-1)(x^2-2x+4)} \equiv \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{Mx+N}{x^2-2x+4}$ avec $A, B, M, N \in \mathbb{R}$ à trouver.

Dénominateur commun : $\frac{x^2+1}{x\,(x-1)(x^2-2x+4)} \equiv \frac{A(x-1)(x^2-2x+4)+Bx(x^2-2x+4)+(Mx+N)x(x-1)}{x\,(x-1)(x^2-2x+4)}$,

donc $x^2+1 \equiv A(x-1)(x^2-2x+4) + Bx(x^2-2x+4) + (Mx+N)x(x-1)$.

En faisant $x = 0$, on a $1 = A(-4) + B(0) + N(0)$ donc $A = -1/4$.

En faisant $x=1$, on a $2 = A(0) + B(3) + (M+N)(0)$ donc $B = 2/3$.
Pour trouver M : On considère les coefficients de la plus grande puissance de la variable. Ici c'est x^3, et l'on a $0\,x^3 \equiv Ax^3 + Bx^3 + Mx^3$ donc $0 = A + B + M = -\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + M$ et $M = -5/12$.
Pour trouver N : On donne une autre valeur à x. Par exemple, en faisant $x = -1$, on a
$2 = A(-14) + B(7) + (-M+N)(2) = -\frac{1}{4}(-14) + \frac{2}{3}(7) + (\frac{5}{12} + N)(2) = -\frac{1}{3} + 2N$ donc $N = 7/6$.
Ainsi $\dfrac{x^2+1}{x\,(x-1)(x^2-2x+4)} \equiv \dfrac{-1/4}{x} + \dfrac{2/3}{x-1} + \dfrac{(-5/12)x + (7/6)}{x^2-2x+4}$ donc la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ de $q_8(x)$ est
$q_8(x) = \dfrac{-1/4}{x} + \dfrac{2/3}{x-1} + \dfrac{-\frac{5}{12}x + \frac{7}{6}}{x^2-2x+4}$.
Primitives : $\displaystyle\int q_8(x)\,\mathrm{d}x = \int\left(-\tfrac{1}{4}\,\tfrac{1}{x} + \tfrac{2}{3}\,\tfrac{1}{x-1} - \tfrac{5}{12}\,\tfrac{x-\frac{14}{5}}{x^2-2x+4}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{5}{12}\int\frac{x-\frac{14}{5}}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x$.
Dans $\displaystyle\int\frac{x-\frac{14}{5}}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x$ on cherche d'abord un logarithme puis un arc tangente.
Pour le logarithme : On veut avoir au numérateur $(x^2-2x+4)' = 2x-2$, donc $\displaystyle\int\frac{x-\frac{14}{5}}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int\frac{2x-\frac{28}{5}}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x$
$\displaystyle = \tfrac{1}{2}\int\frac{2x-2+2-\frac{28}{5}}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int\left(\frac{2x-2}{x^2-2x+4} + \frac{2-\frac{28}{5}}{x^2-2x+4}\right)\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int\frac{(x^2-2x+4)'}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x - \tfrac{9}{5}\int\frac{1}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x$
$\displaystyle = \tfrac{1}{2}\ln(x^2-2x+4) - \tfrac{9}{5}\int\frac{1}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x$.
Pour l'arc tangente : On a $x^2-2x+4 = ax^2+bx+c$ avec $a=1$, $b=-2$, $c=4$, le discriminant est $\Delta = -12$. Avec le changement de variable $x = \dfrac{t\sqrt{-\Delta}-b}{2a} = \dfrac{t\sqrt{12}+2}{2} = t\sqrt{3}+1$ on aura $\mathrm{d}x = \sqrt{3}\,\mathrm{d}t$ et $t = \dfrac{x-1}{\sqrt{3}}$, donc
$\displaystyle\int\frac{1}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x = \tfrac{2}{\sqrt{12}}\int\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \tfrac{\sqrt{3}}{3}\arctan t + C = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + C\ (C\in\mathbb{R})$.
Finalement

$$\begin{aligned}
\int q_8(x)\,\mathrm{d}x &= \int\left(-\frac{1}{4}\,\frac{1}{x} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{x-1} - \frac{5}{12}\,\frac{x-\frac{14}{5}}{x^2-2x+4}\right)\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{5}{12}\left(\frac{1}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x - \frac{9}{5}\int\frac{1}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x\right)\\
&= -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{5}{12}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+4) - \frac{9}{5}\int\frac{1}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x\right)\\
&= -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{5}{24}\ln(x^2-2x+4) + \frac{3}{4}\int\frac{1}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{5}{24}\ln(x^2-2x+4) + \frac{3}{4}\,\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + C\\
&= -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{5}{24}\ln(x^2-2x+4) + \frac{\sqrt{3}}{4}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + C \qquad (C\in\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Intervalles de définition : $]-\infty,0[$ plus $]0,1[$ plus $]1,+\infty[$.

— Sans indication de méthode

Exercice 6.
Calculer les primitives (on précisera leurs intervalles de définition) et intégrales suivantes, en réfléchissant préalablement aux outils les plus adaptés pour chaque calcul.

6.1 $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1+\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$

La fonction $f(t) = \frac{1+\ln t}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ qui contient $[1,\mathrm{e}]$, donc on peut l'y intégrer.

Primitives : $\displaystyle\int \frac{1+\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \int (1+\ln t)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int (1+\ln t)^1(1+\ln t)'\,\mathrm{d}t = \frac{(1+\ln t)^2}{2} + C$ $(C \in \mathbb{R})$, définies sur $]0,+\infty[$.

Donc $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1+\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\left[(1+\ln t)^2\right]_1^{\mathrm{e}} = \tfrac{1}{2}\big((1+\ln \mathrm{e})^2 - (1+\ln 1)^2\big) = \frac{3}{2}$.

6.2 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

La fonction $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[-1,1]$ qui contient $[x_1,x_2] = [0,1]$, donc on peut l'y intégrer.
Primitives :
Puisque $\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$, on pense au changement de variable $x = \phi(t) = \sin t$. Alors $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$; si $x = x_1 = 0 = \phi(t_1) = \sin t_1$ on peut prendre $t_1 = 0$; si $x = x_2 = 1 = \phi(t_2) = \sin t_2$ on peut prendre $t_2 = \pi/2$.
On a $|t_1,t_2| = [0,\frac{\pi}{2}]$ et $\phi \in \mathcal{C}^1([0,\frac{\pi}{2}])$. Puis $\phi(|t_1,t_2|) = \phi([0,\frac{\pi}{2}]) = [\phi(0),\phi(\frac{\pi}{2})] = [0,1]$ (car ϕ est croissante sur $[0,\frac{\pi}{2}]$) et f est bien continue sur $[0,1]$ (en fait, $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}^0([-1,1])$; f n'est pas dérivable en -1 et 1, mais cela n'a aucune importance). Donc

$$\begin{aligned}
\int_{x=0}^{x=1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{x=x_1}^{x=x_2} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=\phi(t_1)}^{x=\phi(t_2)} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{t=t_1}^{t=t_2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t \qquad \text{(ne pas oublier de remplacer } \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t\text{)} \\
&= \int_{t=0}^{t=\pi/2} |\cos t|\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t=0}^{t=\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \qquad (\text{car } \cos t \geqslant 0 \text{ pour } t \in [0,\tfrac{\pi}{2}]) \\
&= \int_{t=0}^{t=\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t \qquad (\text{on linéarise } \cos^2 t) \\
&= \int_{t=0}^{t=\pi/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(\cos 2t)(2t)'\right)\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_{t=0}^{t=\pi/2} \\
&= (\tfrac{1}{2}\,\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{1}{4}\sin\pi) - (\tfrac{1}{2}\,0 + \tfrac{1}{4}\sin 0) \\
&= (\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{4}\,0) - (0 + \tfrac{1}{4}\,0) \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

(Toutes les primitives sont $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}2\sin t\cos t + C = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}(\sin t)\sqrt{1-\sin^2 t} + C$ $\displaystyle= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$ $(C \in \mathbb{R})$ avec l'intervalle de définition $[-1,1]$.)

6.3 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan v}{(v+1)^2}\,\mathrm{d}v$

La fonction $f(v) = \frac{\arctan v}{(v+1)^2}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ qui contient $[0,1]$, donc on peut l'y intégrer.
Primitives : On pense à se débarrasser de l'arc tangente, pour cela on fait une intégration par parties. On dérive $U(v) = \arctan v$, on primitive $V'(v) = \frac{1}{(v+1)^2} = (v+1)^{-2}(v+1)'$. Alors $U'(v) = \frac{1}{1+v^2}$ et $V(y) = \frac{(v+1)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{v+1}$ donc

$$\begin{aligned}\int \arctan v \frac{1}{(v+1)^2}\,\mathrm{d}v &= (\arctan v)(-\tfrac{1}{v+1}) - \int (\tfrac{1}{1+v^2})(-\tfrac{1}{v+1})\,\mathrm{d}v \\ &= -\frac{\arctan v}{v+1} + \int \tfrac{1}{(v^2+1)(v+1)}\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

La décomposition en éléments simples de la fraction à primitiver est $\dfrac{1}{(v^2+1)(v+1)} = \dfrac{Mv+N}{v^2+1} + \dfrac{A}{v+1}$ (car v^2+1 est irréductible sur $\mathbb{R}$), donc $1 \equiv (Mv+N)(v+1) + A(v^2+1)$. En faisant $v=-1$ et $v=0$ et en regardant les coefficients de v^2 on trouve $A = 1/2$, $N = 1/2$, $M = -1/2$. Alors $\dfrac{1}{(v^2+1)(v+1)} = \dfrac{(-1/2)v+(1/2)}{v^2+1} + \dfrac{1/2}{v+1}$. Donc

$$\begin{aligned}\int \tfrac{1}{(v^2+1)(v+1)}\,\mathrm{d}v &= \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{v+1} - \tfrac{1}{2}\int \frac{v-1}{v^2+1}\,\mathrm{d}v \\ &= \tfrac{1}{2}\ln|v+1| - \tfrac{1}{4}\int \frac{2v-2}{v^2+1}\,\mathrm{d}v \qquad \text{(on cherche à avoir } (v^2+1)' = 2v \text{ au dénominateur)} \\ &= \tfrac{1}{2}\ln|v+1| - \tfrac{1}{4}\int \frac{2v}{v^2+1}\,\mathrm{d}v + \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{v^2+1}\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2}\ln|v+1| - \frac{1}{4}\ln(v^2+1) + \frac{1}{2}\arctan v + C \qquad (C \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan v}{(v+1)^2}\,\mathrm{d}v &= -\frac{\arctan v}{v+1} + \int \frac{1}{(v^2+1)(v+1)}\,\mathrm{d}v \\ &= -\frac{\arctan v}{v+1} + \frac{1}{2}\ln|v+1| - \frac{1}{4}\ln(v^2+1) + \frac{1}{2}\arctan v + C \qquad (C \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Intervalles de définition : $]-\infty,-1[$ plus $]-1,+\infty[$ car U et V sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur ces 2 intervalles. Alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\arctan v}{(v+1)^2}\,\mathrm{d}v &= \Big[-\tfrac{\arctan v}{v+1} + \tfrac{1}{2}\ln|v+1| - \tfrac{1}{4}\ln(v^2+1) + \tfrac{1}{2}\arctan v\Big]_0^1 \\ &= \big(-\tfrac{\arctan 1}{2} + \tfrac{1}{2}\ln|2| - \tfrac{1}{4}\ln 2 + \tfrac{1}{2}\arctan 1\big) - \big(-\tfrac{\arctan 0}{1} + \tfrac{1}{2}\ln|1| - \tfrac{1}{4}\ln 1 + \tfrac{1}{2}\arctan 0\big) \\ &= \big(-\tfrac{\pi/4}{2} + \tfrac{1}{2}\ln 2 - \tfrac{1}{4}\ln 2 + \tfrac{1}{2}\tfrac{\pi}{4}\big) - \big(-\tfrac{0}{1} + \tfrac{1}{2}0 - \tfrac{1}{4}0 + \tfrac{1}{2}0\big) \\ &= \frac{\ln 2}{4}.\end{aligned}$$

6.4 $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin\theta\,\cos\theta}$

On a $1+\sin\theta\cos\theta = 0 \iff 2\sin\theta\,\cos\theta = -2 \iff \sin 2\theta = -2$ ce qui est impossible, donc la fonction $f(\theta) = \frac{1}{1+\sin\theta\,\cos\theta}$ est continue sur $\mathbb{R}$ qui contient $[\theta_1,\theta_2] = [0,\frac{\pi}{4}]$, donc on peut l'y intégrer.
Primitives : On applique les règles de Bioche. Soit $\omega(\theta) = f(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{1+\sin\theta\,\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$. Alors :

$$\begin{aligned}\omega(-\theta) &= \frac{1}{1+\sin(-\theta)\cos(-\theta)}\,\mathrm{d}(-\theta) = \frac{-1}{1-\sin\theta\,\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \neq \omega(\theta) \\ \omega(\pi-\theta) &= \frac{1}{1+\sin(\pi-\theta)\cos(\pi-\theta)}\,\mathrm{d}(\pi-\theta) = \frac{-1}{1-\sin\theta\,\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \neq \omega(\theta) \\ \omega(\pi+\theta) &= \frac{1}{1+\sin(\pi+\theta)\cos(\pi+\theta)}\,\mathrm{d}(\pi+\theta) = \frac{1}{1+\sin\theta\,\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \omega(\theta)\end{aligned}$$

donc Bioche préconise de faire $t = \tan\theta$. Alors $\theta = \phi(t) = \arctan t$ et $\mathrm{d}\theta = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$; si $\theta = \theta_1 = 0 = \phi(t_1) = \arctan t_1$ on peut prendre $t_1 = \tan 0 = 0$; si $\theta = \theta_2 = \frac{\pi}{4} = \phi(t_2) = \arctan t_2$ on peut prendre $t_2 = \tan\frac{\pi}{4} = 1$.
On a $|t_1,t_2| = [0,1]$ et $\phi \in \mathcal{C}^1([0,1])$. Puis $\phi(|t_1,t_2|) = \phi([0,1]) = [\phi(0),\phi(1)] = [0,\frac{\pi}{4}]$ (car ϕ est croissante sur $[0,1]$) et f est bien continue sur $[0,\frac{\pi}{4}]$. Donc on peut appliquer la formule de changement de variable.
On doit écrire $\frac{1}{1+\sin\theta\cos\theta}$ en fonction de $\tan\theta$. Pour cela on utilise $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$ et $\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta}$, ce qui donne

$$\frac{1}{1+\sin\theta\,\cos\theta}=\frac{1}{1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos^2\theta}=\frac{1}{1+(\tan\theta)\frac{1}{1+\tan^2\theta}},\text{ d'où}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4}\frac{1}{1+\sin\theta\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2}\frac{1}{1+\sin\theta\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int_{\theta=\phi(t_1)}^{\theta=\phi(t_2)}\frac{1}{1+\sin\theta\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int_{\theta=\phi(t_1)}^{\theta=\phi(t_2)}\frac{1}{1+(\tan\theta)\frac{1}{1+\tan^2\theta}}\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int_{t=t_1}^{t=t_2}\frac{1}{1+t\frac{1}{1+t^2}}\times\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\qquad(\text{ne pas oublier de remplacer } \mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2})\\ &= \int_{t=0}^{t=1}\frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Le discriminant de t^2+t+1 est $\Delta=-3<0$, donc il est irréductible sur $\mathbb{R}$. La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ est donc $\dfrac{1}{t^2+t+1}=\dfrac{0t+1}{t^2+t+1}$. Normalement cela devrait donner un logarithme plus un arc tangente. Mais comme le coefficient de t au numérateur est nul, il n'y a pas de logarithme. Pour l'arc tangente : On a $t^2+t+1=at^2+bt+c$ avec $a=b=c=1$, le discriminant est $\Delta=-3$. Avec le changement de variable $t=\dfrac{u\sqrt{-\Delta}-b}{2a}=\dfrac{u\sqrt{3}-1}{2}$ on aura $\mathrm{d}t=\frac{\sqrt3}{2}\,\mathrm{d}u$ et $u=\frac{2t+1}{\sqrt3}$, donc
$\displaystyle\int\frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt3}\int\frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u=\frac{2\sqrt3}{3}\arctan u+C=\frac{2\sqrt3}{3}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt3}\right)+C\ (C\in\mathbb{R}).$
Alors $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin\theta\cos\theta}=\int_0^1\frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t=\frac{2\sqrt3}{3}\left[\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt3}\right)\right]_0^1=\frac{2\sqrt3}{3}\left(\arctan\sqrt3-\arctan\frac{\sqrt3}{3}\right)$
$=\frac{2\sqrt3}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi\sqrt3}{9}.$

Remarque : Un changement de variable **affine** $x=\phi(t)=\alpha t+\beta$ avec $\alpha\neq0$ est valable partout, car ici $\phi\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Cependant, on ne peut pas dire que les primitives de $f(\theta)$ sont
$\int\frac{1}{1+\sin\theta\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{2\sqrt3}{3}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt3}\right)+C=\frac{2\sqrt3}{3}\arctan\left(\frac{2\tan\theta+1}{\sqrt3}\right)+C\ (C\in\mathbb{R})$ définies sur $\mathbb{R}$.
En effet, la fonction $F(\theta)=\frac{2\sqrt3}{3}\arctan\left(\frac{2\tan\theta+1}{\sqrt3}\right)$ n'est pas continue en $\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi$ pour $k\in\mathbb{Z}$. Le problème vient du fait que si $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ alors il n'existe pas de t tel que $\theta=\phi(t)=\arctan t$ (car l'image de ϕ est $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$). Cela n'empêche pas f d'avoir une primitive sur $\mathbb{R}$ tout entier, seulement elle est compliquée à écrire. Tout ce qu'on peut dire est que les primitives de $f(\theta)$ sont $F(\theta)+C$ $(C\in\mathbb{R})$ sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. (On peut prolonger facilement F à $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, puis il faudrait la translater aux intervalles $[-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi]$ de façon à ce qu'elle reste continue, mais cela dépasse le cadre de ce module.)

6.5 $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\theta\sqrt{\ln\theta+1}}$

Il faut $\ln\theta+1\geqslant0$ pour la racine carrée, donc $\theta\geqslant1/\mathrm{e}$. Puis il faut $\theta\neq0$ et $\sqrt{\ln\theta+1}\neq0$ pour le quotient, ce qui donne $\theta>1/\mathrm{e}$. La fonction $f(\theta)=\frac{1}{\theta\sqrt{\ln\theta+1}}$ est bien continue sur $]\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty[$ qui contient $[\theta_1,\theta_2]=[1,\mathrm{e}]$, donc on peut l'y intégrer.

— **Première méthode :** On remarque que $(\ln\theta+1)'=\frac{1}{\theta}$, et alors $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\theta\sqrt{\ln\theta+1}}=\int_1^{\mathrm{e}}(\ln\theta+1)^{-1/2}(\ln\theta+1)'\,\mathrm{d}\theta$
$\displaystyle=\left[\frac{(\ln\theta+1)^{1/2}}{1/2}\right]_1^{\mathrm{e}}=\left[2\sqrt{\ln\theta+1}\right]_1^{\mathrm{e}}=2(\sqrt{\ln\mathrm{e}+1}-\sqrt{\ln1+1})=2\sqrt2-2.$

— **Deuxième méthode :** Afin d'essayer de se débarrasser de la racine carrée, on fait le changement de variable $\ln\theta+1=t^2$, c'est-à-dire, $\theta=\phi(t)=\exp(t^2-1)$, donc $\mathrm{d}\theta=2t\exp(t^2-1)\,\mathrm{d}t$; si $\theta=\theta_1=1=\phi(t_1)=\exp(t^2-1)$ on peut prendre $t_1=1$; si $\theta=\theta_2=\mathrm{e}=\phi(t_2)=\exp(t^2-1)$ on peut prendre $t_2=\sqrt2$.
On a $|t_1,t_2|=[1,\sqrt2]$ et $\phi\in\mathcal{C}^1([1,\sqrt2])$. Puis $\phi(|t_1,t_2|)=\phi([1,\sqrt2])=[\phi(1),\phi(\sqrt2)]=[1,\mathrm{e}]$ (car ϕ est croissante sur $[1,\sqrt2]$) et f est bien continue sur $[1,\mathrm{e}]$. Donc on peut appliquer la formule de changement de variable :

$$
\begin{aligned}
\int_{\theta=1}^{\theta=\mathrm{e}} \frac{1}{\theta\sqrt{\ln\theta+1}}\,\mathrm{d}\theta &= \int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} \frac{1}{\theta\sqrt{\ln\theta+1}}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\theta=\phi(t_1)}^{\theta=\phi(t_2)} \frac{1}{\theta\sqrt{\ln\theta+1}}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{t=t_1}^{t=t_2} \frac{1}{\exp(t^2-1)\sqrt{\ln\exp(t^2-1)+1}} 2t\exp(t^2-1)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t=1}^{t=\sqrt{2}} \frac{2t}{\sqrt{t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t=1}^{t=\sqrt{2}} 2\,\mathrm{d}t \qquad (\text{car } \sqrt{t^2}=|t|=t \text{ car } t\geqslant 0) \\
&= [2t]_{t=1}^{t=\sqrt{2}} \\
&= 2\sqrt{2}-2.
\end{aligned}
$$

6.6 $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$

Il s'agit de primitiver une fraction rationnelle en x, on va donc la décomposer en éléments simples.
Le degré du numérateur est $\deg(x+1)=1$ qui n'est pas supérieur ou égal au degré du dénominateur $\deg(x^2-x+1)=2$, donc pas de division.
On factorise le dénominateur. Le discriminant de x^2-x+1 est $\Delta=-3<0$, donc x^2-x+1 est irréductible sur $\mathbb{R}$.
La décomposition en éléments simples sera $\dfrac{x+1}{x^2-x+1} \equiv \dfrac{Mx+N}{x^2-x+1}$ avec $M=N=1$. Donc rien à faire.
Dans $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$ on cherche d'abord un logarithme puis un arc tangente.
Pour le logarithme : On veut avoir au numérateur $(x^2-x+1)'=2x-1$, donc

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{2}\int \frac{2x+2-1+1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{2}\int \left(\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{3}{x^2-x+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{2}\int \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x + \tfrac{3}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \tfrac{3}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Pour l'arc tangente : On a $x^2-x+1=ax^2+bx+c$ avec $a=1$, $b=-1$, $c=1$, le discriminant est $\Delta=-3$. Avec le changement de variable $x=\dfrac{t\sqrt{-\Delta}-b}{2a}=\dfrac{t\sqrt{3}+1}{2}$ on aura $\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}t$ et $t=\frac{2x-1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)$, donc $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t=\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan t+C=\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right)+C$ $(C\in\mathbb{R})$.
Finalement

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\tfrac{3}{2}\,\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right)+C \\
&= \tfrac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right)+C \qquad (C\in\mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

Intervalles de définition : $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$.

6.7 $\displaystyle\int_0^{1/2} \arcsin x \,\mathrm{d}x$

La fonction $f(x) = \arcsin x$ est continue sur $[-1, 1]$ qui contient $[0, \frac{1}{2}]$, donc on peut l'y intégrer. On fait une intégration par parties. On dérive $u(x) = \arcsin x$, on primitive $v'(x) = 1$. Alors $u'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $v(x) = x$ et

$$\begin{aligned}\int \arcsin x \,\mathrm{d}x &= (\arcsin x)(x) - \int (\tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}})(x)\,\mathrm{d}x \\ &= x\arcsin x + \tfrac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1/2}(1-x^2)'\,\mathrm{d}x \\ &= x\arcsin x + \tfrac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2} + C \\ &= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \qquad (C \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Intervalles de définition : $[-1, 1]$.

Alors $\displaystyle\int_0^{1/2} \arcsin x \,\mathrm{d}x = \Big[x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}\Big]_0^{1/2} = \big(\tfrac{1}{2}\arcsin\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{3}{4}}\big) - \big(0\arcsin 0 + \sqrt{1}\big) = \big(\tfrac{1}{2}\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\big) - \big(0+1\big)$
$\displaystyle= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$

6.8 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}z}{1+z^3}$

Il s'agit de primitiver une fraction rationnelle en z, on va donc la décomposer en éléments simples.
Le degré du numérateur est $\deg(1) = 0$ qui n'est pas supérieur ou égal au degré du dénominateur $\deg(1+z^3) = 3$, donc pas de division.
On factorise le dénominateur. Pour cela, on résout $z^3 + 1 = 0$; c'est $z^3 = -1$, dont une solution évidente est $z = -1$. On divise $z^3 + 1$ par $z - (-1) = z + 1$, on trouve $z^2 - z + 1$. Le discriminant de $z^2 - z + 1$ est $\Delta = -3 < 0$, donc $z^2 - z + 1$ est irréductible sur $\mathbb{R}$. La factorisation du dénominateur sur $\mathbb{R}$ est donc $z^3 + 1 = (z+1)(z^2 - z + 1)$.
La décomposition en éléments simples sera $\displaystyle\frac{1}{1+z^3} = \frac{1}{(z+1)(z^2-z+1)} \equiv \frac{A}{z+1} + \frac{Mz+N}{z^2-z+1}$ avec $A, M, N \in \mathbb{R}$ à trouver.
Dénominateur commun : $\frac{1}{(z+1)(z^2-z+1)} \equiv \frac{A(z^2-z+1)+(Mz+N)(z+1)}{(z+1)(z^2-z+1)}$, donc $1 \equiv A(z^2 - z + 1) + (Mz + N)(z + 1)$.
En faisant $z = -1$, on a $1 = A(3) + (-M + N)(0)$ donc $A = 1/3$.
En faisant $z = 0$, on a $1 = A(1) + N(1) = \frac{1}{3} + N$ donc $N = 2/3$.
Pour trouver M :

- Première méthode : On donne une autre valeur à z.
  Par exemple, en faisant $z = 1$, on a $1 = A(1) + (M + N)(2) = \frac{1}{3} + 2M + \frac{4}{3}$ donc $M = -1/3$.
- Deuxième méthode : Les coefficients de la plus grande puissance de la variable, ici z^2, donnent $0\,z^2 \equiv Az^2 + Mz^2$ donc $0 = A + M$ et $M = -1/3$.

La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ est donc $\displaystyle\frac{1}{1+z^3} = \frac{1/3}{z+1} + \frac{(-1/3)z + (2/3)}{z^2-z+1}$.

Primitives :

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+z^3}\,\mathrm{d}z &= \int \left(\tfrac{1}{3}\frac{1}{z+1} - \tfrac{1}{3}\frac{z-2}{z^2-z+1}\right)\mathrm{d}z \\ &= \tfrac{1}{3}\ln|z+1| - \tfrac{1}{3}\int \frac{z-2}{z^2-z+1}\,\mathrm{d}z \qquad \text{(pour le log, on veut avoir } (z^2-z+1)' = 2z-1 \text{ au numérateur)} \\ &= \tfrac{1}{3}\ln|z+1| - \tfrac{1}{6}\int \frac{2z-4}{z^2-z+1}\,\mathrm{d}z \\ &= \tfrac{1}{3}\ln|z+1| - \tfrac{1}{6}\int \frac{2z-4-1+1}{z^2-z+1}\,\mathrm{d}z \\ &= \tfrac{1}{3}\ln|z+1| - \tfrac{1}{6}\int \left(\frac{2z-1}{z^2-z+1} + \frac{-3}{z^2-z+1}\right)\mathrm{d}z \\ &= \tfrac{1}{3}\ln|z+1| - \tfrac{1}{6}\int \frac{(z^2-z+1)'}{z^2-z+1}\,\mathrm{d}z + \tfrac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2-z+1} \\ &= \tfrac{1}{3}\ln|z+1| - \tfrac{1}{6}\ln(z^2-z+1) + \tfrac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2-z+1}.\end{aligned}$$

Pour l'arc tangente : On a $z^2 - z + 1 = az^2 + bz + c$ avec $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$, le discriminant est $\Delta = -3$. Avec le changement de variable $z = \dfrac{t\sqrt{-\Delta} - b}{2a} = \dfrac{t\sqrt{3}+1}{2}$ on aura $\mathrm{d}z = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}t$ et $t = \frac{2z-1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}(2z-1)$, donc $\displaystyle\int \frac{1}{z^2-z+1}\,\mathrm{d}z = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan t + C = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2z-1)\right) + C$ ($C \in \mathbb{R}$). Finalement

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+z^3}\,\mathrm{d}z &= \tfrac{1}{3}\ln|z+1| - \tfrac{1}{6}\ln(z^2-z+1) + \tfrac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2-z+1} \\
&= \tfrac{1}{3}\ln|z+1| - \tfrac{1}{6}\ln(z^2-z+1) + \tfrac{1}{2}\,\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2z-1)\right) + C \\
&= \frac{1}{3}\ln|z+1| - \frac{1}{6}\ln(z^2-z+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2z-1)\right) + C \qquad (C \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Intervalles de définition : $]-\infty, -1[$ plus $]-1, +\infty[$.

Exercice 7.

Calculer les intégrales suivantes.

$J_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^4 t \,\mathrm{d}t$

La fonction $f(t) = \sin^3 t \cos^4 t$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
Primitives : On applique les règles de Bioche. Soit $\omega(t) = f(t)\,\mathrm{d}t = \sin^3 t \cos^4 t\,\mathrm{d}t$. Alors :

$$\begin{aligned}
\omega(-t) &= \sin^3(-t)\cos^4(-t)\,\mathrm{d}(-t) = \sin^3 t\cos^4 t\,\mathrm{d}t = \omega(t) \\
\omega(\pi-t) &= \sin^3(\pi-t)\cos^4(\pi-t)\,\mathrm{d}(\pi-t) = -\sin^3 t\cos^4 t\,\mathrm{d}t \neq \omega(t) \\
\omega(\pi+t) &= \sin^3(\pi+t)\cos^4(\pi+t)\,\mathrm{d}(\pi+t) = -\sin^3 t\cos^4 t\,\mathrm{d}t \neq \omega(t)
\end{aligned}$$

donc Bioche préconise de faire $u = \cos t$. Alors $t = \phi(u) = \arccos u$ et $\mathrm{d}u = -\sin t\,\mathrm{d}t$ (c'est mieux que de calculer $\mathrm{d}t = (\arccos u)'\,\mathrm{d}u$) ; si $t = t_1 = 0 = \phi(u_1) = \arccos u_1$ on peut prendre $u_1 = \cos 0 = 1$; si $t = t_2 = \frac{\pi}{2} = \phi(u_2) = \arccos u_2$ on peut prendre $u_2 = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.
On a $|u_1, u_2| = [0,1]$ mais $\phi \notin \mathcal{C}^1([0,1])$ (en fait, $\arccos \in \mathcal{C}^0([-1,1])$ et $\arccos \in \mathcal{C}^\infty(]-1,1[)$, mais elle n'est pas dérivable en ± 1).
On va donc primitiver formellement et vérifier ce qu'on trouvera.
On doit prendre un $\sin t$ pour avoir $\sin t\,\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$. Puis on écrit $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ pour n'avoir que des $\cos t$:

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 t\cos^4 t\,\mathrm{d}t &= \int \sin^2 t\cos^4 t\sin t\,\mathrm{d}t \\
&= \int (1-\cos^2 t)\cos^4 t\sin t\,\mathrm{d}t \\
&= \int (1-u^2)u^4(-\mathrm{d}u) \\
&= \int (-u^4+u^6)\,\mathrm{d}u \\
&= \tfrac{u^7}{7} - \tfrac{u^5}{5} + C \\
&= \frac{1}{7}\cos^7 t - \frac{1}{5}\cos^5 t + C \qquad (C \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

On a que $F(t) = \frac{1}{7}\cos^7 t - \frac{1}{5}\cos^5 t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée
$F'(t) = \cos^6 t\,(-\sin t) - \cos^4 t\,(-\sin t) = \sin t\,\cos^4 t\,(1-\cos^2 t) = \sin t\,\cos^4 t\,\sin^2 t = f(t)$.
Donc toutes les primitives de $f(t)$ sont bien $F(t) + C$ ($C \in \mathbb{R}$).
Alors $J_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos^4 t\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{7}\cos^7 t - \tfrac{1}{5}\cos^5 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\tfrac{1}{7}\cos^7\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{5}\cos^5\tfrac{\pi}{2}\right) - \left(\tfrac{1}{7}\cos^7 0 - \tfrac{1}{5}\cos^5 0\right)$
$= \left(\tfrac{1}{7}(0)^7 - \tfrac{1}{5}(0)^5\right) - \left(\tfrac{1}{7}(1)^7 - \tfrac{1}{5}(1)^5\right) = \dfrac{2}{35}$.

$J_2 = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin u \cos^2 u \, \mathrm{d}u$

La fonction $f(u) = \sin u \cos^2 u$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Ainsi, on peut l'intégrer sur $[0, \pi]$.

Primitives : On applique les règles de Bioche. Soit $\omega(u) = f(u)\,\mathrm{d}u = \sin u \cos^2 u \,\mathrm{d}u$. Alors :

$$\omega(-u) = \sin(-u)\cos^2(-u)\,\mathrm{d}(-u) = \sin u \cos^2 u\,\mathrm{d}u = \omega(u)$$
$$\omega(\pi - u) = \sin(\pi - u)\cos^2(\pi - u)\,\mathrm{d}(\pi - u) = -\sin u \cos^2 u\,\mathrm{d}u \neq \omega(u)$$
$$\omega(\pi + u) = \sin(\pi + u)\cos^2(\pi + u)\,\mathrm{d}(\pi + u) = -\sin u \cos^2 u\,\mathrm{d}u \neq \omega(u)$$

donc Bioche préconise de faire $t = \cos u$. Alors $u = \phi(t) = \arccos t$ et $\mathrm{d}t = -\sin u\,\mathrm{d}u$; si $u = u_1 = 0 = \phi(t_1) = \arccos t_1$ on peut prendre $t_1 = \cos 0 = 1$; si $u = u_2 = \pi = \phi(t_2) = \arccos t_2$ on peut prendre $t_2 = \cos \pi = -1$.

On a $|t_1, t_2| = [-1, 1]$ mais $\phi \notin \mathcal{C}^1([-1,1])$ (en fait, $\arccos \in \mathcal{C}^0([-1,1])$ et $\arccos \in \mathcal{C}^\infty(]-1,1[)$, mais elle n'est pas dérivable en ± 1).

On va donc primitiver formellement et vérifier ce qu'on trouvera.

On prend $\sin u$ pour avoir $\sin u\,\mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}
\int \sin u \cos^2 u\,\mathrm{d}u &= -\int \cos^2 u(-\sin u\,\mathrm{d}u) \\
&= -\int t^2\,\mathrm{d}t \\
&= -\tfrac{t^3}{3} + C \\
&= -\frac{1}{3}\cos^3 u + C \qquad (C \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

On a que $F(u) = -\frac{1}{3}\cos^3 u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $F'(u) = -\cos^2 u\,(-\sin u) = f(u)$. Donc toutes les primitives de $f(u)$ sont bien $F(u) + C$ $(C \in \mathbb{R})$.

Alors $J_2 = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin u \cos^2 u\,\mathrm{d}u = -\tfrac{1}{3}\left[\cos^3 u\right]_0^{\pi} = -\tfrac{1}{3}\left(\cos^3 \pi - \cos^3 0\right) = -\tfrac{1}{3}\left((-1)^3 - (1)^3\right) = \frac{2}{3}$.

Remarque : En fait, on peut primitiver directement :

$\displaystyle\int \sin u \cos^2 u\,\mathrm{d}u = -\int (\cos u)^2 (\cos u)'\,\mathrm{d}u = -\frac{(\cos u)^3}{3} + C$ $(C \in \mathbb{R})$.

$J_3 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin^2 w\, \cos^3 w\,\mathrm{d}w$

La fonction $f(w) = \sin^2 w\, \cos^3 w$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Ainsi, on peut l'intégrer sur $[w_1, w_2] = [0, \frac{\pi}{4}]$.

Primitives : On applique les règles de Bioche. Soit $\omega(w) = f(w)\,\mathrm{d}w = \sin^2 w\, \cos^3 w\,\mathrm{d}w$. Alors :

$$\omega(-w) = \sin^2(-w)\cos^3(-w)\,\mathrm{d}(-w) = -\sin^2 w\, \cos^3 w\,\mathrm{d}w \neq \omega(w)$$
$$\omega(\pi - w) = \sin(\pi - w)\cos^2(\pi - w)\,\mathrm{d}(\pi - w) = \sin^2 w\, \cos^3 w\,\mathrm{d}w = \omega(w)$$
$$\omega(\pi + w) = \sin(\pi + w)\cos^2(\pi + w)\,\mathrm{d}(\pi + w) = -\sin^2 w\, \cos^3 w\,\mathrm{d}w \neq \omega(w)$$

donc Bioche préconise de faire $t = \sin w$. Alors $w = \phi(t) = \arcsin t$ et $\mathrm{d}t = \cos w\,\mathrm{d}w$; si $w = w_1 = 0 = \phi(t_1) = \arcsin t_1$ on peut prendre $t_1 = \sin 0 = 0$; si $w = w_2 = \frac{\pi}{4} = \phi(t_2) = \arcsin t_2$ on peut prendre $t_2 = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On a $|t_1, t_2| = [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ et $\phi \in \mathcal{C}^1([0, \frac{\sqrt{2}}{2}])$ (en fait, $\arcsin \in \mathcal{C}^0([-1,1])$ et $\arcsin \in \mathcal{C}^\infty(]-1,1[)$, mais elle n'est pas dérivable en ± 1).

Puis $\phi(|t_1, t_2|) = \phi([0, \frac{\sqrt{2}}{2}]) = [\phi(0), \phi(\frac{\sqrt{2}}{2})] = [0, \frac{\pi}{4}]$ (car ϕ est croissante sur $[0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$) et f est bien continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Donc on peut appliquer la formule de changement de variable.

On doit prendre un $\cos w$ pour avoir $\cos w\,\mathrm{d}w = \,\mathrm{d}t$. Puis on écrit $\cos^2 w = 1 - \sin^2 w$ pour n'avoir que des $\sin w$:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \sin^2 w\, \cos^3 w\, \mathrm{d}w &= \int_{w=w_1}^{w_2=\pi/4} \sin^2 w\, \cos^2 w \cos w\, \mathrm{d}w \\
&= \int_{w=\phi(t_1)}^{w=\phi(t_2)} \sin^2 w\,(1-\sin^2 w)(\cos w\, \mathrm{d}w) \\
&= \int_{t=t_1}^{t=t_2} t^2(1-t^2)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_{t=0}^{t=\sqrt{2}/2} (t^2-t^4)\, \mathrm{d}t \\
&= \left[\tfrac{t^3}{3}-\tfrac{t^5}{5}\right]_{t=0}^{t=\sqrt{2}/2} \\
&= \left(\tfrac{1}{3}(\tfrac{\sqrt{2}}{2})^3-\tfrac{1}{5}(\tfrac{\sqrt{2}}{2})^5\right)-\left(\tfrac{1}{3}(0)^3-\tfrac{1}{5}(0)^5\right) \\
&= \tfrac{\sqrt{2}}{12}-\tfrac{\sqrt{2}}{40}
\end{aligned}
$$

Donc $J_3 = \dfrac{7\sqrt{2}}{120}$.

En primitivant formellement, on aura $\displaystyle\int \sin^2 w \cos^3 w\, \mathrm{d}w = \int (t^2-t^4)\, \mathrm{d}t = \tfrac{t^3}{3}-\tfrac{t^5}{5}+C = \tfrac{1}{3}\sin^3 w - \tfrac{1}{5}\sin^5 w + C$ ($C \in \mathbb{R}$). On a que $F(w) = \frac{1}{3}\sin^3 w - \frac{1}{5}\sin^5 w$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $F'(w) = \sin^2 w \cos w - \sin^4 w \cos w = \sin^2 w\,(\cos w)\,(1-\sin^2 w) = f(w)$. Donc toutes les primitives de $f(w)$ sont $F(w)+C$ ($C \in \mathbb{R}$).

$J_4 = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 u\, \cos^2 u\, \mathrm{d}u$

La fonction $f(u) = \sin^2 u\, \cos^2 u$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Ainsi, on peut l'intégrer sur $[0,\pi]$.

Primitives : On applique les règles de Bioche. Soit $\omega(u) = f(u)\, \mathrm{d}u = \sin^2 u\, \cos^2 u\, \mathrm{d}u$. Alors :

$$
\begin{aligned}
\omega(-u) &= \sin^2(-u)\cos^2(-u)\,\mathrm{d}(-u) = -\sin^2 u\, \cos^2 u\, \mathrm{d}u \neq \omega(u) \\
\omega(\pi-u) &= \sin^2(\pi-u)\cos^2(\pi-u)\,\mathrm{d}(\pi-u) = -\sin^2 u\, \cos^2 u\, \mathrm{d}u \neq \omega(u) \\
\omega(\pi+u) &= \sin(\pi+u)\cos^2(\pi+u)\,\mathrm{d}(\pi+u) = \sin^2 u\, \cos^2 u\, \mathrm{d}u = \omega(u)
\end{aligned}
$$

donc Bioche préconise de faire $t = \tan u$. Alors $u = \phi(t) = \arctan t$ et $\mathrm{d}u = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$; si $u = u_1 = 0 = \phi(t_1) = \arctan t_1$ on peut prendre $t_1 = \tan 0 = 0$; si $u = u_2 = \pi = \phi(t_2) = \arctan t_2$ alors t_2 n'existe pas, car $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
On ne peut donc pas appliquer la formule de changement de variable (en tout cas, pas telle quelle).
Si l'on essaye de primitiver formellement, on aura (en écrivant $\sin^2 u$ et $\cos^2 u$ en fonction de $\tan u$)
$\displaystyle\int \sin^2 u\, \cos^2 u\, \mathrm{d}u = \int \frac{\tan^2 u}{1+\tan^2 u} \times \frac{1}{1+\tan^2 u}\, \mathrm{d}u = \int \frac{t^2}{1+t^2} \times \frac{1}{1+t^2} \times \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = \int \frac{t^2}{(1+t^2)^3}\, \mathrm{d}t$
qui est la primitive d'une fraction rationnelle en t, donc faisable en principe, mais qui est trop compliquée.
La décomposition en éléments simples est $\frac{t^2}{(1+t^2)^3} = \frac{0t+0}{1+t^2} + \frac{0t+1}{(1+t^2)^2} + \frac{0t-1}{(1+t^2)^3}$, puis avec le changement de variable $t = \tan v$ on aura $\displaystyle\int\left(\tfrac{1}{(1+t^2)^2} - \tfrac{1}{(1+t^2)^3}\right)\mathrm{d}t = \int (\cos^2 v - \cos^4 v)\,\mathrm{d}v = \int (\sin v\, \cos v)^2\, \mathrm{d}v = \tfrac{1}{4}\int \sin^2 2v\, \mathrm{d}v = \tfrac{1}{4}\int \tfrac{1-\cos 4v}{2}\, \mathrm{d}v = \tfrac{1}{8}v - \tfrac{1}{32}\sin 4v + C$ puis il faudrait revenir à t puis à u puis vérifier qu'on a bien une primitive de $f(u)$ ...
On va donc suivre le conseil de **linéariser** la fonction $f(u)$:
$f(u) = \sin^2 u \cos^2 u = \dfrac{1-\cos 2u}{2} \times \dfrac{1+\cos 2u}{2} = \frac{1}{4}(1-\cos^2 2u)$ qu'on linéarise encore, puisque $\cos^2 2u = \dfrac{1+\cos 4u}{2}$.
donc $f(u) = \frac{1}{4}(1-\cos^2 2u) = \frac{1}{4}\left(1-\dfrac{1+\cos 4u}{2}\right) = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4u) = \frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos 4u$ (tout ce qu'on a fait c'est appliquer des identités trigonométrique pour écrire f autrement). Alors
$\displaystyle\int f(u)\, \mathrm{d}u = \tfrac{1}{8}\int (1-\cos 4u)\, \mathrm{d}u = \tfrac{1}{8}\int \left(1-\tfrac{1}{4}(\cos 4u)(4u)'\right)\mathrm{d}u = \tfrac{1}{8}(u-\tfrac{1}{4}\sin 4u)+C = \tfrac{1}{8}u - \tfrac{1}{32}\sin 4u + C$ ($C \in \mathbb{R}$).
Intervalles de définition : $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$.
Alors $J_4 = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 u\, \cos^2 u\, \mathrm{d}u = \left[\tfrac{1}{8}u - \tfrac{1}{32}\sin 4u\right]_0^{\pi} = \left(\tfrac{1}{8}\pi - \tfrac{1}{32}\sin 4\pi\right) - \left(\tfrac{1}{8}0 - \tfrac{1}{32}\sin 0\right) = \left(\tfrac{1}{8}\pi - \tfrac{1}{32}0\right) - \left(\tfrac{1}{8}0 - \tfrac{1}{32}0\right) = \dfrac{\pi}{8}$.