

Groupes et géométrie, feuille 8

N. Perrin

À rendre le mercredi 01.04.2020

Correction le jeudi 02.04.2020

Exercice 1 (20 × 5 = 100 Points) Soit $n \geq 3$ un entier. On considère les matrices suivantes de $\text{GL}_2(\mathbb{R})$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \tau = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}.$$

On note G le sous-groupe de $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ engendré par σ et τ , on note H le sous-groupe de G engendré par σ et K le sous-groupe engendré par τ : $G = \langle \sigma, \tau \rangle$, $H = \langle \sigma \rangle$, $K = \langle \tau \rangle$. On pose $K' = \{g \in G \mid \det(g) = 1\}$ et on définit les vecteurs X_0 et Y_0 de \mathbb{R}^2 par

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } Y_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (i) Donner l'ordre de σ .
- (ii) Donner une interprétation géométrique pour τ et donner son ordre.
- (iii) Si G est d'ordre fini, que peut-on dire sur son ordre ?
- (iv) Montrer que $\sigma\tau = \tau^{n-1}\sigma$.
- (v) Donner tous les éléments de G , H et K .
- (vi) Combien y a-t-il de classe à gauche de G modulo H ?
- (vii) Décrire G/H .
- (viii) A-t-on $H \triangleleft G$? Si oui décrire le groupe quotient G/H .
- (ix) A-t-on $K \triangleleft G$? Si oui décrire le groupe quotient G/K .
- (x) Le sous-ensemble K' de G est-il un sous-groupe de G ? Si oui, a-t-on $K' \triangleleft G$?
- (xi) Comparer K et K' .
- (xii) Existe-t-il un sous-groupe de G isomorphe à G/K ?
- (xiii) Calculer $D(G)$. À quel groupe est isomorphe $G/D(G)$?

- (xiv) Montrer que la multiplication des matrices définit une action $G \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,
 $(M, X) \mapsto M \cdot X = MX$.
- (xv) L'action est-elle transitive ?
- (xvi) L'action est-elle fidèle ?
- (xvii) Quels sont les points fixes de l'action ?
- (xviii) Quel est le stabilisateur G_{X_0} du vecteur X_0 ?
- (xix) Décrire l'orbite du vecteur X_0 .
- (xx) Quel est le stabilisateur G_S du segment $S = [X_0 Y_0]$.