Groupes et géométrie,
feuille 2

N. Perrin

À rendre le mercredi 19.02.2020

Correction le jeudi 20.02.2020

Exercice 1 ($2 \times 10 = 20$ Points) Soit G un groupe tel que pour tout $x \in G$, on a $x^2 = e$.

1. Montrer que G est commutatif.
2. Montrer que si G est d'ordre fini, alors $|G|$ est une puissance de 2.

Exercice 2 ($2 \times 10 = 20$ Points) Soit G un groupe fini d'ordre impair.

1. Montrer que l'application $f : G \to G$, $f(x) = x^2$ est une bijection.
2. En déduire que pour $x \in G$, l'équation $x^2 = e$ admet une unique solution, laquelle ?

Exercice 3 ($2 \times 10 = 20$ Points) Soit G un groupe et soit $x \in G$ un élément d'ordre n.

1. Quel est l'ordre de x^2 ?
2. Plus généralement, quel est l'ordre de x^d pour $d \in \mathbb{Z}$?

Exercice 4 ($4 \times 5 = 20$ Points) Soit G un groupe et soient $x, y \in G$ d'ordres respectifs m et n et tels que $xy = yx$.

1. Montrer que xy est d'ordre fini divisant $\mathrm{ppcm}(n, m)$.
2. Montrer que si m et n sont premiers entre eux, alors xy est d'ordre mn.
3. Montrer que l'hypothèse "m et n premiers entre eux" est indispensable à la qeustion précédente.
4. Montrer que si $A, B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ sont comme ci-dessous, alors A et B sont d'ordre fini mais AB n'est pas d'ordre fini:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 ($2 \times 5 + 10 = 20$ Points) Soit $\mathbb{H} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ le sous-ensemble suivant : $\mathbb{H} = \{\pm \mathbf{1}, \pm I, \pm J, \pm K\}$ avec

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.
2. Le groupe $\mathbb{H}$ est-il commutatif ?
3. Déterminer tous les sous-groupes de $\mathbb{H}$.