Groupes et géométrie,
feuille 3

N. Perrin

À rendre le mercredi 26.02.2020

Correction le jeudi 27.02.2020

Exercice 1 (10 Points) Le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ est-t-il monogène ?

Solution. Supposons que $(\mathbb{Q}, +)$ est monogène. Il est alors engendré par un élément $x \in \mathbb{Q}$. On a alors $\mathbb{Q} = \{mx \mid m \in \mathbb{Z}\}$. On doit donc avoir $\frac{x}{2} \in \mathbb{Q}$ et donc il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{x}{2} = mx$. On obtient $\frac{1}{2} = m \in \mathbb{Z}$, une contradiction. Le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ n'est donc pas monogène. ∎

Exercice 2 (10 Points) Soit n un entier non nul. Donner tous les morphismes de groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Solution. Soit $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ un morphisme de groupe. Montrons que f est l'application nulle: $f([x]) = 0$ pour tout $[x] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Tout d'abord, l'application nulle est bien un morphisme de groupes : $f([x] + [y]) = f([x + y]) = 0 = 0 + 0 = f([x]) + f([y])$.

Si $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est un morphisme de groupes, et $x \in \mathbb{Z}$, on a $f([x]) = f(x[1]) = xf([1])$. Mais on a aussi $0 = f([0]) = f([n]) = nf([1])$ et donc $f([1]) = 0$. On obtient $f([x]) = xf([1]) = x \times 0 = 0$. Ainsi f est la fonction nulle. ∎

Exercice 3 (10 Points) Soit G un groupe tel que pour tout sous-groupe $H \subsetneq G$, le sous-groupe H est cyclique. Le groupe G est-il cyclique ?

Solution. Pas nécessairement. Par exemple, le groupe $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ n'est pas cyclique (il n'y a pas d'élément d'ordre 4) mais ses sous-groupes $H \subsetneq G$ sont d'ordre 1 ou 2 et doivent donc être cycliques. ∎

Exercice 4 ($3 \times 10 = 30$ Points) On rappelle que le centre d'un groupe G est défini par $Z(G) = \{g \in G \mid gh = hg \text{ pour tout } h \in H\}$. On rappelle également que $\mathfrak{S}_n$ est le groupe des permutations de l'ensemble $[1, n] = \{1, \cdots, n\}$.

(i) Déterminer $Z(\mathfrak{S}_1)$ et $Z(\mathfrak{S}_2)$.

(ii) On suppose que $n \geq 3$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma \neq \mathrm{Id}$ et soient $i, j \in [1, n]$ tels que $\sigma(i) = j \neq i$. Soit $k \in [1, n] \setminus \{i, j\}$ (c'est posible car $n \geq 3$) et soit $\tau_{i,k}$ la transposition qui échange i et k (c'est la bijection de $[1, n]$ dans lui-même qui échange i et k et laisse tous les autres éléments fixes). Calculer $\sigma(\tau_{i,k}(i))$ et $\tau_{i,k}(\sigma(i))$.

(iii) Montrer que si $n \geq 3$, alors $Z(\mathfrak{S}_n) = \{\mathrm{Id}\}$.

Solution. 1. Les groupes $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ sont commutatifs donc $Z(\mathfrak{S}_1) = \mathfrak{S}_1$ et $Z(\mathfrak{S}_2) = \mathfrak{S}_2$.

2. On a $\sigma(\tau_{i,k}(i)) = \sigma(k)$ et $\tau_{i,k}(\sigma(i)) = \tau_{i,k}(j) = j$. Notons que comme $k \neq i$, on doit avoir $\sigma(k) \neq \sigma(i) = j$. Ainsi $\sigma(\tau_{i,k}(i)) \neq \tau_{i,k}(\sigma(i))$.

3. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ vec $\sigma \neq \mathrm{Id}$. Il existe alors i tel que $\sigma(i) \neq j$. En prenant k comme au 2., on a $\sigma(\tau_{i,k}(i)) \neq \tau_{i,k}(\sigma(i))$ donc $\sigma\tau_{i,k} \neq \tau_{i,k}\sigma$ et $\sigma \notin Z(\mathfrak{S}_n)$.

On a donc $Z(\mathfrak{S}_n) = \{\mathrm{Id}\}$. ∎

Exercice 5 (4 × 10 = 40 Points) Soit $B \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices triangulaires supérieures, soit $T \subset B$ le sous-ensemble des matrices diagonales et soit $U \subset B$ le sous-ensemble des matrices triangulaires supérieures ayant un 1 sur la diagonale.

(i) Montrer que B, T et U sont des sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(ii) Montrer que l'application $\varphi : B \to T$ qui a une matrice supérieure associe sa partie diagonale est un morphisme de groupes.

(iii) Montrer que $U = \ker \varphi$ et en déduire que $U \triangleleft B$.

(iv) Montrer que le groupe quotient B/U est isomorphe à T.

Solution. (i) On va éviter de faire des calculs. Soit $(e_i)_{i \in [1,n]}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrons que l'on a

$$B = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid g(\langle e_1, \cdots, e_i \rangle) = \langle e_1, \cdots, e_i \rangle \text{ pour tout } i \in [1,n]\}.$$

Si $g \in B$, alors g envoie e_i dans $\langle e_1, \cdots, e_i \rangle$ d'où l'inclusion $g(\langle e_1, \cdots, e_i \rangle) \subset \langle e_1, \cdots, e_i \rangle$. Comme g est bijective, on a égalité. Réciproquement, si $g(\langle e_1, \cdots, e_i \rangle) = \langle e_1, \cdots, e_i \rangle$ pour tout $i \in [1,n]$, alors $g(e_i) = \sum_{j=1}^{i} g_{j,i} e_j$ donc g est triangulaire supérieure et $g \in B$.

Montrons maintenant que B est un sous-groupe. Si $g, h \in B$, on a $g\langle e_1, \cdots, e_i \rangle = \langle e_1, \cdots, e_i \rangle$ et $h\langle e_1, \cdots, e_i \rangle = \langle e_1, \cdots, e_i \rangle$ donc $h^{-1}\langle e_1, \cdots, e_i \rangle = \langle e_1, \cdots, e_i \rangle$ et $gh^{-1}\langle e_1, \cdots, e_i \rangle = g\langle e_1, \cdots, e_i \rangle = \langle e_1, \cdots, e_i \rangle$ donc $gh^{-1} \in B$ qui est bien un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

De la même manière, Montrons que l'on a

$$T = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid g(\langle e_i \rangle) = \langle e_i \rangle \text{ pour tout } i \in [1,n]\}.$$

Si $g \in B$, alors g envoie e_i dans $\langle e_i \rangle$ d'où l'inclusion $g(\langle e_i \rangle) \subset \langle e_i \rangle$. Comme g est bijective, on a égalité. Réciproquement, si $g(\langle e_i \rangle) = \langle e_i \rangle$ pour tout $i \in [1,n]$, alors $g(e_i) = \mathfrak{g}_{i,i} e_i$ donc g est diagonale et $g \in T$.

Montrons maintenant que B est un sous-groupe. Si $g, h \in T$, on a $g\langle e_i \rangle = \langle e_i \rangle$ et $h\langle e_i \rangle = \langle e_i \rangle$ donc $h^{-1}\langle e_i \rangle = \langle e_i \rangle$ et $gh^{-1}\langle e_i \rangle = g\langle e_i \rangle = \langle e_i \rangle$ donc $gh^{-1} \in T$ qui est bien un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Nous montrerons que U est un sous-groupe à la question (iii).

(ii) Montrons que φ est un morphisme de groupes. Si $g, h \in B$, alors en écrivant $g = (g_{i,j})$ et $h = (h_{i,j})$, on a $gh = (a_{i,j})$ avec $a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} g_{i,k} h_{k,j}$. On s'intéresse à la partie diagonale donc $a_{i,i}$. On a $g_{i,j} = 0 = h_{i,j}$ pour $i > j$. On obtient

$$a_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} g_{i,k} h_{k,i} = \sum_{k=1}^{i-1} g_{i,k} h_{k,i} + g_{i,i} h_{i,i} + \sum_{k=i+1}^{n} g_{i,k} h_{k,i}$$

donc

$$a_{i,i} = \sum_{k=1}^{i-1} 0 \times h_{k,i} + g_{i,i} h_{i,i} + \sum_{k=i+1}^{n} g_{i,k} \times 0 = g_{i,i} h_{i,i}.$$

Ainsi φ est un morphisme de groupes.

(iii) Par définition de U, on a $U = \ker(\varphi)$ ainsi U est un sous-groupe de B et donc de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et il est distingué dans B.

(iv) L'application $\varphi : B \to T$ est surjective, en effet pour $g \in T \subset B$, on a $\varphi(g) = g$. Ainsi, on a un isomorphisme

$$B/U = B/\ker(\varphi) \simeq \mathrm{im}(\varphi) = T. \qquad \blacksquare$$