# Groupes et géométrie,
# feuille 4

N. Perrin

## À rendre le mercredi 04.03.2020

## Correction le jeudi 05.03.2020

**Exercice 1 ($2 \times 5 + 10 = 20$ Points)** Soit $K$ un corps. On note $B \subset \mathrm{GL}_2(K)$ le sous-groupe de matrices triangulaires supérieures, on note $T \subset B$ le sous-groupe des matrices diagonales et on note $U \subset B$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures ayant un 1 sur la diagonale. Rappelons que l'on a vu (cf. TD précédent) que $U \triangleleft B$ et $B/U \simeq T$.

On suppose maintenant que $K = \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est le corps ayant 2 éléments.

(i) Déterminer les ordres $|\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)|$, $|B|$, $|T|$ et $|U|$ des groupes $G$, $B$, $T$ et $U$.

(ii) On définit les vecteurs suivants :

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et on pose $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Montrer que $f(X) = X$ pour tout $f \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$.

(iii) Soit $\varphi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \to \mathrm{Bij}(X)$ l'application définie par $\varphi(f) : X \to X$, $x_i \mapsto f(x_i)$ pour $i \in [1, 3]$. Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme de groupes.

**Exercice 2 (20 Points)** On note $D_8$ le groupe des isométries qui préservent un carré. Montrer que les groupes

$$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad D_8, \quad \mathbb{H},$$

sont deux-à-deux non isomorphes. Lesquels sont commutatifs ?

**Exercice 3 ($6 \times 6 = 30$ Points)** Soit $G$ un groupe fini d'ordre $|G|$ et soit $p$ un facteur premier de $|G|$.

(i) Supposons que $G$ est un groupe cyclique. Montrer qu'il existe un élément $g \in G$ tel que $\mathrm{ord}(g) = p$.

(ii) On suppose maintenant que $G$ est commutatif.

   (a) Soit $H \subset G$ un sous-groupe, montrer que $H \triangleleft G$.

   (b) Soit $H \subset G$ un sous-groupe et soit $g \in G$ tel que $p$ divise l'ordre de $[g] \in G/H$. Montrer que $p$ divise $\mathrm{ord}(g)$.

(c) Montrer par récurrence sur $|G|$ qu'il existe un élément $g \in G$ tel que $p$ divise $\mathrm{ord}(g)$.

(d) Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $\mathrm{ord}(g) = p$.

(iii) Montrer en donnant un exemple, que si $n$ est un facteur non premier de $|G|$ alors il n'existe pas nécessairement d'élément d'ordre $n$ (même si $G$ est commutatif).

**Exercice 4 ($3 \times 10 = 30$ Points)** Un sous-groupe $H \subset G$ est dit **caractéristique** si pour tout automorphisme $\varphi : G \to G$, on a $\varphi(H) = H$.

(i) Montrer que si $H \subset G$ est un sous-groupe caractéristique alors $H \triangleleft G$.

(ii) Soit $H \subset G$ un sous-groupe caractéristique de $G$ et soit $K \subset H$ un sous-groupe caractéristique de $H$. Montrer que $K$ est un sous-groupe caractéristique de $G$.

(iii) Soit $H \triangleleft G$ un sous-groupe distingué de $G$ et soit $K \subset H$ un sous-groupe caractéristique de $H$. Montrer que $K \triangleleft G$.