MA202N – Contenu du cours

1

Formules de Taylor et développements limités

Plan du chapitre

1 – Préliminaires

1.1 But

L'intérêt des formules de Taylor (parfois abrégées FT) et des développements limités (DL) est multiple. Le principe consiste à approcher des fonctions "compliquées" par des polynômes, en écrivant

$$f(x) = P(x) + \text{ erreur.}$$

Cela permet par exemple de :

- simplifier certains calculs
- trouver des limites, lever des formes indéterminées
- connaitre le comportement local de certaines fonctions
- etc.

1.2 Notations $o(x)$

Définition. *Soient a un réel, f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant a. On considèrera aussi le cas où l'on se trouve en $+\infty$ ou $-\infty$, et dans ce cas on demande que I ait pour borne $\pm\infty$. On dit que la fonction f est* négligeable *devant la fonction g en x_0 (avec x_0 valant a ou $+\infty$ ou $-\infty$) s'il existe :*

- *un voisinage V de x_0 (si $x_0 = a$ on aura V du type $V =]a-\eta; a+\eta[$ avec $\eta > 0$, si $x_0 = -\infty$ on aura $V =]-\infty; M[$ avec $M \in \mathbb{R}$ et si $x_0 = +\infty$ on aura $V =]M; +\infty[$ avec $M \in \mathbb{R}$)*
- *une fonction ε définie sur V et telle que :*
  - $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$
  - $f(x) = \varepsilon(x)g(x), \forall x \in V$

On note alors $f(x) = o(g(x))$, qui se lit "$f(x)$ est un petit o de $g(x)$" (au voisinage de x_0).

Remarque. *Avec les mêmes notations, on suppose que la fonction g ne s'annule pas pour $x \neq x_0$. Alors f est* négligeable *devant g au voisinage de x_0 si et seulement si le quotient f/g tend vers 0 :*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Exemple.
- $\ln(x) = o(\frac{1}{x})$ *au voisinage de* 0
- $x^2 = o(e^x)$ *au voisinage de* $+\infty$
- $\sqrt{x} = o(1)$ *au voisinage de* 0.

2 – Développements limités et formules de Taylor

2.1 Généralités

Définition. *Soient I un intervalle ouvert, a un point de I et n un entier. On dit que f* admet un développement limité d'ordre n en a *lorsqu'il existe un polynôme P_n de degré au plus n tel que le reste $f(x) - P_n(x)$ soit négligeable devant $(x-a)^n$.*

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = o((x-a)^n) \ .$$

Le polynome P_n s'écrit par exemple :

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots + b_n(x-a)^n$$

où les b_i sont des coefficients réels. On écrira ainsi :

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Remarque. *On peut noter que l'équation de la tangente en a, bien connue depuis le lycée, est justement le développement limité à l'ordre 1. Dans ce cas on a même une expression plus précise des coefficients b_0 et b_1 :*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$$

On verra que les formules de Taylor et les développements limités permettent de généraliser cette formule aux ordres supérieurs.

Nous nous ramènerons toujours à des développements limités au voisinage de 0, grâce à l'observation suivante.

Proposition. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, a un point de I et n un entier. Soit f une fonction définie sur I. Soit g la fonction qui à h associe $g(h) = f(a+h)$. La fonction f admet un développement limité d'ordre n en a, si et seulement si g admet un développement limité d'ordre n en 0.*

$$f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n) \iff g(h) = f(a+h) = P_n(a+h) + o(h^n) \ .$$

Remarque. *Si l'on souhaite faire un développement limité au voisinage de l'infini (appelé parfois* développement asymptotique*), on cherchera à écrire f sous la forme*

$$f(x) = b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots + \frac{b_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

On se ramènera là aussi en zéro en posant $h = \frac{1}{x}$.

2.1.1 Unicité, parité

Un développement limité, s'il existe, est unique au sens suivant.

Proposition. *Soient I un intervalle ouvert contenant 0, et n un entier. Soit f une fonction définie sur I. Supposons qu'il existe deux polynômes P_n et Q_n de degré au plus n tels que au voisinage de 0 :*

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad f(x) = Q_n(x) + o(x^n)\ .$$

Alors $P_n = Q_n$.

Proposition. *Grâce aux formules de Taylor qui suivent, on démontre que si f est de classe $\mathcal{C}^n$ (n fois dérivable, et dérivée n-ème continue) au voisinage de x_0, alors f admet un développement limité (DL) à l'ordre n.*

Grâce à l'unicité du DL, on peut montrer le résultat suivant :

Proposition. *Soit f une fonction admettant un DL en zéro. On a les résultats suivants :*

— *Si f est paire, alors son développement limité ne comporte que les termes de degré pair :*
$$f(x) = b_0 + b_2x^2 + b_4x^4 \ldots + b_{2n}x^{2n} + o\left(x^{2n}\right)$$

— *Si f est impaire, alors son développement limité ne comporte que les termes de degré impair :*
$$f(x) = b_1x + b_3x^3 + b_5x^5 \ldots + b_{2n+1}x^{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

Démonstration. *La preuve est laissée en exercice. Elle repose sur les définitions de la parité ($f(-x) = f(x)$) et de l'imparité ($f(-x) = -f(x)$), combinées avec l'unicité du développement limité.*

2.2 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème. *Soit n un entier et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I et a, x deux réels de I, alors :*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &\quad + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\ . \end{aligned}$$

Démonstration. *Par récurrence.*

Pour $n = 0$, la formule est le théorème fondamental de l'Analyse :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Supposons la formule vraie au rang $n-1$, avec $n \geq 1$. Pour la prouver au rang n, posons :

$$I_n = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t\ ,$$

et intégrons par parties en posant

$$u'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad u(x) = -\frac{(x-t)^n}{n!}$$

$$v(t) = f^{(n)}(t), \quad v'(t) = f^{(n+1)}(t)$$

ce qui donne

$$I_n = \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) \right]_a^x - \int_a^x -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

$$I_n = -\frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

ce qui permet d'obtenir la formule au rang n et qui conclut la preuve.

2.3 Formule de Taylor Lagrange

Théorème. *Soit n un entier et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I, a et x deux réels de I. Alors il existe un réel c situé entre a et x (autrement dit $c \in [a,x]$ ou bien $c \in [x,a]$ selon la position relative de a et de x) tel que :*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \\ &\quad + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c). \end{aligned}$$

NB : c dépend de a et de x... Si a ou x changent, c change aussi.

Démonstration. *La preuve est laissée en exercice. On pourra utiliser la deuxième formule de la moyenne :*

Si f et g sont continues sur $[a,b]$, et g est de signe constant, alors il existe c dans $[a,b]$ tel que

$$\int_a^x f(t)g(t)\, dt = f(c) \int_a^x g(t)\, dt.$$

Corollaire (Inégalité de Taylor Lagrange)**.** *Soit n un entier et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$. Soit M un majorant de $|f^{(n)}|$ sur $[a,b]$. Alors on a l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned} &|f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}| \\ &\leq M\frac{(b-a)^n}{n!}. \end{aligned}$$

2.4 Formule de Taylor Young

Cette formule va nous permettre de démontrer la plupart des développements limités usuels.

Théorème. *Soit f de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I. Alors f admet un développement limité au voisinage de tout point a de I :*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2} + \ldots + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + o((x-a)^n)$$

Démonstration. *Pour la preuve, on va utiliser la formule de Taylor Lagrange (FTL). Il nous faut démontrer que $A(x) = o((x-a)^n)$, où $A(x)$ est défini par :*

$$A(x) = f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) - (x-a)^2\frac{f''(a)}{2} - \ldots - (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Pour montrer que $A(x)$ est un petit o de $(x-a)^n$, on va montrer que leur quotient tend vers 0. Pour cela, on commence par appliquer la FTL sur l'intervalle $[a,x]$: il existe c_x (noté ainsi car c dépend de x puisqu'il se trouve dans l'intervalle $[a,x]$, autrement dit c change quand x change) avec $c_x \in [a,x]$ tel que

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2} + \ldots + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}$$

On remplace cette formule pour $f(x)$ dans la formule pour $A(x)$, on simplifie plein de termes et il nous reste finalement

$$A(x) = (x-a)^n\frac{f^{(n)}(c_x)}{n!} - (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{(x-a)^n}{n!}\left(f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)\right)$$

Ensuite il nous suffit de remarquer que quand x tend vers a, c_x tend vers a aussi, donc par continuité de la fonction $f^{(n)}$ (car f est de classe $\mathcal{C}^n$) on a que $f^{(n)}(c_x)$ tend vers $f^{(n)}(a)$, autrement dit :

$$\frac{A(x)}{(x-a)^n} = \frac{1}{n!}(f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)) \quad \to 0$$

ce qui montre justement que

$$A(x) = o((x-a)^n)$$

et qui conclut donc la preuve.

2.5 Exemples et DL usuels

Exemple. *A titre d'exemple, on considère la fonction*

$$f(x) = \sin(x) + \frac{1}{1+x}$$

et on écrit les trois formules de Taylor pour cette fonction, à l'ordre 3, au voisinage de 0.

Cet exemple est laissé en exercice au lecteur, avec les indications d'étapes suivantes :

1. *Commencer par écrire les trois formules de manière générale pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^3$, au point 0, depuis le point x : $f(x) = f(0) + xf'(0) + \ldots$ (à compléter).*
2. *Calculer les dérivées successivces de f jusqu'à l'ordre 3. On pourra écrire $f = u + v$ avec $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \frac{1}{1+x}$.*
3. *En déduire les valeurs en 0 : $f(0); f'(0), f''(0), f^{(3)}(0)$.*

4. *Remplacer tout le nécessaire dans les formules de la première question.*

Exemple. *Les exemples suivants sont à connaitre par coeur !*
Soit n un entier, α un réel.

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\ .$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})\ .$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})\ .$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\, x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\, x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n + o(x^n)\ .$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)\ .$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)\ .$$

Les démonstrations seront traitées en exercice.

3 – Opérations sur les développements limités

3.1 Manipulation des petits o

Proposition (Propriétées des o en zéro)**.** *Soient n et m deux entiers positifs ou nuls.*

1. *Si $n < m$, alors $x^m = o(x^n)$ au voisinage de 0.*
2. *Somme de petits o : $o(x^m) + o(x^n) = o(x^p)$, où $p = \min(n, m)$, autrement dit si $n \leq m$, alors $o(x^m) + o(x^n) = o(x^n)$.*
3. *Produit de petits o : $o(x^n) \times o(x^m) = o(x^{n+m})$.*
4. *Produit par une constante réelle $k \in \mathbb{R}$: $k \times o(x^n) = o(x^n)$*
5. *Produit par des puissances de x : $x^n \times o(x^m) = o(x^{n+m})$*

Démonstration. *Pour la preuve on revient à chaque fois à la définition, et le plus souvent possible on utilise la remarque avec la limite du quotient.*

1. *Si $n < m$ alors $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ avec $m - n >$ donc ça tend vers 0 en zéro, ce qui donne bien $x^m = o(x^n)$.*
2. *Soient f et g deux fonctions quelconques telles que $f = o(x^n)$ et $g = o(x^m)$ avec $n \leq m$. Alors on sait que $\frac{f}{x^n} \to 0$ et $\frac{g}{x^m} \to 0$. Pour montrer le résultat, on calcule la limite de $(f + g)(x)$ divisé par x^n :*
$$\frac{(f+g)(x)}{x^n} = \frac{f(x)}{x^n} + \frac{g(x)}{x^n} = \frac{f(x)}{x^n} + \frac{g(x)}{x^m}\frac{x^m}{x^n}$$
Et là on peut conclure : $\frac{f(x)}{x^n} \to 0$, $\frac{g(x)}{x^m} \to 0$ et $\frac{x^m}{x^n} \leq 1$ donc $\frac{(f+g)(x)}{x^n} \to 0$ ce qui donne le résultat.

3. *De la même manière, on se donne f et g avec $f = o(x^n)$ et $g = o(x^m)$. Alors*

$$\frac{(fg)(x)}{x^{n+m}} = \frac{f(x)}{x^n}\frac{g(x)}{x^m}$$

tend bien vers 0 en 0.

4. *Les deux derniers items sont assez similaires au précédent et sont laissés en exercice au lecteur.*

Exemples. *On illustre chaque propriété :*

1. $x = o(1)$ *; pour tout* $k > 0$ $x^k = o(1)$ *;* $x^2 = o(x)$ *; pour tout* $k > 1$ $x^k = o(x)$ *;* $x^3 = o(x^2)$ *; etc.*
2. $o(1) + o(x^2) = o(1)$ *;* $o(x) + o(x^3) = o(x)$ *;* $o(x^2) + o(x^3) = o(x^2)$ *; etc.*
3. $o(x^2)o(x) = o(x^3)$ *;* $o(x^2)o(x^2) = o(x^4)$ *;* $o(x)o(x^n) = o(x^{n+1})$ *; etc.*
4. $3o(x) = o(x)$ *;* $-2o(x^2) = o(x^2)$ *; etc.*
5. $xo(x) = o(x^2)$ *;* $x^2o(x^3) = o(x^5)$ *;* $xo(x^n) = o(x^{n+1})$ *;* $x^n o(x) = o(x^{n+1})$ *; etc.*

3.2 Corollaires : opérations sur les DL

Les propriétés de manip des o permettent très facilement de démontrer les résultats suivants. Dans toute la suite, on se donne f et g deux fonctions admettant des DL à l'ordre n et m respectivement.

3.2.1 Somme

Proposition. *Alors $f + g$ admet un DL à l'ordre* $\min(n, m)$ *obtenu en ajoutant les DL de f et de g.*

Exemple.
1. $f(x) = 1+2x-x^3+o(x^3)$, $g(x) = 2-3x+x^2+o(x^2)$, *alors* $(f+g)(x) = 3 - x + x^2 + o(x^2)$
2. $f(x) = 1+x+x^2+x^3+2x^4+o(x^5)$, $g(x) = -1-x-x^2+o(x^2)$, *alors* $(f+g)(x) = o(x^2)$

3.2.2 Produit

Proposition. *Alors fg admet un DL à l'ordre au moins* $\min(n, m)$.

Remarque. *L'ordre peut parfois être supérieur à ce minimum, lorsque les premiers termes des DL sont nuls (voir les exemples). Pour trouver quel est l'ordre, il est recommandé de faire le produit au brouillon et de repérer quel sera le petit o qui va rester.*

Exemple.
1. $f(x) = 1 + 2x - x^3 + o(x^3)$, $g(x) = 2 - 3x + x^2 + o(x^2)$, *alors* $(fg)(x) = 2 + x - 5x^2 + o(x^2)$
2. $f(x) = x + 2x^2 - x^3 + o(x^3)$, $g(x) = 2 - 3x + x^2 + o(x^2)$, *alors* $(fg)(x) = 2x + x^2 - 7x^3 + o(x^3)$

3.2.3 Composition

Proposition. *Si f admet un DL à l'ordre n en x_0, si le terme constant de ce DL vaut a_0 et si g admet un DL à l'ordre n en a_0, alors $g \circ f$ admet un DL à l'ordre n en x_0 obtenu en développant la composée des DL de f et g.*

Exemple.

1. *DL de $\exp(\sin(x))$ à l'ordre 4 en 0 : $g(x) = \exp(x)$, $f(x) = \sin(x)$. Alors $\sin(x) = x - x^3/6 + o(x^4)$, de terme constant 0. ensuite :*

$$\exp(X) = 1 + X + X^2/2 + X^3/6 + X^4/24 + o(X^4)$$

on remplace X par

$$X = x - x^3/6 + o(x^4)$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} \exp(\sin(x)) &= 1 + (x - x^3/6 + o(x^4)) + (x - x^3/6 + o(x^4))^2 \\ &\quad +(x - x^3/6 + o(x^4))^3/6 + (x - x^3/6 + o(x^4))^4/24 + o(x^4) \end{aligned}$$

on développe en ne gardant que les termes d'ordre inférieur ou égal à 4 et on obtient

$$\exp(\sin(x)) = 1 + x + x^2/2 - x^4/8 + o(x^4)$$

2. *DL de $\exp(\cos(x))$ à l'ordre 4 en 0 : $\cos(x) = 1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)$ terme constant 1, et autour de 1 on a $\exp(1 + h) = \exp(1).\exp(h)$ donc on se ramène au DL en zéro avec le nombre $\exp(1)$ en facteur devant :*

$$\exp(\cos(x)) = \exp(1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)) = \exp(1).\exp(-x^2/2 + x^4/24 + o(x^4))$$

on fait le DL comme précédemment, en utilisant le DL de $\exp(X)$ et en posant $X = -x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)$:

$$\begin{aligned} \exp(\cos(x)) &= \exp(1).\exp(-x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)) \\ &= \exp(1)(1 + (-x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)) \\ &\quad +(-x^2/2 + x^4/24 + o(x^4))^2/2) \end{aligned}$$

On peut remarquer ici que comme le premier terme qui reste du cosinus dans X est en x^2, quand on met ça à la puissance 3 ça fera x^6 et ça dépasse l'ordre 4, on peut donc s'arrêter à la puissance 2 dans le DL d'exponentielle. On continue donc le calcul :

$$\exp(\cos(x)) = \exp(1)(1 + -x^2/2 + x^4/24 + o(x^4) + x^4/8)$$

on trouve finalement

$$\exp(\cos(x)) = \exp(1)(1 - x^2/2 + x^4/6 + o(x^4)) = e - x^2e/2 + x^4e/6 + o(x^4)$$

3.2.4 Inverse

C'est un cas particulier de composition, en utilisant la fonction inverse à la place de la fonction $g(x)$.

Proposition. *On suppose que $f(x_0) \neq 0$. Alors $\frac{1}{f}$ admet un DL en x_0 à l'ordre n. La partie régulière du DL (le polynôme) peut s'obtenir par composition grâce au DL de la fonction $\frac{1}{1+u}$.*

Exemple. *DL à l'ordre 4 en 0 de $\frac{1}{\cos(x)}$.*

$$\cos(x) = 1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)$$

Dans la suite on posera $u = -x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)$ et on utilise le DL de $\frac{1}{1+u}$:

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o(u^4)$$

Comme précédemment, on voit que u^3 ne contient que des termes de degré strictement plus grand que 4, donc on peut s'arrêter à u^2 dans le DL. Finalement on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos(x)} &= 1 - (-x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)) + (-x^2/2 + x^4/24 + o(x^4))^2 \\ &= 1 + x^2/2 - x^4/24 + x^4/4 + o(x^4) \\ &= 1 + x^2/2 + 5x^4/24 + o(x^4) \end{aligned}$$

3.2.5 Intégration

Proposition. *Si f est continue et admet un DL au voisinage de x_0 à l'ordre n et si F est une primitive de f, alors F admet un DL en x_0 à l'ordre $n+1$, obtenu en intégrant celui de f.*

Remarque. *Ce résultat nécessite une propriété supplémentaire des petits o, à savoir que l'intégration d'un petit o donne un petit o de degré un de plus. On admettra ce résultat ici.*

Exemple. *Cet exemple fait partie des DL à savoir par coeur :*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

obtenu en intégrant entre 0 et x le DL de sa dérivée :

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n + o(t^n)$$

3.3 Illustration : le DL de tangente

A titre d'exemples et d'entrainement, on vous propose de calculer le DL de la fonction tangente de plusieurs manières différentes.

Le résultat obtenu est le suivant :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

Comme la fonction tangente est impaire, on sait que le terme de degré 6 est nul, son DL à l'ordre 6 est donc identique :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

Les paragraphes suivants donnent juste des indications sans fournir tous les détails.

3.3.1 Quotient de DL : inverse puis produit

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

On écrit les DL de sin et cos à l'ordre 5 :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5), \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

Ensuite on calcule le DL de $\frac{1}{\cos(x)}$ à l'ordre 5, comme cela a été fait dans un exemple précédent :

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 + x^2/2 + 5x^4/24 + o(x^5)$$

et on multiplie les deux DL en ne gardant que les termes d'ordre inférieurs ou égal à 5 :

$$\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

3.3.2 Avec des formules de trigo pour l'angle double

$$\tan(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)}$$

Là aussi il s'agit d'un quotient. Par contre il y a une petite difficulté supplémentaire : si on part avec des DL à l'ordre 5 au début :

$$1 - \cos(2x) = 2x^2 - \frac{2x^4}{3} + o(x^5) \quad \text{et} \quad \sin(2x) = 2x - \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + o(x^5)\ .$$

En faisant le quotient on voit qu'on peut simplifier par x en haut et en bas. Par contre, attention, quand on fait cela ça simplifie aussi un x dans le petit o qui devient donc $o(x^4)$ au lieu de $o(x^5)$:

$$\frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^4)}{2 - \frac{4x^2}{3} + \frac{4x^4}{15} + o(x^4)}\ .$$

Pour que ça marche bien, il faut donc démarrer avec des DL à l'ordre 6 :

$$1 - \cos(2x) = 2x^2 - \frac{2x^4}{3} + \frac{4x^6}{45} + o(x^6) \quad \text{et} \quad \sin(2x) = 2x - \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + o(x^6)\ .$$

Et là après simplification par x on est bien à l'ordre 5 :

$$\frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{45} + o(x^5)}{1 - \frac{2x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + o(x^5)} \ .$$

Comme précédemment, on calcule donc à part l'inverse :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\left(\frac{2x^2}{3} - \frac{2x^4}{15} + o(x^5)\right)} &= 1 + \left(\frac{2x^2}{3} - \frac{2x^4}{15}\right) + \left(\frac{2x^2}{3}\right)^2 + o(x^5) \\ &= 1 + \frac{2x^2}{3} + \frac{14x^4}{45} + o(x^5) \ ,\end{aligned}$$

puis on fait le produit :

$$\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{45} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{2x^2}{3} + \frac{14x^4}{45} + o(x^5)\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \ .$$

3.3.3 Avec la formule liant $\tan^2$ et $\cos^2$

$$\tan^2(x) = -1 + \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Pour ce cas là on se trouve face au même écueil qu'au précédent, à savoir qu'on perd 1 pour l'ordre, dans le cours des calculs. Il nous faut donc partir à l'ordre 6 au départ. On indique ici simplement les étapes du calcul :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6) \ ,$$

$$\begin{aligned}\cos^2(x) &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{2x^6}{45} + o(x^6) \ , \\ \frac{1}{\cos^2(x)} &= 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + o(x^6) \ , \\ -1 + \frac{1}{\cos^2(x)} &= x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + o(x^6) \ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{-1 + \frac{1}{\cos^2(x)}} &= \sqrt{x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + o(x^6)} \\ &= x\sqrt{1 + \left(\frac{2x^2}{3} + \frac{17x^4}{45} + o(x^4)\right)} \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \ .\end{aligned}$$

Attention ici : la transformation $\sqrt{x^2}$ en x n'est pas automatique : on trouve normalement $|x|$, mais il se trouve qu'ici ça marche aussi pour $x < 0$, car la fonction tan est impaire, ce qui permet d'avoir cette formule.

3.3.4 Avec la formule pour la dérivée impliquant $\cos$

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

On va écrire le DL de $1/\cos^2$ puis intégrer, donc on peut démarrer à l'ordre 4 (l'intégration nous fera gagner un ordre), même si ici techniquement ça ne change rien pour le cosinus :

$$\cos^2(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)\ .$$

Comme précédemment on considère que c'est $\frac{1}{1-u}$, avec $u = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) + \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)^2 + o(x^4) = 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)\ .$$

On intègre le DL, en utilisant le fait que le terme constant est nul car $\tan(0) = 0$:

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\ .$$

3.3.5 Avec la formule de la dérivée impliquant $\tan^2$

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$$

On peut voir ça comme une équation dont l'inconnue est le développement limité cherché (ou plutôt ses coefficients). Comme la fonction tangente est impaire, on peut montrer que les coefficients de degré pair sont nuls, donc le DL cherché est de la forme $a\,x + b\,x^3 + c\,x^5 + o(x^5)$, où a, b et c sont des réels inconnus. On calcule d'abord le terme de droite :

$$1 + \tan^2(x) = 1 + \big(a\,x + b\,x^3 + c\,x^5 + o(x^5)\big)^2 = 1 + a\,x^2 + 2ab\,x^4 + o(x^4)\ .$$

Le terme de gauche quant à lui vaut

$$\tan'(x) = (a\,x + b\,x^3 + c\,x^5 + o(x^5))' = a + 3b\,x^2 + 5c\,x^4 + o(x^4)$$

On identifie :

$$\begin{cases} a &= 1 \\ 3b &= a \\ 5c &= 2ab\ . \end{cases}$$

Et on trouve $a = 1$, $b = 1/3$ et $c = 2/15$.

3.3.6 Avec la dérivée de $\ln$ de $\cos$

$$\tan(x) = -\big(\ln(\cos)\big)'(x)$$

Comme à la fin on dérivera la fonction $\ln(\cos)$, on a besoin de démarrer à l'ordre 6. On va faire une composée de DL, en écrivant le DL de $\cos$, celui de $\ln(1+u)$ et en définissant u :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6) \quad \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$$

Ici l'ordre 3 suffit pour le DL du ln car on va poser

$$u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$$

de sorte que $o(u^3) = o(x^6)$. Les calculs donnent :

$$\begin{aligned}
\ln(\cos(x)) &= \ln\left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right)\right) \\
&= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3 + o(x^6) \\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6) .
\end{aligned}$$

L'opposé de la dérivée donne bien :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) .$$

3.3.7 Avec la réciproque $\arctan(x)$

On connait la formule

$$\tan(\arctan(x)) = x$$

Nous connaissons le développement de arctan d'ordre 5 (car sa dérivée est $\frac{1}{1+x^2}$) :

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) .$$

Soit $\tan(x) = a\,x + b\,x^3 + c\,x^5 + o(x^5)$ le développement cherché. Alors :

$$\begin{aligned}
\tan(\arctan(x)) &= a\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right) + b\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^3 + c\big(\,x\,\big)^5 + o(x^5) \\
&= a\,x + (-a/3 + b)\,x^3 + (a/5 - b + c)\,x^5 + o(x^5) .
\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on doit avoir :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ -a/3 + b & = & 0 \\ a/5 - b + c & = & 0 . \end{array}\right.$$

On obtient encore : $a = 1$, $b = 1/3$ et $c = 2/15$.

4 – Utilisation des développements limités

4.1 Calcul de certaines limites

Pour calculer la limite, on n'a besoin a priori que du DL à l'ordre 0, en $o(1)$. Face à une forme indéterminée, en général l'ordre 0 ne suffit pas, car il y a des simplifications qui se font, donc il est souvent nécessaire d'aller plus loin (ordre 3 ou parfois plus). Le choix du "bon" ordre pour trouver la limite (pas trop grand pour éviter les lourds calculs et assez grand pour que la limite soit déterminée) n'est pas évident et s'acquiert par la pratique, après essais et erreurs.

Exemple. *On propose de calculer à l'aide des DL la limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \tan(x)}{x^3}$$

On peut déjà remarquer que c'est bien une forme indéterminée en zéro, puisque si on remplace x par 0 on trouve $0/0$. Comme il y a une division par x^3, ça semble une bonne idée d'écrire les DL à l'ordre 3 pour commencer.

$$\sin(x) = x - x^3/6 + o(x^3), \qquad \tan(x) = x + x^3/3 + o(x^3)$$

On remplace tout ça dans la fraction :

$$\frac{\sin(x) - \tan(x)}{x^3} = \frac{x - x^3/6 - (x + x^3/3) + o(x^3)}{x^3}$$

Les x s'en vont, pour les x^3 il reste $-1/6 - 1/3 = -1/2$, on trouve donc

$$\frac{\sin(x) - \tan(x)}{x^3} = \frac{-x^3/2 + o(x^3)}{x^3} = \frac{-x^3/2}{x^3} + \frac{o(x^3)}{x^3}$$

Pour simplifier les petits o on utilise leurs propriétés pour voir que $o(x^3)/x^3 = o(1)$, ce qui donne :

$$\frac{\sin(x) - \tan(x)}{x^3} = -\frac{1}{2} + o(1)$$

La limite vaut donc $-1/2$.

4.2 Etude locale d'une courbe

On étudie la courbe de la fonction f, autrement dit la courbe d'équation $y = f(x)$. On se place au voisinage de x_0, on suppose que f admet un DL à l'ordre 2 :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0^2))$$

On peut déjà remarquer que $a_0 = f(x_0)$ et que l'équation de la tangente est donnée par le DL à l'ordre 1 : $y = a_0 + a_1(x - x_0)$ (et on a bien sûr $a_1 = f'(x_0)$).

On va voir que les termes suivants du DL permettent de nous renseigner sur la position locale de la courbe par rapport à sa tangente. Pour cela on soustrait le DL de f et l'équation de la tangente et on étudie le signe : s'il est positif, la courbe est au-dessus, s'il est négatif elle est au-dessous. On va distinguer deux cas

Cas 1 : $a_2 \neq 0$. Alors on peut écrire

$$f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0)) = a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0^2)) = (x - x_0)^2(a_2 + o(1))$$

autour de x_0, $f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0))$ est donc du signe de a_2 : si $a_2 > 0$ la courbe est au-dessus de sa tangente ; sinon elle est au-dessous.

Cas 2 : $a_2 = 0$. Alors on n'a pas assez d'info pour conclure, car la soustraction entre f et l'équation de la tangent donne simplement $o((x-x_0)^2)$ qui peut être positif ou négatif. Il nous faut donc pousser le DL plus loin. On suppose donc qu'on peut écrire le DL à l'ordre 3, avec $a_3 \neq 0$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_3(x-x_0)^3 + o((x-x_0^3))$$

Dans ce cas si on soustrait la tangente, on trouve

$$f(x) - (a_0 + a_1(x-x_0)) = a_3(x-x_0)^3 + o((x-x_0^3)) = (x-x_0)^3(a_3 + o(1))$$

Cette fois, le signe est celui de $a_3(x-x_0)$, il change donc en x_0 : la courbe "traverse" la tangente en x_0. Si $a_3 > 0$ la courbe est au-dessus à droite de x_0 et au-dessous à gauche, et si $a_3 < 0$ c'est l'inverse.

Si jamais $a_3 = 0$ aussi, alors on pousse le DL jusqu'à trouver un coefficient non nul. Si le coeff est d'ordre pair, on aura le même genre de raisonnement qu'au cas 1; s'il est d'ordre impair, ça sera comme le cas 2.

Exemple. *On admet que l'on a trouvé les DL des quatre fonctions suivantes :*

1. $f(x) = 1 - 2x + 3x^2 + o(x^2)$
2. $g(x) = 2 - x - x^3 + o(x^3)$
3. $h(x) = 3 + x - x^4 + o(x^4)$
4. $j(x) = 4 + 2x + x^5 + o(x^5)$

On cherche d'abord l'équation des tangentes en zéro pour chaque fonction, il s'agit du DL à l'ordre 1 :

1. *pour* f : $y_f = 1 - 2x$
2. *pour* g : $y_g = 2 - x$
3. *pour* h : $y_h = 3 + x$
4. *pour* j : $y_j = 4 + 2x$

Ensuite on soustrait ça aux fonctions et on étudie le signe pour avoir la position par rapport à la tangente en zéro :

1. $f(x) - y_y = 3x^2 + o(x^2)$*, toujours positif, la courbe est au-dessus*
2. $g(x) - y_g = -x^3 + o(x^3)$*, négatif à droite de zéro : la courbe est au-dessous ; à gauche de zéro c'est l'inverse, positif, donc la courbe est au-dessus*
3. $h(x) - y_h = -x^4 + o(x^4)$*, toujours négatif, la courbe est au-dessous de sa tangente*
4. $j(x) - y_j = x^5 + o(x^5)$*, change de signe, la courbe est au-dessus de la tangente à droite de zéro et au-dessous à gauche.*

4.3 Recherche d'asymptote

Si au voisinage de l'infini on a

$$f(x) = a_0 x + a_1 + \frac{a_2}{x} + o(\frac{1}{x})$$

alors f admet une asymptote d'équation $y = a_0 x + a_1$. Si $a_2 \neq 0$, la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de a_2.

Exemple.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 3}$$

Pour faire un développement asymptotique, on met en facteur le terme dominant, ici x^2 :

$$f(x) = \sqrt{x^2(1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2})} = x\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}}$$

car $\sqrt{x^2} = |x| = x$ au voisinage de $+\infty$.

Quand x tend vers l'infini, les quotients en x et x^2 tendent vers 0, on pourra donc se ramener à un DL si on pose $h = \frac{1}{x}$. On remplace donc $\frac{1}{x}$ par h et on calcule le DL :

$$\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}} = \sqrt{1 - 3h + 3h^2}$$

A la fin on voudra un développement de f qui se termine avec $o(\frac{1}{x})$, et comme on aura une multiplication par le x qui est sorti de la racine, il nous faut un DL à l'ordre 2 en h. On calcule :

$$\sqrt{1 - 3h + 3h^2} = (1 - 3h + 3h^2)^{1/2} = (1+u)^{1/2}, \text{ avec } u = -3h + 3h^2$$

On rappelle le DL de $(1+u)^{1/2}$:

$$(1+u)^{1/2} = 1 + (1/2)u + (1/2)(-1/2)u^{2/2} + o(u^2)$$

On remplace :

$$\sqrt{1 - 3h + 3h^2} = 1 + (1/2)(-3h + 3h^2) - (1/8)(-3h + 3h^2)^2 + o(h^2)$$

$$\sqrt{1 - 3h + 3h^2} = 1 - (3/2)h + (3/2)h^2 - (9/8)h^2 + o(h^2) = 1 - (3/2)h + (3/8)h^2 + o(h^2)$$

On revient à f :

$$f(x) = x(1 - \frac{3}{2x} + \frac{3}{8x^2} + o(\frac{1}{x^2})) = x - \frac{3}{2} + \frac{3}{8x} + o(\frac{1}{x})$$

L'équation de l'asymptote est donc $y = x - 3/2$, et si on soustrait f et cette équation on obtient $\frac{3}{8x} + o(\frac{1}{x})$ qui est toujours positif, donc f est au-dessus de son asymptote.

Autres types d'asymptotes. On pourra aussi rencontrer des cas où l'asymptote n'est pas une droite mais une parabole, auquel cas le développement limité de f en l'infini sera du type :

$$f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2 + \frac{a_3}{x} + o(\frac{1}{x})$$

Dans ce cas, la parabole asymptote a pour équation $y = a_0x^2 + a_1x + a_2$, et la position relative avec la courbe est donné par le signe de a_3.

Exemple. *Par exemple, la fonction*

$$f(x) = (1+x)\sqrt{1+x^2}$$

admet en $+\infty$ comme asymptote la parabole d'équation $y = x^2 + x + \frac{1}{2}$, on peut la calculer en effectuant le développement limité de f au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = x^2 + x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Vous êtes encouragé·es à faire le calcul par vous-même.

2

Intégration : calculs d'intégrales

Plan du chapitre

1 – Utilisation directe de primitives

La toute première étape face à une intégrale est de regarder si l'on reconnait une primitive, et dans ce cas de l'intégrer directement, avec la formule :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

si F est une primitive de la fonction f.

Exemple.

$$I = \int_0^1 (x^2+2x)e^{x^3+3x^2}\,dx$$

Si on pose $u(x) = \exp(x^3+3x^2)$ *alors on obtient*

$$u'(x) = (3x^2+6x)e^{x^3+3x^2} = 3(x^2+2x)e^{x^3+3x^2}$$

Ainsi, on reconnait donc $u'(x)$ *dans* I *et on peut intégrer directement :*

$$I = \int_0^1 \frac{1}{3}u'(x)\,dx = \left[\frac{1}{3}u(x)\right]_0^1 = \left[\frac{1}{3}e^{x^3+3x^2}\right]_0^1 = \frac{e^4-1}{3}$$

2 – Intégration par parties

On rappelle que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, cela signifie que f est dérivable et que sa dérivée f' est continue.

Proposition. *Soient* u *et* v *deux fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[a,b]$, *alors*

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$$

Démonstration. *Il suffit d'intégrer la formule de dérivation d'un produit :*

$$[uv]_a^b = \int_a^b (uv)' = \int_a^b u'v + uv'$$

Remarque. *Quand on est face à une intégration par parties et qu'on se demande quelle fonction dériver, une astuce permet de mémoriser la marche à suivre, il s'agit de l'astuce ALPES :*

- *A : arctan*
- *L : ln*
- *P : polynome*
- *E : exponentielle*
- *S : sinus/cosinus*

La stratégie consiste alors à observer la fonction que l'on a sous les yeux et à poser pour v (la fonction qu'on va dériver) la première fonction présente en suivant l'ordre de la liste. Autrement dit, s'il y a arctan*, on pose $v = \arctan$ et $u' =$ le reste, s'il n'y en a pas on regarde s'il y a un* ln *et dans ce cas on pose $v = \ln$ et $u' =$ le reste, s'il n'y en a pas on regarde s'il y a un polynome, on pose $v =$ le polynome, etc.*

Exemple. 1. *Intégrale d'un polynome et d'une exponentielle*
La méthode consiste à dériver le polynome (pour faire baisser son degré, donc au bout d'un certain nombre d'intégrations, arriver à une constante) et à intégrer l'expontentielle, qui reste une exponentielle. On considère par exemple $\int_0^1 (2x+3)e^x\,dx$. On pose

$$u(x) = 2x+3, \quad u'(x) = 2; \qquad v'(x) = e^x, \quad v(x) = e^x$$

On obtient donc

$$\int_0^1 (2x+3)e^x\,dx = [(2x+3)e^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x\,dx = [(2x+3)e^x - 2e^x]_0^1 = 3e-1$$

2. *Intégrale d'un polynome et d'un log*
Cette fois on va dériver le log (pour le faire disparaitre) et intégrer le polynome. Par exemple, on va intégrer $\int_1^e (x^3+1)\ln(x)\,dx$. On pose donc

$$u(x) = \ln(x), \quad u'(x) = \frac{1}{x}; \qquad v'(x) = x^3+1, \quad v(x) = \frac{x^4}{4} + x$$

On obtient donc :

$$\begin{array}{rcl} \int_1^e (x^3+1)\ln(x)\,dx & = & [\ln(x)(\frac{x^4}{4}+x)]_1^e - \int_1^e (\frac{x^4}{4}+x)\frac{1}{x}\,dx \\ & = & (\frac{e^4}{4}+e) - \int_1^e \frac{x^3}{4}+1\,dx \\ & = & (\frac{e^4}{4}+e) - [\frac{x^4}{16}+x]_1^e \\ & = & (\frac{e^4}{4}+e) - (\frac{e^4}{16}+e-\frac{1}{16}-1) = \frac{3e^4}{16}+\frac{17}{16} \end{array}$$

3 – Changement de variables

Proposition. *Soit f de classe $\mathcal{C}^0$ sur $[a,b]$ et φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$ et telle que $\varphi([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$. Alors :*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

Démonstration. *Soit F une primitve de f sur $[a,b]$. Comme $[a,b]$ contient $\varphi([\alpha,\beta])$, $F\circ\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$ et on a la formule de dérivation*

$$(F\circ\varphi)' = (F'\circ\varphi)\times\varphi' = (f\circ\varphi)\times\varphi'$$

Ainsi, on peut calculer

$$\begin{array}{rcl} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt & = & \int_\alpha^\beta (F\circ\varphi)'(t)\,dt \\ & = & [F\circ\varphi]_\alpha^\beta \\ & = & F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ & = & [F]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \\ & = & \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx \end{array}$$

Exemple. *Calculons* $J = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$. *On propose de faire le changement de variable suivant :*

$$x = \varphi(t) = \sin(t)$$

On déroule toutes les vérifications et les calculs préliminaires nécessaires avant de pouvoir appliquer la formule de changement de variable :

- $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ *est continue sur* $[0,1]$
- *pour* $x = 1$, $t = \frac{\pi}{2}$, *pour* $x = 0$, $t = 0$, *on choisit donc* $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}$
- $\varphi = \sin$ *est bien* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *et* $\sin([0, \frac{\pi}{2}]) = [0,1]$
- *on calcule* $\varphi'(t) = \cos(t)$

On écrit parfois la dernière étape sous la forme

$$x = \sin(t), \qquad \textit{donc } dx = \cos(t)\,dt$$

On peut donc appliquer la formule de changement de variable :

$$\begin{array}{rcl} J & = & \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)}(\sin t)'\,dt \\ & = & \int_0^{\pi/2} \cos t \cos t\,dt \\ & = & \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt \\ & = & \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+\cos(2t))\,dt \\ & = & \frac{1}{2}[t + \frac{\sin(2t)}{2}]_0^{\pi/2} \\ & = & \frac{\pi}{4} \end{array}$$

où on a utilisé plusieurs formules de trigo :

$$\sin^2 + \cos^2 = 1, \quad \cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$$

4 – Intégrale d'une fonction rationnelle

Définition. *On dit que* f *est une fonction rationnelle lorsque* f *est le quotient de deux polynomes à coefficients réels (ou complexes).*

On rappelle que la toute première méthode d'intégration consiste à essayer de reconnaitre directement une formule de primitive, ou bien à deviner un changement de variable (si ça marche c'est tjs beaucoup plus simple que la méthode générale pour les fractions...).

Exemple.

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+2}\,dx = [\ln|x^2+x+2|]_0^1 = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2$$

car on a reconnu la fraction $\frac{u'}{u}$ *(avec* $u = x^2+x+2$*) qui s'intègre donc en* $\ln|u|$.

Dans cette partie, on présente un algorithme qui permet de trouver la primitive d'une fraction rationnelle

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

où P et Q sont des polynômes. Dans toute cette partie, on va prendre comme exemple la fraction rationnelle :

$$f(x) = \frac{x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 24}{(x^2+2)(x-2)^2} = \frac{P}{Q}.$$

4.1 Étape 1

— Si $\deg(P) < \deg(Q)$, on passe à l'étape 2.

— Si $\deg(P) \geq \deg(Q)$, on fait la **division Euclidienne** de P par Q.

Si $\deg(P) \geq \deg(Q)$, on peut se ramener au cas $\deg(P) < \deg(Q)$ grâce au résultat admis suivant.

Théorème (Division Euclidienne des polynômes)**.** *Pour tous polynomes P et Q avec $Q \neq 0$, il existe un unique couple de polynomes M et R tels que*

$$P = MQ + R, \qquad \deg(R) < \deg(Q).$$

Dans ce cas, on peut alors écrire

$$\frac{P}{Q} = M + \frac{R}{Q}, \text{ avec } d(R) < d(Q)$$

et on est donc ramené au cas précédent.

Evidemment, il faut quand même être capable de calculer M et R. On va faire cela par division euclidienne de polynome. Ça marche comme pour la division entière classique, sauf que les monomes x^k jouent le rôle des puissances 10^k des nombres en base 10. On va voir ça sur un exemple.

Exemple. *On considère la fraction*

$$f(x) = \frac{x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 24}{(x^2+2)(x-2)^2} = \frac{P}{Q}$$

Pour pouvoir effectuer la division, on a besoin de développer le dénominateur :

$$\frac{P}{Q} = \frac{x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 24}{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 8}$$

Ensuite on pose la division (voir la vidéo pour le commentaire oral) :

$$
\begin{array}{r|l}
\overbrace{1x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 24}^{\text{P}} & \overbrace{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 8}^{\text{Q}} \\
-(\underline{x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 8x}) & \underbrace{x + 2}_{\text{M (quotient)}} \\
0 + 2x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 14x + 24 & \\
-(\underline{2x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 16x + 16}) & \\
\underbrace{2x + 8}_{\text{R (reste)}} &
\end{array}
$$

Et on trouve finalement

$$f(x) = x + 2 + \frac{2x+8}{(x^2+2)(x-2)^2}.$$

4.2 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$

La méthode générale d'intégration des fractions consiste à réécrire f sous une forme qu'on sait intégrer, on appelle cela la *décomposition en éléments simples*.

Définition. *On appelle élément simple :*

— *de première espèce toute fonction rationnelle de la forme*

$$x \mapsto \frac{A}{(x-x_1)^\alpha}$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^*, A \in \mathbb{R}, x_1 \in \mathbb{R}$,

— *de seconde espèce toute fonction rationnelle de la forme*

$$x \mapsto \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^\beta}$$

où $\beta \in \mathbb{N}^*, B, C, b, c \in \mathbb{R}, b^2-4c<0$

Pour une fraction $f = \frac{P}{Q}$ on a deux cas, selon que le degré de P est plus petit que celui de Q ou pas.

4.2.1 Premier cas : $d(P) < d(Q)$

Proposition. — *Q se factorise dans $\mathbb{R}$ sous la forme*

$$Q(x) = K(x-x_1)^{\alpha_1}\dots(x-x_p)^{\alpha_p}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}\dots(x^2+b_qx+c_q)^{\beta_q}$$

avec : $\forall i \neq j, x_i \neq x_j$, $\forall k \neq l, (b_l, c_l) \neq (b_k, c_k)$ *et* $b_l^2 - 4c_l < 0$ *(autrement dit les morceaux d'ordre 2 ne se factorisent pas dans* $\mathbb{R}$*)*

— *il existe des constantes* A_{ij}, B_{kl}, C_{kl} *telles que*

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_{11}}{(x-x_1)^1}+\dots+\frac{A_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}}+\dots+\frac{A_{p1}}{(x-x_p)^1}+\dots+\frac{A_{p\alpha_p}}{(x-x_p)^{\alpha_p}} \\ & +\frac{B_{11}x+C_{11}}{(x^2+b_1x+c_1)^1}+\dots+\frac{B_{1\beta_1}x+C_{1\beta_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}}+\dots+\frac{B_{q1}x+C_{q1}}{(x^2+b_qx+c_q)^1} \\ & +\dots+\frac{B_{q\beta_q}x+C_{q\beta_q}}{(x^2+b_qx+c_q)^{\beta_q}}\end{aligned}$$

A retenir : pour chaque racine on somme tous les éléments de première espèce jusqu'à la multiplicité α_i et pour chaque élément de deuxième espèce on les somme tous jusqu'à la multiplicité β_i.

La difficulté va être ensuite de calculer les coefficients inconnus A_{ij}, B_{kl}, C_{kl}. L'idée va être de multiplier par le morceau concerné de multiplicité maximale $(x-x_i)^{\alpha_i}$ ou $(x^2+b_kx+c_k)^{\alpha_k}$, éventuellement de dériver un certain nombre de fois, et de calculer l'expression en un x judicieusement choisi de manière à faire disparaitre un maximum de termes. Pour les élements de première espèce, l'idée est de calculer les coefficients associés à chaque élément et de commencer par le coefficient associé à la plus grande puissance, et d'y aller en décroissant. Avec les notations de la proposition, ça donnerait donc de calculer :

— $A_{1\alpha_1}$: multiplier par $(x-x_1)^{\alpha_1}$ puis évaluer l'égalité obtenue en x_1

— $A_{1\alpha_1-1}$: multiplier par $(x-x_1)^{\alpha_1}$, dériver une fois, puis évaluer l'égalité obtenue en x_1 (attention, on ne dérive que le morceau correspondant à P/Q, car tous les autres vont disparaitre, cf exemples)

— ...

— A_{12} : multiplier par $(x-x_1)^{\alpha_1}$, dériver α_1-2 fois, puis évaluer l'égalité obtenue en x_1

— A_{11} : : multiplier par $(x-x_1)^{\alpha_1}$, dériver α_1-2 fois, puis évaluer l'égalité obtenue en x_1.

— idem pour les autres : $A_{2\alpha_2}$, puis $A_{2\alpha_2-1}$, ... puis A_{22} puis A_{21} en dernier.

Pour les élements de deuxième espèce, soit on procède pareil dans $\mathbb{C}$, soit on calcule des valeurs particulières et des limites, pour obtenir des équations qui permettent de déteminer les B_{kl}, C_{kl}. On va voir ça dans des exemples.

Exemple. *On considère la fraction*

$$g(x) = \frac{x+4}{(x^2+2)(x-2)^2}$$

La proposition nous dit qu'elle admet une décomposition sous la forme

$$g(x) = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

Pour trouver A_1, A_2, B et C on procède comme suit. On peut soit commencer par les A_i soit par les B et C, c'est égal. Disons qu'ici on commence avec les A_i : on commence par le morceau de degré le plus élevé (c'est toujours le plus efficace), c'est-à-dire A_2. Pour trouver A_2, on multiplie toute l'égalité par son dénominateur, qui est $(x-2)^2$:

$$g(x)(x-2)^2 = \frac{A_1(x-2)^2}{x-2} + \frac{A_2(x-2)^2}{(x-2)^2} + \frac{(Bx+C)(x-2)^2}{x^2+2}$$

On remplace g par son expression :

$$\frac{(x+4)(x-2)^2}{(x^2+2)(x-2)^2} = A_1(x-2) + A_2 + \frac{(Bx+C)(x-2)^2}{x^2+2}$$

et on simplifie tout ça :

$$\frac{x+4}{(x^2+2)} = A_1(x-2) + A_2 + \frac{(Bx+C)(x-2)^2}{x^2+2}$$

et là on peut remarquer que si on choisit x de manière à annuler le morceau par lequel on vient de multiplier, à savoir $x=2$ pour annuler $(x-2)^2$, tout disparait presque sauf le bout associé à g et A_2 :

$$x=2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2+4}{(2^2+2)} = 0 + A_2 + 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_2 = \frac{6}{6} = 1$$

Pour A_1 on fait la même chose (sauf que cette fois on sait que $A_2 = 1$), on multiplie par $(x-2)^2$, et cette fois on va dériver une fois avant d'évaluer l'égalité en $x = 2$:

$$g(x)(x-2)^2 = \frac{A_1(x-2)^2}{x-2} + \frac{(x-2)^2}{(x-2)^2} + \frac{(Bx+C)(x-2)^2}{x^2+2}$$

On simplifie d'abord :

$$\frac{x+4}{(x^2+2)} = A_1(x-2) + 1 + \frac{(Bx+C)}{x^2+2}(x-2)^2$$

On dérive, en prenant soin de gérer la fraction en $Bx + C$ comme un produit uv où $v = (x-2)^2$ afin de ne pas perdre de vue que ça va s'annuler en $x = 2$ (en gros, le seul morceau qui va rester sera g, donc on ne dérive que g et on ne dérive surtout pas les autres fractions) :

$$\frac{x^2+2-2x(x+4)}{(x^2+2)^2} = A_1 + \left(\frac{(Bx+C)}{x^2+2}\right)'(x-2)^2 + \frac{(Bx+C)}{x^2+2}.2(x-2)$$

On remplace à nouveau x par 2 :

$$\frac{2^2+2-2.2(2+4)}{(2^2+2)^2} = A_1 + 0 + 0 \Leftrightarrow A_1 = -\frac{18}{36} = -\frac{1}{2}$$

A ce stade, on a donc déjà trouvé A_1 et A_2 :

$$g(x) = \frac{x+4}{(x^2+2)(x-2)^2} = \frac{-1}{2(x-2)} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

Pour calculer B et C on va tester les différentes astuces possibles : choisir de bonnes valeurs et calculer des limites en l'infini.

— *Choisir une "bonne valeur" : là on peut voir que si on prend $x = 0$ on n'aura plus que C comme inconnue :*

$$g(0) = \frac{0+4}{(0^2+2)(0-2)^2} = \frac{-1}{2(0-2)} + \frac{1}{(0-2)^2} + \frac{0+C}{0^2+2}$$

ce qui nous donne ici $C = 0$

— *Limite en $+\infty$: si on regarde le morceau $\frac{Bx+C}{x^2+2}$, on voit qu'il est équivalent à B/x, donc sa limite en $+\infty$ sera 0, ce qui n'est pas très utile comme information pour trouver B. Par contre, on remarque que si on multiplie ce morceau par x, alors la limite devient B. L'idée est donc de multiplier g par x :*

$$g(x)x = \frac{(x+4)x}{(x^2+2)(x-2)^2} = \frac{-x}{2(x-2)} + \frac{x}{(x-2)^2} + \frac{Bx^2}{x^2+2}$$

et de faire tendre x vers l'infini dans cette égalité :

$$0 = \frac{-1}{2} + 0 + B$$

ce qui nous donne $B = 1/2$.

Finalement, on a décomposé g :

$$g(x) = \frac{x+4}{(x^2+2)(x-2)^2} = \frac{-1}{2(x-2)} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{x}{2(x^2+2)}$$

On peut donc calculer une primitive G de g, par exemple sur l'intervalle $]2, +\infty[$:

$$G(x) = \int \frac{x+4}{(x^2+2)(x-2)^2} = \frac{-1}{2}\ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{4}\ln|x^2+2|$$

4.2.2 Deuxième cas : $d(P) \geq d(Q)$

On peut se ramener au cas précédent grâce au résultat admis :

Théorème. *Pour tous polynomes P et Q tels que $d(P) \geq d(Q)$, alors il existe un unique couple de polynomes M et R tels que*

$$P = MQ + R, \qquad d(R) < d(Q)$$

Dans ce cas, on peut alors écrire

$$\frac{P}{Q} = M + \frac{R}{Q}, \text{ avec } d(R) < d(Q)$$

et on est donc ramené au cas précédent. Evidemment, il faut quand même être capable de calculer M et R. On va faire cela par division euclidienne de polynome. Ça marche comme pour la division entière classique, sauf que les monomes x^k jouent le rôle des puissances 10^k des nombres en base 10. On va voir ça sur un exemple.

Exemple. *On considère la fraction*

$$f(x) = \frac{x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 24}{(x^2+2)(x-2)^2} = \frac{P}{Q}$$

Pour pouvoir effectuer la division, on a besoin de développer le dénominateur :

$$\frac{P}{Q} = \frac{x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 24}{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 8}$$

Ensuite on pose la division (voir la vidéo pour le commentaire oral) :

$$
\begin{array}{l|l}
\overbrace{1x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 24}^{\text{P}} & \overbrace{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 8}^{\text{Q}} \\ \cline{2-2}
-(x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 8x) & \underbrace{x + 2}_{\text{M (quotient)}} \\
0 + 2x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 14x + 24 & \\
-(2x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 16x + 16) & \\
\underbrace{2x + 8}_{\text{R (reste)}} &
\end{array}
$$

Et on trouve finalement

$$f(x) = x + 2 + \frac{2x+8}{(x^2+2)(x-2)^2} = x + 2 + 2\frac{x+4}{(x^2+2)(x-2)^2} = x + 2 + 2g(x)$$

En utilisant ce que l'on a trouvé précédemment pour $g(x)$, on calcule une primitive F de f sur $]2, +\infty[$:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{2}\ln|x^2+2|$$

4.3 Intégration des éléments de 1è et 2è espèces

4.3.1 Première espèce

Les éléments de première espèces sont donc du type

$$\frac{A}{(x-a)^n}$$

On reconnait des fractions du type

$$\frac{u'}{u^n}$$

avec $u = x - a$, et on a donc pour l'intégration

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} = \int \frac{Au'}{u^n} = \int Au'u^{-n} = \frac{Au^{-n+1}}{-n+1} = \frac{A}{(1-n)}\frac{1}{u^{n-1}} = \frac{A}{(1-n)}\frac{1}{(x-a)^{n-1}}$$

4.3.2 Deuxième espèce

Cas général. Pour le cas général, on se retrouve à calculer ce genre de primitives :

$$\int \frac{Bt+C}{(t^2+bt+c)^n}\,dt$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $b^2 - 4c < 0$ (autrement dit le dénominateur ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$). La méthode dans ce cas consiste à couper la fraction en deux morceaux, l'un qui sera de la forme u'/u^n et l'autre qui sera de la forme d/u^n :

$$\frac{Bt+C}{(t^2+bt+c)^n} = \frac{B}{2}\frac{2t+b}{(t^2+bt+c)^n} + \frac{C-Bb/2}{(t^2+bt+c)^n}$$

Intégration du premier morceau. Il est de la forme constante $\times u'/u^n$ car on a bien pris soin de faire apparaite $2t+b$ qui est justement la dérivée de t^2+bt+c, on peut donc intégrer en $u^{-n+1}/(-n+1)$:

$$\int \frac{2t+b}{(t^2+bt+c)^n}\,dt = \int \frac{u'}{u^n} = \int u'u^{-n} = \frac{u^{-n+1}}{-n+1} = \frac{(t^2+bt+c)^{-n+1}}{-n+1}$$

ce qui se réécrit encore

$$\int \frac{2t+b}{(t^2+bt+c)^n}\,dt = \frac{(t^2+bt+c)^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{(1-n)}\frac{1}{(t^2+bt+c)^{n-1}}$$

Intégration du deuxième morceau. Il est de la forme constante fois $1/u^n$ où u est un polynome de degre 2 irréductible dans $\mathbb{R}$, il nous faut donc savoir intégrer

$$\int \frac{1}{(t^2+bt+c)^n}\,dt$$

Il y a plusieurs étapes :

1. On commence par un changement de variable pour se ramener à l'intégrale suivante :
$$\int \frac{1}{(u^2+1)^n}\,du$$
Pour cela, on met le trinome sous forme canonique :
$$t^2+bt+c=(t+\frac{b}{2})^2-\frac{b^2}{4}+c=(t+\frac{b}{2})^2+\frac{4c-b^2}{4}$$
avec $4c-b^2>0$, on peut donc factoriser :
$$t^2+bt+c=\frac{4c-b^2}{4}(\frac{4}{4c-b^2}(t+\frac{b}{2})^2+1)$$
à une constante près on est donc ramené au calcul de primitive suivant
$$\int \frac{1}{((\sqrt{\frac{4}{4c-b^2}}(t+\frac{b}{2}))^2+1)^n}$$
pour lequel on fait le changement de variable $u=\sqrt{\frac{4}{4c-b^2}}(t+\frac{b}{2})$, ce qui donne finalement la primitive suivante à calculer
$$\int \frac{1}{(u^2+1)^n}$$
Evidemment, ici il ne s'agit en aucun cas de retenir la formule par coeur, mais juste de retenir le cheminement, la méthode !
2. Ensuite il y a deux cas :
   — Si $n=1$, c'est terminé, car on sait qu'une primitive de $\frac{1}{u^2+1}$ est $\arctan x$
   — Si $n>1$, on fait le changement de variable :
   $$u=\tan v,\quad du=\frac{dv}{\cos^2 v}$$
   on est donc amené à calculer la primitive
   $$\int \frac{1}{\tan^2 v+1}\frac{1}{\cos^2 v}\,dv=\int(\cos v)^{2n-2}\,dv$$
   que l'on pourra calculer soit par linéarisation, soit par récurrence (à voir en TD).

Exemple. *On considère la fraction*
$$\begin{aligned} f(t)=\frac{t+1}{t^2+4t+8} &= \frac{1}{2}\frac{2t+4}{t^2+4t+8}-\frac{1}{t^2+4t+8}\\ &= \frac{1}{2}\frac{2t+4}{t^2+4t+8}-\frac{1}{(t+2)^2+4}\\ &= \frac{1}{2}\frac{2t+4}{t^2+4t+8}-\frac{1}{4}\frac{1}{(t/2+1)^2+1}\end{aligned}$$

Le premier morceau s'intègre facilement car on reconnait u'/u qui s'intègre en $\ln|u|$:

$$\int^x \frac{1}{2}\frac{2t+4}{t^2+4t+8} = \frac{1}{2}\ln|t^2+4t+8|$$

Pour le deuxième on fait le changement de variable $u = t/2+1$, $du = dt/2$, quand t vaut x alors u vaut $x/2+1$, ce qui donne

$$\int^x \frac{1}{4}\frac{1}{(t/2+1)^2+1}\,dt = \frac{1}{4}\int^{x/2+1}\frac{2du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\arctan(\frac{x}{2}+1)$$

Finalement, on trouve pour la primitive de f la fonction F :

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln|t^2+4t+8| - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}+1\right)$$

4.4 Rappel des étapes pour le calcul de la primitive d'une fraction

Voic l'ordre dans lequel travailler pour intégrer une fraction de type $\frac{P}{Q}$:

1. Si $d^oP \geq d^oQ$ alors on commence par faire la division euclidienne de P par Q, cf section 4.2.2. Sinon on passe directement à l'étape 2. Après division, on obtient ainsi $P = M + \frac{R}{Q}$ avec $d^oR < d^oQ$
2. Une fois que l'on a $\frac{P}{Q}$ ou $\frac{R}{Q}$ avec les bons degrés, on factorise Q au maximum dans $\mathbb{R}$.
3. Grâce à la factorisation de Q, on en déduit la décomposition de $\frac{P}{Q}$ ou $\frac{R}{Q}$ avec la proposition de la section 4.2.1.
4. On intègre chaque élément simple :
   (a) On commence par vérifier s'il n'y a pas des primitives évidentes. On pensera par exemple à tout ce qui ressemble à $\frac{f'}{f}$ (qui s'intègre en $\ln(|f|)$), ou à $\frac{1}{1+x^2}$ (qui s'intègre en $\arctan(x)$).
   (b) On intègre un par un chaque élément simple, en suivant la méthode de la section 4.3.
5. On remet tous les éléments ensemble pour calculer la primitive de $\frac{P}{Q}$ (on oublie pas le morceau en M si jamais on a effectué une division euclidienne).

4.5 Application aux fonctions rationnelles en $\sin$ et $\cos$

Ces fonctions s'intègrent en faisant un changement de variable pour se ramener à une primitive de fraction. On suppose que la fonction f s'écrit :

$$f(x) = \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)}\,dx$$

où P et Q sont des polynomes. Alors on a les règles suivantes pour décider du "bon" changement de variable :

— si "$f(x)dx$" est invariant par le changement $x \mapsto -x$, autrement dit si $f(-x) = -f(x)$, alors on posera $t = \cos x$;

— si "$f(x)dx$" est invariant par le changement $x \mapsto \pi - x$, autrement dit si $f(\pi - x) = -f(x)$, alors on posera $t = \sin x$;

— si "$f(x)dx$" est invariant par le changement $x \mapsto \pi + x$, autrement dit si $f(\pi + x) = f(x)$, alors on posera $t = \tan x$;

— sinon, on posera $t = \tan \frac{x}{2}$.

Le tout dernier changement marche à tout les coups. En effet, si on pose $t = \tan \frac{x}{2}$, alors on a :

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

Après le changement de variable, on est ramené à calculer la primitive d'une fraction en t, cf paragraphes précédents. Ne pas oublier à la toute fin de revenir à x...

3

Algèbre linéaire et matrices

Plan du chapitre

1 – Espaces vectoriels

1.1 Définition

Un espace vectoreil est un ensemble sur lequel est défini

— une addition interne

— une multiplication externe

Définition. *On dit que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ev), ou un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ($\mathbb{R}$-ev), si E est muni d'une addition interne $(+)$ et d'une multiplication externe $(\times)$ telles que :*

— *Addition :*

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \to & E \\ u, v & \mapsto & u + v \end{array}$$

1. *Associativité :* $\forall u, v, w \in E, (u + v) + w = u + (v + w)$
2. *Elément neutre :* $\exists e \in E, \forall u \in E, u + e = e + u = u$
3. *Opposé :* $\forall u \in E, \exists u' \in E, u + u' = u' + u = e$
4. *Commutativité :* $\forall u, v \in E, u + v = v + u$

— *Multiplication :*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times E & \to & E \\ \lambda, u & \mapsto & \lambda u \end{array}$$

1. *Associativité :* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u \in E, \lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$
2. *Elément neutre :* $\forall u \in E, 1.u = u$
3. *Distributivité 1 :* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u \in E(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$
4. *Distributivité 2 :* $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u, v \in E\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$

Exemple. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-ev. L'addition est simplement celle des vecteurs, terme à terme : $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$, le vecteur nul est $(0, \dots, 0)$, l'opposé s'obtient en changeant tous les signes terme par terme. La multiplication est simplement celle d'un scalaire fois un vecteur. Les propriétés sont toutes faciles à démontrer, on se réfèrera à la vidéo si besoin.*

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition. *Soit E un ev et F un sous-ensemble non vide de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E (sev) s'il est un ev pour l'addition et pour la multiplication externe de E.*

Théorème. *Soit E un ev er F un sous-ensemble non vide de E. Alors F est un sev ssi il est stable par addition et multiplication externe :*

$$\forall u, v \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad u + \lambda v \in F$$

Proposition. *L'intersection de deux sev est un sev.*
(attention, pour l'union c'est en général faux)

Exemple.
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2x+3y=0\}$ *est un sev de* $\mathbb{R}^2$
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy=0\}$ *n'est pas un sev de* $\mathbb{R}^2$
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y=1\}$ *n'est pas un sev de* $\mathbb{R}^2$
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x=0\}$ *est un sev de* $\mathbb{R}^2$

1.3 Familles génératrices, familles libres

Définition. *Soit* $(x_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ *une famille de vecteurs d'un* $\mathbb{R}$*-ev* E*. On appelle combinaison linéaire des* $(x_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ *tout vecteur qui s'écrit comme une somme du type*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

où les λ_i *sont des réels non tous nuls.*

Remarque. *L'ensemble* F *des combinaisons linéaires des* $(x_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ *est un sev de* E*. C'est le plus petit sev contenant tous les* x_i*. On le note*

$$Vect(x_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$$

et on l'appelle sous-espace vectoriel engendré par les $(x_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$*.*

Définition. *Soit* E *un* $\mathbb{R}$*-ev er* $\mathcal{V}$ *une famille de vecteurs de* E*. On dit que* $\mathcal{V}$ *est une famille génératrice de* E *si le sev engendré par* $\mathcal{V}$ *est égal à* E *:*

$$Vect(\mathcal{V}) = E$$

Exemple.
- $(1,0)$ *engendre la droite vectorielle* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y=0\}$
- $\{(1,0),(0,1)\}$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{R}^2$

Définition. *Soit* E *un* $\mathbb{R}$*-ev et* $\mathcal{V}$ *une famille de vecteurs de* E*. On dit que* $\mathcal{V}$ *est une famille libre si pour tout entier* $n \geq 1$ *et pour tous* $v_1,\ldots,v_n$ *vecteurs de* $\mathcal{V}$ *on a l'implication suivante :*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \quad \Longleftrightarrow \lambda_i = 0, \forall i = 1,..,n$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille est liée.

Remarque. *Une famille est libre si aucun vecteur de* $\mathcal{V}$ *n'est combinaison linéaire d'autres vecteurs de* $\mathcal{V}$*.*

Exemple.
- $\{(1,0),(0,1)\}$ *est une famille libre de* $\mathbb{R}^2$
- $\{(1,2,0),(1,0,3)\}$ *est une famille libre de* $\mathbb{R}^3$
- $\{(1,0,1),(1,1,0),(-1,-3,2)\}$ *est une famille liée.*

1.4 Bases et dimension d'un ev

Définition. *Une famille libre et génératrice d'un ev E est appelée une base de E.*

Proposition. *Soit E un $\mathbb{R}$-ev admettant une base $(e_i)_{i=1..n}$. Alors tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des e_i :*

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Les $(x_i)_{i=1..n}$ s'appellent les coordonnées de x dans la base $(e_i)_{i=1..n}$.

Démonstration. *La démonstration repose sur le fait qu'une base est à la fois une famille génératrice (ce qui donnera l'existence des coordonnées) et une famille libre (qui nous permettra de prouver l'unicité). La preuve est laissée en exercice, elle est complète dans la vidéo.*

Exemple. $(1, 0, ..., 0), (0, 1, ..., 0), ...(0, 0, ..., 1)$ *est une base de $\mathbb{R}^n$, appelée base canonique de $\mathbb{R}^n$. Par exemple :*

— *dans $\mathbb{R}^2$: il y a deux vecteurs dans la base canonique $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$*

— *dans $\mathbb{R}^3$: trois vecteurs pour la base canonique $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$*

— *dans $\mathbb{R}^4$: quatre vecteurs pour la base canonique $e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1)$*

— *etc.*

Théorème. *Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie. Alors toutes les bases de E ont le même cardinal (nombre de vecteurs), appelé dimension de E.*
(si $E = \{0\}$ alors $\dim E = 0$)

Exemple. $\dim \mathbb{R}^n = n$

Proposition. *Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n avec $n > 0$, alors :*

— *Toute famille libre de n vecteurs est une base de E*

— *Toute famille génératrice de n vecteurs est une base de E*

Exemple. *Il est très utile de savoir trouver rapidement une base à partir des équations d'un sous-espace vectoriel, on en donne quelques exemples :*

— $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - z = 0\}$

— $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - z = 0, x + y - 2z = 0\}$

Ces exemples sont laissés en exercice, la solution complète est dans la vidéo.

2 – Matrices

2.1 Définitions et notations

Définition. *Etant donnés deux entiers m et n strictement positifs, une* **matrice à m lignes et n colonnes** *est un tableau rectangulaire de réels $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$.*
L'indice de ligne i va de 1 à m, l'indice de colonne j va de 1 à n et on représente la matrice A ainsi :

$$A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Les entiers m et n sont les **dimensions** *de la matrice, $a_{i,j}$ est son* **coefficient d'ordre** *(i,j).*

Exemple. *La matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 7 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est une matrice à $n = 3$ lignes et $m = 2$ colonnes, ses coefficients valent : $a_{1,1} = -2$, $a_{1,2} = 2$, $a_{2,1} = 7$, etc.

Définition. *L'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes et à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Lorsque $n = m$, on le note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est appelé une matrice carrée de taille n.*

2.2 Matrices et vecteurs

On identifie le plus souvent $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ (matrices carrées de taille 1) à $\mathbb{R}$ et suivant les cas $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}1, n(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$.

Soit $\mathcal{S} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$, avec pour tout j entre 1 et p, $u_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \ldots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$, alors la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix}$ (obtenue en mettant les vecteurs u_j en colonnes) représente $\mathcal{S}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exemples.

1. *Par exemple, la matrice identité (nulle partout, avec des 1 sur la diagonale) représente la base canonique de RR^n*
2. *$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ représente les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $u_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$*

2.3 Opérations matricielles

L'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est naturellement muni d'une addition interne (on peut ajouter deux matrices de mêmes dimensions terme à terme) et d'une multiplication externe (on peut multiplier une matrice par un réel terme à terme). C'est un espace vectoriel pour ces deux lois.

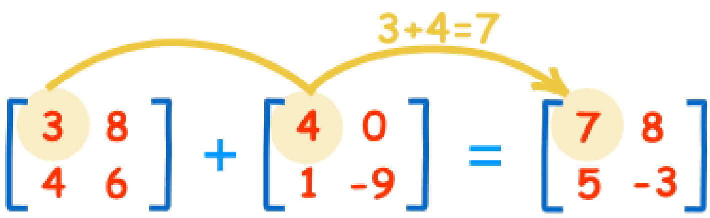
2.3.1 Egalité

Remarque. *Deux matrices A et B sont égales si et seulement si elles sont de même taille et tous leurs coefficients sont identiques. Autrement dit, si $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1leqj\leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq m, 1leqj\leq q}$ alors*

1. *$n = m$ et $p = q$*
2. *pour tout couple i, j on a $a_{ij} = b_{ij}$.*

2.3.2 Addition

Si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ (de même taille donc), leur somme $A + B$ est la matrice $(a_{i,j} + b_{i,j})$, autrement dit on ajoute les coefficients terme à terme. Par exemple :



L'addition hérite des propriétés de l'espace vectoriel :

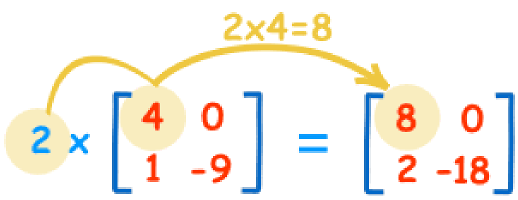
— associativité : $(A + B) + C = A + (B + C)$,

— commutativité : $A + B = B + A$.

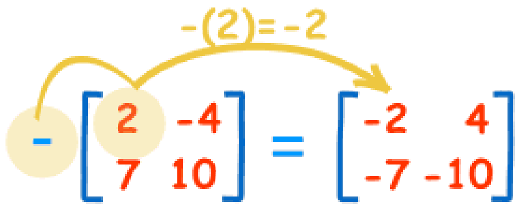
On ne peut pas ajouter des matrices de tailles différentes...

2.3.3 Multiplication externe (par un scalaire)

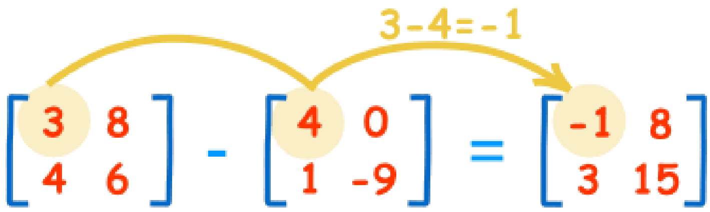
Si $A = (a_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, et λ est un réel, le produit λA est la matrice $(\lambda a_{i,j})$, autrement dit on multiplie chaque coefficient de la matrice par le réel λ. Par exemple :



Grâce à cela on peut facilement définir l'opposé d'une matrice :



Pour l'opposé, on note $(-1).A = -A$.
On définit également la soustraction de deux matrices, comme étant la somme de A avec $-B$:



Les propriétés d'espace vectoriel sont les suivantes :

— associativité $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$,

— distributivité 1 : $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,

— distributivité 2 : $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

2.3.4 Produit matriciel

C'est l'opération la plus importante (et la plus délicate à maitriser au début).

Définition. *Soient m, n, p trois entiers strictement positifs. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et soit $B = (b_{j,k})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle* **produit matriciel** *de A par B la matrice $C \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ dont le terme général $c_{i,k}$ est défini, pour tout $i = 1, \dots, m$ et pour tout $k \in 1, \dots, p$ par :*

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,j}\ .$$

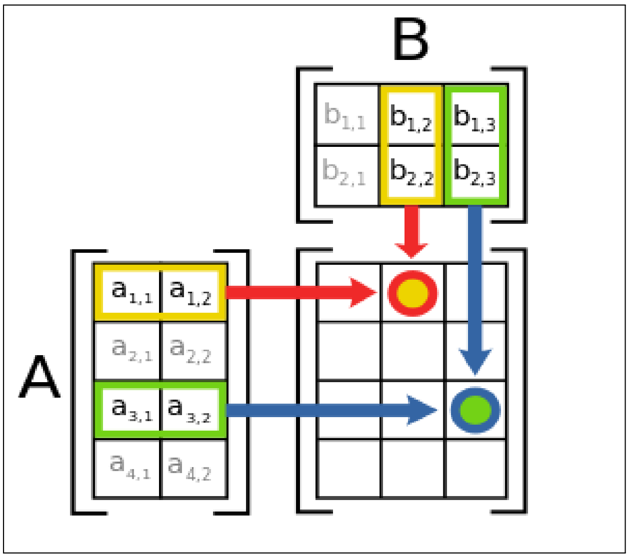
autrement dit le coefficient de la i-ème ligne et j-ème colonne de la matrice produit C se calcule en sommant les produits terme à terme de la i-ème ligne de la matrice A avec ceux de la j-ème colonne de la matrice B.

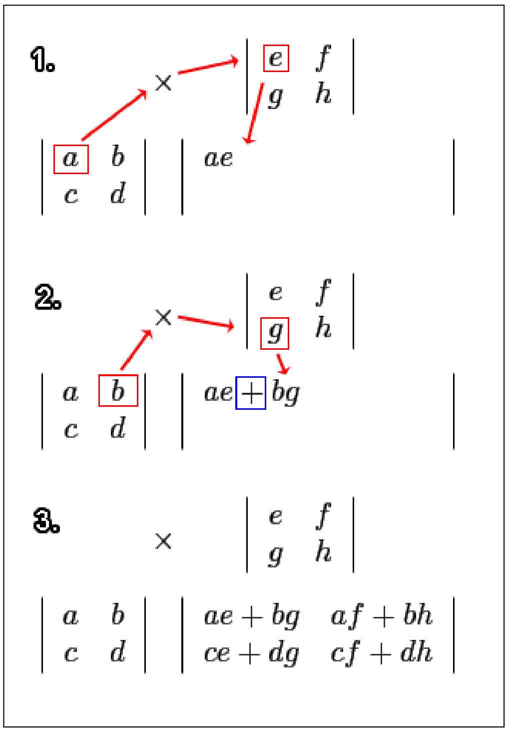
Remarque. *Attention ! La multiplication n'est possible* que si *les tailles des matrices A et B sont compatibles : le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B. Si A est de taille (m, n) (m lignes, n colonnes) et B est de taille (n, p) (n lignes, p colonnes) alors le résultat C est de taille (m, p) :*

$$(m, n) \times (n, p) \to (m, p)$$

autrement dit C a autant de lignes que A et autant de colonnes que B.

Pour effectuer ce produit, nous conseillons d'adopter la disposition suivante, en plaçant B au-dessus et à droite de A, comme sur les deux schémas suivants :





Exemple. *Prenons les deux matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

La matrice A a 3 lignes et 2 colonnes, la matrice B a 2 lignes et 4 colonnes. Le produit AB a donc un sens : c'est une matrice à 3 lignes et 4 colonnes et l'on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & -1 \\ -9 & -4 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Remarque. *Le produit matriciel a toutes les propriétés que l'on attend d'un produit, sauf qu'il* n'est pas commutatif, *autrement dit $AB \neq BA$ (en général).*

Proposition. *Le produit matriciel possède les propriétés suivantes.*

1. Associativité : *Si les produits AB et BC sont définis, alors les produits $A(BC)$ et $(AB)C$ le sont aussi et ils sont égaux.*

$$A(BC) = (AB)C .$$

2. Linéarité à droite : *Si B et C sont deux matrices de mêmes dimensions, si λ et μ sont deux réels et si A a autant de colonnes que B et C ont de lignes, alors*

$$A(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC .$$

3. Linéarité à gauche : *Si A et B sont deux matrices de mêmes dimensions, si λ et μ sont deux réels et si C a autant de lignes que A et B ont de colonnes, alors*

$$(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC \, .$$

Définition. *On appelle matrice unité ou identité, notée I_n si elle est de taille n, toute matrice carrée qui possède des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs. Par exemple :* $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Alors I_n est l'élément neutre de la multiplication dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et même plus précisément on a :

Proposition. *Pour toute matrice A dans $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$, on a $AI_p = I_nA = A$.*

2.3.5 Transposition, matrices transposées

Définition. *Étant donnée une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, sa* transposée, *notée A^T ou encore A^t ou bien ${}^tA$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dont le coefficient d'ordre (j, i) est $a_{i,j}$.*

Pour écrire la transposée d'une matrice, il suffit de transformer ses lignes en colonnes. Par exemple :

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 24 \\ 1 & -9 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -9 \\ 24 & 8 \end{bmatrix}$$

On voit sur cet exemple que la 1ère ligne de A est la 1ère colonne de ${}^tA$, la 2ème ligne de A est la 2ème colonne de ${}^tA$, etc.

Observons que la transposée de la transposée est la matrice initiale.

$$(A^t)^t = A \, .$$

On a également d'autres propriétés faciles : $(A + B)^t = A^t + B^t$, $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.
La transposée d'un produit est le produit des transposées, mais il faut inverser l'ordre des facteurs.

Proposition. *Soient m, n, p trois entiers strictement positifs. Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{j,k})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. La transposée du produit de A par B est le produit de la transposée de B par la transposée de A.*

$$(AB)^t = B^t \, A^t \, .$$

Observons que le produit d'une matrice par sa transposée est toujours défini.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} .$$

$$A\,A^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 13 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad A^t\,A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} .$$

Le résultat est une matrice *carrée* (autant de lignes que de colonnes) et *symétrique*.

2.4 Cas particulier des matrices carrées

2.4.1 Matrices carrées particulières

Certaines matrices carrées sont notables.

— matrice identité I_n (cf plus haut)

— matrices diagonales : $D = \begin{pmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$, par exemple $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

— matrices triangulaires supérieures : $U = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$, par exemple $\begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

— matrices triangulaires inférieures : $L = \begin{pmatrix} l_{11} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}$, par exemple $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

On a aussi la définition des matrices symétriques et anti-symétriques :

Définition. *Soit n un entier strictement positif et A une matrice carrée à n lignes et n colonnes.*
On dit que A est symétrique si pour tous $i, j = 1, \dots, n$, ses coefficients d'ordre $a_{i,j}$ et $a_{j,i}$ sont égaux, ce qui est équivalent à dire que A est égale à sa transposée : $A^t = A$.
Similairement, on dit que A est anti-symétrique si $A^t = -A$.

Le produit d'une matrice par sa transposée est toujours une matrice symétrique. En effet :

$$(A\,A^t)^t = (A^t)^t\,A^t = A\,A^t .$$

2.4.2 Puissances

Définition. *Soit n un entier strictement positif et A une matrice carrée à n lignes et n colonnes. Soit $p \in \mathbb{N}$. On définit A^p par récurrence :*

$$A^0 = I, \quad , A^1 = A, \quad A^{p+1} = A \times A^p = A^p \times A, \forall p \geq 1$$

2.4.3 Matrices inversibles

Définition. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n$. On dit que A est inversible s'il existe une matrice de $\mathcal{M}_n$, notée A^{-1}, telle que*

$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I_n\ .$$

Théorème. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n$. Supposons qu'il existe une matrice B telle que $A\,B = I_n$* ou bien *$B\,A = I_n$. Alors A est inversible et $B = A^{-1}$.*

Exemple. *Par exemple :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et son inverse est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition. *Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n$. Le produit AB est inversible et son inverse est $B^{-1}A^{-1}$.*

2.4.4 Application aux systèmes

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. Soit $b \in \mathbb{R}^n$ un vecteur quelconque. Chercher un n-uplet $x = (x_1, \dots, x_n)$ tel que $Ax = b$, c'est résoudre un système linéaire de n équations à n inconnues. Si la matrice A est inversible, alors la solution s'écrit $x = A^{-1}b$. La méthode du pivot de Gauss permet de résoudre le système $Ax = b$ pour un second membre quelconque, donc de calculer $x = A^{-1}b$. Les coefficients de A^{-1} se lisent sur le système résolu.

Cas d'une matrice 2×2. Voici ce qu'on obtient pour une matrice A à deux lignes et deux colonnes.

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} x & +2y & = & a \\ 3x & +4y & = & b \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rrcl} x & +2y & = & a \\ & -2y & = & b-3a \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2a+b \\ y & = & \frac{1}{2}(3a-b) \end{array} \right.$$

Les coefficients de A^{-1} sont ceux de a et b dans l'expression de x et y. Dans le cas général on obtient :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad , \quad A^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}\ ,$$

si $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. L'expression de A^{-1} est facile à mémoriser. Pour inverser une matrice à deux lignes et deux colonnes, il faut :

1. échanger les deux coefficients diagonaux
2. changer le signe des deux autres
3. diviser tous les coefficients par le déterminant $\alpha\delta - \beta\gamma$.

Cas général. Pour $n \geqslant 3$, il n'y a pas de formule générale aussi facile. La technique la plus sûre consiste à résoudre le système $Ax = b$ pour un second membre quelconque, avec la méthode du pivot de Gauss, puis à écrire ensuite que la solution obtenue est le produit de A^{-1} par le second membre.

Exemple. *Soit par exemple à inverser la matrice A suivante.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ecrivons le système

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} ,$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} x & & -z & = & a \\ x & -y & & = & b \\ x & -y & +z & = & c \end{array} \right.$$

Voici les différentes étapes de la résolution par la méthode du pivot de Gauss.

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} x & & -z & = & a \\ x & -y & & = & b \\ x & -y & +z & = & c \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rrrcrl} x & & -z & = & a & \leftarrow L_1 \\ & -y & +z & = & b-a & \leftarrow L_2 - L_1 \\ & -y & +2z & = & c-a & \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrrcrl} x & & -z & = & a & \leftarrow L_1 \\ & -y & +z & = & b-a & \leftarrow L_2 \\ & & z & = & c-b & \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rrrcrl} x & & -z & = & a & \leftarrow L_1 \\ & y & -z & = & a-b & \leftarrow -L_2 \\ & & z & = & c-b & \leftarrow L_3 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrrcrl} x & & & = & a-b+c & \leftarrow L_1 + L_3 \\ & y & & = & a-2b+c & \leftarrow L_2 + L_3 \\ & & z & = & -b+c & \leftarrow L_3 \end{array} \right. \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} ,$$

avec

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Elimination de Gauss-Jordan. L'élimination de Gauss-Jordan est une autre manière de présenter le calcul de l'inverse. La méthode est encore celle du pivot de Gauss. L'idée est de mettre en œuvre le pivot de Gauss pour transformer la matrice A en la matrice identité, et *de faire les mêmes opérations en parallèle sur la matrice identité*, de sorte que l'on obtient au final la matrice inverse voulue.

Exemple. *On illustre la procédé en reprenant l'exemple précédent.*
On commence par écrire côte à côte la matrice A et l'identité :

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ensuite on met en œuvre la méthode de Gauss, en effectuant sur I les mêmes opérations que sur A. On commence par mettre des zéros dans la première colonne de A en lignes 2 et 3 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 - L_1 \\ \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

On continue les étapes de la méthode de Gauss pour arriver à l'identité à la place de A :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \\ \leftarrow -L_2 \\ \leftarrow L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow L_1 + L_3 \\ \leftarrow L_2 + L_3 \\ \leftarrow L_3 \end{array}$$

Lorsque la matrice A est devenue l'identité, le bloc de droite contient exactement A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.5 Matrices et changement de base

Rappels. $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ ssi pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, x se décompose de façon unique sur $\mathcal{B}$.

Exemple. *Soient $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1), e'_1 = (2,3), e'_2 = (4,5)$. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$, ce sont deux bases de $\mathbb{R}^2$ ($\mathcal{B}$ est appelée la base canonique de $\mathbb{R}^2$). Soit $x = (2,4)$, alors on peut décomposer x à la fois dans $\mathcal{B}$ et dans $\mathcal{B}'$: $x = 2e_1 + 4e_2$, $x = 3e'_1 - e'_2$, autrement dit ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $X_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et dans $\mathcal{B}'$: $X_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.*

On a aussi $e'_1 = 2e_1 + 3e_2$ et $e'_2 = 4e_1 + 5e_2$, c'est la décomposition de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$. On peut alors définir la matrice de passe de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, matrice contenant en colonnes la décomposition de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$: $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

On peut remarquer que cette matrice permet d'obtenir les coordonnées dans $\mathcal{B}$ si on connait celles dans $\mathcal{B}'$. Par exemple soit z qui a pour coordonnées $z_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, alors on a $z = 6e'_1 + 7e'_2 = 6(2e_1+3e_2)+7(4e_1+5e_2) = 40e_1+53e_2$ de sorte que ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $z_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 40 \\ 53 \end{pmatrix}$. Ici on peut remarquer que l'on vient d'effectuer en fait le produit matriciel $z_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} z_{\mathcal{B}'}$.

Cas général.

Définition. *Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ deux bases de $\mathbb{R}^n$, telles que les vecteurs de $\mathcal{B}'$ se décomposent ainsi dans $\mathcal{B}$: $e'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i$. On note $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ la matrice représentant $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$: $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = (p_{ij})_{1\le i,j\le n}$, on l'appelle matrice de changement de base (ou de passage) de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.*

Proposition.

1. *Si $x \in \mathbb{R}^n$ a pour composantes $X_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$ et $X_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}'$, alors $X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}$*
2. *$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ est inversible et on a $P^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$*

2.6 Image, noyau et rang d'une matrice

Définition. *On appelle rang d'une famille V de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, noté rang(V), la dimension du sous-espace engendré par V.*

Remarque. *Le rang de V est ainsi le nombre maximal de vecteur linéairement indépendants (libres) que l'on peut extraire de V.*

Définition. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Les colonnes de A peuvent être vues comme la représentation d'une famille V de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On appelle rang de la matrice A, noté rang(A), le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.*

Exemple. *rang$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$, rang$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 1$, rang$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$ car les deux premiers vecteurs colonnes sont libres mais le troisième vérifie $x_3 = x_1 + x_2$ donc ils sont liés à trois.*

Définition. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle noyau de A, noté Ker(A), l'ensemble des vecteurs colonnes X de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tels que $AX = 0$.*
On appelle image de A, notée Im(A) l'ensemble des vecteurs colonnes Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $Y = AX$.

Proposition.

1. *Ker(A) est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.*

2. *$Im(A)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, c'est l'espace engendré par les vecteurs colonnes de A.*

Démonstration. 1. *$A.0_p = 0_n$ donc $0_p \in Ker(A)$.*
Soient X et X' dans $Ker(A)$, alors leur somme est dans $Ker(A)$ aussi : $A(X+X') = AX + AX' = 0$.
Soient $X \in Ker(A)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda X \in Ker(A)$ aussi : $A(\lambda X) = \lambda.AX = \lambda.0 = 0$
Donc $Ker(A)$ est bien un sev de $\mathbb{R}^p$

2. *$A.0_p = 0_n$ donc $0_n \in Im(A)$.*
Soient $Y, Y' \in Im(A)$ alors $\exists X, X' \in \mathbb{R}^p$ tels que $AX = Y$ et $AX' = Y'$, donc $Y + Y' \in Im(A)$ car $Y + Y' = A(X + X')$ donc $U = X + X'$ est bien un vecteur de $\mathbb{R}^p$ tel que $AU = Y + Y'$.
De même, si $Y \in Im(A)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda Y \in Im(A)$ aussi : $\exists X \in \mathbb{R}^p$, $Y = AX$ donc $(\lambda Y) = \lambda.AX = A(\lambda X)$ de sorte qu'en posant $U = \lambda X$ on obtient bien ce qu'il faut pour $(\lambda Y) = AU$.
Donc $Im(A)$ est bien un sev de $\mathbb{R}^n$.
Appelons maintenant $Y_1, ..., Y_p$ les p vecteurs colonnes de A, on va démontrer que $Im(A) = Vect(Y_1, ..., Y_n)$ en procédant par double inclusion. Si on appelle $e_1, ..., e_n$ les n vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on remarque que pour tout i, $Ae_i = Y_i$, ainsi on obtient que chacun de Y_i est dans $Im(A)$, donc comme $Im(A)$ est un sev, il contient $Vect(Y_1, ..., Y_n)$, autrement dit $Vect(Y_1, ..., Y_n) \subset Im(A)$. Pour l'autre inclusion, soit $Y \in Im(A)$, soit X tel que $Y = AX$. Décomposons X dans la base canonique : $X = x_1e_1 + ... + x_ne_n$. Alors en développant on obtient $Y = A(x_1e_1 + ... + x_ne_n) = x_1Ae_1 + ... + x_nAe_n = x_1Y_1 + ... + x_nY_n$, autrement dit $Y \in Vect(Y_1, ..., Y_n)$, ce qui nous donne l'autre inclusion : $Im(A) \subset Vect(Y_1, ..., Y_n)$.

Exemple. *Déterminons le noyau, l'image et le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.*

Noyau. *Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(A)$, alors*

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z &= 0 \\ 2x + y - z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z &= 0 & L_1 \\ -y - 3z &= 0 & L_2 - 2L_1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 2z \\ y &= -3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ -3z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall z \in \mathbb{R}$$

Autrement dit, $Ker(A) = Vect \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Image et rang. *On a $Im(A) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$. Voyons si ces vecteurs sont libres ou liées. Pour cela on écrit une relation de liaison entre eux :*

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a + b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2c \\ b = -3c \end{cases}$$

Ceci nous donne l'existence d'une relation de liaison non triviale, par exemple $c = 1, a = 2, b = -3$: $2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$. *Ensuite on peut voir que les vecteurs* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *sont libres, donc* $Im(A) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$*, ce qui nous donne à la fois la base de* $Im(A)$ *et le rang de* A *qui vaut 2.*

3 – Applications linéaires

Dans toute cette section, on considèrera E un sev de $\mathbb{R}^p$ et F un sev de $\mathbb{R}^n$ où $p, n \in \mathbb{N}$.

3.1 Généralités

Définition. *On appelle* application linéaire de E dans F *tout application* $f : E \to F$ *telle que*

$$\forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1) : f(u+v) = f(u) + f(v), \quad (2) : f(\lambda u) = \lambda f(u)$$

ou encore, de manière équivalente :

$$\forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$$

Remarque. *Vocabulaire.*

— *On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F*

— *Si $E = F$, on note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, F)$, les applications sont alors appelées des* endomorphismes

— *Si $F = \mathbb{R}$, les éléments de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ s'appellent les* formes linéaires *de E.*

— *Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective, on dit que f est un isomorphisme de E dans F. Si de plus $E = F$, on dit que f est un automorphisme de E.*

Exemple. *Voici quelques exemples d'applications linéaires.*

- *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *:* $(x, y) \mapsto (x + y, 2x + 3y)$
- *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *:* $(x, y) \mapsto (y, x, x + y)$
- *de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *:* $(x, y, z) \mapsto (y - x, 2z + y)$
- *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *:* $(x, y) \mapsto (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta)$ *la rotation de centre* $(0, 0)$ *et d'angle* θ.

Faisons la preuve pour la première : $f(x, y) = (x + y, 2x + 3y)$. On se donne un vecteur v qui a pour coordonnées dans $\mathbb{R}^2$ (v_1, v_2) et w qui a pour coordonnées (w_1, w_2), et deux réels λ, μ. Les coordonnées de $\lambda v + \mu w$ sont $(\lambda v_1 + \mu w_1, \lambda v_2 + \mu w_2)$. On calcule :

1. $f(\lambda v + \mu w) = f(\lambda v_1 + \mu w_1, \lambda v_2 + \mu w_2)$ *pour cela on remplace x par $\lambda v_1 + \mu w_1$ et y par $\lambda v_2 + \mu w_2$:*

$$\begin{aligned}
f(\lambda v + \mu w) &= f(\lambda v_1 + \mu w_1, \lambda v_2 + \mu w_2) \\
&= (\lambda v_1 + \mu w_1 + \lambda v_2 + \mu w_2, 2(\lambda v_1 + \mu w_1) + 3(\lambda v_2 + \mu w_2)) \\
&= (\lambda(v_1 + v_2) + \mu(w_1 + w_2), \lambda(2v_1 + 3v_2) + \mu(2w_1 + 3w_2)) \\
&= (\lambda(v_1 + v_2), \lambda(2v_1 + 3v_2)) + (\mu(w_1 + w_2), \mu(2w_1 + 3w_2)) \\
&= \lambda(v_1 + v_2, 2v_1 + 3v_2) + \mu(w_1 + w_2, 2w_1 + 3w_2)
\end{aligned}$$

2. $\lambda f(v) + \mu f(w) = \lambda f(v_1, v_2) + \mu f(w_1, w_2) = \lambda(v_1 + v_2, 2v_1 + 3v_2) + \mu(w_1 + w_2, 2w_1 + 3w_2)$

On trouve bien la même chose donc l'application est linéaire.

Remarque. *Méthode. Pour reconnaître une application linéaire : les seules opérations "autorisées" pour que l'application soit bien linéaire sont les combinaisons linéaires entre les coefficients.*
La présence de tout autre élément (présence d'un carré, ajout d'une constante, produit entre deux coefficients, présence d'une fonction non linéaire comme $\sin, \cos$ *ou autre, valeur absolue, etc.) rend la fonction non linéaire.*
Si on a reconnu une application linéaire, on met en pratique la méthode ci-dessus.
Si on a reconnu une application non linéaire, il suffit de trouver un contre-exemple, autrement dit deux vecteurs bien choisis et deux réels bien choisis tels que la formule $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$ *soit fausse.*

Exemple. *Ainsi, on peut montrer que les applications suivantes ne sont pas linéaires :*

- *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *:* $(x, y) \mapsto (x + 1, 2x + 3y)$ *:*
  Présence du $+1$ *qui est un terme affine et pas linéaire*
  Contre-exemple avec $v = (0, 0), \lambda = 2$ *et* $\mu = 0$ *(du coup pas de* w*) :*
  $2f(0, 0) = 2(1, 0) = (2, 0) \neq f(2.(0, 0)) = f(0, 0) = (1, 0).$
- *de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *:* $(x, y, z) \mapsto (xy, 2z + y)$ *:*
  Présence du produit xy *qui n'est pas linéaire*
  Contre-exemple avec $v = (1, 2, 3)$*,* $w = (4, 5, 6)$ *et* $\lambda = \mu = 1$ *:*
  $f(1, 2, 3) + f(4, 5, 6) = (2, 8) + (20, 17) = (22, 25)$
  alors que $f((1, 2, 3) + (4, 5, 6)) = f(5, 7, 9) = (35, 25)$

Proposition. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E, F)$*, alors*

— *Pour tout* $n \geqslant 1$*,*

$$\forall v_1, \ldots, v_n \in E\,,\ \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\,,\quad f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, f(v_i)\,.$$

— $f(0_E) = 0_F$

— $f(-u) = -f(u) \forall u \in E$

Démonstration. *La preuve se fait par récurrence, elle est laissée en exercice au lecteur (cf vidéo pour les détails).*

3.2 Interprétation matricielle des applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$

3.2.1 Matrice d'une application : images des vecteurs d'une base

Les espaces vectoriels considérés sont tous de dimension finie $\geqslant 1$. Considérons une application linéaire $f : E \to F$ entre deux espaces vectoriels E et F.

Si on choisit une base dans l'espace d'arrivée, alors les images des vecteurs de la base de départ ont des coordonnées dans cette base. S'il y a n vecteurs de base au départ et m à l'arrivée, l'application linéaire est déterminée par une matrice de taille $m \times n$: m coordonnées pour chacun des n vecteurs de la base de départ.

Définition. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire, $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_m)$ une base de F.*
La matrice de l'application f *dans les bases $(b_1, \ldots, b_n)$ et $(c_1, \ldots, c_m)$ est la matrice $A = (a_{i,j})_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}$ où $a_{i,j}$ est la i-ième coordonnée de $f(b_j)$:*

$$\forall j = 1, \ldots, n\ , \quad f(b_j) = a_{1,j}\, c_1 + \cdots + a_{i,j}\, c_i + \cdots + a_{m,j}\, c_m = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\, c_i\ .$$

On utilisera la notation

$$A = Mat_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} f$$

Méthode. *Pour écrire la matrice quand on connait l'application linéaire, on la remplit colonne par colonne :*

1. *On commence par calculer l'image par f du premier vecteur de la base de départ : $f(b_1)$ et on le décompose dans la base d'arrivée (= on écrit ses coordonnées dans la base d'arrivée) : $f(b_1) = a_{1,1}c_1 + a_{2,1}c_2 + \ldots + a_{m,1}c_m$, autrement dit les coordonées de $f(b_1)$ dans la base d'arrivée sont $(a_{1,1}, a_{2,1}, \ldots, a_{m,1})$, on met ce vecteur dans la première colonne de la matrice.*
2. *On procède ainsi pour les autres colonnes : dans la colonne 2 on met les coordonées de $f(b_2)$, etc.*

L'indice i (des vecteurs de la base d'arrivée) est donc l'indice de ligne, et l'indice j (des vecteurs de la base de départ) est l'indice de colonne. On peut résumer la construction de la matrice avec le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc|cc}
 & & \textit{départ} & & & & \\
f(b_1) & \cdots & f(b_j) & \cdots & f(b_n) & & \\
\hline
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} & c_1 & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} & c_i & \textit{arrivée} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} & c_m &
\end{array}$$

La matrice en elle-même est finalement notée ainsi, avec les coefficients entre deux grandes parenthèses :

$$\begin{pmatrix}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n}
\end{pmatrix}$$

Ecriture dans la base canonique. On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la base $(e_1, \cdots, e_n)$ définie par

$$e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0),\ \cdots,\ e_{n-1} = (0, \cdots, 0, 1, 0),\ e_n = (0, \cdots, 0, 0, 1),$$

Le plus souvent, on se ramènera au cas où l'espace de départ est $\mathbb{R}^n$ et l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^m$, les deux étant munis de leurs bases canoniques.

Méthode. *Dans ce cas, la matrice de f est donc formée des colonnes $f(e_1)$, $f(e_2)$, ..., $f(e_n)$ écrites en coordonnées dans la base d'arrivée $(e_1, \ldots, e_m)$.*

Exemple. *Considérons l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$:*

$$f \;:\; \quad (x, y) \longmapsto (x + y, 2x + 3y, x - y)\ .$$

La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $((1, 0), (0, 1))$. L'image de ces deux vecteurs est

$$f((1, 0)) = (1, 2, 1) \quad et \quad f((0, 1)) = (1, 3, -1)\ .$$

La matrice de f est donc la suivante (attention à l'écriture des vecteurs de l'espace d'arrivée en colonnes).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour vérifier la cohérence de la notation matricielle, calculons le produit de cette matrice par un vecteur de $\mathbb{R}^2$ quelconque (x, y).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 2x + 3y \\ x - y \end{pmatrix}$$

On retrouve bien l'expression de f, ce qui valide le calcul de la matrice.

Ecriture dans une base quelconque.

Exemple. *Munissons maintenant $\mathbb{R}^2$ de la base $(b_1 = (1, 1), b_2 = (1, -1))$ au départ, et $\mathbb{R}^3$ de la base $(v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1))$ à l'arrivée. Dans ce cas c'est un peu plus compliqué, car il faut redécomposer les images des vecteurs de base dans la base d'arrivée. Les images des vecteurs de la base de départ sont*

$$\begin{aligned} f(b_1) &= f((1, 1)) = (2, 5, 0) = -3\,(1, 0, 0) + 5\,(1, 1, 0) + 0\,(1, 1, 1) = -3v_1 + 5v_2 + 0v_3 \\ f(b_2) &= f((1, -1)) = (0, -1, 2) = 1\,(1, 0, 0) - 3\,(1, 1, 0) + 2\,(1, 1, 1) = 1v_1 - 3v_2 + 2v_3. \end{aligned}$$

Le vecteur $f(b_1)$ a donc pour coordonnées $(-3, 5, 0)$ dans la base (v_1, v_2, v_3), c'est donc la 1ère colonne. De même pour la deuxième on trouve $(1, -3, 2)$, d'où la matrice :

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.2.2 Vice versa : trouver l'application grâce à la matrice

La proposition suivante nous indique qu'une application linéaire est caractérisée par la connaissance de sa matrice.

Proposition. *Soient E et F deux espaces vectoriels, $(b_1, \ldots, b_n)$ une base de E et $(c_1, \ldots, c_m)$ une base de F. Soit A une matrice de taille $m \times n$. Alors il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ dont la matrice est A.*

Démonstration. *Tout vecteur v de E s'écrit de façon unique sous la forme*

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j \, b_j \ ,$$

où les x_i sont les coordonnées de v dans la base $(b_1, \ldots, b_n)$. Puisque f doit être linéaire, l'image de v ne peut être que

$$f(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j \, f(b_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} c_i \ .$$

Méthode. *Pour écrire l'application linéaire quand on connait la matrice, il suffit simplement de multiplier la matrice à droite par le vecteur des inconnues $(x, y, z...)$ (de la bonne taille : (x, y) si l'ensemble de départ est $\mathbb{R}^2$, (x, y, z) si c'est $\mathbb{R}^3$, etc.). Le résultat obtenu donne exactement l'application linéaire f.*

Exemple. *Considérons la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Elle définit, dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$, une application f. L'espace de départ est ici $\mathbb{R}^3$ (car on a 3 colonnes), on multiplie donc la matrice à droite par le vecteur (x, y, z) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - z \\ 2x + 3y + z \end{pmatrix}$$

L'application linéaire est donc la suivante :

$$f \ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \quad (x, y, z) \longmapsto (x + y - z, 2x + 3y + z) \ .$$

3.2.3 Quelques opérations sur les applications et leurs matrices

Proposition.
— *Si f et g sont dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ et λ et μ sont des réels alors $\lambda f + \mu g$ est une application linéaire et sa matrice est $Mat(\lambda f + \mu g) = \lambda Mat f + \mu Mat g$ dans les mêmes bases.*
— *Si de plus $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ alors $h \circ f$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^m$ et on a $Mat_{\mathcal{B}^b}^{\mathcal{B}^m}(h \circ f) = Mat_{\mathcal{B}^n}^{\mathcal{B}^m} h \times Mat_{\mathcal{B}^p}^{\mathcal{B}^n} f$.*
— *Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme et si l'on munit E d'une base $\mathcal{B}$ et F d'une base $\mathcal{C}$ alors on a $Mat_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (Mat_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} f)^{-1}$ (attention ici : le premier signe "-1" désigne l'application réciproque, le deuxième désigne la matrice inverse).*

3.3 Changement de base et applications linéaires

Théorème. *Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^p$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de $\mathbb{R}^n$. Alors on a la formule de changement de base :*

$$Mat_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'} f = P_{\mathcal{C}'\mathcal{C}} \times Mat_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} f \times P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

Exemple. *On reprend l'application précédente de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *:*

$$f \;:\; (x,y) \longmapsto (x+y, 2x+3y, x-y)$$

Appelons $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{C}$ *les bases canoniques de* $\mathbb{R}^2$ *et* $\mathbb{R}^3$ *et reprenons comme dans l'exemple précédent de nouvelles bases :* $\mathcal{B}'$ *la base* $(b'_1 = (1,1), b'_2 = (1,-1))$ *au départ et* $\mathcal{C}' = (c'_1 = (1,0,0), c'_2 = (1,1,0), c'_3 = (1,1,1))$ *à l'arrivée. Dans les bases canoniques, on a vu précédemment que la matrice de* f *est donnée par*

$$Mat_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour appliquer la formule, calculons les matrices de passage. Comme on connait les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ *et de* $\mathcal{C}'$ *dans les bases* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{C}$*, on a facilement les matrices de passage* $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ *et* $P_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}$*, en écrivant en colonne les vecteurs de* $\mathcal{B}'$ *et* $\mathcal{C}'$ *:*

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad P_{\mathcal{C}\mathcal{C}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour appliquer la formule, il nous faut maintenant calculer $P_{\mathcal{C}'\mathcal{C}}$ *qui est l'inverse de* $P_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}$*. Pour cela on applique la méthode de Gauss Jordan :*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{array}{r} L_1 - L_3 \\ L_2 - L_3 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{r} L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Donc on obtient pour $P_{\mathcal{C}'\mathcal{C}}$ *:*

$$P_{\mathcal{C}'\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut maintenant appliquer la formule :

$$Mat_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'} f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On retrouve bien ce qu'on avait trouvé précédemment.

3.4 Image, noyau et rang d'une application linéaire

Définition. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E,F)$ *où* E *et* F *sont des sev de* $\mathbb{R}^p$ *et* $\mathbb{R}^n$*.*

— *On appelle noyau de f, noté $Kerf$ le sous ensemble de E défini par*

$$Kerf = \{x \in E, f(x) = 0_F\}$$

— *On appelle image de f, noté Imf, le sous ensemble de F défini par*

$$Imf = f(E) = \{y \in F, \exists x \in E, y = f(x)\}$$

Proposition. — *$Kerf$ est un sev de E*

— *Imf est un sev de F*

— *la dimension de Imf s'appelle rang de f, noté $rg(f)$ ou $rang(f)$.*

Démonstration. *La preuve est très similaire à celle qui a été faite pour les matrice, elle repose sur la linéarité de f, cf vidéo pour les détails.*

Théorème (Thm du rang, admis.)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont des sev de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$. Alors*

$$\dim E = \dim Imf + \dim Kerf = rg(f) + \dim Kerf$$