Groupes et géométrie, feuille 6

N. Perrin

À rendre le mercredi 18.03.2020

Correction le jeudi 20.03.2020

Exercice 1 ($7 \times 5 = 35$ Points) Soit A un anneau commutatif et n un entier.

(i) On note $A^\times$ l'ensemble des éléments inversibles de A. Montrer que $(A^\times, \times)$ est un groupe commutatif. Pour $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on note $U(n)$ le groupe $A^\times$ et on note $\varphi(n)$ son ordre.

(ii) Montrer que $U(n) = \{[d] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid d \text{ est premier avec } n\}$.

(iii) Montrer que $U(n)$ est cyclique pour $n \in \{2, 3, 5, 7\}$ mais que $U(8)$ n'est pas cyclique.

(iv) Montrer que si m et n sont premiers entre eux, alors $U(mn) \simeq U(m) \times U(n)$.

(v) Montrer que si m et n sont premiers entre eux, alors $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

(vi) Le groupe $U(15)$ est-il cyclique ?

(vii) Montrer que $U(18)$ est cyclique et donner tous ses générateurs.

Exercice 2 ($3 \times 5 = 15$ Points) Soit $\sigma = (3\ 7\ 1\ 4\ 2\ 6\ 9\ 8\ 5\ 10) \in \mathfrak{S}_{10}$.

(i) Écrire σ comme composée de cycles à supports disjoints.

(ii) Donner l'ordre de σ ainsi que $\varepsilon(\sigma)$ sa signature.

(iii) Calculer σ^{2019}.

Exercice 3 ($2 \times 10 = 20$ Points) Soit $G = \mathfrak{S}_4$.

(i) Calculer $D(G)$.

(ii) Calculer $D(\mathfrak{A}_4)$.

Exercice 4 ($3 \times 10 = 30$ Points) Soit n un entier

(i) Montrer que tout 3-cycle est un carré, c'est-à-dire de la forme σ^2 pour un $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

(ii) Montrer que $\mathfrak{A}_n = \langle \sigma^2 \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n \rangle$.

(iii) Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est le seul sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_n$.