Groupes et géométrie,
feuille 5

N. Perrin

À rendre le mercredi 11.03.2020

Correction le jeudi 12.03.2020

Exercice 1 (10 Points) Soit G un groupe et $H \subset G$ un sous-groupe. Montrer que

$$N = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$$

est un sous-groupe distingué de G.

Exercice 2 ($2 \times 10 = 20$ Points) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier et soit G un groupe d'ordre n. Soit p un diviseur premier de n.

(i) Montrer que G a au plus $\frac{n-1}{p-1}$ sous-groupes d'ordre p.

(ii) Donner un exemple ou l'on a exactement $\frac{n-1}{p-1}$ sous-groupes d'ordre p.

Exercice 3 ($4 \times 5 = 20$ Points) Groupe $\mathfrak{S}_3$.

(i) Rappeler $|\mathfrak{S}_3|$.

(ii) Montrer (sans calcul si possible) que $\mathfrak{S}_3$ n'a pas d'élément d'ordre 6.

(iii) Montrer que $\mathfrak{S}_3$ contient un unique sous-groupe d'ordre 3 et décrire les sous-groupes d'ordre 2.

(iv) Donner tous les sous-groupes de $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 4 ($5 + 10 + 3 \times 5 = 30$ Points) Soit $G = \mathfrak{S}_4$ le groupe des permutations d'un ensemble à 4 éléments et soit $\mathfrak{A}_4$ son sous-groupe alterné. Soit $V_4 = \{\mathrm{Id}, (2143), (3412), (4321)\} \subset \mathfrak{S}_4$.

(i) Montrer que V_4 est un sous-groupe de $\mathfrak{A}_4$ et que l'on a $V_4 \lhd \mathfrak{A}_4 \lhd \mathfrak{S}_4$.

(ii) Déterminer à quels groupes bien connus les groupes V_4, $\mathfrak{A}_4/V_4$ und $\mathfrak{S}_4/\mathfrak{A}_4$ sont isomorphes.

(iii) Soit $H = \{\mathrm{Id}, (2314), (3124)\} \subset \mathfrak{S}_4$. Montrer que H est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$. Est-il distingué ?

(iv) Montrer que $H \subset \mathfrak{A}_4$.

(v) Montrer que $\mathfrak{A}_4 = V_4H$ et que $V_4 \cap H = \{1\}$.

Exercice 5 ($2 \times 10 = 20$ Points) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

(i) Donner un élément d'ordre n de $\mathfrak{S}_n$.

(ii) Soit $H \triangleleft \mathfrak{S}_n$ un sous-groupe distingué contenant une transposition. Montrer que $H = \mathfrak{S}_n$.