MA202N – Contenu du cours

1

Formules de Taylor et développements limités

Plan du chapitre

1 – Préliminaires

1.1 But

L'intérêt des formules de Taylor (parfois abrégées FT) et des développements limités (DL) est multiple. Le principe consiste à approcher des fonctions "compliquées" par des polynômes, en écrivant

$$f(x) = P(x) + \text{ erreur.}$$

Cela permet par exemple de :

— simplifier certains calculs

— trouver des limites, lever des formes indéterminées

— connaitre le comportement local de certaines fonctions

— etc.

1.2 Notations $o(x)$

Définition. *Soient a un réel, f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant a. On considèrera aussi le cas où l'on se trouve en $+\infty$ ou $-\infty$, et dans ce cas on demande que I ait pour borne $\pm\infty$. On dit que la fonction f est* négligeable *devant la fonction g en x_0 (avec x_0 valant a ou $+\infty$ ou $-\infty$) s'il existe :*

— *un voisinage V de x_0 (si $x_0 = a$ on aura V du type $V =]a-\eta; a+\eta[$ avec $\eta > 0$, si $x_0 = -\infty$ on aura $V =]-\infty; M[$ avec $M \in \mathbb{R}$ et si $x_0 = +\infty$ on aura $V =]M; +\infty[$ avec $M \in \mathbb{R}$)*

— *une fonction ε définie sur V et telle que :*

  — $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$

  — $f(x) = \varepsilon(x)g(x), \forall x \in V$

On note alors $f(x) = o(g(x))$, qui se lit "$f(x)$ est un petit o de $g(x)$" (au voisinage de x_0).

Remarque. *Avec les mêmes notations, on suppose que la fonction g ne s'annule pas pour $x \neq x_0$. Alors f est* négligeable *devant g au voisinage de x_0 si et seulement si le quotient f/g tend vers 0 :*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Exemple. — $\ln(x) = o(\frac{1}{x})$ *au voisinage de* 0

— $x^2 = o(e^x)$ *au voisinage de* $+\infty$

— $\sqrt{x} = o(1)$ *au voisinage de* 0.

2 – Développements limités et formules de Taylor

2.1 Généralités

Définition. *Soient I un intervalle ouvert, a un point de I et n un entier. On dit que f* admet un développement limité d'ordre n en a *lorsqu'il existe un polynôme P_n de degré au plus n tel que le reste $f(x) - P_n(x)$ soit négligeable devant $(x-a)^n$.*

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = o((x-a)^n) \ .$$

Le polynome P_n s'écrit par exemple :

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots + b_n(x-a)^n$$

où les b_i sont des coefficients réels. On écrira ainsi :

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Remarque. *On peut noter que l'équation de la tangente en a, bien connue depuis le lycée, est justement le développement limité à l'ordre 1. Dans ce cas on a même une expression plus précise des coefficients b_0 et b_1 :*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$$

On verra que les formules de Taylor et les développements limités permettent de généraliser cette formule aux ordres supérieurs.

Nous nous ramènerons toujours à des développements limités au voisinage de 0, grâce à l'observation suivante.

Proposition. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, a un point de I et n un entier. Soit f une fonction définie sur I. Soit g la fonction qui à h associe $g(h) = f(a+h)$. La fonction f admet un développement limité d'ordre n en a, si et seulement si g admet un développement limité d'ordre n en 0.*

$$f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n) \iff g(h) = f(a+h) = P_n(a+h) + o(h^n) \ .$$

Remarque. *Si l'on souhaite faire un développement limité au voisinage de l'infini (appelé parfois* développement asymptotique*), on cherchera à écrire f sous la forme*

$$f(x) = b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots + \frac{b_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

On se ramènera là aussi en zéro en posant $h = \frac{1}{x}$.

2.1.1 Unicité, parité

Un développement limité, s'il existe, est unique au sens suivant.

Proposition. *Soient I un intervalle ouvert contenant 0, et n un entier. Soit f une fonction définie sur I. Supposons qu'il existe deux polynômes P_n et Q_n de degré au plus n tels que au voisinage de 0 :*

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad f(x) = Q_n(x) + o(x^n)\ .$$

Alors $P_n = Q_n$.

Proposition. *Grâce aux formules de Taylor qui suivent, on démontre que si f est de classe $\mathcal{C}^n$ (n fois dérivable, et dérivée n-ème continue) au voisinage de x_0, alors f admet un développement limité (DL) à l'ordre n.*

Grâce à l'unicité du DL, on peut montrer le résultat suivant :

Proposition. *Soit f une fonction admettant un DL en zéro. On a les résultats suivants :*

— *Si f est paire, alors son développement limité ne comporte que les termes de degré pair :*
$$f(x) = b_0 + b_2x^2 + b_4x^4 \ldots + b_{2n}x^{2n} + o\left(x^{2n}\right)$$

— *Si f est impaire, alors son développement limité ne comporte que les termes de degré impair :*
$$f(x) = b_1x + b_3x^3 + b_5x^5 \ldots + b_{2n+1}x^{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

Démonstration. *La preuve est laissée en exercice. Elle repose sur les définitions de la parité ($f(-x) = f(x)$) et de l'imparité ($f(-x) = -f(x)$), combinées avec l'unicité du développement limité.*

2.2 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème. *Soit n un entier et f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I et a, x deux réels de I, alors :*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &+ \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\ . \end{aligned}$$

Démonstration. *Par récurrence.*

Pour $n = 0$, la formule est le théorème fondamental de l'Analyse :

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Supposons la formule vraie au rang $n-1$, avec $n \geq 1$. Pour la prouver au rang n, posons :

$$I_n = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t\ ,$$

et intégrons par parties en posant

$$u'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad u(x) = -\frac{(x-t)^n}{n!}$$

$$v(t) = f^{(n)}(t), \quad v'(t) = f^{(n+1)}(t)$$

ce qui donne

$$I_n = \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\right]_a^x - \int_a^x -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$I_n = -\frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

ce qui permet d'obtenir la formule au rang n et qui conclut la preuve.

2.3 Formule de Taylor Lagrange

Théorème. *Soit n un entier et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I, a et x deux réels de I. Alors il existe un réel c situé entre a et x (autrement dit $c \in [a, x]$ ou bien $c \in [x, a]$ selon la position relative de a et de x) tel que :*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \\ &\quad + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c). \end{aligned}$$

NB : c dépend de a et de x... Si a ou x changent, c change aussi.

Démonstration. *La preuve est laissée en exercice. On pourra utiliser la deuxième formule de la moyenne :*

Si f et g sont continues sur $[a, b]$, et g est de signe constant, alors il existe c dans $[a, b]$ tel que

$$\int_a^x f(t)g(t)\,dt = f(c) \int_a^x g(t)\,dt.$$

Corollaire (Inégalité de Taylor Lagrange)**.** *Soit n un entier et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$. Soit M un majorant de $|f^{(n)}|$ sur $[a, b]$. Alors on a l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned} &|f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}| \\ &\leq M \frac{(b-a)^n}{n!}. \end{aligned}$$

2.4 Formule de Taylor Young

Cette formule va nous permettre de démontrer la plupart des développements limités usuels.

Théorème. *Soit f de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I. Alors f admet un développement limité au voisinage de tout point a de I :*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2} + \ldots + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + o((x-a)^n)$$

Démonstration. *Pour la preuve, on va utiliser la formule de Taylor Lagrange (FTL). Il nous faut démontrer que $A(x) = o((x-a)^n)$, où $A(x)$ est défini par :*

$$A(x) = f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) - (x-a)^2\frac{f''(a)}{2} - \ldots - (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Pour montrer que $A(x)$ est un petit o de $(x-a)^n$, on va montrer que leur quotient tend vers 0. Pour cela, on commence par appliquer la FTL sur l'intervalle $[a,x]$: il existe c_x (noté ainsi car c dépend de x puisqu'il se trouve dans l'intervalle $[a,x]$, autrement dit c change quand x change) avec $c_x \in [a,x]$ tel que

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2} + \ldots + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}$$

On remplace cette formule pour $f(x)$ dans la formule pour $A(x)$, on simplifie plein de termes et il nous reste finalement

$$A(x) = (x-a)^n\frac{f^{(n)}(c_x)}{n!} - (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{(x-a)^n}{n!}\left(f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)\right)$$

Ensuite il nous suffit de remarquer que quand x tend vers a, c_x tend vers a aussi, donc par continuité de la fonction $f^{(n)}$ (car f est de classe $\mathcal{C}^n$) on a que $f^{(n)}(c_x)$ tend vers $f^{(n)}(a)$, autrement dit :

$$\frac{A(x)}{(x-a)^n} = \frac{1}{n!}(f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)) \quad \to 0$$

ce qui montre justement que

$$A(x) = o((x-a)^n)$$

et qui conclut donc la preuve.

2.5 Exemples et DL usuels

Exemple. *A titre d'exemple, on considère la fonction*

$$f(x) = \sin(x) + \frac{1}{1+x}$$

et on écrit les trois formules de Taylor pour cette fonction, à l'ordre 3, au voisinage de 0.

Cet exemple est laissé en exercice au lecteur, avec les indications d'étapes suivantes :

1. *Commencer par écrire les trois formules de manière générale pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^3$, au point 0, depuis le point x : $f(x) = f(0) + xf'(0) + \ldots$ (à compléter).*
2. *Calculer les dérivées successivces de f jusqu'à l'ordre 3. On pourra écrire $f = u + v$ avec $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \frac{1}{1+x}$.*
3. *En déduire les valeurs en 0 : $f(0); f'(0), f''(0), f^{(3)}(0)$.*

4. *Remplacer tout le nécessaire dans les formules de la première question.*

Exemple. *Les exemples suivants sont à connaitre par coeur !*
Soit n un entier, α un réel.

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\ .$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})\ .$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})\ .$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\, x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\, x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n + o(x^n)\ .$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)\ .$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)\ .$$

Les démonstrations seront traitées en exercice.

3 – Opérations sur les développements limités

3.1 Manipulation des petits o

Proposition (Propriétées des o en zéro)**.** *Soient n et m deux entiers positifs ou nuls.*

1. *Si $n < m$, alors $x^m = o(x^n)$ au voisinage de 0.*
2. *Somme de petits o : $o(x^m) + o(x^n) = o(x^p)$, où $p = \min(n,m)$, autrement dit si $n \leq m$, alors $o(x^m) + o(x^n) = o(x^n)$.*
3. *Produit de petits o : $o(x^n) \times o(x^m) = o(x^{n+m})$.*
4. *Produit par une constante réelle $k \in \mathbb{R}$: $k \times o(x^n) = o(x^n)$*
5. *Produit par des puissances de x : $x^n \times o(x^m) = o(x^{n+m})$*

Démonstration. *Pour la preuve on revient à chaque fois à la définition, et le plus souvent possible on utilise la remarque avec la limite du quotient.*

1. *Si $n < m$ alors $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ avec $m - n >$ donc ça tend vers 0 en zéro, ce qui donne bien $x^m = o(x^n)$.*
2. *Soient f et g deux fonctions quelconques telles que $f = o(x^n)$ et $g = o(x^m)$ avec $n \leq m$. Alors on sait que $\frac{f}{x^n} \to 0$ et $\frac{g}{x^m} \to 0$. Pour montrer le résultat, on calcule la limite de $(f+g)(x)$ divisé par x^n :*

$$\frac{(f+g)(x)}{x^n} = \frac{f(x)}{x^n} + \frac{g(x)}{x^n} = \frac{f(x)}{x^n} + \frac{g(x)}{x^m}\frac{x^m}{x^n}$$

Et là on peut conclure : $\frac{f(x)}{x^n} \to 0$, $\frac{g(x)}{x^m} \to 0$ et $\frac{x^m}{x^n} \leq 1$ donc $\frac{(f+g)(x)}{x^n} \to 0$ ce qui donne le résultat.

3. *De la même manière, on se donne f et g avec $f = o(x^n)$ et $g = o(x^m)$. Alors*
$$\frac{(fg)(x)}{x^{n+m}} = \frac{f(x)}{x^n}\frac{g(x)}{x^m}$$
tend bien vers 0 en 0.
4. *Les deux derniers items sont assez similaires au précédent et sont laissés en exercice au lecteur.*

Exemples. *On illustre chaque propriété :*

1. $x = o(1)$; *pour tout* $k > 0$ $x^k = o(1)$; $x^2 = o(x)$; *pour tout* $k > 1$ $x^k = o(x)$; $x^3 = o(x^2)$; *etc.*
2. $o(1) + o(x^2) = o(1)$; $o(x) + o(x^3) = o(x)$; $o(x^2) + o(x^3) = o(x^2)$; *etc.*
3. $o(x^2)o(x) = o(x^3)$; $o(x^2)o(x^2) = o(x^4)$; $o(x)o(x^n) = o(x^{n+1})$; *etc.*
4. $3o(x) = o(x)$; $-2o(x^2) = o(x^2)$; *etc.*
5. $xo(x) = o(x^2)$; $x^2o(x^3) = o(x^5)$; $xo(x^n) = o(x^{n+1})$; $x^n o(x) = o(x^{n+1})$; *etc.*

3.2 Corollaires : opérations sur les DL

Les propriétés de manip des o permettent très facilement de démontrer les résultats suivants. Dans toute la suite, on se donne f et g deux fonctions admettant des DL à l'ordre n et m respectivement.

3.2.1 Somme

Proposition. *Alors $f + g$ admet un DL à l'ordre $\min(n, m)$ obtenu en ajoutant les DL de f et de g.*

Exemple.

1. $f(x) = 1+2x-x^3+o(x^3)$, $g(x) = 2-3x+x^2+o(x^2)$, *alors* $(f+g)(x) = 3 - x + x^2 + o(x^2)$
2. $f(x) = 1+x+x^2+x^3+2x^4+o(x^5)$, $g(x) = -1-x-x^2+o(x^2)$, *alors* $(f+g)(x) = o(x^2)$

3.2.2 Produit

Proposition. *Alors fg admet un DL à l'ordre au moins $\min(n, m)$.*

Remarque. *L'ordre peut parfois être supérieur à ce minimum, lorsque les premiers termes des DL sont nuls (voir les exemples). Pour trouver quel est l'ordre, il est recommandé de faire le produit au brouillon et de repérer quel sera le petit o qui va rester.*

Exemple.

1. $f(x) = 1 + 2x - x^3 + o(x^3)$, $g(x) = 2 - 3x + x^2 + o(x^2)$, *alors* $(fg)(x) = 2 + x - 5x^2 + o(x^2)$
2. $f(x) = x + 2x^2 - x^3 + o(x^3)$, $g(x) = 2 - 3x + x^2 + o(x^2)$, *alors* $(fg)(x) = 2x + x^2 - 7x^3 + o(x^3)$

3.2.3 Composition

Proposition. *Si f admet un DL à l'ordre n en x_0, si le terme constant de ce DL vaut a_0 et si g admet un DL à l'ordre n en a_0, alors $g \circ f$ admet un DL à l'ordre n en x_0 obtenu en développant la composée des DL de f et g.*

Exemple.

1. *DL de $\exp(\sin(x))$ à l'ordre 4 en 0 : $g(x) = \exp(x)$, $f(x) = \sin(x)$. Alors $\sin(x) = x - x^3/6 + o(x^4)$, de terme constant 0. ensuite :*

$$\exp(X) = 1 + X + X^2/2 + X^3/6 + X^4/24 + o(X^4)$$

on remplace X par

$$X = x - x^3/6 + o(x^4)$$

pour obtenir

$$\begin{aligned}\exp(\sin(x)) &= 1 + (x - x^3/6 + o(x^4)) + (x - x^3/6 + o(x^4))^2 \\ &\quad +(x - x^3/6 + o(x^4))^3/6 + (x - x^3/6 + o(x^4))^4/24 + o(x^4)\end{aligned}$$

on développe en ne gardant que les termes d'ordre inférieur ou égal à 4 et on obtient

$$\exp(\sin(x)) = 1 + x + x^2/2 - x^4/8 + o(x^4)$$

2. *DL de $\exp(\cos(x))$ à l'ordre 4 en 0 : $\cos(x) = 1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)$ terme constant 1, et autour de 1 on a $\exp(1 + h) = \exp(1).\exp(h)$ donc on se ramène au DL en zéro avec le nombre $\exp(1)$ en facteur devant :*

$$\exp(\cos(x)) = \exp(1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)) = \exp(1).\exp(-x^2/2 + x^4/24 + o(x^4))$$

on fait le DL comme précédemment, en utilisant le DL de $\exp(X)$ et en posant $X = -x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)$:

$$\begin{aligned}\exp(\cos(x)) &= \exp(1).\exp(-x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)) \\ &= \exp(1)(1 + (-x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)) \\ &\quad +(-x^2/2 + x^4/24 + o(x^4))^2/2)\end{aligned}$$

On peut remarquer ici que comme le premier terme qui reste du cosinus dans X est en x^2, quand on met ça à la puissance 3 ça fera x^6 et ça dépasse l'ordre 4, on peut donc s'arrêter à la puissance 2 dans le DL d'exponentielle. On continue donc le calcul :

$$\exp(\cos(x)) = \exp(1)(1 + -x^2/2 + x^4/24 + o(x^4) + x^4/8)$$

on trouve finalement

$$\exp(\cos(x)) = \exp(1)(1 - x^2/2 + x^4/6 + o(x^4)) = e - x^2e/2 + x^4e/6 + o(x^4)$$

3.2.4 Inverse

C'est un cas particulier de composition, en utilisant la fonction inverse à la place de la fonction $g(x)$.

Proposition. *On suppose que $f(x_0) \neq 0$. Alors $\frac{1}{f}$ admet un DL en x_0 à l'ordre n. La partie régulière du DL (le polynôme) peut s'obtenir par composition grâce au DL de la fonction $\frac{1}{1+u}$.*

Exemple. *DL à l'ordre 4 en 0 de $\frac{1}{\cos(x)}$.*

$$\cos(x) = 1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)$$

Dans la suite on posera $u = -x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)$ et on utilise le DL de $\frac{1}{1+u}$:

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o(u^4)$$

Comme précédemment, on voit que u^3 ne contient que des termes de degré strictement plus grand que 4, donc on peut s'arrêter à u^2 dans le DL. Finalement on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(x)} &= 1 - (-x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)) + (-x^2/2 + x^4/24 + o(x^4))^2 \\
&= 1 + x^2/2 - x^4/24 + x^4/4 + o(x^4) \\
&= 1 + x^2/2 + 5x^4/24 + o(x^4)
\end{aligned}$$

3.2.5 Intégration

Proposition. *Si f est continue et admet un DL au voisinage de x_0 à l'ordre n et si F est une primitive de f, alors F admet un DL en x_0 à l'ordre $n+1$, obtenu en intégrant celui de f.*

Remarque. *Ce résultat nécessite une propriété supplémentaire des petits o, à savoir que l'intégration d'un petit o donne un petit o de degré un de plus. On admettra ce résultat ici.*

Exemple. *Cet exemple fait partie des DL à savoir par coeur :*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

obtenu en intégrant entre 0 et x le DL de sa dérivée :

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n + o(t^n)$$

3.3 Illustration : le DL de tangente

A titre d'exemples et d'entrainement, on vous propose de calculer le DL de la fonction tangente de plusieurs manières différentes.

Le résultat obtenu est le suivant :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

Comme la fonction tangente est impaire, on sait que le terme de degré 6 est nul, son DL à l'ordre 6 est donc identique :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

Les paragraphes suivants donnent juste des indications sans fournir tous les détails.

3.3.1 Quotient de DL : inverse puis produit

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

On écrit les DL de sin et cos à l'ordre 5 :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5), \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

Ensuite on calcule le DL de $\frac{1}{\cos(x)}$ à l'ordre 5, comme cela a été fait dans un exemple précédent :

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 + x^2/2 + 5x^4/24 + o(x^5)$$

et on multiplie les deux DL en ne gardant que les termes d'ordre inférieurs ou égal à 5 :

$$\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

3.3.2 Avec des formules de trigo pour l'angle double

$$\tan(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)}$$

Là aussi il s'agit d'un quotient. Par contre il y a une petite difficulté supplémentaire : si on part avec des DL à l'ordre 5 au début :

$$1 - \cos(2x) = 2x^2 - \frac{2x^4}{3} + o(x^5) \quad \text{et} \quad \sin(2x) = 2x - \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + o(x^5)\ .$$

En faisant le quotient on voit qu'on peut simplifier par x en haut et en bas. Par contre, attention, quand on fait cela ça simplifie aussi un x dans le petit o qui devient donc $o(x^4)$ au lieu de $o(x^5)$:

$$\frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^4)}{2 - \frac{4x^2}{3} + \frac{4x^4}{15} + o(x^4)}\ .$$

Pour que ça marche bien, il faut donc démarrer avec des DL à l'ordre 6 :

$$1 - \cos(2x) = 2x^2 - \frac{2x^4}{3} + \frac{4x^6}{45} + o(x^6) \quad \text{et} \quad \sin(2x) = 2x - \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + o(x^6)\ .$$

Et là après simplification par x on est bien à l'ordre 5 :

$$\frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{45} + o(x^5)}{1 - \frac{2x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + o(x^5)} \ .$$

Comme précédemment, on calcule donc à part l'inverse :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\left(\frac{2x^2}{3} - \frac{2x^4}{15} + o(x^5)\right)} &= 1 + \left(\frac{2x^2}{3} - \frac{2x^4}{15}\right) + \left(\frac{2x^2}{3}\right)^2 + o(x^5) \\
&= 1 + \frac{2x^2}{3} + \frac{14x^4}{45} + o(x^5) \ ,
\end{aligned}$$

puis on fait le produit :

$$\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{45} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{2x^2}{3} + \frac{14x^4}{45} + o(x^5)\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \ .$$

3.3.3 Avec la formule liant $\tan^2$ et $\cos^2$

$$\tan^2(x) = -1 + \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Pour ce cas là on se trouve face au même écueil qu'au précédent, à savoir qu'on perd 1 pour l'ordre, dans le cours des calculs. Il nous faut donc partir à l'ordre 6 au départ. On indique ici simplement les étapes du calcul :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6) \ ,$$

$$\begin{aligned}
\cos^2(x) &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{2x^6}{45} + o(x^6) \ , \\
\frac{1}{\cos^2(x)} &= 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + o(x^6) \ , \\
-1 + \frac{1}{\cos^2(x)} &= x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + o(x^6) \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{-1 + \frac{1}{\cos^2(x)}} &= \sqrt{x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + o(x^6)} \\
&= x\sqrt{1 + \left(\frac{2x^2}{3} + \frac{17x^4}{45} + o(x^4)\right)} \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \ .
\end{aligned}$$

Attention ici : la transformation $\sqrt{x^2}$ en x n'est pas automatique : on trouve normalement $|x|$, mais il se trouve qu'ici ça marche aussi pour $x < 0$, car la fonction tan est impaire, ce qui permet d'avoir cette formule.

3.3.4 Avec la formule pour la dérivée impliquant $\cos$

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

On va écrire le DL de $1/\cos^2$ puis intégrer, donc on peut démarrer à l'ordre 4 (l'intégration nous fera gagner un ordre), même si ici techniquement ça ne change rien pour le cosinus :

$$\cos^2(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)\ .$$

Comme précédemment on considère que c'est $\frac{1}{1-u}$, avec $u = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) + \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)^2 + o(x^4) = 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)\ .$$

On intègre le DL, en utilisant le fait que le terme constant est nul car $\tan(0) = 0$:

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\ .$$

3.3.5 Avec la formule de la dérivée impliquant $\tan^2$

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$$

On peut voir ça comme une équation dont l'inconnue est le développement limité cherché (ou plutôt ses coefficients). Comme la fonction tangente est impaire, on peut montrer que les coefficients de degré pair sont nuls, donc le DL cherché est de la forme $a\,x + b\,x^3 + c\,x^5 + o(x^5)$, où a, b et c sont des réels inconnus. On calcule d'abord le terme de droite :

$$1 + \tan^2(x) = 1 + \left(a\,x + b\,x^3 + c\,x^5 + o(x^5)\right)^2 = 1 + a\,x^2 + 2ab\,x^4 + o(x^4)\ .$$

Le terme de gauche quant à lui vaut

$$\tan'(x) = (a\,x + b\,x^3 + c\,x^5 + o(x^5))' = a + 3b\,x^2 + 5c\,x^4 + o(x^4)$$

On identifie :

$$\begin{cases} a &= 1 \\ 3b &= a \\ 5c &= 2ab\ . \end{cases}$$

Et on trouve $a = 1$, $b = 1/3$ et $c = 2/15$.

3.3.6 Avec la dérivée de $\ln$ de $\cos$

$$\tan(x) = -\big(\ln(\cos)\big)'(x)$$

Comme à la fin on dérivera la fonction $\ln(\cos)$, on a besoin de démarrer à l'ordre 6. On va faire une composée de DL, en écrivant le DL de $\cos$, celui de $\ln(1+u)$ et en définissant u :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6) \quad \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$$

Ici l'ordre 3 suffit pour le DL du ln car on va poser

$$u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$$

de sorte que $o(u^3) = o(x^6)$. Les calculs donnent :

$$\begin{aligned}
\ln(\cos(x)) &= \ln\left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)\right)\right) \\
&= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3 + o(x^6) \\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6)\ .
\end{aligned}$$

L'opposé de la dérivée donne bien :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\ .$$

3.3.7 Avec la réciproque $\arctan(x)$

On connait la formule

$$\tan(\arctan(x)) = x$$

Nous connaissons le développement de arctan d'ordre 5 (car sa dérivée est $\frac{1}{1+x^2}$) :

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\ .$$

Soit $\tan(x) = a\,x + b\,x^3 + c\,x^5 + o(x^5)$ le développement cherché. Alors :

$$\begin{aligned}
\tan(\arctan(x)) &= a\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right) + b\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^3 + c\big(\,x\,\big)^5 + o(x^5) \\
&= a\,x + (-a/3 + b)\,x^3 + (a/5 - b + c)\,x^5 + o(x^5)\ .
\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on doit avoir :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ -a/3 + b & = & 0 \\ a/5 - b + c & = & 0\ . \end{array}\right.$$

On obtient encore : $a = 1$, $b = 1/3$ et $c = 2/15$.

4 – Utilisation des développements limités

4.1 Calcul de certaines limites

Pour calculer la limite, on n'a besoin a priori que du DL à l'ordre 0, en $o(1)$. Face à une forme indéterminée, en général l'ordre 0 ne suffit pas, car il y a des simplifications qui se font, donc il est souvent nécessaire d'aller plus loin (ordre 3 ou parfois plus). Le choix du "bon" ordre pour trouver la limite (pas trop grand pour éviter les lourds calculs et assez grand pour que la limite soit déterminée) n'est pas évident et s'acquiert par la pratique, après essais et erreurs.

Exemple. *On propose de calculer à l'aide des DL la limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \tan(x)}{x^3}$$

On peut déjà remarquer que c'est bien une forme indéterminée en zéro, puisque si on remplace x par 0 on trouve $0/0$. Comme il y a une division par x^3, ça semble une bonne idée d'écrire les DL à l'ordre 3 pour commencer.

$$\sin(x) = x - x^3/6 + o(x^3), \qquad \tan(x) = x + x^3/3 + o(x^3)$$

On remplace tout ça dans la fraction :

$$\frac{\sin(x) - \tan(x)}{x^3} = \frac{x - x^3/6 - (x + x^3/3) + o(x^3)}{x^3}$$

Les x s'en vont, pour les x^3 il reste $-1/6 - 1/3 = -1/2$, on trouve donc

$$\frac{\sin(x) - \tan(x)}{x^3} = \frac{-x^3/2 + o(x^3)}{x^3} = \frac{-x^3/2}{x^3} + \frac{o(x^3)}{x^3}$$

Pour simplifier les petits o on utilise leurs propriétés pour voir que $o(x^3)/x^3 = o(1)$, ce qui donne :

$$\frac{\sin(x) - \tan(x)}{x^3} = -\frac{1}{2} + o(1)$$

La limite vaut donc $-1/2$.

4.2 Etude locale d'une courbe

On étudie la courbe de la fonction f, autrement dit la courbe d'équation $y = f(x)$. On se place au voisinage de x_0, on suppose que f admet un DL à l'ordre 2 :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0^2))$$

On peut déjà remarquer que $a_0 = f(x_0)$ et que l'équation de la tangente est donnée par le DL à l'ordre 1 : $y = a_0 + a_1(x - x_0)$ (et on a bien sûr $a_1 = f'(x_0)$).

On va voir que les termes suivants du DL permettent de nous renseigner sur la position locale de la courbe par rapport à sa tangente. Pour cela on soustrait le DL de f et l'équation de la tangente et on étudie le signe : s'il est positif, la courbe est au-dessus, s'il est négatif elle est au-dessous. On va distinguer deux cas

Cas 1 : $a_2 \neq 0$. Alors on peut écrire

$$f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0)) = a_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0^2)) = (x - x_0)^2(a_2 + o(1))$$

autour de x_0, $f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0))$ est donc du signe de a_2 : si $a_2 > 0$ la courbe est au-dessus de sa tangente ; sinon elle est au-dessous.

Cas 2 : $a_2 = 0$. Alors on n'a pas assez d'info pour conclure, car la soustraction entre f et l'équation de la tangent donne simplement $o((x-x_0)^2)$ qui peut être positif ou négatif. Il nous faut donc pousser le DL plus loin. On suppose donc qu'on peut écrire le DL à l'ordre 3, avec $a_3 \neq 0$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_3(x-x_0)^3 + o((x-x_0^3))$$

Dans ce cas si on soustrait la tangente, on trouve

$$f(x) - (a_0 + a_1(x-x_0)) = a_3(x-x_0)^3 + o((x-x_0^3)) = (x-x_0)^3(a_3 + o(1))$$

Cette fois, le signe est celui de $a_3(x-x_0)$, il change donc en x_0 : la courbe "traverse" la tangente en x_0. Si $a_3 > 0$ la courbe est au-dessus à droite de x_0 et au-dessous à gauche, et si $a_3 < 0$ c'est l'inverse.

Si jamais $a_3 = 0$ aussi, alors on pousse le DL jusqu'à trouver un coefficient non nul. Si le coeff est d'ordre pair, on aura le même genre de raisonnement qu'au cas 1 ; s'il est d'ordre impair, ça sera comme le cas 2.

Exemple. *On admet que l'on a trouvé les DL des quatre fonctions suivantes :*

1. $f(x) = 1 - 2x + 3x^2 + o(x^2)$
2. $g(x) = 2 - x - x^3 + o(x^3)$
3. $h(x) = 3 + x - x^4 + o(x^4)$
4. $j(x) = 4 + 2x + x^5 + o(x^5)$

On cherche d'abord l'équation des tangentes en zéro pour chaque fonction, il s'agit du DL à l'ordre 1 :

1. *pour* f : $y_f = 1 - 2x$
2. *pour* g : $y_g = 2 - x$
3. *pour* h : $y_h = 3 + x$
4. *pour* j : $y_j = 4 + 2x$

Ensuite on soustrait ça aux fonctions et on étudie le signe pour avoir la position par rapport à la tangente en zéro :

1. $f(x) - y_y = 3x^2 + o(x^2)$, *toujours positif, la courbe est au-dessus*
2. $g(x) - y_g = -x^3 + o(x^3)$, *négatif à droite de zéro : la courbe est au-dessous ; à gauche de zéro c'est l'inverse, positif, donc la courbe est au-dessus*
3. $h(x) - y_h = -x^4 + o(x^4)$, *toujours négatif, la courbe est au-dessous de sa tangente*
4. $j(x) - y_j = x^5 + o(x^5)$, *change de signe, la courbe est au-dessus de la tangente à droite de zéro et au-dessous à gauche.*

4.3 Recherche d'asymptote

Si au voisinage de l'infini on a

$$f(x) = a_0 x + a_1 + \frac{a_2}{x} + o(\frac{1}{x})$$

alors f admet une asymptote d'équation $y = a_0 x + a_1$. Si $a_2 \neq 0$, la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de a_2.

Exemple.
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 3}$$
Pour faire un développement asymptotique, on met en facteur le terme dominant, ici x^2 :
$$f(x) = \sqrt{x^2(1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2})} = x\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}}$$
car $\sqrt{x^2} = |x| = x$ au voisinage de $+\infty$.

Quand x tend vers l'infini, les quotients en x et x^2 tendent vers 0, on pourra donc se ramener à un DL si on pose $h = \frac{1}{x}$. On remplace donc $\frac{1}{x}$ par h et on calcule le DL :
$$\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}} = \sqrt{1 - 3h + 3h^2}$$
A la fin on voudra un développement de f qui se termine avec $o(\frac{1}{x})$, et comme on aura une multiplication par le x qui est sorti de la racine, il nous faut un DL à l'ordre 2 en h. On calcule :
$$\sqrt{1 - 3h + 3h^2} = (1 - 3h + 3h^2)^{1/2} = (1 + u)^{1/2}, \text{ avec } u = -3h + 3h^2$$
On rappelle le DL de $(1 + u)^{1/2}$:
$$(1 + u)^{1/2} = 1 + (1/2)u + (1/2)(-1/2)u^{2/2} + o(u^2)$$
On remplace :
$$\sqrt{1 - 3h + 3h^2} = 1 + (1/2)(-3h + 3h^2) - (1/8)(-3h + 3h^2)^2 + o(h^2)$$
$$\sqrt{1 - 3h + 3h^2} = 1 - (3/2)h + (3/2)h^2 - (9/8)h^2 + o(h^2) = 1 - (3/2)h + (3/8)h^2 + o(h^2)$$
On revient à f :
$$f(x) = x(1 - \frac{3}{2x} + \frac{3}{8x^2} + o(\frac{1}{x^2})) = x - \frac{3}{2} + \frac{3}{8x} + o(\frac{1}{x})$$
L'équation de l'asymptote est donc $y = x - 3/2$, et si on soustrait f et cette équation on obtient $\frac{3}{8x} + o(\frac{1}{x})$ qui est toujours positif, donc f est au-dessus de son asymptote.

Autres types d'asymptotes. On pourra aussi rencontrer des cas où l'asymptote n'est pas une droite mais une parabole, auquel cas le développement limité de f en l'infini sera du type :
$$f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2 + \frac{a_3}{x} + o(\frac{1}{x})$$
Dans ce cas, la parabole asymptote a pour équation $y = a_0x^2 + a_1x + a_2$, et la position relative avec la courbe est donné par le signe de a_3.

Exemple. *Par exemple, la fonction*
$$f(x) = (1 + x)\sqrt{1 + x^2}$$
admet en $+\infty$ comme asymptote la parabole d'équation $y = x^2 + x + \frac{1}{2}$, on peut la calculer en effectuant le développement limité de f au voisinage de $+\infty$:
$$f(x) = x^2 + x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$
Vous êtes encouragé·es à faire le calcul par vous-même.

2

Intégration : calculs d'intégrales

Plan du chapitre

1 – Utilisation directe de primitives

La toute première étape face à une intégrale est de regarder si l'on reconnait une primitive, et dans ce cas de l'intégrer directement, avec la formule :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

si F est une primitive de la fonction f.

Exemple.

$$I = \int_0^1 (x^2+2x)e^{x^3+3x^2}\,dx$$

Si on pose $u(x) = \exp(x^3+3x^2)$ *alors on obtient*

$$u'(x) = (3x^2+6x)e^{x^3+3x^2} = 3(x^2+2x)e^{x^3+3x^2}$$

Ainsi, on reconnait donc $u'(x)$ *dans* I *et on peut intégrer directement :*

$$I = \int_0^1 \frac{1}{3}u'(x)\,dx = \left[\frac{1}{3}u(x)\right]_0^1 = \left[\frac{1}{3}e^{x^3+3x^2}\right]_0^1 = \frac{e^4-1}{3}$$

2 – Intégration par parties

On rappelle que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, cela signifie que f est dérivable et que sa dérivée f' est continue.

Proposition. *Soient* u *et* v *deux fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[a,b]$*, alors*

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$$

Démonstration. *Il suffit d'intégrer la formule de dérivation d'un produit :*

$$[uv]_a^b = \int_a^b (uv)' = \int_a^b u'v + uv'$$

Remarque. *Quand on est face à une intégration par parties et qu'on se demande quelle fonction dériver, une astuce permet de mémoriser la marche à suivre, il s'agit de l'astuce ALPES :*

— *A : arctan*

— *L : ln*

— *P : polynome*

— *E : exponentielle*

— *S : sinus/cosinus*

La stratégie consiste alors à observer la fonction que l'on a sous les yeux et à poser pour v (la fonction qu'on va dériver) la première fonction présente en suivant l'ordre de la liste. Autrement dit, s'il y a arctan, *on pose* $v = \arctan$ *et* $u' =$ *le reste, s'il n'y en a pas on regarde s'il y a un* ln *et dans ce cas on pose* $v = \ln$ *et* $u' =$ *le reste, s'il n'y en a pas on regarde s'il y a un polynome, on pose* $v =$ *le polynome, etc.*

Exemple.

1. *Intégrale d'un polynome et d'une exponentielle*
   La méthode consiste à dériver le polynome (pour faire baisser son degré, donc au bout d'un certain nombre d'intégrations, arriver à une constante) et à intégrer l'expontentielle, qui reste une exponentielle. On considère par exemple $\int_0^1 (2x+3)e^x\,dx$. *On pose*
$$u(x) = 2x+3, \quad u'(x) = 2; \qquad v'(x) = e^x, \quad v(x) = e^x$$
   On obtient donc
$$\int_0^1 (2x+3)e^x\,dx = [(2x+3)e^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x\,dx = [(2x+3)e^x - 2e^x]_0^1 = 3e - 1$$

2. *Intégrale d'un polynome et d'un log*
   Cette fois on va dériver le log (pour le faire disparaitre) et intégrer le polynome. Par exemple, on va intégrer $\int_1^e (x^3+1)\ln(x)\,dx$. *On pose donc*
$$u(x) = \ln(x), \quad u'(x) = \frac{1}{x}; \qquad v'(x) = x^3+1, \quad v(x) = \frac{x^4}{4} + x$$
   On obtient donc :
$$\begin{array}{rcl} \int_1^e (x^3+1)\ln(x)\,dx &=& [\ln(x)(\frac{x^4}{4}+x)]_1^e - \int_1^e (\frac{x^4}{4}+x)\frac{1}{x}\,dx \\ &=& (\frac{e^4}{4}+e) - \int_1^e \frac{x^3}{4} + 1\,dx \\ &=& (\frac{e^4}{4}+e) - [\frac{x^4}{16}+x]_1^e \\ &=& (\frac{e^4}{4}+e) - (\frac{e^4}{16}+e-\frac{1}{16}-1) = \frac{3e^4}{16} + \frac{17}{16} \end{array}$$

3 – Changement de variables

Proposition. *Soit* f *de classe* $\mathcal{C}^0$ *sur* $[a,b]$ *et* φ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[\alpha,\beta]$ *et telle que* $\varphi([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$. *Alors :*
$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

Démonstration. *Soit* F *une primitve de* f *sur* $[a,b]$. *Comme* $[a,b]$ *contient* $\varphi([\alpha,\beta])$, $F\circ\varphi$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[\alpha,\beta]$ *et on a la formule de dérivation*
$$(F\circ\varphi)' = (F'\circ\varphi)\times\varphi' = (f\circ\varphi)\times\varphi'$$
Ainsi, on peut calculer
$$\begin{array}{rcl} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt &=& \int_\alpha^\beta (F\circ\varphi)'(t)\,dt \\ &=& [F\circ\varphi]_\alpha^\beta \\ &=& F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &=& [F]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \\ &=& \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx \end{array}$$

Exemple. *Calculons* $J = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$. *On propose de faire le changement de variable suivant :*

$$x = \varphi(t) = \sin(t)$$

On déroule toutes les vérifications et les calculs préliminaires nécessaires avant de pouvoir appliquer la formule de changement de variable :

— $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ *est continue sur* $[0,1]$

— *pour* $x = 1$, $t = \frac{\pi}{2}$, *pour* $x = 0$, $t = 0$, *on choisit donc* $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}$

— $\varphi = \sin$ *est bien* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *et* $\sin([0, \frac{\pi}{2}]) = [0,1]$

— *on calcule* $\varphi'(t) = \cos(t)$

On écrit parfois la dernière étape sous la forme

$$x = \sin(t), \qquad \textit{donc } dx = \cos(t)\,dt$$

On peut donc appliquer la formule de changement de variable :

$$\begin{array}{rcl} J & = & \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)}(\sin t)'\,dt \\ & = & \int_0^{\pi/2} \cos t \cos t\,dt \\ & = & \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt \\ & = & \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+\cos(2t))\,dt \\ & = & \frac{1}{2}[t + \frac{\sin(2t)}{2}]_0^{\pi/2} \\ & = & \frac{\pi}{4} \end{array}$$

où on a utilisé plusieurs formules de trigo :

$$\sin^2 + \cos^2 = 1, \quad \cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$$

4 – Intégrale d'une fonction rationnelle

Définition. *On dit que* f *est une fonction rationnelle lorsque* f *est le quotient de deux polynomes à coefficients réels (ou complexes).*

On rappelle que la toute première méthode d'intégration consiste à essayer de reconnaitre directement une formule de primitive, ou bien à deviner un changement de variable (si ça marche c'est tjs beaucoup plus simple que la méthode générale pour les fractions...).

Exemple.

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+2}\,dx = [\ln|x^2+x+2|]_0^1 = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2$$

car on a reconnu la fraction $\frac{u'}{u}$ *(avec* $u = x^2+x+2$*) qui s'intègre donc en* $\ln|u|$.

Dans cette partie, on présente un algorithme qui permet de trouver la primitive d'une fraction rationnelle

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

où P et Q sont des polynômes. Dans toute cette partie, on va prendre comme exemple la fraction rationnelle :

$$f(x) = \frac{x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 24}{(x^2+2)(x-2)^2} = \frac{P}{Q}.$$

4.1 Étape 1

- Si $\deg(P) < \deg(Q)$, on passe à l'étape 2.
- Si $\deg(P) \geq \deg(Q)$, on fait la **division Euclidienne** de P par Q.

Si $\deg(P) \geq \deg(Q)$, on peut se ramener au cas $\deg(P) < \deg(Q)$ grâce au résultat admis suivant.

Théorème (Division Euclidienne des polynômes)**.** *Pour tous polynomes P et Q avec $Q \neq 0$, il existe un unique couple de polynomes M et R tels que*

$$P = MQ + R, \qquad \deg(R) < \deg(Q).$$

Dans ce cas, on peut alors écrire

$$\frac{P}{Q} = M + \frac{R}{Q}, \text{ avec } d(R) < d(Q)$$

et on est donc ramené au cas précédent.

Evidemment, il faut quand même être capable de calculer M et R. On va faire cela par division euclidienne de polynome. Ça marche comme pour la division entière classique, sauf que les monomes x^k jouent le rôle des puissances 10^k des nombres en base 10. On va voir ça sur un exemple.

Exemple. *On considère la fraction*

$$f(x) = \frac{x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 24}{(x^2+2)(x-2)^2} = \frac{P}{Q}$$

Pour pouvoir effectuer la division, on a besoin de développer le dénominateur :

$$\frac{P}{Q} = \frac{x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 24}{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 8}$$

Ensuite on pose la division (voir la vidéo pour le commentaire oral) :

$$\begin{array}{l|l}
\overbrace{1x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 24}^{\text{P}} & \overbrace{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 8}^{\text{Q}} \\
\hline
-(x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 8x) & \underbrace{x + 2}_{\text{M (quotient)}} \\
0 + 2x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 14x + 24 & \\
\quad -(2x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 16x + 16) & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underbrace{2x + 8}_{\text{R (reste)}} &
\end{array}$$

Et on trouve finalement

$$f(x) = x + 2 + \frac{2x+8}{(x^2+2)(x-2)^2}.$$

4.2 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$

La méthode générale d'intégration des fractions consiste à réécrire f sous une forme qu'on sait intégrer, on appelle cela la *décomposition en éléments simples*.

Définition. *On appelle élément simple :*

— *de première espèce toute fonction rationnelle de la forme*

$$x \mapsto \frac{A}{(x-x_1)^\alpha}$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^*, A \in \mathbb{R}, x_1 \in \mathbb{R}$,

— *de seconde espèce toute fonction rationnelle de la forme*

$$x \mapsto \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^\beta}$$

où $\beta \in \mathbb{N}^*, B, C, b, c \in \mathbb{R}, b^2-4c<0$

Pour une fraction $f = \frac{P}{Q}$ on a deux cas, selon que le degré de P est plus petit que celui de Q ou pas.

4.2.1 Premier cas : $d(P) < d(Q)$

Proposition. — *Q se factorise dans $\mathbb{R}$ sous la forme*

$$Q(x) = K(x-x_1)^{\alpha_1} \dots (x-x_p)^{\alpha_p}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1} \dots (x^2+b_qx+c_q)^{\beta_q}$$

avec : $\forall i \neq j, x_i \neq x_j$, $\forall k \neq l, (b_l, c_l) \neq (b_k, c_k)$ et $b_l^2 - 4c_l < 0$ (autrement dit les morceaux d'ordre 2 ne se factorisent pas dans $\mathbb{R}$)

— *il existe des constantes A_{ij}, B_{kl}, C_{kl} telles que*

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_{11}}{(x-x_1)^1} + \dots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{A_{p1}}{(x-x_p)^1} + \dots + \frac{A_{p\alpha_p}}{(x-x_p)^{\alpha_p}} \\ & + \frac{B_{11}x+C_{11}}{(x^2+b_1x+c_1)^1} + \dots + \frac{B_{1\beta_1}x+C_{1\beta_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}} + \dots + \frac{B_{q1}x+C_{q1}}{(x^2+b_qx+c_q)^1} \\ & + \dots + \frac{B_{q\beta_q}x+C_{q\beta_q}}{(x^2+b_qx+c_q)^{\beta_q}} \end{aligned}$$

A retenir : pour chaque racine on somme tous les éléments de première espèce jusqu'à la multiplicité α_i et pour chaque élément de deuxième espèce on les somme tous jusqu'à la multiplicité β_i.

La difficulté va être ensuite de calculer les coefficients inconnus A_{ij}, B_{kl}, C_{kl}. L'idée va être de multiplier par le morceau concerné de multiplicité maximale $(x-x_i)^{\alpha_i}$ ou $(x^2+b_kx+c_k)^{\alpha_k}$, éventuellement de dériver un certain nombre de fois, et de calculer l'expression en un x judicieusement choisi de manière à faire disparaitre un maximum de termes. Pour les élements de première espèce, l'idée est de calculer les coefficients associés à chaque élément et de commencer par le coefficient associé à la plus grande puissance, et d'y aller en décroissant. Avec les notations de la proposition, ça donnerait donc de calculer :

— $A_{1\alpha_1}$: multiplier par $(x-x_1)^{\alpha_1}$ puis évaluer l'égalité obtenue en x_1

— $A_{1\alpha_1-1}$: multiplier par $(x-x_1)^{\alpha_1}$, dériver une fois, puis évaluer l'égalité obtenue en x_1 (attention, on ne dérive que le morceau correspondant à P/Q, car tous les autres vont disparaitre, cf exemples)

— ...

— A_{12} : multiplier par $(x-x_1)^{\alpha_1}$, dériver α_1-2 fois, puis évaluer l'égalité obtenue en x_1

— A_{11} : : multiplier par $(x-x_1)^{\alpha_1}$, dériver α_1-2 fois, puis évaluer l'égalité obtenue en x_1.

— idem pour les autres : $A_{2\alpha_2}$, puis $A_{2\alpha_2-1}$, ... puis A_{22} puis A_{21} en dernier.

Pour les élements de deuxième espèce, soit on procède pareil dans $\mathbb{C}$, soit on calcule des valeurs particulières et des limites, pour obtenir des équations qui permettent de déteminer les B_{kl}, C_{kl}. On va voir ça dans des exemples.

Exemple. *On considère la fraction*

$$g(x) = \frac{x+4}{(x^2+2)(x-2)^2}$$

La proposition nous dit qu'elle admet une décomposition sous la forme

$$g(x) = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

Pour trouver A_1, A_2, B et C on procède comme suit. On peut soit commencer par les A_i soit par les B et C, c'est égal. Disons qu'ici on commence avec les A_i : on commence par le morceau de degré le plus élevé (c'est toujours le plus efficace), c'est-à-dire A_2. Pour trouver A_2, on multiplie toute l'égalité par son dénominateur, qui est $(x-2)^2$:

$$g(x)(x-2)^2 = \frac{A_1(x-2)^2}{x-2} + \frac{A_2(x-2)^2}{(x-2)^2} + \frac{(Bx+C)(x-2)^2}{x^2+2}$$

On remplace g par son expression :

$$\frac{(x+4)(x-2)^2}{(x^2+2)(x-2)^2} = A_1(x-2) + A_2 + \frac{(Bx+C)(x-2)^2}{x^2+2}$$

et on simplifie tout ça :

$$\frac{x+4}{(x^2+2)} = A_1(x-2) + A_2 + \frac{(Bx+C)(x-2)^2}{x^2+2}$$

et là on peut remarquer que si on choisit x de manière à annuler le morceau par lequel on vient de multiplier, à savoir $x=2$ pour annuler $(x-2)^2$, tout disparait presque sauf le bout associé à g et A_2 :

$$x = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2+4}{(2^2+2)} = 0 + A_2 + 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_2 = \frac{6}{6} = 1$$

Pour A_1 on fait la même chose (sauf que cette fois on sait que $A_2 = 1$), on multiplie par $(x-2)^2$, et cette fois on va dériver une fois avant d'évaluer l'égalité en $x = 2$:

$$g(x)(x-2)^2 = \frac{A_1(x-2)^2}{x-2} + \frac{(x-2)^2}{(x-2)^2} + \frac{(Bx+C)(x-2)^2}{x^2+2}$$

On simplifie d'abord :

$$\frac{x+4}{(x^2+2)} = A_1(x-2) + 1 + \frac{(Bx+C)}{x^2+2}(x-2)^2$$

On dérive, en prenant soin de gérer la fraction en $Bx + C$ comme un produit uv où $v = (x-2)^2$ afin de ne pas perdre de vue que ça va s'annuler en $x = 2$ (en gros, le seul morceau qui va rester sera g, donc on ne dérive que g et on ne dérive surtout pas les autres fractions) :

$$\frac{x^2+2-2x(x+4)}{(x^2+2)^2} = A_1 + \left(\frac{(Bx+C)}{x^2+2}\right)'(x-2)^2 + \frac{(Bx+C)}{x^2+2}.2(x-2)$$

On remplace à nouveau x par 2 :

$$\frac{2^2+2-2.2(2+4)}{(2^2+2)^2} = A_1 + 0 + 0 \Leftrightarrow A_1 = -\frac{18}{36} = -\frac{1}{2}$$

A ce stade, on a donc déjà trouvé A_1 et A_2 :

$$g(x) = \frac{x+4}{(x^2+2)(x-2)^2} = \frac{-1}{2(x-2)} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

Pour calculer B et C on va tester les différentes astuces possibles : choisir de bonnes valeurs et calculer des limites en l'infini.

— *Choisir une "bonne valeur" : là on peut voir que si on prend $x = 0$ on n'aura plus que C comme inconnue :*

$$g(0) = \frac{0+4}{(0^2+2)(0-2)^2} = \frac{-1}{2(0-2)} + \frac{1}{(0-2)^2} + \frac{0+C}{0^2+2}$$

ce qui nous donne ici $C = 0$

— *Limite en $+\infty$: si on regarde le morceau $\frac{Bx+C}{x^2+2}$, on voit qu'il est équivalent à B/x, donc sa limite en $+\infty$ sera 0, ce qui n'est pas très utile comme information pour trouver B. Par contre, on remarque que si on multiplie ce morceau par x, alors la limite devient B. L'idée est donc de multiplier g par x :*

$$g(x)x = \frac{(x+4)x}{(x^2+2)(x-2)^2} = \frac{-x}{2(x-2)} + \frac{x}{(x-2)^2} + \frac{Bx^2}{x^2+2}$$

et de faire tendre x vers l'infini dans cette égalité :

$$0 = \frac{-1}{2} + 0 + B$$

ce qui nous donne $B = 1/2$.

Finalement, on a décomposé g :

$$g(x) = \frac{x+4}{(x^2+2)(x-2)^2} = \frac{-1}{2(x-2)} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{x}{2(x^2+2)}$$

On peut donc calculer une primitive G de g, par exemple sur l'intervalle $]2, +\infty[$:

$$G(x) = \int \frac{x+4}{(x^2+2)(x-2)^2} = \frac{-1}{2}\ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{4}\ln|x^2+2|$$

4.2.2 Deuxième cas : $d(P) \geq d(Q)$

On peut se ramener au cas précédent grâce au résultat admis :

Théorème. *Pour tous polynomes P et Q tels que $d(P) \geq d(Q)$, alors il existe un unique couple de polynomes M et R tels que*

$$P = MQ + R, \qquad d(R) < d(Q)$$

Dans ce cas, on peut alors écrire

$$\frac{P}{Q} = M + \frac{R}{Q}, \text{ avec } d(R) < d(Q)$$

et on est donc ramené au cas précédent. Evidemment, il faut quand même être capable de calculer M et R. On va faire cela par division euclidienne de polynome. Ça marche comme pour la division entière classique, sauf que les monomes x^k jouent le rôle des puissances 10^k des nombres en base 10. On va voir ça sur un exemple.

Exemple. *On considère la fraction*

$$f(x) = \frac{x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 24}{(x^2+2)(x-2)^2} = \frac{P}{Q}$$

Pour pouvoir effectuer la division, on a besoin de développer le dénominateur :

$$\frac{P}{Q} = \frac{x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 24}{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 8}$$

Ensuite on pose la division (voir la vidéo pour le commentaire oral) :

$$\begin{array}{l|l}
\overbrace{1x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 24}^{P} & \overbrace{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 8}^{Q} \\
\hline
-(x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 8x) & \underbrace{x + 2}_{\text{M (quotient)}} \\
0 + 2x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 14x + 24 & \\
-(2x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 16x + 16) & \\
\underbrace{2x + 8}_{\text{R (reste)}} &
\end{array}$$

Et on trouve finalement

$$f(x) = x + 2 + \frac{2x+8}{(x^2+2)(x-2)^2} = x + 2 + 2\frac{x+4}{(x^2+2)(x-2)^2} = x + 2 + 2g(x)$$

En utilisant ce que l'on a trouvé précédemment pour $g(x)$, on calcule une primitive F de f sur $]2, +\infty[$:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{2}\ln|x^2+2|$$

4.3 Intégration des éléments de 1è et 2è espèces

4.3.1 Première espèce

Les éléments de première espèces sont donc du type

$$\frac{A}{(x-a)^n}$$

On reconnait des fractions du type

$$\frac{u'}{u^n}$$

avec $u = x - a$, et on a donc pour l'intégration

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} = \int \frac{Au'}{u^n} = \int Au'u^{-n} = \frac{Au^{-n+1}}{-n+1} = \frac{A}{(1-n)}\frac{1}{u^{n-1}} = \frac{A}{(1-n)}\frac{1}{(x-a)^{n-1}}$$

4.3.2 Deuxième espèce

Cas général. Pour le cas général, on se retrouve à calculer ce genre de primitives :

$$\int \frac{Bt+C}{(t^2+bt+c)^n}\,dt$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $b^2 - 4c < 0$ (autrement dit le dénominateur ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$). La méthode dans ce cas consiste à couper la fraction en deux morceaux, l'un qui sera de la forme u'/u^n et l'autre qui sera de la forme d/u^n :

$$\frac{Bt+C}{(t^2+bt+c)^n} = \frac{B}{2}\frac{2t+b}{(t^2+bt+c)^n} + \frac{C-Bb/2}{(t^2+bt+c)^n}$$

Intégration du premier morceau. Il est de la forme constante $\times u'/u^n$ car on a bien pris soin de faire apparaite $2t+b$ qui est justement la dérivée de t^2+bt+c, on peut donc intégrer en $u^{-n+1}/(-n+1)$:

$$\int \frac{2t+b}{(t^2+bt+c)^n}\,dt = \int \frac{u'}{u^n} = \int u'u^{-n} = \frac{u^{-n+1}}{-n+1} = \frac{(t^2+bt+c)^{-n+1}}{-n+1}$$

ce qui se réécrit encore

$$\int \frac{2t+b}{(t^2+bt+c)^n}\,dt = \frac{(t^2+bt+c)^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{(1-n)}\frac{1}{(t^2+bt+c)^{n-1}}$$

Intégration du deuxième morceau. Il est de la forme constante fois $1/u^n$ où u est un polynome de degre 2 irréductible dans $\mathbb{R}$, il nous faut donc savoir intégrer

$$\int \frac{1}{(t^2+bt+c)^n}\,dt$$

Il y a plusieurs étapes :

1. On commence par un changement de variable pour se ramener à l'intégrale suivante :

$$\int \frac{1}{(u^2+1)^n}\, du$$

Pour cela, on met le trinome sous forme canonique :

$$t^2+bt+c = (t+\frac{b}{2})^2 - \frac{b^2}{4} + c = (t+\frac{b}{2})^2 + \frac{4c-b^2}{4}$$

avec $4c-b^2>0$, on peut donc factoriser :

$$t^2+bt+c = \frac{4c-b^2}{4}(\frac{4}{4c-b^2}(t+\frac{b}{2})^2+1)$$

à une constante près on est donc ramené au calcul de primitive suivant

$$\int \frac{1}{((\sqrt{\frac{4}{4c-b^2}}(t+\frac{b}{2}))^2+1)^n}$$

pour lequel on fait le changement de variable $u = \sqrt{\frac{4}{4c-b^2}}(t+\frac{b}{2})$, ce qui donne finalement la primitive suivante à calculer

$$\int \frac{1}{(u^2+1)^n}$$

Evidemment, ici il ne s'agit en aucun cas de retenir la formule par coeur, mais juste de retenir le cheminement, la méthode !

2. Ensuite il y a deux cas :
   — Si $n=1$, c'est terminé, car on sait qu'une primitive de $\frac{1}{u^2+1}$ est $\arctan x$
   — Si $n>1$, on fait le changement de variable :

   $$u = \tan v, \quad du = \frac{dv}{\cos^2 v}$$

   on est donc amené à calculer la primitive

   $$\int \frac{1}{\tan^2 v+1}\frac{1}{\cos^2 v}\, dv = \int (\cos v)^{2n-2}\, dv$$

   que l'on pourra calculer soit par linéarisation, soit par récurrence (à voir en TD).

Exemple. *On considère la fraction*

$$\begin{aligned} f(t) = \frac{t+1}{t^2+4t+8} &= \frac{1}{2}\frac{2t+4}{t^2+4t+8} - \frac{1}{t^2+4t+8} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2t+4}{t^2+4t+8} - \frac{1}{(t+2)^2+4} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2t+4}{t^2+4t+8} - \frac{1}{4}\frac{1}{(t/2+1)^2+1} \end{aligned}$$

Le premier morceau s'intègre facilement car on reconnait u'/u qui s'intègre en $\ln|u|$:

$$\int^x \frac{1}{2}\frac{2t+4}{t^2+4t+8} = \frac{1}{2}\ln|t^2+4t+8|$$

Pour le deuxième on fait le changement de variable $u = t/2+1$, $du = dt/2$, quand t vaut x alors u vaut $x/2+1$, ce qui donne

$$\int^x \frac{1}{4}\frac{1}{(t/2+1)^2+1}\,dt = \frac{1}{4}\int^{x/2+1}\frac{2du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\arctan(\frac{x}{2}+1)$$

Finalement, on trouve pour la primitive de f la fonction F :

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln|t^2+4t+8| - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}+1\right)$$

4.4 Rappel des étapes pour le calcul de la primitive d'une fraction

Voic l'ordre dans lequel travailler pour intégrer une fraction de type $\frac{P}{Q}$:

1. Si $d^oP \geq d^oQ$ alors on commence par faire la division euclidienne de P par Q, cf section 4.2.2. Sinon on passe directement à l'étape 2. Après division, on obtient ainsi $P = M + \frac{R}{Q}$ avec $d^oR < d^oQ$
2. Une fois que l'on a $\frac{P}{Q}$ ou $\frac{R}{Q}$ avec les bons degrés, on factorise Q au maximum dans $\mathbb{R}$.
3. Grâce à la factorisation de Q, on en déduit la décomposition de $\frac{P}{Q}$ ou $\frac{R}{Q}$ avec la proposition de la section 4.2.1.
4. On intègre chaque élément simple :
   (a) On commence par vérifier s'il n'y a pas des primitives évidentes. On pensera par exemple à tout ce qui ressemble à $\frac{f'}{f}$ (qui s'intègre en $\ln(|f|)$), ou à $\frac{1}{1+x^2}$ (qui s'intègre en $\arctan(x)$).
   (b) On intègre un par un chaque élément simple, en suivant la méthode de la section 4.3.
5. On remet tous les éléments ensemble pour calculer la primitive de $\frac{P}{Q}$ (on oublie pas le morceau en M si jamais on a effectué une division euclidienne).

4.5 Application aux fonctions rationnelles en $\sin$ et $\cos$

Ces fonctions s'intègrent en faisant un changement de variable pour se ramener à une primitive de fraction. On suppose que la fonction f s'écrit :

$$f(x) = \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)}\,dx$$

où P et Q sont des polynomes. Alors on a les règles suivantes pour décider du "bon" changement de variable :

— si "$f(x)dx$" est invariant par le changement $x \mapsto -x$, autrement dit si $f(-x) = -f(x)$, alors on posera $t = \cos x$;

— si "$f(x)dx$" est invariant par le changement $x \mapsto \pi - x$, autrement dit si $f(\pi - x) = -f(x)$, alors on posera $t = \sin x$;

— si "$f(x)dx$" est invariant par le changement $x \mapsto \pi + x$, autrement dit si $f(\pi + x) = f(x)$, alors on posera $t = \tan x$;

— sinon, on posera $t = \tan \frac{x}{2}$.

Le tout dernier changement marche à tout les coups. En effet, si on pose $t = \tan \frac{x}{2}$, alors on a :

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

Après le changement de variable, on est ramené à calculer la primitive d'une fraction en t, cf paragraphes précédents. Ne pas oublier à la toute fin de revenir à x...