Groupes et géométrie, feuille 9

N. Perrin

À rendre le mercredi 08.04.2020

Correction le jeudi 09.04.2020

Exercice 1 (10 Points) Montrer que toute permutation d'ordre 10 dans $\mathfrak{S}_8$ est impaire.

Exercice 2 (30 Points) Formule de Burnside-Frobenius. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. Montrer que le nombre d'orbites de l'action de G dans X est égal à

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|,$$

où $X^g = \{x \in X | \ g \cdot x = x\}$.
Indication : on pourra calculer le cardinal de l'ensemble $\{(x, g) \in X \times G \mid g\cdot x = x\}$ de deux manières différentes.

Exercice 3 ($4 \times 5 = 20$ Points) Soit p un nombre premier et $G = \mathfrak{S}_p$.

(i) Donner un p-sous-groupe de Sylow de G.

(ii) Combien G a-t-il de p-sous-groupes de Sylow ?

(iii) On suppose que $p = 5$. Donner un 2-sous-groupe de Sylow et un 3-sous-groupe de Sylow de G.

(iv) On suppose que $p = 5$. Donner le nombre de 2-sous-groupes de Sylow et le nombre de 3-sous-groupes de Sylow de G.

Exercice 4 (30 Points) Donner tous les sous-groupes de Sylow de $\mathfrak{A}_5$.