

## Du changement de variable sous l'intégrale

Le cadre est celui de l'intégration des fonctions continues sur un intervalle compact  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ . Le théorème du cours est le suivant.

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  des nombres réels,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une application continue,  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$ . Alors,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t)dt.$$

La preuve de ce théorème consiste simplement à intégrer la dérivée de la composée fonction  $f \circ \varphi$ . L'objet de cette note consiste à montrer comment le “ $dx$ ” sous l'intégrale est une notation commode qui fournit un moyen mnémotechnique très opératoire pour appliquer le théorème de changement de variable<sup>†</sup>.

### Dans la pratique

Pour calculer l'intégrale  $\int_a^b f(x)dx$ , on change de variable en posant  $x = \varphi(t)$ .

(i) Le calcul de la dérivée de  $\varphi$  s'écrit  $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ .

(ii) On fait comme si l'écriture  $\frac{dx}{dt}$  était le quotient de deux nombres et on fait passer le  $dt$  de l'autre côté. On obtient l'écriture formelle

$$dx = \varphi'(t)dt$$

qui conduit à l'écriture suivante, en remplaçant  $x$  et  $dx$  par leurs écritures en fonction de  $t$  :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{*}^{*} f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)dt$$

(iii) Maintenant, les bornes. Supposons que deux nombres  $\alpha$  et  $\beta$  vérifient  $a = \varphi(\alpha)$  et  $b = \varphi(\beta)$ . La comptine mnémotechnique consiste à dire en son for intérieur : “lorsque  $x$  vaut  $a$ ,  $t$  vaut  $\alpha$  et lorsque  $x$  vaut  $b$ ,  $t$  vaut  $\beta$ ”, et remplacer les étoiles par ces nouvelles valeurs de  $t$  :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)dt$$

et le tour est joué.

A vrai dire, cette comptine ne prend un sens exact que lorsque  $\varphi$  est une bijection de  $[\alpha, \beta]$  sur  $[a, b]$  qui envoie  $\alpha$  sur  $a$  et  $\beta$  sur  $b$ , où la notation  $[x, y]$  désigne l'intervalle fermé des nombres réels compris entre  $x$  et  $y$ , sans préjuger de l'ordre respectif de  $x$  et de  $y$ . En effet, dans ces conditions, il est vrai que lorsque  $x$  vaut  $a$  alors  $t$  vaut  $\varphi^{-1}(a) = \alpha$  et lorsque  $x$  vaut  $b$  alors  $t$  vaut  $\varphi^{-1}(b) = \beta$ . Dans le cas où  $\varphi$  n'est pas injective,  $\alpha$  peut être n'importe quel nombre dont l'image par  $\varphi$  est  $a$ , et  $\beta$  peut être n'importe quel nombre dont l'image par  $\varphi$  est  $b$  sans altérer la validité de la démarche.

<sup>†</sup>A vrai dire, le cadre dans lequel cette notation prend tout son sens mathématique est celui de l'intégration des formes différentielles. Mais ces dernières ne sont pas du ressort de l'enseignement de L1.

### Un exemple

On cherche à calculer  $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{2 + \sin \theta} d\theta$ .

Comme pour toute fraction rationnelle en  $\cos$  et  $\sin$ , on passe à la tangente de l'arc moitié en posant  $x = \tan \frac{\theta}{2}$ . [Ca fonctionne toujours puisqu'on se ramène à un calcul de primitive de fraction rationnelle, même si ce n'est pas à tous les coups la méthode la plus économique en calculs.]

(i) L'intégrand. Les formules trigonométriques standard assurent que

$$\cos \theta = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \quad \text{et que} \quad \sin \theta = \frac{2 \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

(ii) Le  $dx$ . En suivant le moyen mnémotechnique ordinaire,  $dx = \frac{1}{2} (1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}) d\theta = \frac{1}{2} (1 + x^2) d\theta$ , ou encore

$$d\theta = \frac{2}{1 + x^2} dx.$$

(iii) Les bornes : lorsque  $\theta$  vaut 0,  $x$  vaut  $\tan \frac{0}{2} = 0$  et lorsque  $\theta$  vaut  $\frac{3\pi}{2}$ ,  $x$  vaut  $\tan \frac{3\pi}{4} = -1$

(iv) On y est. On remplace dans l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{2 + \sin \theta} d\theta &= \int_0^{-1} \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \times \frac{1}{2 + \frac{2x}{1+x^2}} \times \frac{2}{1 + x^2} dx \\ &= \int_{-1}^0 \frac{x^2 - 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx \\ &= \int_{-1}^0 \left( \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} \right) dx \\ &= \left[ \ln \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \right) \right]_{-1}^0 \\ &= -\ln 2. \end{aligned}$$