

Groupes et géométrie, feuille 3

N. Perrin

À rendre le mercredi 26.02.2020

Correction le jeudi 27.02.2020

Exercice 1 (10 Points) Le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ est-il monogène ?

Exercice 2 (10 Points) Soit n un entier non nul. Donner tous les morphismes de groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Exercice 3 (10 Points) Soit G un groupe tel que pour tout sous-groupe $H \subsetneq G$, le sous-groupe H est cyclique. Le groupe G est-il cyclique ?

Exercice 4 ($3 \times 10 = 30$ Points) On rappelle que le centre d'un groupe G est défini par $Z(G) = \{g \in G \mid gh = hg \text{ pour tout } h \in G\}$. On rappelle également que $\mathfrak{S}_n$ est le groupe des permutations de l'ensemble $[1, n] = \{1, \dots, n\}$.

- (i) Déterminer $Z(\mathfrak{S}_1)$ et $Z(\mathfrak{S}_2)$.
- (ii) On suppose que $n \geq 3$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma \neq \text{Id}$ et soient $i, j \in [1, n]$ tels que $\sigma(i) = j \neq i$. Soit $k \in [1, n] \setminus \{i, j\}$ (c'est possible car $n \geq 3$) et soit $\tau_{i,k}$ la transposition qui échange i et k (c'est la bijection de $[1, n]$ dans lui-même qui échange i et k et laisse tous les autres éléments fixes). Calculer $\sigma(\tau_{i,k}(i))$ et $\tau_{i,k}(\sigma(i))$.
- (iii) Montrer que si $n \geq 3$, alors $Z(\mathfrak{S}_n) = \{\text{Id}\}$.

Exercice 5 ($4 \times 10 = 40$ Points) Soit $B \subset \text{GL}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices triangulaires supérieures, soit $T \subset B$ le sous-ensemble des matrices diagonales et soit $U \subset B$ le sous-ensemble des matrices triangulaires supérieures ayant un 1 sur la diagonale.

- (i) Montrer que B , T et U sont des sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.
- (ii) Montrer que l'application $\varphi : B \rightarrow T$ qui à une matrice supérieure associe sa partie diagonale est un morphisme de groupes.
- (iii) Montrer que $U = \ker \varphi$ et en déduire que $U \triangleleft B$.
- (iv) Montrer que le groupe quotient B/U est isomorphe à T .