MA202 – Test – Développements limités

20 points – durée 1h30,
documents et calculatrices sont interdits.

06/03/2020

Exercice 1 **($2 \times 4 = 8$ points)** *Donner le développement limité au voisinage de 0 des fonctions suivantes à l'ordre 3:*

1. $f_1(x) = \cos x + x^4 + x$;
2. $f_2(x) = e^x \sqrt{1+x^2}$;
3. $f_3(x) = \ln(\ln(1+x) + 1)$;
4. $f_4(x) = \frac{1}{2+x+x^2}$.

Exercice 2 **($2 \times 2 = 4$ points)** *Donner le développement limité au voisinage de 1 des fonctions suivantes à l'ordre 3:*

1. $g_1(x) = \ln(x)$;
2. $g_2(x) = x^2 + \sin(x^2 - 2x + 1)$.

Exercice 3 **($3 + 2 + 1 = 6$ points)** *On considère la fonction*

$$f(x) = e^x \ln(x^2+1) + \frac{1}{\cos(x) + \sin(x) - x}.$$

1. *Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $f(x)$;*
2. *Donner l'équation de la tangente au graphe de f en 0;*
3. *Donner la position du graphe de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0.*

Exercice 4 (la technique de Feynman, 2 points) *Le physicien célèbre Richard Feynman a fait une compétition dans un restaurant avec un japonais qui était fort en calculant avec l'abaque. Sans papier et stylo, Feynman a gagné dans la question de calculer une valeur approchée de $\sqrt[3]{1729.03}$.*

Calculer la valeur approchée de $\sqrt[3]{1729.03}$ à 0.01 (par exemple, $\frac{1}{3} \approx 0.33$, $e \approx 2.72$ et $\pi \approx 3.14$) en utilisant le développement limité de la fonction

$$f(x) = \sqrt[3]{1+x}$$

et le fait que $12^3 = 1728$.

Test - Développements limités 06/03/2020

exo 1.

Pf: (1) $f_1(x) = \cos x + x^4 + x$

$= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) + x^4 + x$ 1 pt

$= 1 - \frac{x^2}{2} + \cancel{o(x^3)} + x + o(x^3)$ 2 pts

(2) $f_2(x) = e^x \sqrt{1+x^2}$

$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)$ 1 pt

$= 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$ 2 pts

~~(3) f3(x) = ln(ln(1+x)+1)~~

(3) $f_3(x) = \ln(\ln(1+x)+1)$

$= \ln\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) + 1\right)$

$= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)^2$

$+ \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)^3 + o(x^3)$ 1 pt

$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\left(x^2 - x^3 + o(x^3)\right)$

$+ \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

$= x - x^2 + \frac{7}{6}x^3 + o(x^3)$ 2 pts

(4) $f_4(x) = \frac{1}{2 + x + x^2}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x+x^2}{2}}$ 1 pt

$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x+x^2}{2} + \left(\frac{x+x^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x+x^2}{2}\right)^3 + o(x^3)\right)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + o(x^3)$

$- \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{16}x^3$ 2 pts

exo 2.

Pf: (1) $g_1(x) = \ln x$

$= \ln(x - 1 + 1)$ 1 pt

$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$

2 pts

(2) $g_2(x) = x^2 + \sin(x^2 - 2x + 1)$

$= (x-1)^2 + 2(x-1) + 1$

$+ \sin\left((x-1)^2\right)$ 1 pt

$= (x-1)^2 + 2(x-1) + 1$

$+ (x-1)^2 + o((x-1)^3)$

$= 1 + 2(x-1) + 2(x-1)^2 + o((x-1)^3)$

2 pts

exo. 3.

Pf: (1) $f(x) = e^x \ln(x^2+1) + \frac{1}{\cos x + \sin x - x}$

$e^x \ln(x^2+1)$

$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(x^2 + o(x^3)\right)$

$= x^2 + x^3 + o(x^3)$ 1 pt

$\frac{1}{\cos x + \sin x - x}$

$= \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{6} - x + o(x^3)}$

$= \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$

$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ 2 pts

Alors,

$$f(x) = 1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{6}x^3 + o(x^3)$$ 3 pts

(2) Sa tangente est
$y = 1$. 2 pts

(3) $f(x) - y = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \geq 0$
quand $x \to 0$, alors
$f(x)$ est au-dessus
de sa tangente au
voisinage de 0. 1 pt

exo. 4.

Pf: $\sqrt[3]{1729.03}$

$= \sqrt[3]{1728 + 1.03}$

$= 12 \times \sqrt[3]{1 + \frac{1.03}{1728}}$ 1 pt

Pour $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, on
a $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$.

Alors.

$\sqrt[3]{1729.03} \approx 12 \times \left(1 + \frac{1}{3} \times \frac{1.03}{1728}\right)$

$= 12 + 4 \times \frac{1.03}{1728}$

≈ 12.00 $\left(4 \times \frac{1.03}{1728} < 0.005\right)$

2 pts